

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

E. A. Умнов, A. E. Умнов

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ
ЗАДАЧИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ
ПРОГРАММИРОВАНИИ**

Учебное пособие

МОСКВА
МФТИ
Верс. 08июл2025г.

УДК 519.8(075)

ББК 22.18я73

У54

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор кафедры компьютерных систем автоматизации производства ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» *Е. Н. Хоботов*

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических основ управления МФТИ *А. Г. Бирюков*

Умнов, Е. А., Умнов, А. Е.

У54 Параметрические задачи в математическом программировании: учебное пособие / Е. А. Умнов, А. Е. Умнов. – М.: МФТИ, 2025. – 341 с.

ISBN 978-5-7417-0669-5

В пособии рассмотрены как теоретические вопросы параметрического программирования, так и разнообразные, иллюстрирующие эту теорию задачи, решение которых, по мнению авторов, может быть полезным в процессе изучения материала, излагаемого в пособии.

При этом предполагается знакомство читателя с основами математического анализа и линейной алгебры в объеме общеинститутских программ МФТИ для студентов 1 курса.

УДК 519.8(075)

ББК 22.18я73

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Московского физико-технического института (государственного университета)

ISBN 978-5-7417-0669-5

© Умнов Е. А., Умнов А. Е., 2018—2025

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2018—2025

Оглавление

Введение	5
Глава 1. О параметрических задачах и методах их решения	6
Глава 2. Метод штрафных функций	12
§ 2.1. Описание метода штрафных функций	12
§ 2.2. Примеры и классификация штрафных функций	17
§ 2.3. Обоснование метода штрафных функций	22
Глава 3. Гладкие штрафные функции	30
§ 3.1. Свойства гладких штрафных функций	30
§ 3.2. Сглаживающее свойство штрафных функций	40
§ 3.3. Линейная экстраполяция в методе штрафных функций ..	54
§ 3.4. Метод штрафных функций и множители Лагранжа ..	67
Глава 4. Функции обратных связей в задачах линейного программирования	79
§ 4.1. Описание метода обратных связей для задач линейного программирования	79
§ 4.2. Обоснование метода функций обратных связей для задач линейного программирования	87
§ 4.3. Метод обратных связей в нерегулярных линейных задачах ..	113
§ 4.4. Другие виды функций обратных связей	136
Глава 5. Функции обратных связей в задачах нелинейного программирования	167
§ 5.1. Функции обратных связей для нелинейных задач	167
§ 5.2. Использование метода обратных связей в нелинейных параметрических задачах	199

§ 5.3. Последовательная линейная экстраполяция в методе функций обратных связей	215
Глава 6. Задачи, сводящиеся к оптимизации по параметрам	237
§ 6.1. Параметрическая линеаризация в задачах математического программирования	237
§ 6.2. Задачи для комплекса математических моделей	256
§ 6.3. Задачи для многокритериальных моделей	272
§ 6.4. Методы сглаживания в минимаксных задачах	304
Приложения	322
§ 7.1. Численное решение задачи 1.1.2	322
§ 7.2. Численное решение задач 6.2.1 и 6.2.2	326
§ 7.3. Численное решение задачи 6.3.6	332
§ 7.4. Численное решение задачи 6.1.19	341
Литература	345

Введение

Пособие является факультативным продолжением специального курса «Методы математического моделирования», подготовленного авторами для студентов 2 курса факультета аэрофизики и космических исследований МФТИ.

В пособии рассмотрены как вопросы теории параметрического программирования, так и разнообразные демонстрационные задачи, которые могут, по мнению авторов, оказаться полезными в процессе изучения теоретической части курса.

Для успешного освоения материала, излагаемого в пособии, необходимо знание математического анализа и линейной алгебры в объёме общеинститутских программ МФТИ для студентов 1 курса, а также знакомство с базовыми понятиями теории математического и линейного программирования.

Существенной особенностью настоящего пособия является высоко оцениваемое авторами участие в его подготовке большого числа студентов МФТИ, слушавших данный курс в период, начиная с 2002/03 учебного года, и продемонстрировавших не только высокий уровень освоения теоретической составляющей материала, но и выполнивших большое число заданий по программированию, реализации алгоритмов и решению тестовых задач, приведенных в пособии.

Авторы также выражают особую благодарность доценту кафедры математических основ управления МФТИ А. Г. Бирюкову, который не только тщательно просмотрел рукопись, но и дал большое число советов и рекомендаций, способствовавших улучшению пособия.

Глава 1. О параметрических задачах и методах их решения

Параметрической принято называть задачу, поставленную для некоторой математической модели, формализованная запись условия которой, помимо обычных подлежащих вычислению *неизвестных*, содержит величины, которые считаются известными, но могут иметь различные значения. Эти величины в дальнейшем (для краткости) будем называть *параметрами*.

Наличие параметров в постановке фактически превращает одну задачу в набор (или множество) задач, имеющих формально различные условия. При этом иногда удается построить алгоритм, который позволяет находить их решения единообразно для различных значений параметров, содержащихся в условии.

В общем же случае наличие параметров в условиях задач приводит к усложнению алгоритма решения (например, из-за «ветвлений» алгоритма), то есть метод решения задачи может зависеть от значения параметров, что, однако, часто оказывается оправданным увеличением объема полезной информации, получаемой в процессе моделирования.

Параметры в математической модели могут использоваться для различных целей. Рассмотрим основные из них.

Первый и наиболее простой случай предполагает, что значения параметров фиксированы и принадлежат заданным заранее числовым множествам. Для краткости в дальнейшем такие параметры мы будем называть *экзогенными*. При этом требуется, как правило, найти решение рассматриваемой задачи для всех возможных комбинаций значений параметров. Приведем простой пример такой задачи из курса элементарной математики. Обратите внимание, что метод ее решения оказывается зависящим от значений параметров.

Задача Для каждого возможного набора вещественных значений
1.1.1 параметров a , b и c найти все вещественные решения
уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Решение. Решение данной параметрической задачи очевидно:

- если $a = 0$, то
 - при $b = c = 0$ число решений уравнения неограниченно и решением является любое вещественное число;
 - при $b = 0$ и $c \neq 0$ решений нет;
 - при $b \neq 0$ $\forall c$ решение одно $x = -\frac{c}{b}$;
- если $a \neq 0$, то
 - при $b^2 - 4ac < 0$ вещественных решений нет;
 - при $b^2 - 4ac = 0$ решение одно $x = -\frac{b}{2a}$;
 - при $b^2 - 4ac > 0$ вещественных решений два:

Решение
получено.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

При использовании экзогенных параметров часто возникает важный для практики случай так называемых *многоуровневых* задач, являющихся по сути системами двух (или более) обычных задач, условие одной из которых формулируется с использованием решений других.

Проиллюстрируем этот случай следующим примером.

Задача Найти максимум по ν_1 и ν_2 для
1.1.2

$$\Phi(\nu_1, \nu_2) = 2\xi_1^*(\nu_1, \nu_2) + 3\xi_2^*(\nu_1, \nu_2)$$

при условиях: $0 \leq \nu_1 \leq 17$ и $\frac{1}{4} \leq \nu_2 \leq 3$,

где $\xi_1^*(\nu_1, \nu_2)$ и $\xi_2^*(\nu_1, \nu_2)$ суть решения задачи параметрического линейного программирования:

максимизировать $2\xi_1 + 3\xi_2$ по ξ_1 и ξ_2 для фиксированных значений параметров ν_1 и ν_2

при условиях: $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$,

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 &\leq \nu_1, \\ 2\xi_1 + \nu_2\xi_2 &\leq 17 - \nu_1. \end{aligned}$$

Решение. В дальнейшем (для краткости) задачу оптимизации по параметрам ν_1 и ν_2 будем называть задачей *верхнего уровня*, а задачу оптимизации по ξ_1 и ξ_2 при фиксированных значениях параметров ν_1 и ν_2 – задачей *нижнего уровня*.

Задачи нижнего уровня легко решаются (например, графически) для любых значений параметров (их численные решения можно найти в приложении, § 7.1). Графическая кусочно-линейная аппроксимация зависимости $\Phi(\nu_1, \nu_2)$ показана на рис. 1.1.

Из анализа этих данных следует¹, что решение задачи верхнего уровня определяется условиями:

при $\xi_1^* \geq 0$ и $\xi_2^* \geq 0$ максимизировать $\Phi(\nu_1)$, если $\nu_2^* = \frac{1}{4}$ и

$$\begin{cases} \xi_1^* + 2\xi_2^* = \nu_1, \\ 2\xi_1^* + \frac{1}{4}\xi_2^* = 17 - \nu_1. \end{cases}$$

Решение Непосредственный расчет приводит к следующим результатам: $\nu_1^* = 15\frac{1}{9}$, $\nu_2^* = \frac{1}{4}$, $\xi_1^* = 0$, $\xi_2^* = 7\frac{5}{9}$, при получено. которых значение целевой функции $\Phi(\nu_1^*, \nu_2^*) = 22\frac{2}{3}$.

В завершение обсуждения данного пункта стоит отметить, что задача 1.1.2 превращается в задачу математического программирования

¹Покажите это самостоятельно, используя, например, теорему Куна–Таккера.

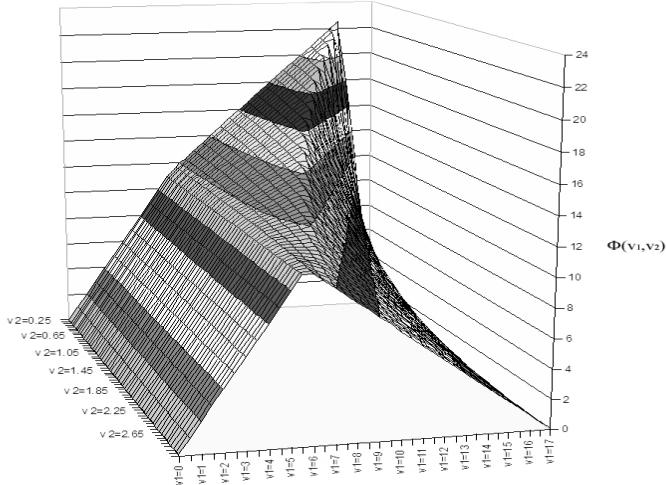


Рис. 1.1. Графическое 3D-представление зависимости $\Phi(\nu_1, \nu_2)$

без параметров, если ν_1 и ν_2 рассматривать как обычные переменные. При этом, правда, увеличивается размерность, и использование линейности нижнего уровня становится не очень простой задачей.

Ко второму типу параметров, достаточно часто встречающегося на практике, относятся *инструментальные* параметры, использование которых необходимо при реализации алгоритма решения исходной задачи.

Основная особенность этого типа заключается в том, что параметры не содержатся в постановке решаемой задачи, а вводятся в нее искусственно (инструментально) с целью приобретения этой постановкой некоторых специальных свойств, позволяющих найти решение.

К этому типу, например, относятся параметры, используемые в многочисленных алгоритмах, которые принято [28] называть *методами асимптотических оценок*.

На практике вполне возможно использование как экзогенных, так и инструментальных параметров одновременно. Для иллюстрации этого случая приведем пример задачи, условие которой содержит экзогенные параметры, а процедура решения основана на использовании инструментального параметра в некотором варианте метода асимптотических оценок.

Задача 1.1.3 Не используя операций логического ветвления, построить функцию, имеющую своим значением максимальное (минимальное) число из заданного набора попарно различных вещественных чисел.

Решение. Пусть набор чисел, из которых следует выбрать экстремальное, есть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, а η – величина этого экстремума. Иначе говоря, $\eta = \operatorname{extr}_{k \in [1, n]} \{\alpha_k\}$. И нам требуется построить функцию являющуюся константой, зависящей от n экзогенных параметров, такую, что

$$\eta = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Функция – решение данной задачи, значение которой есть максимальное из данного набора чисел, не использующая операции логического ветвления (как это будет показано в § 2.1, см. задачу 2.1.2), может иметь следующий вид:

$$\eta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \left(\tau \ln \sum_{k=1}^N \exp \frac{\alpha_k}{\tau} \right), \quad (1.1.1)$$

а функция, дающая величину минимального из чисел набора, соответственно:

$$\eta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \left(-\tau \ln \sum_{k=1}^N \exp \left(-\frac{\alpha_k}{\tau} \right) \right), \quad (1.1.2)$$

Решение

получено. где параметр τ имеет строго положительные значения.

Таким образом, для решения задачи 1.1.3 используется инструментальный параметр τ , предельный переход по которому к нулю справа, позволяет асимптотически получить это решение. Существенно, что функции, от которых берется предел, бесконечно дифференцируемые и выражаются через основные элементарные функции.

В завершение продемонстрируем применение формул (1.1.1) и (1.1.2) для определения значений максимального и минимального чисел из набора $\{3; 5; -4; 0; 1\}$. Результаты вычислений приведены

в табл. 1.1.1 (для формулы 1.1.1) и в табл. 1.1.2 (для формулы 1.1.2) соответственно, где

$$\bar{x}(\tau) = \tau \ln \sum_{k=1}^N \exp \frac{\alpha_k}{\tau} \quad \text{и} \quad \underline{x}(\tau) = -\tau \ln \sum_{k=1}^N \exp \left(-\frac{\alpha_k}{\tau} \right).$$

Т а б л и ц а 1.1.1

τ	$\bar{x}(\tau)$
0.500	5.009261942613422
0.250	5.000083880232697
0.100	5.000000000206115
0.075	5.0000000000000196
0.050	5.000000000000000

Т а б л и ц а 1.1.2

τ	$\underline{x}(\tau)$
0.500	-4.000190818241948
0.250	-4.000000028649254
0.150	-4.000000000000393
0.100	-4.000000000000000
0.050	-4.000000000000000

Глава 2. Метод штрафных функций

§ 2.1. Описание метода штрафных функций

Изучение различных типов параметрических задач и методов их решения начнем с принадлежащего классу асимптотических оценок *метода штрафных функций*.

Метод штрафных функций применяется в многочисленных модификациях для решения разнообразных задач на условный экстремум. Здесь же вначале мы рассмотрим его использование для задачи математического программирования следующего вида:

максимизировать $F(x)$ по $x \in \Omega \subseteq E^n$, где

$$\Omega = \{x \mid f_i(x) \leq 0, \quad i = [1, m]\}, \quad (2.1.1)$$

а функции $F(x)$ и $f_i(x)$, $i = [1, m]$, определены и непрерывны для любых $x \in \Theta \subset E^n$.

Мы будем предполагать, что множество $\Omega \subseteq \Theta$ непусто и что задача (2.1.1) имеет решение x^* , быть может неединственное.

Определение
2.1.1

Ограничение с индексом i называется *активным* в точке x^* , если $f_i(x^*) = 0$. Множество индексов всех активных ограничений будем обозначать I^* .

То есть $I^* = \{i \mid f_i(x^*) = 0\}$.

Идея метода штрафных функций применительно к задаче (2.1.1) заключается в использовании для ее решения процедуры безусловной

(то есть без каких-либо ограничений или связей) максимизации *вспомогательной* функции вида

$$A(x) = F(x) - S(x), \quad (2.1.2)$$

где

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega, \\ +\infty, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Функцию $S(x)$ принято называть *штрафующей функцией* или *слагающим, штрафующим* за нарушение ограничений задачи (2.1.1).

Задачи (2.1.1) и (2.1.2) очевидно равносильны, причем вторая удобнее тем, что экстремум вспомогательной функции $A(x)$ ищется в Θ без каких-либо условий, а первая проще в силу непрерывности функций $F(x)$ и $f_i(x)$, $i = [1, m]$.

Добиться объединения этих преимуществ в рамках одной задачи удается путем введения в определение штрафующей функции инструментального положительного параметра τ таким образом, чтобы функция $S(\tau, x)$, с одной стороны, была выпуклой вниз, обладала достаточной степенью гладкости и, с другой стороны, удовлетворяла предельному соотношению

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} S(\tau, x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega, \\ +\infty, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

В этом случае (как будет показано ниже) решение задачи (2.1.1) сводится к решению последовательности задач безусловной максимизации

$$\max_{x \in E^n} A(\tau_k, x) = \max_{x \in E^n} \left(F(x) - S(\tau_k, x) \right), \quad (2.1.3)$$

решения которых – последовательность вектор-функций $\bar{x}(\tau_k)$, будет сходиться при $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = +0$ к решению задачи (2.1.1). Последнее позволяет отнести метод штрафных функций к классу методов асимптотических оценок.

Также отметим, что имеющаяся определенная свобода выбора функциональной последовательности $S(\tau_k, x)$ приводит к различным вариантам метода штрафных функций с существенно различающимися свойствами. Среди этих вариантов наиболее распространенными в вычислительной практике являются метод *внешних штрафных функций*, для которого

$$S(\tau_k, x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall k \in N,$$

и метод *внутренних (барьерных) штрафных функций*, для которого соответственно

$$\arg \max_x A(\tau_k, x) \in \text{int } \Omega \quad \forall k \in N.$$

Далее в рамках нашего курса мы будем предполагать, что используемая для решения задачи (2.1.1) функция $S(\tau, x)$ такова, что

1°. Имеет место равенство

$$S(\tau, x) = \sum_{i=1}^m P(\tau, f_i(x)), \quad (2.1.4)$$

где значение функции $P(\tau, f_i(x))$, называемой штрафной функцией, является «штрафом» за нарушение одного лишь ограничения $f_i(x) \leq 0 \quad \forall i = [1, m]$ и обладает следующими свойствами.

2°. $\forall s$ и любого $\tau > 0$

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} P(\tau, s) = \begin{cases} +\infty, & s > 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases} \quad (2.1.5)$$

3°. Функции $F(x)$, $f_i(x) \quad \forall i = [1, m]$ и $P(\tau, s)$ имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам до второго порядка включительно.

4°. Для всех $\tau > 0$ и $\forall s$ выполнены неравенства

$$\frac{\partial P}{\partial s} > 0; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} > 0. \quad (2.1.6)$$

5°. Предельный переход (2.1.5) обладает свойством монотонности по τ .

По поводу этих свойств можно сделать следующие замечания. Формула (2.1.4) (часто называемая формулой *свертки*) гарантирует, что величина суммарного штрафа $S(\tau, x)$ будет неограниченно возрастать при $\tau \rightarrow +0$ только в том случае, если нарушено хотя бы одно из условий задачи (2.1.1). Выбор конкретного вида свертки (2.1.4) обусловлен желанием упростить дальнейшие выкладки, если это не приводит к потери общности рассуждений.

Из условий 3°, формул (2.1.2) и (2.1.4) следует, что вспомогательная функция $A(\tau, x)$ будет дважды непрерывно дифференцируема. Поэтому нахождение экстремумов функции (2.1.3):

$$\bar{x}(\tau) = \arg \max_{x \in E^n} A(\tau, x) \quad (2.1.7)$$

сводится к исследованию точек ее стационарности, определяемых из уравнения

$$\operatorname{grad}_x A(\tau, \bar{x}(\tau)) = 0. \quad (2.1.8)$$

Из 4°, 5° и теоремы 3 [18] (описывающей свойства вектор-функции $\bar{x}(\tau)$) следует, что при каждом фиксированном значении $\tau > 0$ решение уравнения (2.1.8) локально единственно, и, значит, можно дать

Определение

2.1.2

Вектор-функцию $\bar{x}(\tau) \quad \forall \tau > 0$ (2.1.7) будем называть *траекторией локальных экстремумов* вспомогательной функции $A(\tau, x)$.

Приведем две несложные задачи, демонстрирующие специфику использования и потенциальные возможности метода штрафных функций.

Задача

2.1.1 Максимизировать ρx по $x \in \Omega \subseteq E^1$, где $\Omega : x \leq 3$,
 ρ есть положительный параметр.

Решение.

В качестве функции $P(\tau, s)$, удовлетворяющей условиям (2.1.4) – (2.1.7), возьмем

$$P(\tau, s) = \tau \exp\left(\frac{s}{\tau}\right). \quad (2.1.9)$$

Поскольку $F(x) = \rho x$, вспомогательная функция будет иметь вид

$$A(\tau, x) = \rho x - \tau \exp\left(\frac{x-3}{\tau}\right).$$

Из условия стационарности вспомогательной функции:

$$\rho - \exp\left(\frac{\bar{x}(\tau) - 3}{\tau}\right) = 0$$

находим траекторию локальных экстремумов:

$$\bar{x}(\tau) = \arg \max_x A(\tau, x) = 3 - \tau \ln \rho$$

и, соответственно, точное решение задачи:

$$x^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau) = 3, \quad F^* = F(x^*) = 3\rho.$$

При этом очевидно, что для $\rho \leq 1$ все члены последовательности $\{\bar{x}(\tau_k)\}$ принадлежат Ω , а для $\rho > 1$ – не принадлежат. Любопытно, что при $\rho = 1$ получение точного решения задачи не требует и предельного перехода по параметру τ .

Решение Решение получено.

Задача Доказать формулы (1.1.1) – (1.1.2).

2.1.2

Решение. Заметим, что процедура выбора максимального числа из данного набора равносильна решению следующей задачи линейного программирования:

минимизировать x
при условиях: $x \geq \alpha_k \quad \forall k = [1, N]$.

Решим эту задачу методом гладких штрафных функций со штрафной функцией (2.1.9), сведя ее решение к максимизации по x при фиксированном малом $\tau > 0$ вспомогательной функции:

$$A(\tau, x) = -x - \tau \sum_{k=1}^N \exp\left(\frac{\alpha_k - x}{\tau}\right).$$

Условие стационарности этой функции есть уравнение вида

$$-1 + \sum_{k=1}^N \exp \frac{\alpha_k - \bar{x}}{\tau} = 0 ,$$

решением которого является следующая траектория локальных экстремумов:

$$\bar{x}(\tau) = \tau \ln \sum_{k=1}^N \exp \frac{\alpha_k}{\tau} .$$

Наконец, x^* – максимальное из чисел набора $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$, согласно основному свойству метода штрафных функций, будет иметь значение

$$x^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \sum_{k=1}^N \exp \frac{\alpha_k}{\tau} .$$

Решение Заметим, что формула (1.1.2) доказывается аналогично. получено.

§ 2.2. Примеры и классификация штрафных функций

Содержание этого параграфа предназначено для разъяснения и иллюстрации терминологии, используемой в дальнейшем. В качестве демонстрационного примера рассмотрим следующую задачу математического программирования:

максимизировать по x функцию $2x$ (2.2.1)
при условиях: $x \leq 3$,

иначе говоря, $F(x) = 2x$ и $f(x) = x - 3$.

Для этой задачи используем при построении вспомогательной функции

$$A(\tau, x) = F(x) - P(\tau, f(x))$$

различные виды функций штрафа $P(\tau, s)$ за нарушение ограничения $s \leq 0$.

Среди гладких штрафных функций обычно различают три основных вида: *внешние*, *внутренние* и *общего вида*.

Для штрафных функций *внешнего* типа величина штрафа в каждой точке допустимого множества (включая границу) равна нулю,

то есть имеет место равенство $P(\tau, s) = 0 \quad \forall s \leq 0$. Типичным примером внешнего штрафа является *квадратичная* штрафная функция:

$$P(\tau, s) = \begin{cases} \frac{s^2}{2\tau} & \text{при } s > 0, \\ 0 & \text{при } s \leq 0, \end{cases}$$

для которой вспомогательная функция задачи (2.2.1) имеет вид

$$A(\tau, x) = 2x - \begin{cases} \frac{(x-3)^2}{2\tau} & \text{при } x > 3, \\ 0 & \text{при } x \leq 3. \end{cases}$$

Условие стационарности вспомогательной функции

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 2 - \frac{\bar{x} - 3}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}(\tau) = 3 + 2\tau$$

определяет траекторию локальных экстремумов $\bar{x}(\tau)$, целиком лежащую в недопустимой области и для которой

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +0} (3 + 2\tau) = 3.$$

Графики функций $F(x)$, $P(\tau, x - 3)$ и $A(\tau, x)$ показаны на рис. 2.1 для трех различных значений инструментального параметра τ . Серым цветом выделена область недопустимых значений переменной x .

Для штрафных функций *внутреннего, барьерного* типа величина штрафа в каждой точке недопустимого множества (включая границу) равна плюс бесконечности, то есть имеет место равенство $P(\tau, s) = +\infty \quad \forall s \geq 0$. Примером барьерного штрафа может служить *логарифмическая* штрафная функция:

$$P(\tau, s) = \begin{cases} +\infty & \text{при } s \geq 0, \\ -\tau \ln(-s) & \text{при } s < 0, \end{cases}$$

для которой вспомогательная функция задачи (2.2.1) внутри допустимой области имеет вид

$$A(\tau, x) = 2x + \tau \ln(3 - x),$$

а условие ее стационарности:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 2 - \frac{\tau}{3 - \bar{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}(\tau) = 3 - \frac{\tau}{2}$$

определяет траекторию локальных экстремумов $\bar{x}(\tau)$, целиком лежащую в допустимой области и для которой

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \left(3 - \frac{\tau}{2} \right) = 3.$$

Соответствующие графики функций $F(x)$, $P(\tau, x - 3)$ и $A(\tau, x)$ показаны на рис. 2.2 для трех различных значений инструментального параметра τ .

Наконец, для штрафных функций *общего вида* функция штрафа определена для любого s , причем в каждой допустимой точке величина штрафной добавки стремится к нулю при $\tau \rightarrow +0$, в то время как в каждой недопустимой точке она стремится к плюс бесконечности при $\tau \rightarrow +0$. Примером штрафа такого типа может послужить *показательная штрафная функция* вида

$$P(\tau, s) = \tau \exp \left(\frac{s}{\tau} \right),$$

для которой вспомогательная функция задачи (2.2.1) с параметром ρ в целевой функции имеет вид

$$A(\tau, x) = \rho x - \tau \exp \left(\frac{x - 3}{\tau} \right). \quad (2.2.2)$$

Условие стационарности вспомогательной функции:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \rho - \exp \left(\frac{\bar{x} - 3}{\tau} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}(\tau) = 3 + \tau \ln \rho$$

задает траекторию локальных экстремумов $\bar{x}(\tau)$ при $\rho > 1$, целиком лежащую в недопустимой или же при $\rho \leq 1$ – в допустимой области, для которой

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +0} (3 + \tau \ln \rho) = 3.$$

Графики функций $F(x)$, $P(\tau, x - 3)$ и $A(\tau, x)$ в случае экспоненциального штрафа показаны на рис. 2.3 для трех различных значений инструментального параметра τ и $\rho = 2$.

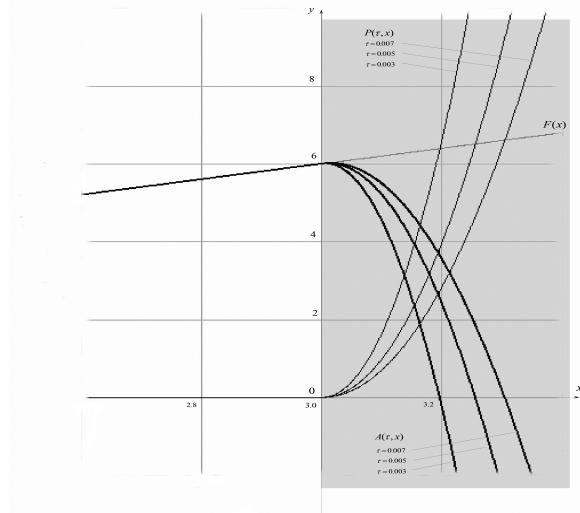


Рис. 2.1. Пример использования квадратичной штрафной функции

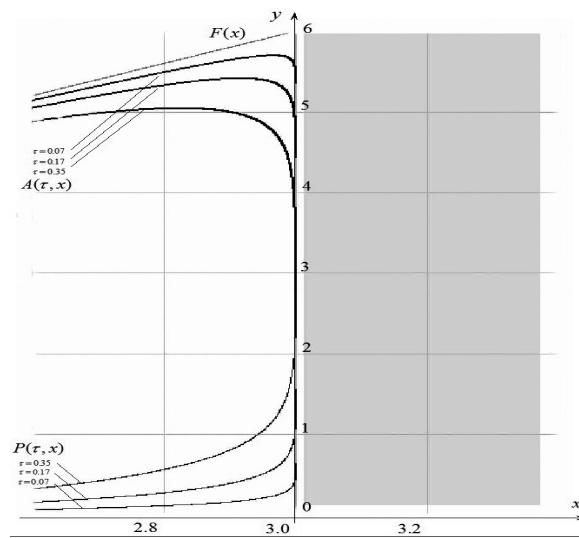


Рис. 2.2. Пример использования логарифмической штрафной функции

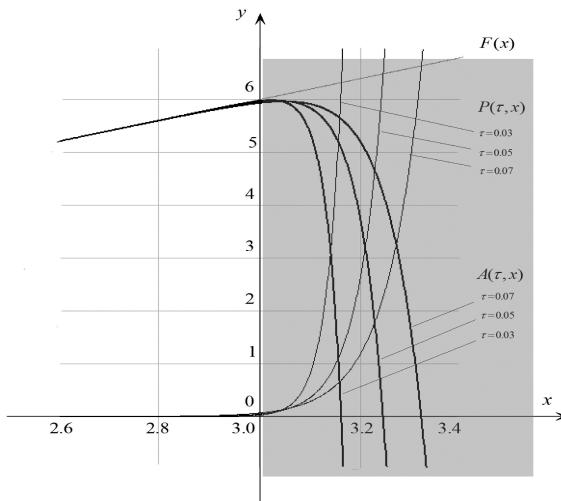


Рис. 2.3. Пример использования экспоненциальной штрафной функции

Сопоставление рассмотренных примеров показывает, что характер сходимости траектории локальных экстремумов к точному решению существенно зависит от вида используемой штрафной функции $P(\tau, s)$.

Для барьерных (внутренних) штрафов траектория при любых положительных значениях коэффициента штрафа τ целиком находится внутри допустимой области. Для внешних штрафных функций она вся лежит в недопустимой области. Наконец, для штрафных функций общего вида в зависимости от значений экзогенных параметров возможны различные случаи. Так, в примере (2.2.2) траектория локальных экстремумов проходит по недопустимой области. Однако, если параметр ρ в целевой функции взять положительным, но меньшим или равным единице, то каждая точка траектории будет допустимой.

От типа выбирамой штрафной функции также зависит величина погрешности $|\bar{x}(\tau) - x^*|$. В рассмотренных выше примерах она линейно зависит от τ , а два последующих примера показывают, что это может быть и не так.

Для барьерной (внутренней) штрафной функции

$$P(\tau, s) = \begin{cases} +\infty & \text{при } s \geq 0, \\ -\frac{\tau}{s} & \text{при } s < 0, \end{cases}$$

вспомогательная функция задачи (2.2.1) будет

$$A(\tau, x) = 2x + \frac{\tau}{x-3}.$$

Условие ее стационарности:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 2 - \frac{\tau}{(\bar{x}-3)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}(\tau) = 3 - \sqrt{\frac{\tau}{2}}$$

задает траекторию локальных экстремумов $\bar{x}(\tau)$, для которой

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \left(3 - \sqrt{\frac{\tau}{2}} \right) = 3.$$

Если же в качестве штрафной выбрать показательную функцию (см. [19]):

$$P(\tau, s) = \exp\left(\frac{s}{\tau}\right),$$

при которой вспомогательная функция задачи (2.2.1) имеет вид

$$A(\tau, x) = 2x - \exp\left(\frac{x-3}{\tau}\right),$$

то условие стационарности этой вспомогательной функции:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 2 - \frac{1}{\tau} \exp\left(\frac{\bar{x}-3}{\tau}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}(\tau) = 3 + \tau \ln 2\tau$$

задает траекторию локальных экстремумов $\bar{x}(\tau)$ частично лежащую как в недопустимой, так и в допустимой областях, для которой

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +0} (3 + \tau \ln 2\tau) = 3.$$

§ 2.3. Обоснование метода штрафных функций

Рассмотрим вопрос о сходимости метода штрафных функций для задачи математического программирования, которая имеет следующую постановку:

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать } F(x), \quad x \in \Omega \subseteq \Theta \subset E^n, \\ & \text{где } \Omega = \{ x \mid f_i(x) \leq 0, \quad i = [1, m] \}. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Пусть множество Θ есть достаточно простой структуры компакт (например шар или куб), содержащий множество Ω . Будем также предполагать, что множество Ω непусто и что задача (2.3.1) имеет решение. Множество всех решений задачи (2.3.1) обозначим как X^* .

Стандартный метод штрафных функций, применяемый для решения задачи (2.3.1) сводится, как показано, например, в [17], к поиску максимума вспомогательной функции вида

$$A(\tau, x) = F(x) - S(\tau, x) \quad \text{на } \Theta, \quad \text{где} \quad S(\tau, x) = \sum_{i=1}^m P(\tau, f_i(x)). \quad (2.3.2) - (2.3.3)$$

Условия, налагаемые на используемую штрафную функцию $P(\tau, s)$ и гарантирующие сходимость метода, могут быть существенно ослаблены по сравнению с условиями § 2.1.

Определим функцию $P(\tau, s)$ так, чтобы она существовала, была непрерывна и неотрицательна для всех s и любых $\tau > 0$, а также удовлетворяла условию монотонного по τ предельного перехода:

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} P(\tau, s) = \begin{cases} +\infty & \text{при } s > 0, \\ 0 & \text{при } s < 0. \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Также пусть этот предел равномерен на множестве $s < 0$, и для вспомогательной функции $A^*(\tau) = \sup_{x \in \Theta} A(\tau, x) < +\infty$.

Наконец оказывается (см. [17]), что при предельном переходе (2.3.4) этих условий недостаточно для неограниченного приближения к точной верхней грани вспомогательной функции $A(\tau, x)$. Дополнительно необходимо потребовать, чтобы существовали бесконечно малые, положительные последовательности $\{\tau_n\}$ и $\{\alpha_m\}$ $m, n \in \mathbb{N}$, а также последовательность $\{x_k\} \in \Theta$ $k \in \mathbb{N}$

$$\text{такие, что } \forall k \quad A^*(\tau_k) \geq A(\tau_k, x_k) \geq A^*(\tau_k) - \alpha(\tau_k). \quad (2.3.5)$$

Тогда имеет место, дающая *достаточные* условия сходимости метода штрафных функций,

Теорема
2.3.1

Пусть функции $F(x)$ и $f_i(x)$ в условии задачи (2.3.1) определены и непрерывны $\forall x \in \Theta$, и, кроме того,

- $F^* = \sup_{x \in \Omega} F(x) < +\infty$;
- вспомогательная функция $A(\tau, x)$ задаваемая условиями (2.3.2)–(2.3.3), обладает свойством (2.3.5);
- штрафная функция $P(\tau, s)$ удовлетворяет условиям (2.3.4).

Тогда, если $\bar{x}(\tau) = \arg \max_{x \in \Theta} A(\tau, x)$, то

1°. Существует элемент $x^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau)$, для которого $x^* \in \Omega$ и $F(x^*) = F^*$.

2°. При $\tau \rightarrow +0$ $\rho(\bar{x}(\tau), \Omega) = \inf_{x \in \Omega} \|\bar{x}(\tau) - x\| \rightarrow 0$ и $\lim_{\tau \rightarrow +0} F(\bar{x}(\tau)) = F^*$.

Доказательство

1) Покажем вначале, что в силу условий теоремы будут верны следующие оценки:

$$\overline{\lim}_{\tau \rightarrow +0} F(\bar{x}(\tau)) \geq F^*$$

и

$$\overline{\lim}_{\tau \rightarrow +0} f_i(\bar{x}(\tau)) \leq 0 \quad \forall i = [1, m].$$

Действительно, возьмем последовательность $\{y_k\} \subseteq \Omega$, для которой верны неравенства (2.3.5) и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(y_k) = F^*.$$

Тогда по определению точной верхней грани $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0$ такое, что $F(y_k) > F^* - \frac{\varepsilon}{3}$ и $\alpha(\tau_k) < \frac{\varepsilon}{3}$ при любом $k > k_0$, поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(\tau_k) = 0$.

Кроме того, из условия $y_k \subseteq \Omega$, равносильного системе неравенств: $f_i(y_k) \leq 0 \quad \forall i = [1, m]$,

следует в силу равномерной сходимости (2.3.4), что
 $S(\tau_k, y_k) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Тогда, учитывая неравенства (2.3.5) и то, что $P(\tau, s) \geq 0$, в случае $A(\tau_k, \bar{x}(\tau_k)) \geq F^*$ имеем

$$\begin{aligned} F(\bar{x}(\tau_k)) &\geq A(\tau_k, \bar{x}(\tau_k)) \geq A^*(\tau_k) - \alpha(\tau_k) \geq A(\tau_k, y_k) - \frac{\varepsilon}{3} = \\ &= F(y_k) - S(\tau_k, y_k) - \frac{\varepsilon}{3} = F^* - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3} = F^* - \varepsilon. \end{aligned}$$

Откуда получаем, что $\overline{\lim}_{\tau \rightarrow +0} F(\bar{x}(\tau)) \geq F^*$. Случай $A(\tau_k, \bar{x}(\tau_k)) < F^*$ исследуется аналогично (см. пример (2.2.2) при $0 < \rho < 1$).

Из полученного неравенства следует, что при $k > k_0$

$$\begin{aligned} S(\tau_k, \bar{x}(\tau_k)) &= -A(\tau_k, \bar{x}(\tau_k)) + F(\bar{x}(\tau_k)) \leq \\ &\leq -F^* + \varepsilon + \sup_{x \in \Theta} F(x) < +\infty. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Покажем, что из этого следуют неравенства

$$\overline{\lim}_{\tau \rightarrow +0} f_i(\bar{x}(\tau)) \leq 0 \quad \forall i = [1, m]. \quad (2.3.7)$$

Допустим противное, то есть хотя бы для одного i имеет место $\overline{\lim}_{\tau \rightarrow +0} f_i(\bar{x}(\tau)) > 0$.

Тогда найдется последовательность $\{x_j\}$ такая, что

$$f_i(\bar{x}_{j_p}(\tau)) \geq \varepsilon_0 > 0 \quad \forall p > p_0.$$

А в силу условия монотонности (2.3.4) в этом случае

$$S(\tau_{j_p}, \bar{x}(\tau_{j_p})) \rightarrow +\infty \quad \text{при } p \rightarrow +\infty,$$

что противоречит (2.3.6). Значит, неравенства (2.3.7) выполняются.

2) Пусть некоторое x^* принадлежит множеству предельных (при $\tau \rightarrow +0$) точек $\bar{x}(\tau)$. Тогда существует последовательность $\{\tau_k\}$ с $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = +0$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}(\tau_k) = x^*$. Из непрерывности функций $f_i(x)$ и неравенства

$$\overline{\lim}_{\tau \rightarrow +0} f_i(\bar{x}(\tau)) \leq 0 \quad \forall i = [1, m]$$

следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_i(\bar{x}(\tau_k)) = f_i(x^*) \leq 0 \quad \forall i = [1, m].$$

Поэтому $x^* \in \Omega$.

Из условия теоремы и непрерывности функции $F(x)$ следует, что

$$F^* \geq F(x^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(\bar{x}(\tau_k)).$$

А из условия

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(\bar{x}(\tau_k)) \geq \overline{\lim}_{\tau \rightarrow +0} F(\bar{x}(\tau)) \geq F^*.$$

Объединяя эти неравенства в одну систему, получаем $F(x^*) = F^*$.

3) Убедимся, что из полученного в 2) неравенства:

$$\overline{\lim}_{\tau \rightarrow +0} f_i(\bar{x}(\tau)) \leq 0 \quad \forall i = [1, m] \quad (2.3.8)$$

следует

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \rho(\bar{x}(\tau), \Omega) = 0. \quad (2.3.9)$$

Будем рассуждать от противного. Предположим, что из (2.3.8) не следует (2.3.9). Это означает, что найдется положительное r_0 такое, что $\forall m$ существует номер $k_m \geq m$, для которого $\rho(\bar{x}(\tau_{k_m}), \Omega) \geq r_0$.

Исследуем последовательность $\{\bar{x}(\tau_{k_m})\}$. Из (2.3.8) следует, что все ее члены, начиная с некоторого, принадлежат множеству $\Omega_{\delta_0} = \{x \in \Theta \mid f_i(x) \leq \delta_0 \forall i = [1, m]\}$, где δ_0 некоторое положительное, достаточно малое число.

Из условия, что Θ является компактом, вытекает, что и Ω_{δ_0} – также компакт. Тогда без потери общности можно считать, что последовательность $\{\bar{x}(\tau_{k_m})\}$ сходящаяся и имеет своим пределом точку $x_0 \in \Omega_{\delta_0}$. При этом в силу непрерывности функций $f_i(x) \forall i = [1, m]$ имеем

$$f_i(x_0) \leq 0 \quad \forall i = [1, m],$$

то есть $x_0 \in \Omega$.

С другой стороны, из курса математического программирования известно [26], что функция $\rho(x, \Omega)$ – расстояние от точки x до компактного множества Ω – непрерывна по аргументу x . Поэтому

$$\rho(\bar{x}(\tau_{k_m}), \Omega) \rightarrow \rho(x_0, \Omega) \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Тогда из исходного предположения о равномерном стремлению к нулю штрафной функции $P(\tau, s)$ на множестве $s < 0$ следует, что $\rho(x_0, \Omega) \geq r_0$ и, значит, $x_0 \notin \Omega$. Полученное противоречие доказывает, что исходное предположение неверно, и что из (2.3.8) следует (2.3.9).

Аналогичным образом доказывается, что из неравенства $\overline{\lim}_{\tau \rightarrow +0} F(\bar{x}(\tau)) \geq F^*$ следует $F(\bar{x}(\tau)) \rightarrow F(x^*) = F^*$.

Теорема доказана.

В заключение обратим внимание на то, что формулировка теоремы 2.3.1 содержит условия, которые, вообще говоря, не являются *необходимыми*.

Примером, иллюстрирующим это утверждение, может служить штрафная функция вида

$$P(\tau, s) = \begin{cases} \frac{s^4}{4\tau^3} \left(2 + \cos \frac{k\tau}{s}\right) & \text{при } s > 0, \\ 0 & \text{при } s \leq 0. \end{cases} \quad (2.3.10)$$

Эта функция невыпукла в любой, достаточно малой правой полукрестности точки $s = 0$ и, значит, не удовлетворяет условиям теоремы 2.3.1. При этом ее использование для решения задачи вида

$$\text{максимизировать по } x \text{ функцию } 3x \quad (2.3.11)$$

при условиях: $x \leq 2$

оказывается вполне успешным.

Пусть вспомогательная функция, как и раньше, имеет вид

$$A(\tau, x) = 3x - P(\tau, x - 2).$$

Значения ее глобального максимума (равно как и точки x , в которой этот экстремум достигается) для различных величин коэффициента штрафа τ приведены в табл. 2.3.1. А графические представления функций $P(\tau, s)$ и $A(\tau, x)$ показаны на рис. 2.4 и 2.5 соответственно. Коэффициент k использован в формуле (2.3.10) в качестве масштабирующего множителя для улучшения наглядности этого графического представления. Его значение не имеет принципиального значения и было выбрано в данном примере равным 12.5.

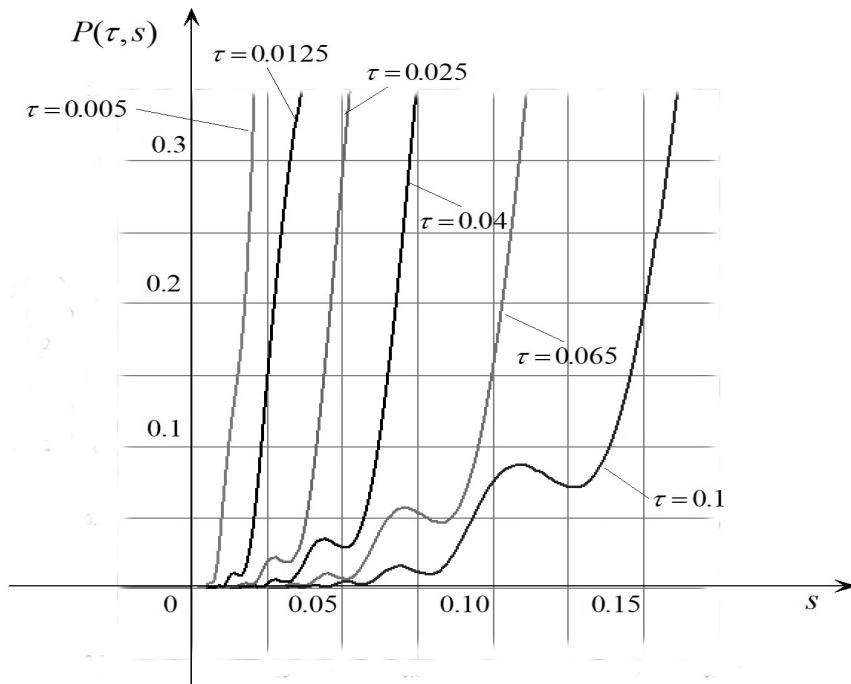


Рис. 2.4. Невыпуклая штрафная функция

Таблица 2.3.1

Решения задачи 2.3.11 для различных значений τ

τ	$\bar{x}(\tau)$	$A(\tau, \bar{x}(\tau))$
0.1000	2.134090890	6.321023059
0.0650	2.087159079	6.208664988
0.0400	2.053636356	6.128409224
0.0250	2.033522723	6.080255765
0.0125	2.016761361	6.040127882
0.0050	2.006704544	6.016051153
Точное решение	2.000000000	6.000000000

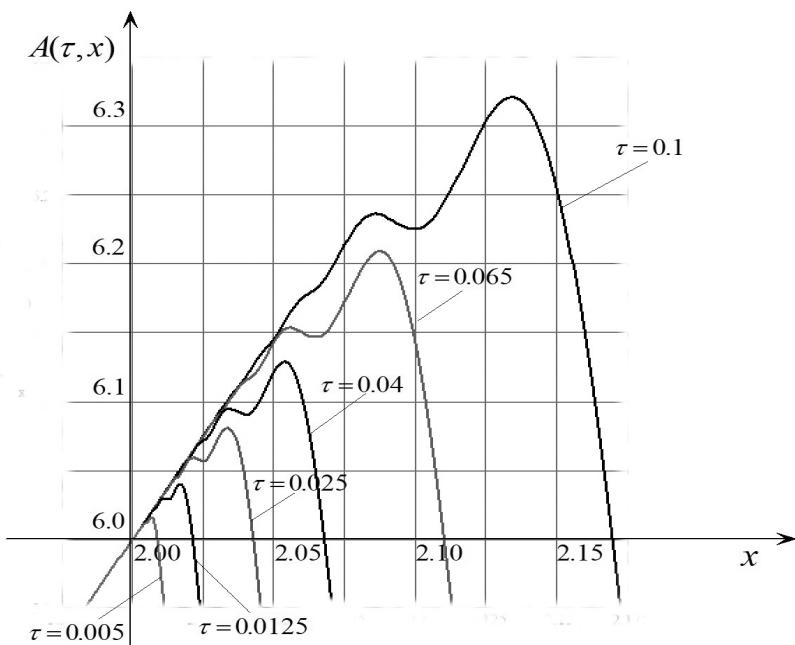


Рис. 2.5. Вспомогательная функция для задачи 2.3.11

Глава 3. Гладкие штрафные функции

§ 3.1. Свойства гладких штрафных функций

В рамках данного курса мы будем рассматривать штрафные функции, которые обеспечивают возможность представления оценок решений задачи (2.1.1) в виде функций от экзогенных и инструментальных параметров, допускающих их аппроксимации по формулам Тейлора. Такие штрафные функции ниже будем называть *гладкими*.

Вначале опишем некоторые свойства функции $P(\tau, s)$ (а также связанных с ней функций), следующие из ее определения. Имеет место

Лемма 3.1.1 Пусть функция $P(\tau, s)$, удовлетворяющая условиям (2.1.5) – (2.1.7), имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам до второго порядка включительно для всех $\tau > 0$ и $\forall s$.

Тогда для любого фиксированного $s < 0$

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} = 0, \quad (3.1.1)$$

а для любого фиксированного $s > 0$

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s} = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} = +\infty. \quad (3.1.2)$$

Доказательство

В силу условий леммы функция $P(\tau, s)$ строго выпукла вниз по s на всем промежутке $s \in (-\infty, +\infty)$. Поэтому справедливы $\forall s$ и $\forall \Delta > 0$ неравенства

$$P(\tau, s+\Delta) \geq P(\tau, s) + \Delta \frac{\partial P}{\partial s} \quad \text{и} \quad P(\tau, s-\Delta) \geq P(\tau, s) - \Delta \frac{\partial P}{\partial s}.$$

Из первого неравенства следует, что

$$\frac{\partial P}{\partial s} \leq \frac{P(\tau, s+\Delta) - P(\tau, s)}{\Delta},$$

то есть при любых фиксированных $s < 0$ и $0 < \Delta < -s$ в силу (2.1.5) $\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s} = 0$.

Из второго неравенства получаем

$$\frac{\partial P}{\partial s} \geq \frac{P(\tau, s) - P(\tau, s-\Delta)}{\Delta},$$

но поскольку при любых фиксированных $s > 0$ и $0 < \Delta < s$ найдется $k > 0$ такое, что $1 < \frac{P(\tau, s)}{P(\tau, s-\Delta)} = 1 + k\Delta$, то

$$\frac{\partial P}{\partial s} \geq \frac{(1 + k\Delta)P(\tau, s-\Delta) - P(\tau, s-\Delta)}{\Delta} = kP(\tau, s-\Delta),$$

и в силу (2.1.5) $\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s} = +\infty$. Тогда из условия непрерывности $\frac{\partial P}{\partial s}$ по s следует утверждение леммы.

Формулы (3.1.2) доказываются аналогично.

Лемма доказана.

Помимо функций $P(\tau, s)$, $\frac{\partial P}{\partial s}$ и $\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}$ в дальнейших рассуждениях нами будут использоваться также функции $Q(\tau, s)$ и $R(\tau, s)$, где $Q(\tau, s)$ есть функция обратная по s к $\frac{\partial P}{\partial s}$ и $Q(\tau, s) = \frac{\partial R}{\partial s}$.

Приведем описание свойств этих функций.

О свойствах функции $Q(\tau, s)$ как обратной к $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$ можно сказать следующее: она определена и непрерывно дифференцируема при $\forall \tau > 0, \forall s > 0$, а область ее значений есть множество всех вещественных чисел.

Кроме того, она строго выпукла вверх и монотонно возрастает по s при любом фиксированном $\tau > 0$, поскольку функция $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$ определена, положительна, непрерывно дифференцируема $\forall s$ и монотонно возрастает, и строго выпукла вниз по s .

Также вполне очевидными свойствами функции $Q(\tau, s)$ являются наличие у нее вертикальной асимптоты вида $\lim_{s \rightarrow +0} Q(\tau, s) = -\infty$ при любом фиксированном $\tau > 0$, равно как и выполнение равенства $\lim_{\tau \rightarrow +0} Q(\tau, s) = 0$ при любом фиксированном $s > 0$.

Графики, показанные на рис. 3.1, иллюстрируют отмеченные выше свойства функций $P(\tau, s)$, $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$, $Q(\tau, s)$ и $R(\tau, s) = \int_a^s Q(\tau, t) dt$ на примере $P(\tau, s)$, заданной формулой (3.4.11), для трех различных значений τ и фиксированном $a > 0$.

Важное для дальнейшего свойство функции $R(\tau, s)$ описывает

Теорема Для любого фиксированного $s > 0$ $\lim_{\tau \rightarrow +0} R(\tau, s) = 0$.

3.1.1

Доказательство

Согласно определению функции $R(\tau, s)$ при любом фиксированном $a > 0$ имеем

$$R(\tau, s) = \int_a^s Q(\tau, t) dt.$$

Проинтегрировав правую часть этого равенства по частям, получим

$$R(\tau, s) = s Q(\tau, s) - a Q(\tau, a) - \int_a^s t Q'_t(\tau, t) dt.$$

Непосредственно из свойств функции $Q(\tau, s)$ следует, что при любых фиксированных $s > 0$ и $a > 0$

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} s Q(\tau, s) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} a Q(\tau, a) = 0.$$

Для слагаемого с интегралом в силу правила дифференцирования обратной функции и взаимной обратности функций $Q(\tau, s)$ и $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$ при $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, w(s)) = s$ будет верно

$$I = \int_a^s t Q'_t(\tau, t) dt = \int_a^s \frac{t dt}{\left(\frac{\partial P}{\partial t}(\tau, w(t)) \right)'_t} = \int_a^s \frac{t dt}{\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}(\tau, w(t))}.$$

Затем, применив интегральную теорему о среднем [13], получим, что найдется такое фиксированное положительное $q \in [a, s]$, для которого

$$I = \frac{q}{\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, w(q))} \int_a^s dt = \frac{q}{\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, w(q))} (s - a).$$

Последнее выражение стремится к нулю при $\tau \rightarrow +0$ поскольку $\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, w(q)) = +\infty$ в силу леммы 3.1.1.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда $P(\tau, s)$ используется как штрафная функция за нарушение условия $s \leq 0$ при решении задачи математического программирования (2.1.1).

Напомним, что обоснование метода штрафных функций, приведенное в § 2.3, было выполнено при достаточно слабых требованиях (см. условия теоремы 2.3.1, п. 1°, 2° и 3°) как к функциям, использованным в формулировке исходной задачи (2.1.1), так и к функциям штрафа (2.1.4) – (2.1.7).

Ниже исследуются постановки, удовлетворяющие более жестким условиям, за счет чего удастся существенно расширить спектр задач, решаемых при помощи метода штрафных функций.

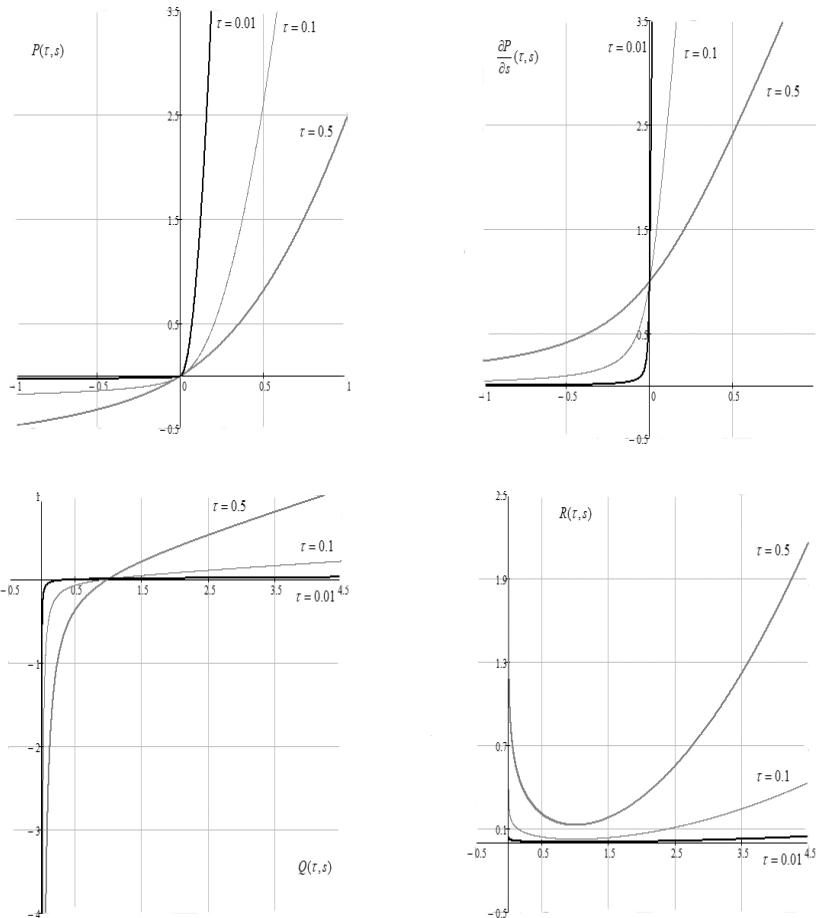


Рис. 3.1. Вид графиков зависимости функций $P(\tau, s)$, $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$, $Q(\tau, s)$ и $R(\tau, s)$ от s при различных значениях τ

В первую очередь мы будем предполагать, что использованные в формулировке задачи (2.1.1) функции $F(x)$, $f_i(x)$ $\forall i = [1, m]$ дважды непрерывно дифференцируемы в своей области определения.

С другой стороны, важной для практического применения характеристикой метода штрафных функций являются свойства *траекторий локальных экстремумов* $\bar{x}(\tau)$, описанных в определении 2.1.1.

При этом основное предельное свойство этих траекторий:

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} A(\tau, \bar{x}(\tau)) = F^*$$

имеет место для всех типов штрафных функций, в то время как их дифференциальные свойства существенно зависят от вида функции $P(\tau, s)$. Формулы решений задачи 2.2.1, полученные в § 2.2 и показанные в табл. 3.1.1, демонстрируют это.

Таблица 3.1.1

Тип штрафной функции	$P(\tau, s)$	$\bar{x}(\tau)$	$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{d\bar{x}(\tau)}{d\tau}$
<i>Внутренняя</i>	$\begin{cases} +\infty & \text{при } s \geq 0 \\ -\tau \ln(-s) & \text{при } s < 0 \end{cases}$	$\bar{x}(\tau) = 3 - \frac{\tau}{2}$	$-\frac{1}{2}$
<i>Внешняя</i>	$\begin{cases} \frac{s^2}{2\tau} & \text{при } s > 0 \\ 0 & \text{при } s \leq 0 \end{cases}$	$\bar{x}(\tau) = 3 + 2\tau$	2
<i>Общего вида</i>	$\tau \exp\left(\frac{s}{\tau}\right)$	$\bar{x}(\tau) = 3 + \tau \ln 2$	$\ln 2$
<i>Общего вида</i>	$\exp\left(\frac{s}{\tau}\right)$	$\bar{x}(\tau) = 3 + \tau \ln 2\tau$	$-\infty$
<i>Внутренняя</i>	$\begin{cases} +\infty & \text{при } s \geq 0 \\ -\frac{\tau}{s} & \text{при } s < 0 \end{cases}$	$\bar{x}(\tau) = 3 - \sqrt{\frac{\tau}{2}}$	$-\infty$

Откуда следует, что свойства траектории локальных экстремумов в общем случае не определяются полностью только условиями (2.1.5) – (2.1.7), и при выборе вида штрафной функции $P(\tau, s)$ может потребоваться дополнительное исследование, примером которого служат излагаемые ниже лемма 3.1.2, теорема 3.1.2 и следствие 3.1.1.

Лемма
3.1.2

Пусть выполнены все условия леммы 3.1.1 и задача 2.1.1 имеет ограниченное решение. Тогда на траектории локальных экстремумов $\bar{x}(\tau)$:

- 1) $\forall i \notin I^*$, где I^* – множество индексов активных ограничений (см. определение (2.1.1))

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, f_i(\bar{x}(\tau)) \right) = 0,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} \left(\tau, f_i(\bar{x}(\tau)) \right) = 0;$$

- 2) $\forall i \in I^*$ существуют конечные константы λ_i такие, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, f_i(\bar{x}(\tau)) \right) = \lambda_i,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} \left(\tau, f_i(\bar{x}(\tau)) \right) = +\infty.$$

Доказательство

Справедливость п. 1) следует из леммы 3.1.1. Пункт 2) доказан в § 3.4 (теорема 3.4.2) и в [18] (теорема 2).

Лемма доказана.

Теорема
3.1.2

Пусть выполнены все условия леммы 3.1.1. Тогда на траектории локальных экстремумов $\bar{x}(\tau)$, для того чтобы существовали конечные пределы $\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{d\bar{\xi}_j}{d\tau} \quad \forall j = [1, n]$, необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывно дифференцируемая функция $\phi(u)$ такая, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \left(\frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, f_i(\bar{x}(\tau)) \right) - \phi \left(\frac{f_i(\bar{x}(\tau))}{\tau} \right) \right) = 0 \quad \forall i \in I^*. \quad (3.1.3)$$

Доказательство

Необходимость. Пусть существуют конечные пределы $\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{d\bar{\xi}_j}{d\tau} \quad \forall j = [1, n]$. Тогда в силу формулы Тейлора первого порядка для активных ограничений в точке решения будут верными равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \left(\frac{df_i(\bar{x}(\tau))}{d\tau} - \frac{f_i(\bar{x}(\tau))}{\tau} \right) = 0 \quad \forall i \in I^*. \quad (3.1.4)$$

Действительно, по формуле Тейлора:

$$x(\tau + \Delta\tau) = \bar{x}(\tau) + \frac{d\bar{x}}{d\tau} \Delta\tau + o(\Delta\tau).$$

Откуда при $\Delta\tau \rightarrow -\tau + 0$ получаем

$$\bar{x}^* = \bar{x}(\tau) - \frac{d\bar{x}}{d\tau} \tau + o(\tau).$$

Тогда в силу непрерывной дифференцируемости функций $f_i(x) \quad \forall i \in [1, m]$ и равенств $f_i(x^*) = 0 \quad \forall i \in I^*$ приходим к заключению о справедливости равенств (3.1.4).

Теперь заметим, что для функций

$$L_i(\tau) = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i(\bar{x}(\tau))) \quad \forall \tau > 0, \quad i \in I^*,$$

согласно утверждению 2) леммы 3.1.2 существуют конечные и неотрицательные $\lambda_i = \lim_{\tau \rightarrow +0} L_i(\tau)$.

А поскольку функции $L_i(\tau)$ непрерывно дифференцируемые, то на траектории локальных экстремумов

$$\frac{dL_i}{d\tau} = \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} \frac{df_i}{d\tau} + \frac{\partial^2 P}{\partial s \partial \tau}.$$

Последнее равенство можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} \frac{df_i}{d\tau} - \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} \frac{f_i}{\tau} + \frac{\partial^2 P}{\partial s \partial \tau} - \frac{dL_i}{d\tau} + \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} \frac{f_i}{\tau} = 0$$

или как

$$\left(\frac{\frac{\partial^2 P}{\partial s \partial \tau}}{\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}} + \frac{f_i}{\tau} \right) + \frac{\left(-\frac{dL_i}{d\tau} \right)}{\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}} + \left(\frac{df_i}{d\tau} - \frac{f_i}{\tau} \right) = 0.$$

На траектории локальных экстремумов второе слагаемое в последней формуле стремится к нулю при $\tau \rightarrow +0$ в силу утверждения 2), а третье – согласно равенству (3.1.4). Следовательно и первое слагаемое будет также стремиться к нулю на траектории локальных экстремумов при $\tau \rightarrow +0$, то есть

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \left(-\frac{\frac{\partial \psi}{\partial \tau}}{\frac{\partial \psi}{\partial s}} + \frac{s}{\tau} \right) = 0,$$

где $\psi(\tau, s) = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$.

Найдем теперь вид функции $\phi(u)$. Заметим, что равенства

$$\psi(\tau, f_i(\bar{x}(\tau))) = \Lambda_i(\tau) \quad \forall i \in I^* \quad (3.1.5)$$

можно рассматривать как начальные условия в задаче Коши для уравнения

$$s \frac{\partial \psi}{\partial s} + \tau \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0 \quad (3.1.6)$$

в силу предположения о непрерывности частных производных штрафной функции до второго порядка включительно и локальной единственности решения задачи Коши.

Легко видеть, что $\frac{s}{\tau} = C$ – первый интеграл уравнения (3.1.6), единственный, а его общее решение, как известно, имеет вид

$$\psi(\tau, s) = \phi\left(\frac{s}{\tau}\right),$$

где $\phi(u)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция своего единственного аргумента. Поскольку решение задачи Коши (3.1.6) – (3.1.5) имеет такой же вид, то необходимость доказана.

Достаточность. Пусть верно равенство (3.1.3). Покажем, что в этом случае существуют конечные пределы

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{d\bar{\xi}_j}{d\tau} \quad \forall j = [1, n].$$

Действительно, из предположения о существовании решения задачи (2.1.1) следует, что справедливо равенство (3.1.4). Из которого в силу сделанных предположений о свойствах функций, используемых в записи условия задачи (2.1.1), вытекает, что существуют конечные константы $\omega_i \quad \forall i \in I^*$ такие, что $f_i(\bar{x}(\tau)) = \omega_i \tau + o(\tau)$. Откуда

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} \frac{d\bar{\xi}_j}{d\tau} = \omega_i + o(1) \quad \forall i \in I^*. \quad (3.1.7)$$

Без ограничения общности можно считать, что множество индексов активных ограничений $\{I^*\} \equiv \{1, 2, \dots, k\}$. Тогда, если ранг матрицы Якоби:

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_k}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial \xi_n} \end{array} \right\|$$

при переходе от переменных $\{\bar{\xi}_j \quad \forall j = [1, n]\}$ к переменным $\{f_i \quad \forall i \in I^*\}$ равен n , то система линейных уравнений (3.1.7) имеет конечные решения $\frac{d\bar{\xi}_j}{d\tau} \quad \forall j = [1, n]$ и достаточность очевидно доказана.

В противном случае, докажите достаточность самостоятельно (использовав, например, необходимые условия существования решения задачи (2.1.1)).

Теорема доказана.

Следствие 3.1.1 Если функция $P(\tau, s)$ такова, что $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$ является функцией, зависящей только от одной переменной вида $\frac{s}{\tau}$, то есть существует непрерывно дифференцируемая функция $\phi(u)$ такая, что

$$\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s) = \phi\left(\frac{s}{\tau}\right), \quad (3.1.8)$$

то на траектории локальных экстремумов существуют конечные пределы $\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{d\bar{\xi}_j}{d\tau} \forall j = [1, n]$.

Доказательство

Следует непосредственно из утверждения теоремы 3.1.2.

Следствие доказано.

Для пояснения следствия 3.1.1 обратим внимание на тот факт, что из пяти штрафных функций $P(\tau, s)$, указанных в таблице 3.1.1, первые три удовлетворяют условию следствия 3.1.1, а две последние – нет. Проверьте это самостоятельно.

В заключение также отметим, что

- во-первых, использование теоремы о системе функций, заданной неявно, оказывается удобным также и для других схем исследования свойств траекторий локальных экстремумов;
- во-вторых, условия, определяющие свойства штрафных функций общего вида, могут, вообще говоря, отличаться от условий для внутренних или внешних штрафов.

§ 3.2. Сглаживающее свойство штрафных функций

В предыдущем параграфе метод гладких штрафных функций рассматривался как пример использования инструментальных параметров, как вариант метода асимптотических оценок.

Предположим теперь, что исходная задача математического программирования содержит в своем условии экзогенные параметры. Ее решение, естественно, представляет собой некоторую зависимость (вообще говоря, нефункциональную!) от этих параметров. И при этом часто возникает необходимость решения некоторой другой задачи, условия которой формулируются с использованием решений исходной.

Рассмотрим следующий пример.

Пусть x – вектор независимых переменных размерности n и u – вектор параметров размерности k с координатными представлениями $\|\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\|^T$ и $\|\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k\|^T$ соответственно. Будем рассматривать следующую задачу, традиционно называемую *задачей параметрического программирования*:

$$\text{найти максимум по } x \text{ для } F(x, u) \quad (3.2.1)$$

$$\text{при условиях: } f_i(x, u) \leq 0 \quad \forall i = [1, m] \quad (3.2.2)$$

и пусть $x^*(u)$ есть решение задачи (3.2.1) – (3.2.2) для некоторого фиксированного u .

Любую задачу, в условии которой присутствует $x^*(u)$, назовем *задачей в пространстве параметров* или *задачей верхнего (второго) уровня*. Например, задачу вида

$$\text{найти максимум по } u \text{ для } F(x^*(u), u) \quad (3.2.3)$$

$$\text{при условии: } u \in \Theta \subseteq E^k.$$

В отличие от задач типа (3.2.3) задачу (3.2.1) – (3.2.2) будем называть *задачей нижнего (первого) уровня*.

Следует отметить, что система задач (3.2.1) – (3.2.2) и (3.2.3) очевидно может быть сведена к стандартной (непараметрической) задаче математического программирования в пространстве $E^n \otimes E^k$ путем превращения вектора экзогенных параметров u в дополнительные компоненты вектора переменных. Однако такое превращение может приводить не только к нежелательному увеличению размерности, но также и к усложнению решаемой задачи. Поэтому далее (в рамках нашего курса) этот подход рассматриваться не будет.

Для практического решения двухуровневой системы задач (3.2.1) – (3.2.2) и (3.2.3) может использоваться стандартная итеративная процедура построения последовательных приближений:

$$\{u_{(t)} \quad t = 0, 1, 2, \dots, \},$$

сходящихся к u^* – искомому решению задачи (3.2.3) – в пространстве E^k , t -й шаг которой состоит из следующего набора операций.

1°. Для некоторого приближения $u_{(t)}$ решается задача нижнего уровня (3.2.1) – (3.2.2).

- 2°. Затем оцениваются как нормированное направление шага $w_{(t)}$, так и величина этого шага $\sigma_{(t)}$.
- 3°. Выполняется переход к точке $u_{(t+1)}$ по формуле

$$u_{(t+1)} = u_{(t)} + \sigma_{(t)} w_{(t)}.$$

- 4°. Если в $u_{(t+1)}$ условие окончания итерационного процесса не удовлетворяется, то $u_{(t)}$ присваивается значение $u_{(t+1)}$ и дается переход к п. 1. В случае сходимости данной процедуры будет найдено u^* – локальное решение задачи (3.2.3).

При всей простоте и очевидности данной итерационной схемы следует иметь в виду, что процедура решения двухуровневого варианта системы задач (3.2.1) – (3.2.2) и (3.2.3) может в значительной степени осложняться следующими специфическими свойствами зависимости $x^*(u)$.

1. Практической невозможностью (за исключением, быть может, некоторых тривиальных случаев) аналитического решения задачи нижнего уровня (3.2.1) – (3.2.2), а, значит, также невозможностью постановки, исследования и решения в явном виде задачи верхнего уровня (3.2.3).
2. Возможным несовпадением области определения зависимости $x^*(u)$ и множества Ω , поскольку система условий задачи нижнего уровня (3.2.1) – (3.2.2) может быть оказаться противоречивой для некоторых $u \in \Omega$.
3. Возможной нефункциональностью (неоднозначностью) зависимости $x^*(u)$ для тех u , при которых задача нижнего уровня (3.2.1) – (3.2.2) имеет решение, но не единственное.
4. Негладкостью зависимости $x^*(u)$ в силу того, что условие задачи нижнего уровня (3.2.1) – (3.2.2) может содержать ограничения типа «неравенство». Более того, даже существование непрерывных производных у функций $F(x, u)$ и $f_i(x, u) \quad \forall i = [1, m]$ достаточно высокого порядка не гарантирует гладкости (а иногда даже и непрерывности) зависимости $x^*(u)$, а значит, и входящих в формулировку задачи верхнего уровня условий.

Перечисленные выше свойства зависимости $x^*(u)$, которые могут быть причиной вычислительных затруднений при использовании итерационной процедуры 1°–4°, иллюстрирует следующая пара взаимодейственных задач.

Задача Прямая задача:

3.2.1 максимизировать 2ξ

при условиях: $\xi \geq 0$, $\xi \leq 3$ и $\xi \leq \nu$.

Двойственная задача:

минимизировать $3\lambda_1 + \nu\lambda_2$

при условиях: $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 2$.

Решение. Решения обеих задач в силу их простоты вполне очевидны:

$$\xi^*(\nu) = \begin{cases} \text{не существует} & \text{при } -\infty < \nu < 0, \\ \nu & \text{при } 0 \leq \nu \leq 3, \\ 3 & \text{при } 3 < \nu < +\infty. \end{cases}$$

$$\lambda_1^*(\nu) = \begin{cases} \forall \lambda \in [0, +\infty) & \text{при } -\infty < \nu < 0, \\ 0 & \text{при } 0 \leq \nu < 3, \\ \forall \lambda \in [0, 2] & \text{при } \nu = 3, \\ 2 & \text{при } 3 < \nu < +\infty. \end{cases}$$

$$\lambda_2^*(\nu) = \begin{cases} +\infty & \text{при } -\infty < \nu < 0, \\ \forall \lambda \in [2, +\infty) & \text{при } \nu = 0, \\ 2 & \text{при } 0 < \nu < 3, \\ \forall \lambda \in [0, 2] & \text{при } \nu = 3, \\ 0 & \text{при } 3 < \nu < +\infty. \end{cases}$$

Решение
получено.

Точные решения прямой и двойственных задач 3.2.1 описываются зависимостями $\xi^*(\nu)$, $\lambda_1^*(\nu)$ и $\lambda_2^*(\nu)$, графические представления которых показаны черными сплошными линиями на рис. 3.2, 3.3 и 3.4.

Укажем на специфические особенности этих зависимостей, осложняющие постановку и решение задачи верхнего уровня. Во-первых, $\xi^*(\nu)$ определена только для $\nu \geq 0$ и не дифференцируема в точках $\nu = 0$ и $\nu = 3$. Во-вторых, $\lambda_1^*(\nu)$ и $\lambda_2^*(\nu)$ определены в точке $\nu = 3$ неоднозначно и соответственно не имеют производных в этой точке. Наконец, при $\nu < 0$ $\lambda_1^*(\nu)$ может иметь любое конечное неотрицательное значение, в то время как $\lambda_2^*(\nu)$ равно $+\infty$. То есть решение двойственной задачи неограниченно.

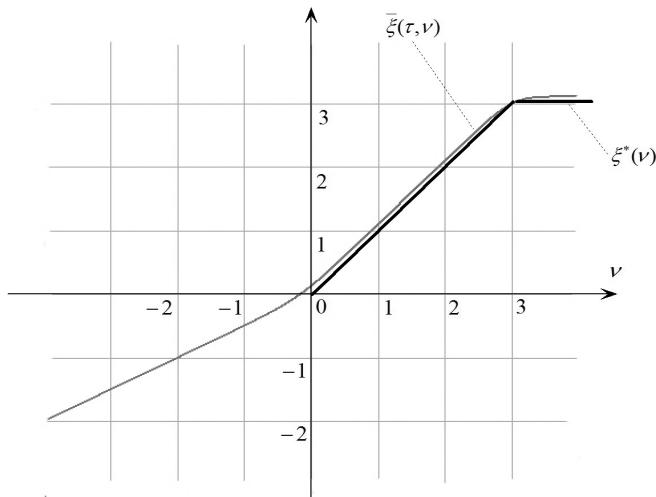


Рис. 3.2. Графическое представление зависимостей $\xi^*(\nu)$ и $\bar{\xi}(\tau, \nu)$ в задаче 3.2.1

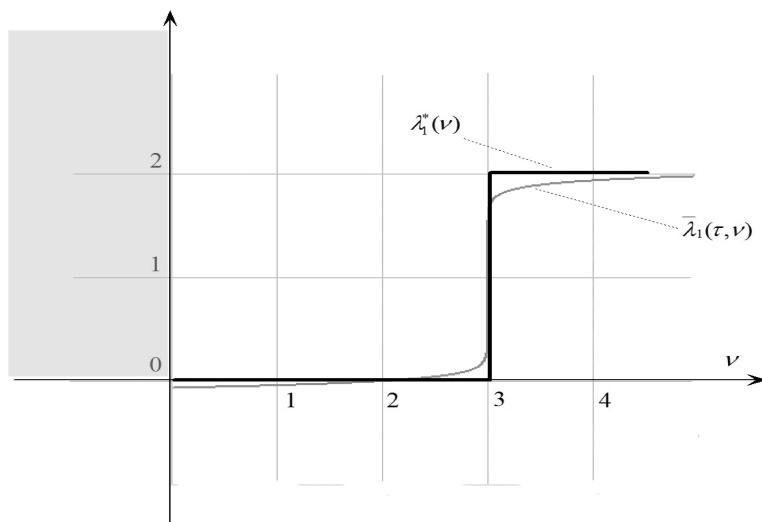


Рис. 3.3. Графическое представление зависимостей $\lambda_1^*(\nu)$ и $\bar{\lambda}_1(\tau, \nu)$ в задаче 3.2.1

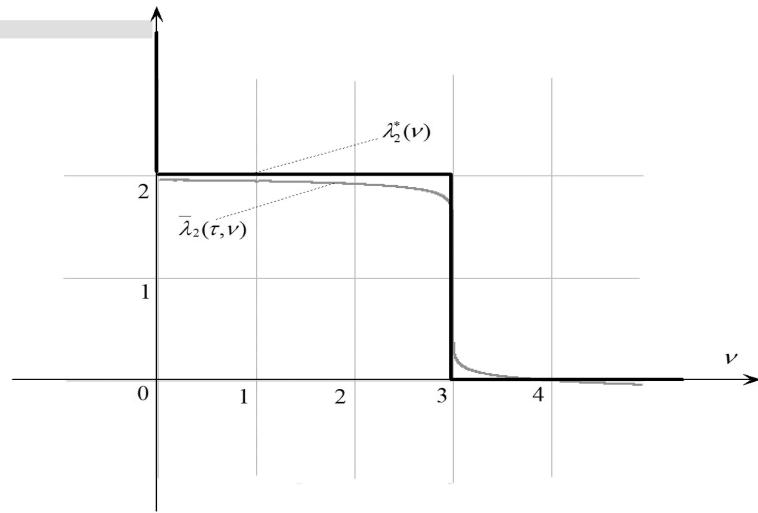


Рис. 3.4. Графическое представление зависимостей $\lambda_2^*(\nu)$ и $\bar{\lambda}_2(\tau, \nu)$ в задаче 3.2.1

Теперь покажем, что большая часть отмеченных затруднений может единообразно преодолена за счет использования следующего *сглаживающего* свойства метода штрафных функций.

Идея этого подхода заключается в замене зависимости $x^*(u)$ достаточно гладкой и определенной для всех $u \in \Omega$ и любых положительных τ функцией $\bar{x}(\tau, u)$, такой что

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau, u) = x^*(u) \quad \forall u \in \Omega , \quad (3.2.4)$$

где достаточно гладкая аппроксимирующая зависимость $\bar{x}(\tau, u)$ есть решение задачи нижнего уровня (3.2.1) – (3.2.2), получаемое по методу гладких штрафных функций.

Решением задачи нижнего уровня (3.2.1) – (3.2.2) при использовании метода штрафных функций является

$$\bar{x}(\tau, u) = \arg \max_x A(\tau, x, u) \quad \forall u \in \Omega ,$$

где вспомогательная функция $A(\tau, x, u)$ выбирается следующего вида:

$$A(\tau, x, u) = F(x, u) - \sum_{i=1}^m P(\tau, f_i(x, u)) \quad \forall u \in \Omega , \quad (3.2.5)$$

а штрафная функция $P(\tau, s)$ удовлетворяет условию (2.1.5). Иначе говоря, в предположении о достаточной гладкости вспомогательной функции по всем ее аргументам, аппроксимирующая зависимость $\bar{x}(\tau, u)$ может быть задана следующей системой уравнений:

$$\operatorname{grad}_x A(\tau, \bar{x}, u) = 0 \quad \forall u \in \Omega . \quad (3.2.6)$$

Теоретической базой рассматриваемого метода решения задачи верхнего уровня являются разложения по формуле Тейлора функций $\bar{x}(\tau, u)$ и известная из курса математического анализа теорема о системе неявно заданных функций [13].

Действительно, если штрафная функция $P(\tau, s)$ строго выпукла по s для любых s и по крайней мере дважды непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам, а решение задачи нижнего уровня (3.2.1) – (3.2.2) конечно, то

- 1) из свойств метода гладких штрафных функций следует, что решение уравнений (3.2.6), являющихся условиями стационарности вспомогательной функции $A(\tau, x, u)$, существует и локально единственно $\forall u \in \Omega$ и $\tau > 0$, и потому зависимость $\bar{x}(\tau, u)$ является функциональной;
- 2) для зависимости $\bar{x}(\tau, u)$ справедливо равенство (3.2.4);
- 3) если, наконец, функции $F(x, u)$ и $f_i(x, u) \quad \forall i = [1, m]$ имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то из теоремы о неявных функциях [13], примененной к условиям стационарности (3.2.6), следует непрерывная дифференцируемость вектор-функции $\bar{x}(\tau, u)$ по всем ее аргументам.

Проиллюстрируем эти свойства на примере задачи 3.2.1.

Пусть штрафная функция $P(\tau, s) = \tau \exp\left(\frac{s}{\tau}\right)$, тогда вспомогательная функция прямой задачи 3.2.1 будет иметь вид

$$A(\tau, \xi, \nu) = 2\xi - \tau \exp\left(-\frac{\xi}{\tau}\right) - \tau \exp\left(\frac{\xi - 3}{\tau}\right) - \tau \exp\left(\frac{\xi - \nu}{\tau}\right) .$$

Условие ее стационарности есть уравнение

$$2 + \exp\left(-\frac{\bar{\xi}}{\tau}\right) - \exp\left(\frac{\bar{\xi} - 3}{\tau}\right) - \exp\left(\frac{\bar{\xi} - \nu}{\tau}\right) = 0 ,$$

откуда

$$\bar{\xi}(\tau, \nu) = -\tau \ln \left(\sqrt{1 + \exp \left(-\frac{3}{\tau} \right) + \exp \left(-\frac{\nu}{\tau} \right)} - 1 \right).$$

Из полученной формулы следует, что функция $\bar{\xi}(\tau, \nu)$ определена и непрерывно дифференцируема для любых ν . Кроме того,

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\xi}(\tau, \nu) = \nu \quad \text{при } 0 \leq \nu \leq 3 \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\xi}(\tau, \nu) = 3 \quad \text{при } 3 < \nu < +\infty.$$

Справедливость этих равенств проверьте самостоятельно.

График функции $\bar{\xi}(\tau, \nu)$ показан на рис. 3.2 серым цветом. Стоит отметить, что на промежутке $(-\infty, 0)$, где зависимость $\xi^*(\nu)$ не определена, функция $\bar{\xi}(\tau, \nu)$ существует и удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\xi}(\tau, \nu) = \frac{\nu}{2}.$$

Действительно, при $\nu \in (-\infty, 0)$:

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau \rightarrow +0} \left(-\tau \ln \left(\sqrt{1 + \exp \left(-\frac{3}{\tau} \right) + \exp \left(-\frac{\nu}{\tau} \right)} - 1 \right) \right) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \left(-\tau \ln \left(\sqrt{\exp \left(-\frac{\nu}{\tau} \right)} - 1 \right) \right) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \left(-\tau \ln \left(\exp \left(-\frac{\nu}{2\tau} \right) \right) \right) = \frac{\nu}{2}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что точка $\xi = \frac{\nu}{2}$ является «компромиссной» на промежутке $\nu \in (-\infty, 0)$ для системы взаимоисключающих ограничений прямой задачи математического программирования 3.2.1:

$$\begin{cases} \xi \leq \nu, \\ \xi \geq 0, \end{cases}$$

что иллюстрирует еще одно свойство процедуры сглаживания решений методом штрафных функций.

Рассмотрим теперь результат применения процедуры сглаживания для решения двойственной задачи 3.2.1.

Используя штрафную функцию того же вида, что и в прямой задаче, с учетом того, что двойственная задача есть задача минимизации, получим следующую вспомогательную функцию

$$A(\tau, \lambda_1, \lambda_2, \nu) = 3\lambda_1 + \nu\lambda_2 + \tau \exp\left(-\frac{\lambda_1}{\tau}\right) + \tau \exp\left(-\frac{\lambda_2}{\tau}\right) + \tau \exp\left(\frac{2 - \lambda_1 - \lambda_2}{\tau}\right).$$

Условие стационарности этой функции по переменным λ_1 и λ_2 есть система:

$$\begin{cases} 3 - \exp\left(-\frac{\bar{\lambda}_1}{\tau}\right) - \exp\left(\frac{2 - \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2}{\tau}\right) = 0, \\ \nu - \exp\left(-\frac{\bar{\lambda}_2}{\tau}\right) - \exp\left(\frac{2 - \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2}{\tau}\right) = 0. \end{cases}$$

Введя обозначения

$$p = \exp\left(-\frac{\bar{\lambda}_1}{\tau}\right), \quad q = \exp\left(-\frac{\bar{\lambda}_2}{\tau}\right), \quad B = \exp\left(-\frac{2}{\tau}\right),$$

преобразуем эту систему к виду

$$\begin{cases} 3 - p = \frac{pq}{B}, \\ \nu - q = \frac{pq}{B}. \end{cases}$$

Откуда получаем

$$\bar{\lambda}_1(\tau, \nu) = -\tau \ln \frac{B - \nu + 3 + \sqrt{(B - \nu + 3)^2 + 12B}}{2},$$

$$\bar{\lambda}_2(\tau, \nu) = -\tau \ln \frac{B + \nu - 3 + \sqrt{(B + \nu - 3)^2 + 12B}}{2}.$$

Заметим, что из второго равенства в условиях стационарности следует, что они могут быть совместными лишь при $\nu > 0$. Напомним, что в случае $\nu < 0$ двойственная задача 3.2.1 имеет неограниченное решение, а при $\nu = 0$ ее решение имеет вид $\lambda_1^* = 0, \forall \lambda_2^* \geq 2$.

Итак, из полученных формул следует, что функции $\bar{\lambda}_1(\tau, \nu)$ и $\bar{\lambda}_2(\tau, \nu)$ определены и непрерывно дифференцируемы $\forall \nu > 0$. Кроме того, проверьте самостоятельно, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\lambda}_1(\tau, \nu) = 0 \quad \forall 0 < \nu < 3 \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\lambda}_1(\tau, \nu) = 2 \quad \forall 3 < \nu < +\infty ,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\lambda}_2(\tau, \nu) = 2 \quad \forall 0 < \nu < 3 \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\lambda}_2(\tau, \nu) = 3 \quad \forall 3 < \nu < +\infty .$$

Графики функции $\bar{\lambda}_1(\tau, \nu)$ и $\bar{\lambda}_2(\tau, \nu)$ показаны соответственно на рис. 3.3 и 3.4 серым цветом.

Рассмотрим теперь схему решения задачи верхнего уровня. В этом случае приближенное решение задачи верхнего уровня (3.2.3) сводится к поиску экстремума по u вспомогательного функционала вида

$$\bar{A}(\tau, u) = A(\tau, \bar{x}(\tau, u), u) , \quad (3.2.7)$$

для чего можно использовать классические варианты итерационной схемы 1°–4°, основанные на использовании градиентных методов первого или второго порядков. Обоснование такого использования можно найти, например, в [9], [14].

Эти методы, как известно, требуют нахождения при фиксированном $\tau > 0$ значения максимизируемой функции $\bar{A}(\tau, u)$, ее градиента и матрицы Гессе или же их непрерывных аппроксимаций. Заметим, что данные числовые характеристики могут быть рассчитаны без использования явного вида функции $\bar{A}(\tau, u)$.

Действительно, решив при фиксированных $u \in \Omega$ и $\tau > 0$ систему (3.2.6) и найдя $\bar{x}(\tau, u)$ – точку экстремума вспомогательной функции (3.2.5), мы получим из (3.2.7) значение $\bar{A}(\tau, u)$.

Компоненты вектора $\text{grad}_u \bar{A}(\tau, u)$ в силу (3.2.7) находятся по формуле

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \nu_t} = \frac{\partial A}{\partial \nu_t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial A}{\partial \xi_j} \frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial \nu_t} \quad \forall t = [1, k]$$

что с учетом следующего из (3.2.6) $\frac{\partial A}{\partial \xi_j}(\tau, \bar{x}(\tau, u), u) = 0 \quad \forall j = [1, k]$ дает

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \nu_t} = \frac{\partial A}{\partial \nu_t}(\tau, \bar{x}(\tau, u), u) . \quad (3.2.8)$$

Дифференцируя (3.2.8) по компонентам вектора u , получаем выражения для компонент матрицы Гессе:

$$\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial \nu_t \partial \nu_q} = \frac{\partial^2 A}{\partial \nu_t \partial \nu_q} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_j \partial \nu_t} \frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial \nu_q} \quad \forall t, q = [1, k] . \quad (3.2.9)$$

В последней формуле компоненты матрицы чувствительности $\frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial \nu_q} \quad \forall j = [1, n], q = [1, k]$ находятся из систем линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_j \partial \xi_1} \frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial \nu_t} = - \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1 \partial \nu_t} \quad \forall j = [1, n], t = [1, k] , \quad (3.2.10)$$

получаемых последовательным дифференцированием условий (3.2.6) по компонентам вектора u .

Описанные выше числовые характеристики вспомогательной функции $\bar{A}(\tau, u)$ позволяют использовать различные варианты методов первого или второго порядка для отыскания ее экстремальных точек в E^k при помощи процедур вида 1° – 4° . Например, в методе Ньютона–Рафсона компоненты улучшающего вектора w находятся из системы линейных уравнений

$$\sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial \nu_p \partial \nu_t} w_t = - \frac{\partial \bar{A}}{\partial \nu_p} \quad \forall p = [1, k] ,$$

а величина шага по улучшающему направлению определяется формулой

$$\sigma^* = \arg \max_{\sigma > 0} \bar{A}(\tau, u + \sigma w) .$$

Рассмотрим в качестве примера решения задачи оптимизации на множестве параметров задачу 1.1.2, имеющую следующую формулировку.

Найти максимум по ν_1 и ν_2 для

$$\Phi(\nu_1, \nu_2) = 2\xi_1^*(\nu_1, \nu_2) + 3\xi_2^*(\nu_1, \nu_2)$$

при условиях: $0 \leq \nu_1 \leq 17$ и $\frac{1}{4} \leq \nu_2 \leq 3$, где $\xi_1^*(\nu_1, \nu_2)$ и $\xi_2^*(\nu_1, \nu_2)$ суть решения задачи параметрического линейного программирования (нижнего уровня):

максимизировать $2\xi_1 + 3\xi_2$ по ξ_1 и ξ_2 для фиксированных значений параметров ν_1 и ν_2 при условиях: $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$,

$$\begin{array}{rcl} \xi_1 & + & 2\xi_2 \leq & \nu_1 , \\ 2\xi_1 & + & \nu_2 \xi_2 \leq & 17 - \nu_1 . \end{array}$$

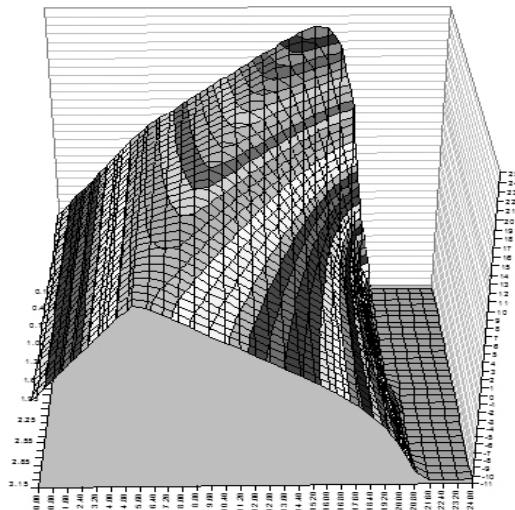


Рис. 3.5. Графическое 3D-представление вспомогательной функции $\bar{A}(\tau, u)$ для задачи 1.1.2

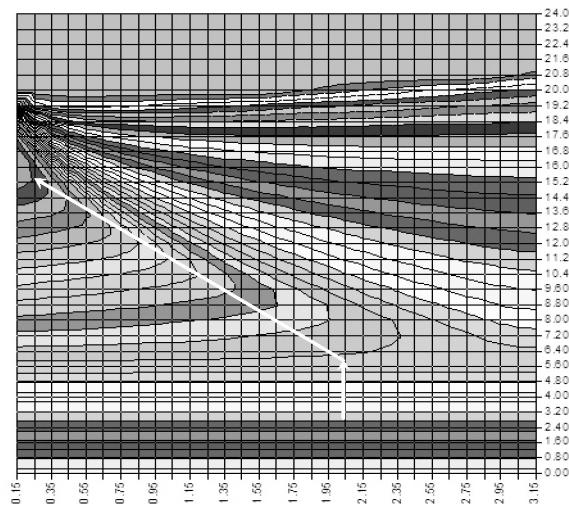


Рис. 3.6. Система изолиний вспомогательной функции $\bar{A}(\tau, u)$ в задаче 1.1.2

Для задачи нижнего уровня применим метод гладких штрафных функций с функцией $P(\tau, s) = \tau \exp\left(\frac{s}{\tau}\right)$, штрафующей нарушение ограничения $s \leq 0$.

Вспомогательная функция в этом случае будет

$$A(\tau, \xi_1, \xi_2, \nu_1, \nu_2) =$$

$$= 2\xi_1 + 3\xi_2 - \tau \exp\left(-\frac{\xi_1}{\tau}\right) - \tau \exp\left(-\frac{\xi_2}{\tau}\right) - \\ - \tau \exp\left(\frac{\xi_1 + 2\xi_2 - \nu_1}{\tau}\right) - \tau \exp\left(\frac{2\xi_1 + \nu_2\xi_2 - 17 + \nu_1}{\tau}\right).$$

Условие ее стационарности есть система уравнений вида

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_1}{\tau}\right) - \exp\left(\frac{\bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 - \nu_1}{\tau}\right) - \\ - 2 \exp\left(\frac{2\bar{\xi}_1 + \nu_2\bar{\xi}_2 - 17 + \nu_1}{\tau}\right) = 0, \\ 3 + \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_2}{\tau}\right) - 2 \exp\left(\frac{\bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 - \nu_1}{\tau}\right) - \\ - \nu_2 \exp\left(\frac{2\bar{\xi}_1 + \nu_2\bar{\xi}_2 - 17 + \nu_1}{\tau}\right) = 0. \end{array} \right.$$

Ее решения $-\bar{\xi}_1(\tau, \nu_1, \nu_2)$ и $\bar{\xi}_2(\tau, \nu_1, \nu_2)$ – суть результат сглаживания зависимостей $\xi_1 : *(\nu_1, \nu_2)$ и $\xi_2 : *(\tau, \nu_1, \nu_2)$.

Решение задачи верхнего уровня в рассматриваемом случае сводится к поиску максимума функции $\bar{A}(\tau, \nu_1, \nu_2)$, график которой приведен на рис. 3.5. Стоит отметить, что сравнение рисунков 1.1 и 3.5 наглядно демонстрирует как близость зависимостей $\bar{F}(x^*(u))$ и $A(\tau, \bar{x}(\tau, u))$, так и их различие. Например достаточно заметной оказывается гладкость функции $A(\tau, \bar{x}(\tau, u))$. Значение инструментального параметра τ было выбрано равным 0.3.

Из вышеизложенного следует, что для данной задачи компоненты градиента функции $A(\tau, \bar{x}(\tau, u))$ определяются формулами (3.2.8)

и имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{A}}{\partial \nu_1} &= \frac{\partial A}{\partial \nu_1} \left(\tau, \bar{\xi}_1(\tau, \nu_1, \nu_2), \bar{\xi}_2(\tau, \nu_1, \nu_2), \nu_1, \nu_2 \right) = \\
 &= \exp \left(\frac{\bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 - \nu_1}{\tau} \right) - \exp \left(\frac{2\bar{\xi}_1 + \nu_2\bar{\xi}_2 - 17 + \nu_1}{\tau} \right), \\
 \frac{\partial \bar{A}}{\partial \nu_2} &= \frac{\partial A}{\partial \nu_2} \left(\tau, \bar{\xi}_1(\tau, \nu_1, \nu_2), \bar{\xi}_2(\tau, \nu_1, \nu_2), \nu_1, \nu_2 \right) = \\
 &= -\bar{\xi}_2 \exp \left(\frac{2\bar{\xi}_1 + \nu_2\bar{\xi}_2 - 17 + \nu_1}{\tau} \right).
 \end{aligned}$$

Для практического поиска максимума вспомогательной функции $\bar{A}(\tau, \nu_1, \nu_2)$ применим описанную ранее процедуру $1^\circ\text{--}4^\circ$ с определением улучшающего направления по методу наискорейшего подъема. Результаты вычислений для первых итераций этой процедуры приведены в табл. 3.2.1а и 3.2.1б.

Т а б л и ц а 3.2.1а
Поиск максимума функции \bar{A} задачи 1.1.2 по параметрам ν_1 и ν_3 градиентным методом

Итер.	ν_1	ν_3	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	\bar{A}
0	3.00000	2.00000	3.20797	-0.00001	5.51588
1	5.80715	2.00000	5.02795	0.42242	10.76310
2	15.31606	0.25000	-0.11968	7.76480	21.87932

Т а б л и ц а 3.2.1б
Поиск максимума функции \bar{A} задачи 1.1.2 по параметрам ν_1 и ν_3 градиентным методом

Итер.	$ \text{grad}A $	ω_1	ω_2	Step
0	2.00002	1.00000	0.00000	2.80715
1	0.88148	0.98348	-0.18100	9.66860
2	8.24773	0.03708	-0.99931	***

Графическое представление траекторий движения в пространстве параметров для задачи 1.1.2 показано белыми стрелками на рис. 3.6.

Рассмотренный пример показывает, что использование процедуры $1^\circ - 4^\circ$ позволяет найти достаточно хорошее приближение к решению задачи верхнего уровня. Рассмотрение большего числа итераций представляется нецелесообразным, поскольку эта процедура при фиксированном значении инструментального параметра τ сходится не к точному решению задачи верхнего уровня, а к экстремальной точке вспомогательной функции, являющейся также лишь некоторым приближением к x^* .

Задача отыскания точного решения будет рассмотрена в следующем параграфе.

§ 3.3. Линейная экстраполяция в методе штрафных функций

Другим примером использования инструментальных параметров может служить процедура *линейной экстраполяции*, позволяющая уточнять решение задачи математического программирования, полученного методом гладких штрафных функций, путем решения некоторой системы линейных уравнений. Рассмотрим эту процедуру.

Напомним, что при использовании метода гладких штрафных функций, решение задачи математического программирования

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать } F(x) \text{ по } x \in \Omega \subseteq E^n \\ & \text{при условиях: } f_i(x) \leq 0, \quad i = [1, m], \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

где функции $F(x)$ и $f_i(x)$ $i = [1, m]$ определены и достаточно гладкие на множестве x , удовлетворяющие этим ограничениям, сводится к отысканию безусловного (т. е. без каких-либо ограничений) экстремума вспомогательной функции

$$A(\tau, x) = F(x) - \sum_{i=1}^m P(\tau, f_i(x)).$$

Гладкая по всем своим аргументам функция $P(\tau, s)$, называемая штрафной функцией, определена в § 2.1 и удовлетворяет условиям (2.1.5) – (2.1.7).

Для экстремальных точек вспомогательной функции $A(\tau, x)$ будем по-прежнему использовать обозначение

$$\bar{x}(\tau) = \arg \max_{x \in E^n} A(\tau, x),$$

что равносильно

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \text{grad}_x A(\tau, \bar{x}(\tau)) = o. \quad (3.3.2)$$

Как показано в § 3.2, вектор-функция $\bar{x}(\tau)$ обладает рядом свойств (таких как существование при нарушении условий (3.3.1), однозначность и гладкость), допускающих ее использование в практических эффективных, классических схемах решения оптимизационных задач.

При этом, однако, в случае гладких штрафных функций, значения $\bar{x}(\tau)$ отклоняются от x^* , хотя и близки к ним при малых положительных τ . И потому практический интерес представляет вопрос об оценке значения x^* при помощи $\bar{x}(\tau)$.

Вполне очевидная возможность повышения точности гладких аппроксимаций точного решения x^* при помощи вектор-функции $\bar{x}(\tau)$ за счет уменьшения значения τ с практической точки зрения не всегда целесообразна, так как обусловленность уравнения (3.3.2) ухудшается по мере уменьшения τ . Этот факт является специфической особенностью метода гладких штрафных функций.

Получать оценки значений x^* без решения уравнения (3.3.2) при малых значениях коэффициента штрафа τ оказывается возможным при использовании следующей вычислительной процедуры.

Предположим, что решение уравнения (3.3.2) – вектор $\bar{x}(\tau)$ – локально существует. Тогда для каждого достаточно малого $\tau \in (0, \tau_0]$ функция $A(\tau, \bar{x}(\tau))$ имеет единственную стационарную точку $\bar{x}(\tau)$, которая (в силу сделанных предположений) является точкой строгого локального максимума.

Следовательно, в пространстве E^n параметрически определена линия, называемая *траекторией экстремумов вспомогательной функции*: $\bar{x}(\tau) \forall \tau \in (0, \tau_0]$, для которой справедливо равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau) = x^*. \quad (3.3.3)$$

Иными словами, имеет место асимптотическое приближение к x^* при $\tau \rightarrow +0$.

При этом, как показано в [18], из условий теоремы 3.1.1 и уравнения (3.3.2) следует, что зависимость $\bar{x}(\tau)$ является достаточно гладкой функцией коэффициента штрафа τ . Тогда тейлоровская аппроксимация вектор-функции $\bar{x}(\tau)$ в окрестности некоторого значения $\tau \in (0, \tau_0]$ существует и имеет вид

$$\bar{x}(\tau + \Delta\tau) = \bar{x}(\tau) + \frac{d\bar{x}}{d\tau} \Delta\tau + o(\Delta\tau).$$

Если в этом равенстве перейти к пределу при $\Delta\tau \rightarrow -\tau + 0$ и учесть соотношение (3.3.3), то получается следующая оценка для $x^*(u)$:

$$x^* = \bar{x}(\tau) - \frac{d\bar{x}}{d\tau} \tau + o(\tau). \quad (3.3.4)$$

Значения компонент производных $\frac{d\bar{x}}{d\tau}$ могут быть найдены при помощи теоремы о неявных функциях [13], примененной к векторному уравнению (3.3.2).

Поскольку в координатном представлении уравнение (3.3.2) имеет вид системы $\frac{\partial A}{\partial \xi_k}(\tau, \bar{x}(\tau)) = 0 \quad \forall k = [1, n]$, то для вычисления производных $\frac{d\bar{\xi}_j}{d\tau} \forall j = [1, n]$ необходимо решить систему линейных уравнений

$$\left\{ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_t \partial \xi_j} \frac{d\bar{\xi}_j}{d\tau} = -\frac{\partial^2 A}{\partial \xi_t \partial \tau} \quad \forall t = [1, n]. \right. \quad (3.3.5)$$

Соотношения (3.3.4) – (3.3.5) являются основой вычислительной схемы, называемой далее процедурой *линейной экстраполяции*, – уточнения компонент вектора x^* с помощью вектор-функции $\bar{x}(\tau)$. Данное уточнение выполняется по очевидной формуле

$$\bar{x}_{(1)} = \bar{x}(\tau) - \frac{d\bar{x}}{d\tau} \tau, \quad (3.3.6)$$

поскольку при достаточно малом положительном значении коэффициента штрафа τ норма отклонения \bar{x}_1 от x^* будет меньше (в силу свойств тейлоровской аппроксимации), чем $|\bar{x}(\tau) - x^*|$.

Графическая интерпретация процедуры линейной экстраполяции, отражающая тот факт, что данное уточнение выполняется вдоль траектории экстремумов функции $A(\tau, x)$, показана на рис. 3.7.

Здесь следует заметить, что в случае, когда однократное применение экстраполяционной процедуры не обеспечивает желаемой точности, ее можно повторить (как это будет сделано, например, в § 5.3). Доказательство сходимости подобной процедуры приведено, например, в [9].

Продемонстрируем применение процедуры линейной экстраполяции для решения задачи линейного программирования, имеющей следующую формулировку:

максимизировать $2\xi_1 + 3\xi_2$ по $x \in E^2$

при условиях:

(3.3.7)

$$\begin{aligned}\xi_1 &\geq 0, \quad \xi_2 \geq 0, \\ \xi_1 + 2\xi_2 &\leq 6, \\ 2\xi_1 + \xi_2 &\leq 6.\end{aligned}$$

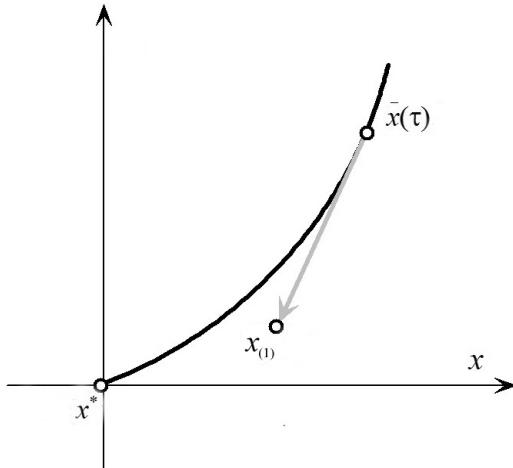


Рис. 3.7. Графическая интерпретация метода линейной экстраполяции зависимости $\bar{x}(\tau)$ при $\tau \rightarrow +0$

Вспомогательная функция $A(\tau, x)$ для этой задачи имеет вид

$$A(\tau, x) = 2\xi_1 + 3\xi_2 -$$

$$-P(\tau, -\xi_1) - P(\tau, -\xi_2) - P(\tau, \xi_1 + 2\xi_2 - 6) - P(\tau, 2\xi_1 + \xi_2 - 6),$$

а условия стационарности (3.3.2) соответственно

$$\left\{ \begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial \xi_1} &= 2 + \frac{\partial P}{\partial \xi_1}(\tau, -\xi_1) - \\ &\quad - \frac{\partial P}{\partial \xi_1}(\tau, \xi_1 + 2\xi_2 - 6) - 2 \frac{\partial P}{\partial \xi_1}(\tau, 2\xi_1 + \xi_2 - 6) = 0, \\ \frac{\partial A}{\partial \xi_2} &= 3 + \frac{\partial P}{\partial \xi_2}(\tau, -\xi_2) - \\ &\quad - 2 \frac{\partial P}{\partial \xi_2}(\tau, \xi_1 + 2\xi_2 - 6) - \frac{\partial P}{\partial \xi_2}(\tau, 2\xi_1 + \xi_2 - 6) = 0.\end{aligned}\right.$$

Для того чтобы продемонстрировать потенциальную целесообразность использования линейной экстраполяции, приведем два варианта ее применения с различными штрафными функциями. Пусть в первом варианте используется штрафная функция *1-го радикального* типа $P(\tau, s)$, для которой

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \sqrt{\left(\frac{s}{\tau}\right)^2 + 1} + \frac{s}{\tau},$$

а во втором – *экспоненциального* типа:

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \exp\left(\frac{s}{\tau}\right).$$

Для большей наглядности во всех случаях (в том числе и при различных значениях параметра τ) решение системы (3.3.2) находилось одним и тем же методом, с одной и той же начальной точкой и с одинаковыми значениями допусков погрешности решения.

Результаты расчетов для радикального случая приведены в табл. 3.3.1, а для экспоненциального в табл. 3.3.2.

Анализ полученных результатов показывает, что, хотя оба типа использованных штрафных функций удовлетворяют условию (3.1.3), без использования экстраполяции достигаемая точность решения существенно различается. Причина этого различия заключается в том, что константы Липшица градиента вспомогательной функции оказываются значительно большими для экспоненциального штрафа, чем для радикального. Что приводит к нарушению сходимости процедуры численного решения системы (3.3.2) при малых положительных значениях параметра τ (а значит и большей погрешности) в первом случае, чем во втором.

С другой стороны, результат линейной экстраполяции для экспоненциального штрафа оказался существенно точнее, чем можно было бы ожидать при использовании тейлоровской аппроксимации. В нашем случае (докажите самостоятельно!) это происходит потому, что слагаемые (равно как и их производные) во вспомогательной функции, соответствующие *неактивным* ограничениям, имеют экспоненциально малые значения.

Таким образом, использование линейной экстраполяции может быть оправданным с точки зрения минимизации суммарных затрат вычислительных ресурсов.

Таблица 3.3.1

Штрафная функция 1-го радикального типа

τ	Без экстраполяции		С экстраполяцией	
	x_1	x_2	x_1	x_2
0.1	2.096467882	1.936822158	2.000240805	1.999167976
0.01	2.009835949	1.993620401	2.000000940	1.999993607
0.001	2.000985855	1.999361206	2.000000008	1.999999938
0.0001	2.000098608	1.999936112	2.000000000	1.999999999
0.00001	2.000009861	1.999993611	2.000000000	2.000000000
0.000001	2.000000986	1.999999361	2.000000000	2.000000000
0.0000001	Потеря точности			

Таблица 3.3.2

Штрафная функция экспоненциального типа

τ	Без экстраполяции		С экстраполяцией	
	x_1	x_2	x_1	x_2
0.1	1.917169779	2.055799214	1.999999989	2.000000006
0.067	1.944503751	2.037385474	2.000000000	2.000000000
0.050	1.958584889	2.027899607	2.000000000	2.000000000
0.033	Потеря точности			

Рассмотрим теперь процедуру линейной экстраполяции для задачи (3.3.1), условие которой содержит вектор *экзогенных* параметров u с $\|u\| = \|\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k\|^T$.

В этой задаче требуется при каждом $u \in \Omega \subset E^k$ максимизировать по $\|x\| = \|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n\|^T$ выпуклую вверх по $x \in E^n$ и достаточно гладкую целевую функцию $F(x, u)$ при условиях:

$$f_i(x, u) \leq 0 \quad \forall i = [1, m], \quad (3.3.8)$$

где функции $f_i(x, u) \forall i = [1, m]$ достаточно гладкие и такие, что множество (3.3.8) выпукло по $x \in E^n$ во всех случаях, когда оно непусто.

Для решения этой задачи используем метод гладких штрафных функций со вспомогательной функцией

$$A(\tau, x, u) = F(x, u) - \sum_{i=1}^m P(\tau, f_i(x, u)), \quad (3.3.9)$$

где $P(\tau, s)$ – стандартная (см. § 2.1) гладкая штрафная функция для ограничения $s \leq 0$.

Задача *нижнего уровня* в этом случае формулируется так:

максимизировать вспомогательную функцию $A(\tau, x, u)$ по x
при фиксированных $\tau > 0$ и u .

Обозначим ее решение, определяемое векторным уравнением

$$\operatorname{grad}_{u \in \Omega} A\left(\tau, \bar{x}(\tau, u), u\right) = o, \quad (3.3.10)$$

как $\bar{x}(\tau, u)$. Тогда задача *верхнего уровня* сводится к максимизации по $u \in \Omega$ вспомогательной функции

$$\bar{E}(\tau, u) = A\left(\tau, \bar{x}(\tau, u), u\right) = F\left(\bar{x}(\tau, u), u\right) - \sum_{i=1}^m P\left(\tau, f_i\left(\bar{x}(\tau, u), u\right)\right). \quad (3.3.11)$$

Заметим, что в силу теоремы о неявных функциях [13] $\bar{x}(\tau, u)$ является гладкой функцией всех своих аргументов и имеет аппроксимацию по формуле Тейлора достаточно высокого порядка. При этом, как и раньше, точные решения (как пределы при $\tau \rightarrow +0$) задач нижнего и верхнего уровня обозначим x^* и u^* .

Будем считать, что задачу (3.3.11) удалось решить некоторым методом и получить ее решение в виде

$$\bar{u}(\tau) = \arg \max_{u \in \Omega} \bar{E}(\tau, u) = \arg \max_{u \in \Omega} A\left(\tau, \bar{x}(\tau, u), u\right). \quad (3.3.12)$$

Опишем процедуру линейной экстраполяции в рассматриваемой двухуровневой задаче. Очевидна следующая из теоремы Тейлора и аналогичная (3.3.4) формула экстраполирующего уточнения:

$$u^* \approx \bar{u}(\tau) - \frac{d\bar{u}}{d\tau} \tau. \quad (3.3.13)$$

Компоненты производной от вектор-функции $\bar{x}(\tau, \bar{u})$ по параметру τ находятся стандартно при помощи теоремы о неявных функциях по правилам дифференцирования сложной функции многих переменных из условий стационарности вспомогательных функций A и \bar{E} , которые мы (для большей наглядности) запишем в координатной форме, т. е. покомпонентно:

для задачи нижнего уровня для фиксированных $\tau > 0$ и $u \in \Omega$:

$$\frac{\partial A}{\partial \xi_j}(\tau, \bar{x}(\tau, u), u) = 0 \quad \forall j = [1, n], \quad (3.3.14)$$

для задачи верхнего уровня при фиксированном значении $\tau > 0$:

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial u_s}(\tau, \bar{x}(\tau, u), u) = 0 \quad \forall s = [1, k]. \quad (3.3.15)$$

Заметим, что (как и раньше) равенства (3.3.15) суть условия стационарности \bar{E} по u , записанные в упрощенном виде. Действительно, из правила дифференцирования сложной функции при учете соотношений (3.3.14) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}}{\partial u_s}(\tau, \bar{x}(\tau, u), u) &= \\ &= \frac{\partial A}{\partial u_s} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial A}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial u_s} = \frac{\partial A}{\partial u_s}(\tau, \bar{x}(\tau, u), u) = 0 \quad \forall s = [1, k]. \end{aligned}$$

Из соотношений (3.3.14), также согласно теореме о неявных функциях, можно найти производные от вектор-функции $\bar{x}(\tau, u)$ – решения задачи нижнего уровня – по всем ее аргументам, решив линейные системы уравнений вида

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1 \partial \xi_j} \frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial \tau} = - \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1 \partial \tau} \quad \forall l = [1, n] \quad (3.3.16)$$

и

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1 \partial \xi_j} \frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial u_s} = - \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1 \partial u_s} \quad \forall l = [1, n], \quad \forall s = [1, k]. \quad (3.3.17)$$

Для задачи верхнего уровня из условий (3.3.15) получаем

$$\sum_{t=1}^k \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial u_s \partial u_t} \frac{d \bar{u}_t}{d \tau} = - \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial u_s \partial \tau} \quad \forall s = [1, k], \quad (3.3.18)$$

где

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial u_s \partial u_t} = \frac{\partial^2 A}{\partial u_s \partial u_t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 A}{\partial u_s \partial \xi_j} \frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial u_t} \quad \forall t = [1, k], \quad \forall s = [1, k], \quad (3.3.19)$$

и

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial u_s \partial \tau} = \frac{\partial^2 A}{\partial u_s \partial \tau} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 A}{\partial u_s \partial \xi_j} \frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial \tau} \quad \forall s = [1, k], \quad (3.3.20)$$

причем вторые производные функции $A(\tau, x, u)$ вычислены в точке $\{\tau, \bar{x}(\tau, u), u\}$. Обратите также внимание на различие функций $\bar{E}(\tau, u)$ и $A(\tau, x, u)$ – это разные функции, зависящие от различного числа аргументов.

Итак, процедура линейной экстраполяции в двухуровневой параметрической задаче заключается в следующих действиях.

Вначале находятся стационарные точки вспомогательных функций (3.3.9) и (3.3.11). Потом решаются системы линейных уравнений (3.3.16), (3.3.17) и затем (3.3.18).

После чего по формуле (3.3.13) выполняется экстраполяция для вектора параметров u . Для уточненного u находится стационарная точка вспомогательной функции (3.3.9), вновь решается система линейных уравнений (3.3.16) и выполняется экстраполяция переменных в задаче нижнего уровня:

$$x^* \approx \bar{x}(\tau) - \frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau} \tau. \quad (3.3.21)$$

Проиллюстрируем использование описанной процедуры следующим примером.

Пусть требуется решить двухуровневую однопараметрическую задачу вида

нижнего уровня: максимизировать по $\{\xi_1, \xi_2\}$ целевую функцию $3\xi_1 + 4\xi_2$ при условиях: $\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0$,

$$\begin{array}{rcl} \xi_1 + 2\xi_2 - u & \leq & 0, \\ 2\xi_1 + \xi_2 - 12 + u & \leq & 0. \end{array}$$

верхнего уровня: максимизировать по u целевую функцию $3\xi_1^*(u) + 4\xi_2^*(u)$ при условиях: $2 \leq u \leq 12$,

где $\{\xi_1^*(u), \xi_2^*(u)\}$ – компоненты вектора решения задачи нижнего уровня. Проверьте самостоятельно, что решение этой задачи таково:

$$u^* = 8, \quad \xi_1^*(u^*) = 0, \quad \xi_2^*(u^*) = 4.$$

В качестве функции, «штрафующей» за нарушение ограничения $s \leq 0$, возьмем $P(\tau, s) = \tau \exp\left(\frac{s}{\tau}\right)$, где инструментальный параметр $\tau = 0.1$.

Тогда $\bar{\xi}_1(\tau, u)$ и $\bar{\xi}_2(\tau, u)$ – координаты стационарной точки вспомогательной функции (3.3.9), и $\bar{u}(\tau)$ – стационарная точка (3.3.12), будут связаны соотношениями (в которых для краткости опустим аргументы):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial A}{\partial \bar{\xi}_1} & = & 3 + \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_1}{\tau}\right) - \\ & & - \exp\left(\frac{\bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 - \bar{u}}{\tau}\right) - 2 \exp\left(\frac{2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 - 12 + \bar{u}}{\tau}\right) = 0, \\ \frac{\partial A}{\partial \bar{\xi}_2} & = & 4 + \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_2}{\tau}\right) - \\ & & - 2 \exp\left(\frac{\bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 - \bar{u}}{\tau}\right) - \exp\left(\frac{2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 - 12 + \bar{u}}{\tau}\right) = 0, \\ \frac{\partial A}{\partial \bar{u}} & = & \exp\left(\frac{\bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 - \bar{u}}{\tau}\right) - \exp\left(\frac{2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 - 12 + \bar{u}}{\tau}\right) = 0. \end{array} \right.$$

Решение этой системы уравнений дает

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \bar{\xi}_1 & = & -1.84 \cdot 10^{-10}, \\ \bar{\xi}_2 & = & 4.019178805, \\ \bar{u} & = & 8.009589403. \end{array} \right.$$

Для найденных значений $\bar{\xi}_1(\tau, u), \bar{\xi}_2(\tau, u)$ и $\bar{u}(\tau)$ воспользуемся процедурой линейной экстраполяции в задаче верхнего уровня.

Вначале составим и решим системы линейных уравнений (3.3.16) и (3.3.17), чтобы найти значения производных для неявно заданных функций $\bar{\xi}_1(\tau, u)$ и $\bar{\xi}_2(\tau, u)$ по параметру $\bar{u}(\tau)$. В рассматриваемом случае эти системы имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1 \partial \tau}, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_2^2} \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 A}{\partial \xi_2 \partial \tau} \end{cases} \quad (3.3.22)$$

и

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial u} + \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial u} = -\frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1 \partial u}, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial u} + \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_2^2} \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial u} = -\frac{\partial^2 A}{\partial \xi_2 \partial u}, \end{cases}$$

где элементы основных матриц для обеих систем суть

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} &= -\exp\left(-\frac{\bar{\xi}_1}{\tau}\right) - \\ &- \exp\left(\frac{\bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 - \bar{u}}{\tau}\right) - 4 \exp\left(\frac{2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 - 12 + \bar{u}}{\tau}\right) = -7.666666673, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} &= \\ &= -2 \exp\left(\frac{\bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 - \bar{u}}{\tau}\right) - 2 \exp\left(\frac{2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 - 12 + \bar{u}}{\tau}\right) = -5.333333335, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_2^2} &= -\exp\left(-\frac{\bar{\xi}_2}{\tau}\right) - \\ &- 4 \exp\left(\frac{\bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 - \bar{u}}{\tau}\right) - \exp\left(\frac{2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 - 12 + \bar{u}}{\tau}\right) = -6.666666665, \end{aligned}$$

а правые части соответственно равны

$$\begin{aligned} -\tau^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1 \partial \tau} &= -\bar{\xi}_1 \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_1}{\tau}\right) - (\bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 - \bar{u}) \exp\left(\frac{\bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 - \bar{u}}{\tau}\right) - \\ &- 2(2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 - 12 + \bar{u}) \exp\left(\frac{2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 - 12 + \bar{u}}{\tau}\right) = -1.15072829, \end{aligned}$$

$$-\tau^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_2 \partial \tau} = -\bar{\xi}_2 \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_1}{\tau}\right) - 2(\bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 - \bar{u}) \exp\left(\frac{\bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 - \bar{u}}{\tau}\right) - \\ - (2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 - 12 + \bar{u}) \exp\left(\frac{2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 - 12 + \bar{u}}{\tau}\right) = -1.15072829$$

и

$$-\tau \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1 \partial u} = -\exp\left(\frac{\bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 - \bar{u}}{\tau}\right) - \\ + 2 \exp\left(\frac{2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 - 12 + \bar{u}}{\tau}\right) = 1.333333336,$$

$$-\tau \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_2 \partial u} = -2 \exp\left(\frac{\bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 - \bar{u}}{\tau}\right) - \\ + \exp\left(\frac{2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 - 12 + \bar{u}}{\tau}\right) = -1.333333331.$$

Решения этих систем имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \tau} = 0.067689899, \\ \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \tau} = 0.118457324 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial u} = -0.705882353, \\ \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial u} = 0.764705882. \end{cases}$$

Экстраполяционное уточнение для задачи верхнего уровня выполним по формуле (3.3.13), для чего потребуется значение производной $\frac{d\bar{u}}{d\tau}$. Это значение можно найти из условия стационарности (3.3.18), которое для рассматриваемой задачи будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial u^2} \frac{d\bar{u}}{d\tau} + \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial u \partial \tau} = 0,$$

где

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial u \partial \xi_1} \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial u} + \frac{\partial^2 A}{\partial u \partial \xi_2} \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial u}$$

и

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial u \partial \tau} = \frac{\partial^2 A}{\partial u \partial \tau} + \frac{\partial^2 A}{\partial u \partial \xi_1} \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 A}{\partial u \partial \xi_2} \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \tau}.$$

Используя значения производных, найденные выше, и принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \tau^2 \frac{\partial^2 A}{\partial u \partial \tau} &= -(\bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 - \bar{u}) \exp\left(\frac{\bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 - \bar{u}}{\tau}\right) + \\ &+ (2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 - 12 + \bar{u}) \exp\left(\frac{2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 - 12 + \bar{u}}{\tau}\right) = 2.3381 \cdot 10^{-9} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial^2 A}{\partial u^2} &= -\exp\left(\frac{\bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 - \bar{u}}{\tau}\right) - \\ &- \exp\left(\frac{2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 - 12 + \bar{u}}{\tau}\right) = -2.666666667, \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial u^2} &= -0.705882354 & \Rightarrow & \frac{d\bar{u}}{d\tau} = 0.095894027. \\ \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial u \partial \tau} &= 0.067689901 \end{aligned}$$

В итоге, завершая процедуру линейной экстраполяции для задачи верхнего уровня, получаем

$$u^* \approx \bar{u}(\tau) - \tau \frac{d\bar{u}}{d\tau} = 8.009589403 - 0.1 \cdot 0.095894027 = 8.$$

Приступим теперь к экстраполяции для задачи нижнего уровня. Экзогенный параметр u зафиксируем на его уточненном значении $u = 8$ и найдем соответствующую стационарную точку вспомогательной функции (3.3.9). Получаем

$$\begin{cases} \bar{\xi}_1 &= 6.812788153 \cdot 10^{-3}, \\ \bar{\xi}_2 &= 4.0117944243. \end{cases}$$

Затем решая систему линейных уравнений (3.3.22), коэффициенты основной матрицы которой для найденной стационарной точки оказываются равными

$$\tau \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} = -7.447136689, \quad \tau \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1 \partial x_2} = -5.289427338,$$

$$\tau \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_2^2} = -6.710572662,$$

а правые части соответственно равны

$$-\tau^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1 \partial \tau} = -1.13120557, \quad -\tau^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_2 \partial \tau} = -1.151818742,$$

получаем соответствующие значения коэффициентов чувствительности по инструментальному параметру τ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \tau} = 0.068127882, \\ \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \tau} = 0.117944243. \end{cases}$$

Наконец, используя экстраполяционные формулы (3.3.21):

$$x^* \approx \bar{x}(\tau) - \frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau} \tau,$$

получим уточненные значения переменных ξ_1 и ξ_2 :

$$\xi_1^* \approx \bar{\xi}_1(\tau) - \tau \frac{d\bar{\xi}_1}{d\tau} = 6.8127882 \cdot 10^{-3} - 0.1 \cdot 0.068127882 = 0,$$

$$\xi_2^* \approx \bar{\xi}_2(\tau) - \tau \frac{d\bar{\xi}_2}{d\tau} = 4.0117944243 - 0.1 \cdot 0.117944243 = 4.$$

§ 3.4. Метод штрафных функций и множители Лагранжа

Помимо эффекта сглаживания решений задач математического программирования метод гладких штрафных функций обладает другой полезной особенностью: кроме самого решения задачи программирования он позволяет получать асимптотическую оценку компонент ее вектора: $\Lambda^* \in E^m$, $\|\Lambda^*\| = \|\lambda_1^* \lambda_2^* \dots \lambda_m^*\|^T$ – множителей Лагранжа, называемых также *двойственными переменными*.

Данное свойство является также альтернативой непосредственному решению двойственной задачи (скажем, тем же методом штрафных функций) в тех случаях, когда последняя может быть сформулирована.

Рассмотрим это свойство для следующей задачи математического программирования:

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать } F(x) \text{ по } x \in E^n \quad \|x\| = \|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n\|^T \\ & \text{при условиях: } f_i(x) \leq 0 \quad \forall i = [1, m]. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Пусть она имеет изолированное локальное решение x^* . Построим для этой задачи стандартную функцию Лагранжа:

$$L(x, \Lambda) = F(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$$

и покажем, что справедлива

Теорема 3.4.1 Пусть для задачи (3.4.1), где функции $F(x)$ и $f_i(x) \forall i = [1, m]$ дважды непрерывно дифференцируемые, выполнены достаточные условия существования изолированного локального решения, включающие равенство $\text{grad}_x L(x^*, \Lambda^*) = o$, положительную определенность матрицы Гессе:

$$\left\| \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_k}(x^*, \Lambda^*) \right\|,$$

а также строгие условия дополняющей неэжесткости, т. е. $\forall i = [1, m]$:

$$\begin{aligned} \lambda_i^* > 0 & \iff f_i(x^*) = 0, \\ \lambda_i^* = 0 & \iff f_i(x^*) < 0. \end{aligned}$$

Тогда векторы x^* и Λ^* единственные.

Доказательство

Доказательство можно найти в [26] (см. теорему 5.3.1).

Теорема доказана.

Применим для решения задачи (3.4.1) метод гладких штрафных функций с функцией $P(\tau, s)$, штрафующей нарушение ограничения $s \leq 0$.

Вспомогательная функция в этом случае будет

$$A(\tau, x) = F(x) - \sum_{i=1}^m P(\tau, f_i(x)) , \quad (3.4.2)$$

а условие ее стационарности $\underset{x}{\operatorname{grad}} A(\tau, x) = o$ можно представить в виде

$$\operatorname{grad} F(\tilde{x}) - \sum_{i=1}^m \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, \tilde{x}(\tau)) \operatorname{grad} f_i(\tilde{x}) = o , \quad (3.4.3)$$

где $\tilde{x}(\tau) = \arg \max_x A(\tau, x)$ – точка стационарности вспомогательной функции $A(\tau, x)$. Тогда будет верна

Теорема 3.4.2 Пусть для задачи (3.4.1) выполнены все условия теоремы 3.4.1. Тогда справедливы равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, \tilde{x}(\tau)) = \lambda_i^* \quad \forall i = [1, m] . \quad (3.4.4)$$

Доказательство

Из предположений:

- о непрерывной дифференцируемости функций $F(x)$ и $f_i(x) \forall i = [1, m]$,
- о свойствах штрафной функции $P(\tau, s)$, определяемых теоремой 3.1.1 ,
- о применимости теоремы о неявных функциях [13]

следует, что зависимость $\tilde{x}(\tau)$ является функциональной, равномерно непрерывной и гладкой $\forall \tau \in (0, t_0]$, для которой существуют пределы вида

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +0} \tilde{\xi}_j(\tau) &= \xi_j^* \quad \forall j = [1, n] , \\ \lim_{\tau \rightarrow +0} \tilde{\lambda}_i(\tau) &= \lambda_i^* \quad \forall i = [1, m] . \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь пределы, указанные в формулировке теоремы. Из предположения о регулярности решения x^* следует линейная независимость системы векторов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grad}_j f_i(x^*) = \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}(x^*) \quad \forall i \in I^*, \quad j = [1, n] \end{array} \right\}. \quad (3.4.5)$$

Равенство $\text{grad}_x L(x^*, \Lambda^*) = o$ с учетом $\lambda_i^* = 0 \quad \forall i \notin I^*$ можно записать как

$$\text{grad}F(x^*) - \sum_{i \in I^*} \lambda_i^* \text{grad}f_i(x^*) = o, \quad (3.4.6)$$

в то время как из (3.4.3) в силу сделанных предположений следует

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \text{grad}F(\tilde{x}) - \sum_{i \in I^*} \left(\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, \tilde{x}(\tau)) \right) \lim_{\tau \rightarrow +0} \text{grad}f_i(\tilde{x}) = o$$

или

$$\text{grad}F(x^*) - \sum_{i \in I^*} \left(\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, \tilde{x}(\tau)) \right) \text{grad}f_i(x^*) = o. \quad (3.4.7)$$

Вычитая почленно из равенства (3.4.6) равенство (3.4.7), получаем

$$\sum_{i \in I^*} \left(\lambda_i^* - \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, \tilde{x}(\tau)) \right) \text{grad}f_i(x^*) = o.$$

Поскольку система градиентов ограничений, активных в точке x^* , линейно независимая, то линейная комбинация этих векторов, стоящая в левой части последнего равенства, будет иметь только нулевые коэффициенты. Поэтому

$$\lambda_i^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, \tilde{x}(\tau)) \quad \forall i \in I^*.$$

Наконец, в случае $i \notin I^*$ согласно теореме 3.1.1

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, \tilde{x}(\tau)) = 0 \quad \forall i \notin I^*,$$

что завершает доказательство теоремы.

Теорема доказана.

Здесь важно отметить, что утверждение теоремы 3.4.2 справедливо лишь в случае регулярной задачи (3.4.1), то есть когда x^* и Λ^* существуют и единственны. Однако пределы

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial f_i}(\tau, \tilde{x}(\tau)) \quad \forall i = [1, m] \quad (3.4.8)$$

существуют и единственны для существенно более широкого класса задач (3.4.1), а именно для задач, в которых к условию стационарности вспомогательной функции $A(\tau, x)$ применима теорема о существовании системы непрерывно дифференцируемых функций заданных неявно.

Иначе говоря, пределы (3.4.8) можно рассматривать как некоторое обобщение стандартных множителей Лагранжа, для которого значения этих пределов совпадают со значениями множителей Лагранжа в случаях, когда последние существуют и единственны. При этом функции $\check{\lambda}_i(\tau) = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, \tilde{x}(\tau)) \quad \forall i = [1, m]$ служат асимптотическими оценками двойственных переменных при $\tau \rightarrow +0$ (см. рис. 3.8).

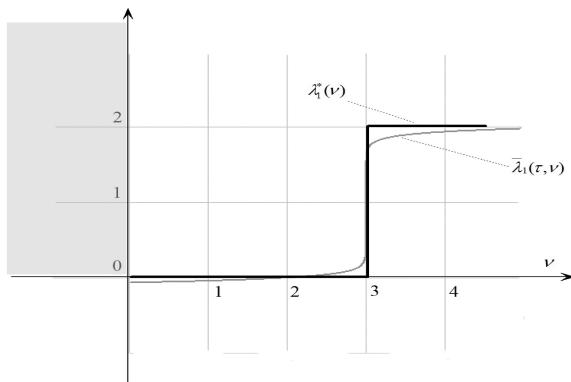


Рис. 3.8. Сглаживающая аппроксимация зависимости множителей Лагранжа от параметров функциями $\frac{\partial P}{\partial s}$ на примере задачи 3.2.1

Описанное выше свойство удобно проиллюстрировать на примере линейных задач, поскольку для них задача, определяющая значения множителей Лагранжа Λ^* , не использует в своей постановке значения x^* . Иными словами, в линейном случае задачи поиска x^* и Λ^* могут решаться независимо друг от друга.

Пусть исходная задача (3.4.1) есть задача линейного программирования вида

максимизировать по $x \in E^n$ $\|x\| = \|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n\|^T$:

$$F(x) = \sum_{j=1}^n \sigma_j \xi_j$$

при условиях: $\xi_j \geq 0 \quad \forall j = [1, n]$ и (3.4.9)

$$f_i(x) = -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \leq 0 \quad \forall i = [1, m].$$

И пусть, как и раньше, ее решение обозначается x^* .

Тогда задача линейного программирования, двойственная к прямой задаче (3.4.9), будет

минимизировать по $\Lambda \in E^m$ $\|\Lambda\| = \|\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m\|^T$:

$$G(\Lambda) = \sum_{i=1}^m \beta_i \lambda_i$$

при условиях: $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = [1, m]$ и (3.4.10)

$$g_i(\lambda) = -\sigma_i + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \lambda_i \geq 0 \quad \forall j = [1, n].$$

Ее решение обозначаем по-прежнему как Λ^* .

В качестве примера рассмотрим регулярную задачу (3.3.7):

максимизировать $2\xi_1 + 3\xi_2$ по $x \in E^2$

при условиях:

$$\begin{aligned} \xi_1 &\geq 0, \quad \xi_2 \geq 0, \\ \xi_1 + 2\xi_2 &\leq 6, \\ 2\xi_1 + \xi_2 &\leq 6, \end{aligned}$$

точное решение которой легко находится геометрически и имеет следующий вид: $\xi_1^* = 2$, $\xi_2^* = 2$, $\lambda_1^* = \frac{4}{3}$, $\lambda_2^* = \frac{1}{3}$.

Найдем теперь решение этой задачи методом гладких штрафных функций при помощи несколько сложной на вид, определенной в предыдущем параграфе, 1-й радикальной функции:

$$P(\tau, s) = \frac{s}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{s}{\tau}\right)^2 + 1} + \frac{s}{\tau} \right) + \frac{\tau}{2} \ln \left(\sqrt{\left(\frac{s}{\tau}\right)^2 + 1} + \frac{s}{\tau} \right), \quad (3.4.11)$$

для которой

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \sqrt{\left(\frac{s}{\tau}\right)^2 + 1 + \frac{s}{\tau}}. \quad (3.4.12)$$

Несложно установить, что штрафная функция вида (3.4.11) удовлетворяет всем условиям теоремы 3.1.1. Графики (3.4.11) и (3.4.12) показаны на рис. 3.9. Заметим, что эти функции имеют производные любого порядка и асимптотическое поведение при $s \rightarrow +\infty$: $P(\tau, s) \approx \frac{s^2}{\tau}$ и $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s) \approx \frac{2s}{\tau}$.

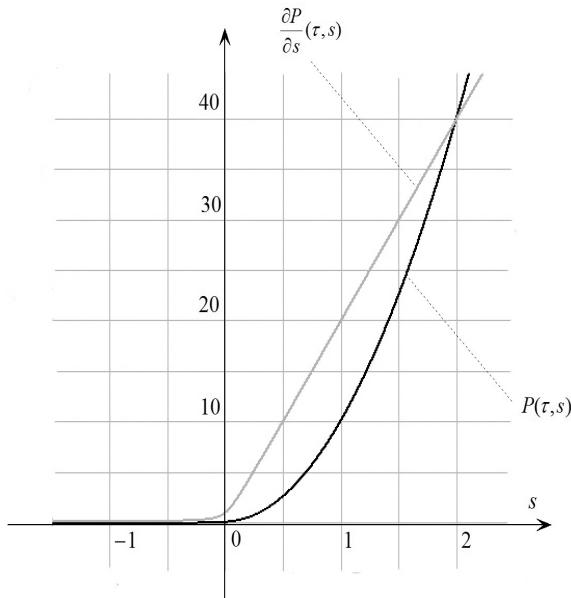


Рис. 3.9. Графики функций (3.4.11) и (3.4.12) для $\tau = 0.1$

Со штрафом (3.4.11) условие стационарности для вспомогательной функции в задаче (3.3.7) в координатах будет иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + \sqrt{\left(\frac{-\tilde{\xi}_1}{\tau}\right)^2 + 1 + \frac{-\tilde{\xi}_1}{\tau}} - \\ - \left(\sqrt{\left(\frac{-6 + \tilde{\xi}_1 + 2\tilde{\xi}_2}{\tau}\right)^2 + 1 + \frac{-6 + \tilde{\xi}_1 + 2\tilde{\xi}_2}{\tau}} \right) - \\ - 2 \left(\sqrt{\left(\frac{-6 + 2\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2}{\tau}\right)^2 + 1 + \frac{-6 + 2\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2}{\tau}} \right) = 0, \\ \\ 3 + \sqrt{\left(\frac{-\tilde{\xi}_2}{\tau}\right)^2 + 1 + \frac{-\tilde{\xi}_2}{\tau}} - \\ - 2 \left(\sqrt{\left(\frac{-6 + \tilde{\xi}_1 + 2\tilde{\xi}_2}{\tau}\right)^2 + 1 + \frac{-6 + \tilde{\xi}_1 + 2\tilde{\xi}_2}{\tau}} \right) - \\ - \left(\sqrt{\left(\frac{-6 + 2\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2}{\tau}\right)^2 + 1 + \frac{-6 + 2\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2}{\tau}} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 3.4.1, первая колонка которой содержит значения инструментального параметра τ , вторая и третья – величины компонент вектора $\tilde{x}(\tau)$, а четвертая и пятая – оценки значений двойственных переменных, полученные по формулам (3.4.4).

Для большей наглядности в табл. 3.4.1 также включены оценки множителей Лагранжа, найденные тем же вариантом метода гладких штрафных функций как решения задачи, двойственной к задаче (3.3.7).

Эта задача, согласно теории двойственности, имеет вид

минимизировать $6\lambda_1 + 6\lambda_2$ по $\Lambda \in E^2$

при условиях:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\geq 0, & \lambda_2 &\geq 0, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 &\geq 2, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 &\geq 3. \end{aligned}$$

Таблица 3.4.1

Величины $\tilde{x}(\tau)$, $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i)$ и $\tilde{\Lambda}$ для различных значений τ .
Случай 1-й радикальной штрафной функции в задаче (3.3.7)

τ	$\tilde{\xi}_1$	$\tilde{\xi}_2$	$\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_1)$	$\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_2)$	$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$
10^{-1}	1.90425799	2.06274298	1.34073727	0.34275080	1.30531293	0.31272228
10^{-2}	1.99016482	2.00637914	1.33415724	0.33417755	1.33080440	0.33087539
10^{-3}	1.99901415	2.00063879	1.33341657	0.33341678	1.33308305	0.33308375
10^{-4}	1.99990139	2.00006389	1.33334167	0.33334167	1.33330833	0.33330834
10^{-5}	1.99999014	2.00000639	1.33333417	0.33333083	1.33333083	0.33333083
10^{-6}	1.99999901	2.00000064	1.33333342	0.33333342	1.33333308	0.33333308

Соответствующее условие стационарности вспомогательной функции

$$A_D(\tau, \lambda_1, \lambda_2) = G(\lambda_1, \lambda_2) +$$

$$+P(\tau, -g_1(\lambda_1, \lambda_2)) + P(\tau, -g_2(\lambda_1, \lambda_2)) +$$

$$+P(\tau, \lambda_1) + P(\tau, \lambda_2)$$

для данной задачи будет иметь следующий вид:

$$\underset{\Lambda}{\operatorname{grad}} A_D(\tau, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2) = o$$

или же в координатах:

$$\left\{
\begin{array}{l}
6 - \left(\sqrt{\left(\frac{-\tilde{\lambda}_1}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{-\tilde{\lambda}_1}{\tau} \right) - \\
- \left(\sqrt{\left(\frac{2 - \tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{2 - \tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2}{\tau} \right) - \\
- 2 \left(\sqrt{\left(\frac{3 - 2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{3 - 2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2}{\tau} \right) = 0, \\
\\
6 - \left(\sqrt{\left(\frac{-\tilde{\lambda}_2}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{-\tilde{\lambda}_2}{\tau} \right) - \\
- 2 \left(\sqrt{\left(\frac{2 - \tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{2 - \tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2}{\tau} \right) - \\
- \left(\sqrt{\left(\frac{3 - 2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{3 - 2\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2}{\tau} \right) = 0.
\end{array}
\right.$$

Анализ данных в табл. 3.4.1 показывает их соответствие утверждениям теоремы 3.1.1. Однако использование штрафных функций иных типов может изменить величину погрешности значений двойственных переменных, возникающей при использовании формул (3.4.4).

Например для 2-й радикальной штрафной функции:

$$P(\tau, s) = s \left(\sqrt{\left(\frac{s}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{s}{\tau} \right) \quad \text{c} \quad \frac{\partial P}{\partial s} = \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{s}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{s}{\tau} \right)^2}{\sqrt{\left(\frac{s}{\tau} \right)^2 + 1}} \quad (3.4.13)$$

условия стационарности:

$$\left\{
\begin{aligned}
& 2 + \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{-\tilde{\xi}_1}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{-\tilde{\xi}_1}{\tau} \right)^2}{\sqrt{\left(\frac{-\tilde{\xi}_1}{\tau} \right)^2 + 1}} - \\
& - \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{-6 + \tilde{\xi}_1 + 2\tilde{\xi}_2}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{-6 + \tilde{\xi}_1 + 2\tilde{\xi}_2}{\tau} \right)^2}{\sqrt{\left(\frac{-6 + \tilde{\xi}_1 + 2\tilde{\xi}_2}{\tau} \right)^2 + 1}} - \\
& - 2 \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{-6 + 2\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{-6 + 2\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2}{\tau} \right)^2}{\sqrt{\left(\frac{-6 + 2\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2}{\tau} \right)^2 + 1}} = 0, \\
& 3 + \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{-\tilde{\xi}_2}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{-\tilde{\xi}_2}{\tau} \right)^2}{\sqrt{\left(\frac{-\tilde{\xi}_2}{\tau} \right)^2 + 1}} - \\
& - 2 \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{-6 + \tilde{\xi}_1 + 2\tilde{\xi}_2}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{-6 + \tilde{\xi}_1 + 2\tilde{\xi}_2}{\tau} \right)^2}{\sqrt{\left(\frac{-6 + \tilde{\xi}_1 + 2\tilde{\xi}_2}{\tau} \right)^2 + 1}} - \\
& - 2 \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{-6 + 2\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{-6 + 2\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2}{\tau} \right)^2}{\sqrt{\left(\frac{-6 + 2\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2}{\tau} \right)^2 + 1}} = 0,
\end{aligned}
\right.$$

из которых получаем результаты, приводимые в табл. 3.4.2.

Таблица 3.4.2

Величины $\tilde{x}(\tau)$, $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i)$ и $\tilde{\lambda}$ для различных значений τ .
Случай 2-й радикальной штрафной функции в задаче (3.3.7)

τ	$\tilde{\xi}_1$	$\tilde{\xi}_2$	$\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_1)$	$\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_2)$	$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$
10^{-1}	1.96091885	2.02703860	1.33334227	0.33334540	1.32018021	0.32040402
10^{-2}	1.99609179	2.00270389	1.33333334	0.33333334	1.33202792	0.33202794
10^{-3}	1.99960918	2.00027039	1.33333333	0.33333333	1.33320279	0.33320279
10^{-4}	1.99996092	2.00002704	1.33333333	0.33333333	1.33332028	0.33332028
10^{-5}	1.99999609	2.00000270	1.33333333	0.33333333	1.33333203	0.33333203
10^{-6}	1.99999961	2.00000027	1.33333333	0.33333333	1.33333320	0.33333320

Нетрудно заметить, что в табл. 3.4.1 и 3.4.2 имеется разница в величинах оценок двойственных переменных, полученных по формулам (3.4.4), обусловленная различием предельных при $\tau \rightarrow +0$ свойств использованных штрафных функций или, проще говоря, различием в формулах (3.4.11) и (3.4.13).

Глава 4. Функции обратных связей в задачах линейного программирования

Как известно, наличие в формулировке оптимизационной задачи ограничений типа *нестрогое неравенство* может являться причиной разнообразных вычислительных затруднений, возникающих в процессе её решения, см. [10], [11]. Поэтому представляют интерес альтернативные методы, сводящие задачи математического программирования к равносильным задачам², не содержащим в своих постановках ограничений этого типа.

В данной главе мы рассмотрим вариант метода асимптотических оценок [28], основанный на использовании преобразования ограничений типа неравенство в ограничения типа равенство, который можно использовать для регуляризации и решения пары взаимно двойственных задач *линейного программирования*.

§ 4.1. Описание метода обратных связей для задач линейного программирования

Приведем вначале предварительные соображения, позволяющие сформулировать вариант некоторого метода асимптотических оценок для задач математического программирования.

²Примером такой альтернативы может служить рассмотренный ранее метод гладких штрафных функций.

Рассмотрим пару взаимодвойственных задач линейного программирования, записанных в симметричном формате.

Пусть $x \in E^n$, $\Lambda \in E^m$, а их координатные представления соответственно равны $\|x\| = \|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n\|^T$, $\|\Lambda\| = \|\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m\|^T$. Тогда исходная (*прямая*) задача линейного программирования будет иметь вид

$$\begin{aligned} \text{максимизировать по } \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \quad F(x) = \sum_{j=1}^n \sigma_j \xi_j \\ \text{при условиях: } \xi_j \geq 0 \quad \forall j = [1, n] \text{ и} \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

$$f_i(x) = -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \leq 0 \quad \forall i = [1, m].$$

Эту задачу для краткости будем именовать *прямой задачей* и обозначать ее решение как x^* .

Задача, *двойственная* к прямой, будет (согласно правилам теории двойственности, см. [15], [17]³) иметь вид

$$\begin{aligned} \text{минимизировать по } \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\} \quad G(\Lambda) = \sum_{i=1}^m \beta_i \lambda_i \\ \text{при условиях: } \lambda_i \geq 0 \quad \forall i = [1, m] \text{ и} \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

$$g_j(\Lambda) = -\sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \lambda_i \geq 0 \quad \forall j = [1, n].$$

Ее решение будем обозначать Λ^* .

Напомним также, что задача, двойственная к двойственной, совпадает с прямой задачей. Иначе говоря, задача (4.1.1) есть двойственная для задачи (4.1.2). Это означает, что компоненты вектора x^* являются множителями Лагранжа для задачи (4.1.2), точно так же, как компоненты вектора Λ^* суть множители Лагранжа в задаче (4.1.1).

Применим для решения задач (4.1.1) и (4.1.2) рассмотренный ранее метод гладких штрафных функций, используя в обоих случаях одинаковую штрафную функцию $P(\tau, s)$, удовлетворяющую условиям теоремы 2.3.1. Вспомогательными для этих задач будут функции

$$A_P(\tau, x) = F(x) - \sum_{i=1}^m P(\tau, f_i(x)) - \sum_{j=1}^n P(\tau, (-\xi_j)) \quad (4.1.3)$$

³Известно, что существуют различные формы записи пары взаимодвойственных задач, но в данном случае мы выбрали так называемую симметричную форму.

и

$$A_D(\tau, \Lambda) = G(\Lambda) + \sum_{j=1}^n P(\tau, -g_j(\Lambda)) + \sum_{i=1}^m P(\tau, (-\lambda_i)). \quad (4.1.4)$$

Условия стационарности функций (4.1.3) и (4.1.4) имеют вид

$$\underset{x}{\text{grad}} A_P(\tau, \tilde{x}(\tau)) = o \quad \text{и} \quad \underset{\Lambda}{\text{grad}} A_D(\tau, \check{\Lambda}(\tau)) = o, \quad (4.1.5)$$

где векторы $\tilde{x}(\tau)$ и $\check{\Lambda}(\tau)$ являются стационарными точками функций (4.1.3) и (4.1.4) $\forall \tau > 0$.

К векторным уравнениям (4.1.5) применима теорема о неявных функциях [13], в силу чего величины $F(\tilde{x}(\tau))$ и $G(\check{\Lambda}(\tau))$ можно использовать в качестве аппроксимаций $F(x^*)$ и $G(\Lambda^*)$.

Кроме того, в регулярном случае (то есть в случае однозначной разрешимости задач (4.1.1) и (4.1.2)) в силу теоремы 3.4.2 оказываются справедливыми равенства

$$\lambda_i^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial f_i}(\tau, f_i(\tilde{x}(\tau))) \quad \forall i = [1, m], \quad (4.1.6)$$

$$\xi_j^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial g_j}(\tau, -g_j(\check{\Lambda}(\tau))) \quad \forall j = [1, n]. \quad (4.1.7)$$

Для иллюстрации приведем решения уравнений (4.1.5) со штрафной функцией (3.4.11) 1-го радикального типа $P(\tau, s)$, у которой

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \sqrt{\left(\frac{s}{\tau}\right)^2 + 1} + \frac{s}{\tau},$$

для взаимодвойственной пары:

прямая задача: максимизировать в E^2 функцию $F = 2\xi_1 + 3\xi_2$
при условиях: $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$ и

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 &\leq 6, \\ 2\xi_1 + \xi_2 &\leq 6; \end{aligned}$$

двойственная задача: минимизировать в E^2 функцию

$$G = 6\lambda_1 + 6\lambda_2$$

при условиях: $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ и

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 &\geq 2, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 &\geq 3. \end{aligned}$$

Геометрически легко убедиться, что обе эти задачи имеют единственные решения: $\xi_1^* = 2$, $\xi_2^* = 2$, $F(x^*) = 10$ и соответственно $\lambda_1^* = \frac{4}{3}$, $\lambda_2^* = \frac{1}{3}$, $G(\Lambda^*) = 10$. Решения этих задач методом гладких штрафных функций приведены в табл. 4.1.1 и 4.1.2.

Т а б л и ц а 4.1.1

Векторы $\tilde{x}(\tau)$, $\frac{\partial P}{\partial f_i}$ при различных значениях параметра τ для вспомогательной функции (4.1.3)

τ	ξ_1	ξ_2	$\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_1(\tilde{x}(\tau)))$	$\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_2(\tilde{x}(\tau)))$
10^{-1}	1.90425799	2.06274298	1.34073727	0.34275080
10^{-2}	1.99016482	2.00637914	1.33415724	0.33417755
10^{-3}	1.99901415	2.00063879	1.33341657	0.33341678
10^{-4}	1.99990139	2.00006389	1.33334167	0.33334167
10^{-5}	1.99999014	2.00000639	1.33333417	0.33333083
10^{-6}	1.99999901	2.00000064	1.33333342	0.33333342

Данные, приведенные в табл. 4.1.1 и 4.1.2, позволяют предположить, что в качестве оценок оптимальных векторов x^* и Λ^* можно использовать:

- либо стационарные точки $\tilde{x}(\tau)$ и $\check{\Lambda}(\tau)$ вспомогательных функций (4.1.3) и (4.1.4),
- либо векторы с координатами

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda}_i &= \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i(\tilde{x}(\tau))) \quad \forall i = [1, m], \\ \ddot{\xi}_j &= \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, -g_j(\check{\Lambda}(\tau))) \quad \forall j = [1, n]. \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Для полноты картины также отметим, что условия неотрицательности компонент векторов $\tilde{x}(\tau)$ и $\check{\Lambda}(\tau)$ обеспечиваются видом функ-

ций (4.1.3) и (4.1.4), в то время как неотрицательность компонент $\ddot{x}(\tau)$ и $\ddot{\Lambda}(\tau)$ следует из (4.1.8) и (2.1.6) – свойств штрафной функции $P(\tau, s)$.

Т а б л и ц а 4.1.2

Векторы $\frac{\partial P}{\partial g_i}(\tau, \ddot{\Lambda}(\tau))$ при различных значениях параметра τ для вспомогательной функции (4.1.4)

τ	$\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, -g_1(\ddot{\Lambda}(\tau)))$	$\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, -g_2(\ddot{\Lambda}(\tau)))$	$\ddot{\lambda}_1$	$\ddot{\lambda}_2$
10^{-1}	1.90875265	2.02649920	1.30531293	0.31272228
10^{-2}	1.99118037	2.00253128	1.33080440	0.33087539
10^{-3}	1.99912428	2.00025033	1.33308305	0.33308375
10^{-4}	1.99991249	2.00002500	1.33330833	0.33330834
10^{-5}	1.99999125	2.00000250	1.33333083	0.33333083
10^{-6}	1.99999913	2.00000025	1.33333308	0.33333308

Заметим, что эти оценки при фиксированном $\tau > 0$ как для x^* , так и для Λ^* имеют *различные* значения (поэтому-то для них и использованы разные обозначения), однако различаются они незначительно (разница порядка малости τ), а в регулярном случае пределы этих оценок при $\tau \rightarrow +0$ одинаковы. Численные данные, приведенные в табл. 4.1.1 и 4.1.2 иллюстрируют это.

Теперь, исходя из вышесказанного, попробуем построить *еще одну* пару оценок векторов x^* и Λ^* , которые будем обозначать $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$, взяв в качестве этих оценок решения системы уравнений

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_i &= \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i(\bar{x}(\tau))) & \forall i = [1, m] , \\ \bar{\xi}_j &= \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, -g_j(\bar{\Lambda}(\tau))) & \forall j = [1, n] , \end{cases} \quad (4.1.9)$$

получаемой из (4.1.8) добавлением к условиям последней равенств

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\tau) &= \ddot{x}(\tau) = \bar{x}(\tau), \\ \breve{\Lambda}(\tau) &= \ddot{\Lambda}(\tau) = \bar{\Lambda}(\tau) \quad \forall \tau > 0.\end{aligned}$$

Нестрого говоря, добавленные условия отражают тот факт, что не только решение задачи двойственной к двойственной является решением прямой задачи, но и его приближенные оценки обладают аналогичным свойством.

Здесь сразу отметим, что система (4.1.9) может быть записана в виде

$$\begin{cases} f_i(\bar{x}(\tau)) = Q(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) & \forall i = [1, m], \\ -g_j(\bar{\Lambda}(\tau)) = Q(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) & \forall j = [1, n], \end{cases}$$

где функция $Q(\tau, s)$ есть обратная к функции $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$ или, что то же самое, в виде

$$\begin{cases} -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \bar{\xi}_j = Q(\tau, \bar{\lambda}_i) & \forall i = [1, m], \\ -\sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \bar{\lambda}_i = -Q(\tau, \bar{\xi}_j) & \forall j = [1, n]. \end{cases} \quad (4.1.10)$$

Здесь следует отметить, что система (4.1.10) является вариантом представления условий задач (4.1.1) и (4.1.2) в виде системы ограничений типа «равенство», получаемого путем замены нулей в их правых частях на функции $Q(\tau, s)$. При этом в правых частях ограничений прямой задачи аргументом функции $Q(\tau, s)$ служат компоненты вектора Λ , а в правых частях ограничений двойственной задачи аргументами $Q(\tau, s)$ являются компоненты вектора x .

Эта особенность структуры системы (4.1.10) дает основание рассматривать функцию $Q(\tau, s)$ как *функцию обратных связей* в паре задач (4.1.1) и (4.1.2).

Для полного обоснования корректности использования описанной схемы функций обратных связей необходимо

- исследовать систему (4.1.10) *на разрешимость*, то есть установить, в каких случаях она имеет решение, а если имеет, то единственное ли оно;

– показать, что векторы $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ могут использоваться в качестве *асимптотической оценки* решений пары взаимодейственных задач (4.1.1) – (4.1.2).

Детально эти вопросы будут рассмотрены в следующем параграфе. Здесь же мы приведем лишь примеры принципиальной возможности использования разных видов функций обратных связей для решения пары взаимодейственных задач (4.1.1) – (4.1.2).

Пусть

$$P(\tau, s) = \frac{s}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{s}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{s}{\tau} \right) + \frac{\tau}{2} \ln \left(\sqrt{\left(\frac{s}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{s}{\tau} \right) ,$$

то есть это штрафная функция первого радикального типа (3.4.11).

Тогда $\frac{\partial P}{\partial s} = \sqrt{\left(\frac{s}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{s}{\tau}$, а обратная к ней функция $Q(\tau, s)$ определяется из уравнения $s = \sqrt{\left(\frac{Q}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{Q}{\tau}$. Что дает (проверьте это самостоятельно) $Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right)$.

Система (4.1.10) в этом случае имеет вид (4.1.11), решения которой для различных значений параметра τ приведены в табл. 4.1.3.

$$\left\{ \begin{array}{l} -6 + \bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 = \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right) , \\ -6 + 2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 = \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right) , \\ -2 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2 = -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_1 - \frac{1}{\bar{\xi}_1} \right) , \\ -3 + 2\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_2 - \frac{1}{\bar{\xi}_2} \right) . \end{array} \right. \quad (4.1.11)$$

**Решение системы (4.1.11) для различных
значений параметра τ**

τ	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	\bar{F}	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	\bar{G}
10^{-1}	1.89540992	2.06569984	9.98791937	1.30341025	0.31409939	9.70505780
10^{-2}	1.99006348	2.00641664	9.99937687	1.33078589	0.33088814	9.97004417
10^{-3}	1.99901312	2.00063917	9.99994377	1.33308286	0.33308388	9.99700044
10^{-4}	1.99990138	2.00006389	9.99999444	1.33330833	0.33330834	9.99970000
10^{-5}	1.99999014	2.00000639	9.99999944	1.33333083	0.33333083	9.99997000
10^{-6}	1.99999901	2.00000064	9.99999994	1.33333308	0.33333308	9.99999700

Рассмотрим теперь вариант с $P(\tau, s) = \tau \exp\left(\frac{s}{\tau}\right)$.

Тогда $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s) = \exp\left(\frac{s}{\tau}\right)$, а обратная к ней функция $Q(\tau, s)$ определяется из уравнения $s = \exp\left(\frac{Q}{\tau}\right)$. Откуда $Q(\tau, s) = \tau \ln s$.

Система (4.1.10) в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} -6 + \bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 = \tau \ln \bar{\lambda}_1, \\ -6 + 2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 = \tau \ln \bar{\lambda}_2, \\ -2 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2 = -\tau \ln \bar{\xi}_1, \\ -3 + 2\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = -\tau \ln \bar{\xi}_2, \end{cases} \quad (4.1.12)$$

решения которой для различных значений параметра τ приведены в табл. 4.1.4.

Решение системы (4.1.12) с функцией обратных связей
 $Q(\tau, s) = \tau \ln s$ для разных значений τ

τ	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	\bar{F}	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	\bar{G}
10^{-1}	1.91387303	2.05644660	9.99708585	1.30690566	0.31409072	9.72597830
10^{-2}	1.99167722	2.00559101	10.0001275	1.33099033	0.33105995	9.97230168
10^{-3}	1.99917130	2.00055811	10.0000169	1.33310196	0.33310265	9.99722768
10^{-4}	1.99991717	2.00005580	10.00000173	1.33331023	0.33331023	9.99972274
10^{-5}	1.99999172	2.00000558	10.00000017	1.33333102	0.33333102	9.99997227
10^{-6}	1.99999917	2.00000056	10.00000002	1.33333310	0.33333310	9.99999723

§ 4.2. Обоснование метода функций обратных связей для задач линейного программирования

Определим дважды непрерывно дифференцируемую функцию $P(\tau, s)$ так, чтобы

1° $\forall s$ и любого $\tau > 0$

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} P(\tau, s) = \begin{cases} +\infty, & s > 0, \\ 0, & s < 0; \end{cases} \quad (4.2.1)$$

2° для всех $\tau > 0$ и $\forall s$ выполнены неравенства

$$\frac{\partial P}{\partial s} > 0; \quad (4.2.2)$$

3° для всех $\tau > 0$ и $\forall s$ выполнены неравенства

$$\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} > 0. \quad (4.2.3)$$

Мы будем также использовать, связанную с $P(\tau, s)$, функцию $Q(\tau, s)$, являющуюся обратной к функции $\frac{\partial P}{\partial s}$.

Существование и непрерывная дифференцируемость функции $Q(\tau, s) \forall s > 0$ следует из монотонности (условие (4.2.3)) и непрерывной дифференцируемости функции вида $\frac{\partial P}{\partial s}$. При этом в силу (4.2.2) значениями функции $Q(\tau, s)$ могут быть любые вещественные числа, иначе говоря $Q(\tau, s) \in (-\infty, +\infty) \forall s > 0$.

Введем, наконец, в рассмотрение вспомогательную (называемую дальше для краткости U -функцией) функцию вида

$$U(\tau, x, \Lambda) = \sum_{j=1}^n \left(\sigma_j \xi_j - R(\tau, \xi_j) \right) + \sum_{i=1}^m \left(\beta_i \lambda_i + R(\tau, \lambda_i) \right) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \xi_j \lambda_i, \quad (4.2.4)$$

где $\frac{\partial R}{\partial s}(\tau, s) = Q(\tau, s)$. Заметим, что при сделанных предположениях система (4.1.10), имеющая вид

$$\begin{cases} -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \bar{\xi}_j &= Q(\tau, \bar{\lambda}_i) \quad \forall i = [1, m], \\ -\sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \bar{\lambda}_i &= -Q(\tau, \bar{\xi}_i) \quad \forall j = [1, n], \end{cases}$$

определяет векторы $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ – стационарные точки U -функции – по совокупности переменных $\{x; \Lambda\}$, если только они существуют.

Мы намереваемся показать, что для *любой* пары взаимодвойственных задач (4.1.1) – (4.1.2) векторы $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$, являющиеся решениями системы (4.1.10), существуют при любом конечном $\tau > 0$.

Причем в случае, когда в паре задач (4.1.1) – (4.1.2) нет *несовместных*, выполняются равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) = F(x^*) = G(\Lambda^*), \quad (4.2.5)$$

а для *регулярной* пары задач, то есть пары задач, решения которых существуют и единственны, справедливы равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\xi}_j(\tau) = \xi_j^* \quad \forall j = [1, n] \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\lambda}_i(\tau) = \lambda_i^* \quad \forall i = [1, m]. \quad (4.2.6)$$

Вначале перечислим (с последующим обоснованием) основные свойства вспомогательной U -функции:

- функция $U(\tau, x, \Lambda)$ строго выпукла вверх по x и строго выпукла вниз по Λ в любой конечной точке $\{x; \Lambda\}$, имеющей положительные координаты в пространстве $E^n \otimes E^m$;
- $\{\bar{x}(\tau); \bar{\Lambda}(\tau)\}$ есть седловая точка с положительными координатами для функции $U(\tau, x, \Lambda)$ в пространстве в $E^n \otimes E^m$, определяемая системой уравнений (4.1.10);
- $\lim_{\tau \rightarrow +0} U(\tau, x, \Lambda) = L(x, \Lambda)$, где $L(x, \Lambda)$ – стандартная функция Лагранжа для регулярной пары задач 4.1.1 и 4.1.2.

Здесь следует отметить, что вид функции (4.2.4) может быть существенно обобщен либо за счет использования различных типов функций $P(\tau, s)$ и/или путем выбора независимых значений параметра τ для разных j и i , но так, чтобы основные свойства вспомогательной функции $U(\tau, x, \Lambda)$ не изменились.

Кроме того, условия теоремы 3.1.1 допускают выбор функций обратной связи $Q(\tau, s)$ из достаточно обширного класса функций. Эта свобода позволяет упростить обоснование метода и его практическое применение.

Например, с этой целью, используя п. 3) теоремы 3.1.1, можно потребовать, чтобы $\frac{\partial P}{\partial s}$ являлась функцией *только одного аргумента* вида $\frac{s}{\tau}$, то есть представлялась как (3.1.8):

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \Phi\left(\frac{s}{\tau}\right), \quad \text{что дает} \quad Q(\tau, s) = \tau \Psi(s), \quad (4.2.7)$$

однако каждое использование этого условия будем оговаривать особо.

Докажем теперь первое из описанных выше свойств вспомогательной функции (4.2.4). Имеет место

Теорема
4.2.1

Функция $U(\tau, x, \Lambda)$ строго выпукла вверх по x и строго выпукла вниз по Λ в любой конечной точке с положительными координатами в пространстве $E^n \otimes E^m$.

Доказательство

Рассмотрим зависимость функции $U(\tau, x, \Lambda)$ от x при фиксированных значениях τ и Λ . Из соотношений (4.1.10) получаем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_j \partial \xi_k} = \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} \cdot \delta_{jk} \quad \forall j, k = [1, n]$$

(где δ_{jk} – символ Кронекера), что означает диагональность матрицы Гессе функции $U(\tau, x, \Lambda)$ по компонентам x .

Покажем, что эта матрица отрицательно определенная. Действительно, значения ее главных миноров вида

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1 \partial \xi_k} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_2 \partial \xi_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_k \partial \xi_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_k \partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_k^2} \end{vmatrix} \quad \forall k = [1, n]$$

определяются формулами $\prod_{j=1}^k \left(-\frac{\partial Q}{\partial \xi_j} \right) \quad \forall k = [1, n]$.

Числа $\frac{\partial Q}{\partial \xi_j}$ положительные, так как в силу связи между производными взаимно обратных функций [6] и условия (4.2.3):

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} \right)^{-1} > 0.$$

Таким образом, все главные миноры нечетного порядка отрицательны, четного – положительны, и, согласно критерию Сильвестра, матрица Гессе функции $U(\tau, x, \Lambda)$ по компонентам x отрицательно определена. Поэтому [17] функция $U(\tau, x, \Lambda)$ по компонентам x строго выпукла вверх.

Докажем теперь, что функция $U(\tau, x, \Lambda)$ по компонентам Λ имеет при фиксированных τ и x выпуклость вниз.

Для этого покажем, что ее матрица Гессе по Λ положительно определенная. Действительно, значения ее главных миноров вида

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_k} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_k \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_k \partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_k^2} \end{vmatrix} \quad \forall k = [1, m]$$

определяются по формулам

$$\prod_{j=1}^k \left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda_j} \right) \quad \forall k = [1, m] .$$

Числа $\frac{\partial Q}{\partial \lambda_j}$ положительные, в силу опять-таки условия $\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} > 0$, поскольку

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{1}{\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}} > 0 .$$

Таким образом, все рассматриваемые миноры положительны, и, согласно критерию Сильвестра, матрица Гессе функции $U(\tau, x, \Lambda)$ по компонентам Λ положительно определена, а сама функция $U(\tau, x, \Lambda)$ по компонентам Λ является строго выпуклой вниз.

Теорема доказана.

Докажем теперь совместность системы (4.1.10). Будет справедливой

Теорема
4.2.2

Система уравнений (4.1.10) имеет единственное решение с положительными компонентами при любом фиксированном $\tau > 0$ для любой пары взаимодвойственных задач 4.1.1 и 4.1.2.

Доказательство

1°. Вначале убедимся, что для каждого вектора Λ с конечными положительными компонентами будет существовать единственный конечный вектор $\widehat{x}(\Lambda)$ с положительными компонентами такой, что условие $\text{grad}_x U(\tau, \widehat{x}(\Lambda), \Lambda) = o$, имеющее в силу (4.2.4) вид

$$Q(\tau, \widehat{x}_j(\Lambda)) - \sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \lambda_i = 0 \quad \forall j = [1, n], \quad (4.2.8)$$

означает (с учетом строгой выпуклости функции $U(\tau, x, \Lambda)$ вверх по x), что $\widehat{x}(\Lambda) = \underset{x}{\text{argmax}} U(\tau, x, \Lambda)$.

Действительно, согласно определению функции $Q(\tau, s)$, условия (4.2.8) равносильны равенствам

$$\widehat{\xi}_j(\Lambda) = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, -g_j(\Lambda)) \quad \forall j = [1, n], \quad \forall \Lambda > o,$$

правые части которых существуют и определены однозначно.

Рассуждая аналогично, мы приходим к заключению, что для каждого конечного вектора x с положительными компонентами будет существовать конечный вектор $\widehat{\Lambda}(x)$ с положительными компонентами такой, что

$$Q(\tau, \widehat{\lambda}_i(x)) + \beta_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j = 0 \quad \forall i = [1, m], \quad (4.2.9)$$

и что $\widehat{\Lambda}(x) = \underset{\Lambda}{\text{argmin}} U(\tau, x, \Lambda)$ в силу строгой выпуклости $U(\tau, x, \Lambda)$ вниз по Λ .

Теперь найдем минимум $U(\tau, \hat{x}(\Lambda), \Lambda)$ по Λ . Из формулы (4.2.4) мы получаем

$$U(\tau, \hat{x}(\Lambda), \Lambda) = \sum_{j=1}^n \left(\sigma_j \hat{\xi}_j(\Lambda) - R(\tau, \hat{\xi}_j(\Lambda)) \right) + \\ + \sum_{i=1}^m \left(\beta_i \lambda_i + R(\tau, \lambda_i) \right) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \hat{\xi}_j(\Lambda) \lambda_i .$$

В силу строгой выпуклости вниз этой функции, достаточное условие ее минимума будет

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_q}(\tau, \hat{x}(\Lambda), \Lambda) = \sum_{j=1}^n \left[\sigma_j \frac{\partial \hat{\xi}_j(\Lambda)}{\partial \lambda_q} - \frac{\partial R}{\partial s} \left(\tau, \hat{\xi}_j(\Lambda) \right) \frac{\partial \hat{\xi}_j(\Lambda)}{\partial \lambda_q} \right] + \\ + \beta_q + \frac{\partial R}{\partial s}(\tau, \lambda_q) - \sum_{j=1}^n \alpha_{qj} \hat{\xi}_j(\Lambda) - \\ - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{qj} \lambda_i \frac{\partial \hat{\xi}_j(\Lambda)}{\partial \lambda_q} = 0 \quad \forall q = [1, m]$$

или после перегруппировки слагаемых

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \hat{\xi}_j(\Lambda)}{\partial \lambda_q} \left[\sigma_j - Q \left(\tau, \hat{\xi}_j(\Lambda) \right) - \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \lambda_i \right] + \\ + \beta_q + Q(\tau, \lambda_q) - \sum_{j=1}^n \alpha_{qj} \hat{\xi}_j(\Lambda) = 0 \quad \forall q = [1, m], \quad (4.2.10)$$

поскольку $\forall j = [1, n]$ и $\forall q = [1, m]$

$$\frac{\partial R}{\partial s} \left(\tau, \hat{\xi}_j(\Lambda) \right) = Q \left(\tau, \hat{\xi}_j(\Lambda) \right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial R}{\partial s}(\tau, \lambda_q) = Q(\tau, \lambda_q) .$$

Таким образом, достаточное условие (4.2.10) минимума функции $U(\tau, \hat{x}(\Lambda), \Lambda)$ по Λ за счет использования (4.2.8) упрощается до

$$\beta_q + Q \left(\tau, \widehat{\widehat{\Lambda}}_q \right) - \sum_{j=1}^n \alpha_{qj} \widehat{\xi}_j(\widehat{\widehat{\Lambda}}) = 0 \quad \forall q = [1, m], \quad (4.2.11)$$

где вектор с неотрицательными компонентами

$$\widehat{\widehat{\Lambda}} = \operatorname{argmin}_{\Lambda} U(\tau, \widehat{x}(\Lambda), \Lambda),$$

для которого $\min_{\Lambda} \max_x U(\tau, x, \Lambda) = U(\tau, \widehat{x}(\Lambda), \widehat{\widehat{\Lambda}})$ и такого, что $\|\widehat{\widehat{\Lambda}}\| = \|\widehat{\widehat{\lambda}}_1 \widehat{\widehat{\lambda}}_2 \dots \widehat{\widehat{\lambda}}_m\|^T$, существует и единствен в силу строгой выпуклости вниз по Λ функции $U(\tau, x, \Lambda)$.

Найдем теперь значение минимума по Λ для функции $U(\tau, \widehat{x}(\Lambda), \Lambda)$. Имеем

$$\begin{aligned} U(\tau, \widehat{x}(\widehat{\widehat{\Lambda}}), \widehat{\widehat{\Lambda}}) &= \sum_{j=1}^n \left(\sigma_j \widehat{\xi}_j(\widehat{\widehat{\Lambda}}) - R(\tau, \widehat{\xi}_j(\widehat{\widehat{\Lambda}})) \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^m \left(\beta_i \widehat{\widehat{\lambda}}_i + R(\tau, \widehat{\widehat{\lambda}}_i) \right) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \widehat{\xi}_j(\widehat{\widehat{\Lambda}}) \widehat{\widehat{\lambda}}_i. \end{aligned}$$

Перегруппировав слагаемые, найдем, что

$$\begin{aligned} U(\tau, \widehat{x}(\widehat{\widehat{\Lambda}}), \widehat{\widehat{\Lambda}}) &= \sum_{i=1}^m \left(\beta_i \widehat{\widehat{\lambda}}_i + R(\tau, \widehat{\widehat{\lambda}}_i) \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \left(\sigma_j - \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \widehat{\widehat{\lambda}}_i \right) \widehat{\xi}_j(\widehat{\widehat{\Lambda}}) - \sum_{j=1}^n R(\tau, \widehat{\xi}_j(\widehat{\widehat{\Lambda}})). \end{aligned}$$

Наконец, в силу (4.2.8) получим

$$\begin{aligned} U(\tau, \widehat{x}(\widehat{\widehat{\Lambda}}), \widehat{\widehat{\Lambda}}) &= \min_{\Lambda} \max_x U(\tau, x, \Lambda) = \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\beta_i \widehat{\widehat{\lambda}}_i + R(\tau, \widehat{\widehat{\lambda}}_i) \right) + \sum_{j=1}^n \left(\widehat{\xi}_j(\widehat{\widehat{\Lambda}}) Q(\tau, \widehat{\xi}_j(\widehat{\widehat{\Lambda}})) - R(\tau, \widehat{\xi}_j(\widehat{\widehat{\Lambda}})) \right). \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

2°. Теперь аналогичными рассуждениями найдем

$$\max_x \min_{\Lambda} U(\tau, x, \Lambda).$$

Поскольку функция $U(\tau, x, \Lambda)$ строго выпукла вниз по совокупности компонент вектора Λ , то достаточное условие ее минимума по Λ будет $\text{grad}_{\Lambda} U = o$, или в координатах:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_i} = \beta_i + \frac{\partial R}{\partial \lambda_i} - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j = 0 \quad \forall i = [1, m],$$

при фиксированных x и τ и в силу $\frac{\partial R}{\partial s} = Q(\tau, s)$:

$$-Q(\tau, \hat{\lambda}_i(x)) = \beta_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \quad \forall i = [1, m], \quad (4.2.13)$$

где вектор $\hat{\Lambda}(x) = \underset{\Lambda}{\operatorname{argmin}} U(\tau, x, \Lambda)$, для которого

$$\min_{\Lambda} U(\tau, x, \Lambda) = U(\tau, x, \hat{\Lambda}(x)),$$

с координатным представлением

$$\|\hat{\Lambda}(x)\| = \|\hat{\lambda}_1(x) \hat{\lambda}_2(x) \dots \hat{\lambda}_m(x)\|^T$$

существует и единственен для любого вектора x с неотрицательными компонентами. Заметим, что в этом случае также справедливы соотношения

$$Q(\tau, \hat{\lambda}_i(\xi)) = f_i(x) \quad \text{и} \quad \hat{\lambda}_i(x) = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i(x)) \quad \forall i = [1, m].$$

Таким образом, минимум функции $U(\tau, x, \Lambda)$ по Λ равен

$$\begin{aligned} U(\tau, x, \hat{\Lambda}(x)) &= \sum_{j=1}^n \left(\sigma_j \xi_j - R(\tau, \xi_j) \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^m \left(\beta_i \hat{\lambda}_i(x) + R(\tau, \hat{\lambda}_i(x)) \right) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \xi_j \hat{\lambda}_i(x). \end{aligned}$$

В силу строгой выпуклости вверх этой функции по x , достаточное условие ее максимума по x будет

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi_k}(\tau, x, \hat{\Lambda}(x)) &= \sum_{i=1}^m \left[\beta_i \frac{\partial \hat{\lambda}_i(x)}{\partial \xi_k} + \frac{\partial R}{\partial s}(\tau, \hat{\lambda}_i(x)) \frac{\partial \hat{\lambda}_i(x)}{\partial \xi_k} \right] + \\ &+ \sigma_k - \frac{\partial R}{\partial s}(\tau, \xi_k) - \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \hat{\lambda}_i(x) - \\ &- \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \xi_j \frac{\partial \hat{\lambda}_i(x)}{\partial \xi_k} = 0 \quad \forall k = [1, n] \end{aligned}$$

или после перегруппировки слагаемых

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \frac{\partial \hat{\lambda}_i(x)}{\partial \xi_k} \left[\beta_i + Q(\tau, \hat{\lambda}_i(x)) - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \right] + \\ + \sigma_k - Q(\tau, \xi_k) - \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \hat{\lambda}_i(x) = 0 \quad \forall k = [1, n], \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

поскольку $\forall j = [1, n]$ и $\forall i = [1, m]$:

$$\frac{\partial R}{\partial s}(\tau, \hat{\lambda}_i(x)) = Q(\tau, \hat{\lambda}_i(x)) \quad \text{и} \quad \frac{\partial R}{\partial s}(\tau, \xi_j) = Q(\tau, \xi_j).$$

В силу (4.2.13) выражения, стоящие в квадратных скобках в (4.2.14), равны нулю и, следовательно, достаточное условие максимума $U(\tau, x, \hat{\Lambda}(x))$ по x принимает вид

$$\sigma_k - Q(\tau, \hat{\xi}_k) - \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \hat{\lambda}_i(\hat{\xi}_k) = 0 \quad \forall k = [1, n], \quad (4.2.15)$$

где вектор с неотрицательными компонентами

$$\hat{\hat{x}} = \underset{x}{\operatorname{argmax}} U(\tau, x, \hat{\Lambda}(x)),$$

для которого $\max_x \min_{\Lambda} U(\tau, x, \Lambda) = U(\tau, \hat{\hat{x}}, \hat{\Lambda}(x))$ и такого,

что $\|\hat{\hat{x}}\| = \|\hat{\xi}_1 \hat{\xi}_2 \dots \hat{\xi}_n\|^T$, существует и единствен в силу строгой выпуклости вверх по x функции $U(\tau, x, \Lambda)$.

Для значения максимума функции $U(\tau, x, \hat{\Lambda}(x))$ по x имеем

$$U(\tau, \hat{\bar{x}}, \hat{\Lambda}(\hat{\bar{x}})) = \sum_{j=1}^n \left(\sigma_j \hat{\bar{\xi}}_j - R(\tau, \hat{\bar{\xi}}_j) \right) + \\ + \sum_{i=1}^m \left(\beta_i \hat{\lambda}_i(\hat{\bar{x}}) + R(\tau, \hat{\lambda}_i(\hat{\bar{x}})) \right) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \hat{\bar{\xi}}_j \hat{\lambda}_i(\hat{\bar{x}}).$$

Перегруппировав слагаемые, найдем, что

$$U(\tau, \hat{\bar{x}}, \hat{\Lambda}(\hat{\bar{x}})) = \sum_{i=1}^m \left(\beta_i \hat{\lambda}_i(\hat{\bar{x}}) + R(\tau, \hat{\lambda}_i(\hat{\bar{x}})) \right) + \\ + \sum_{j=1}^n \left(\sigma_j - \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \hat{\lambda}_i(\hat{\bar{x}}) \right) \hat{\bar{\xi}}_j - \sum_{j=1}^n R(\tau, \hat{\bar{\xi}}_j).$$

Наконец, в силу (4.2.15) получим

$$U(\tau, \hat{\bar{x}}, \hat{\Lambda}(\hat{\bar{x}})) = \max_x \min_{\Lambda} U(\tau, x, \Lambda) = \\ = \sum_{i=1}^m \left(\beta_i \hat{\lambda}_i(\hat{\bar{x}}) + R(\tau, \hat{\lambda}_i(\hat{\bar{x}})) \right) + \sum_{j=1}^n \left(\hat{\bar{\xi}}_j Q(\tau, \hat{\bar{\xi}}_j) - R(\tau, \hat{\bar{\xi}}_j) \right). \quad (4.2.16)$$

3°. Параметр τ есть фиксированное положительное число, тогда из свойств функции $P(\tau, s)$, а также из условий (4.2.8), (4.2.15) и равенств

$$\hat{\xi}_j(\Lambda) = \frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, -g_j(\Lambda) \right) \quad \forall j = [1, n], \quad (4.2.17)$$

$$\hat{\lambda}_i(x) = \frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, f_i(x) \right) \quad \forall i = [1, m]$$

следует, что в силу своей строгой выпуклости вверх по x функция $U(\tau, x, \Lambda)$ для каждого фиксированного вектора Λ с положительными компонентами имеет глобальный максимум по x и притом единственный.

Аналогично, в силу строгой выпуклости вниз по Λ , функция $U(\tau, x, \Lambda)$ для каждого фиксированного вектора x с положительными компонентами имеет единственный глобальный минимум.

В этом случае из условий (4.2.11) и (4.2.13) следует равенство

$$\widehat{\Lambda} = \widehat{\Lambda}(\widehat{\widehat{x}}),$$

а из условий (4.2.8) и (4.2.15) следует соответственно

$$\widehat{\widehat{x}} = \widehat{x}(\widehat{\widehat{\Lambda}}), \quad (4.2.18)$$

поскольку условие (4.2.11) является достаточным условием максимума функции $U(\tau, x, \widehat{\Lambda}(x))$ по x , а условие (4.2.15) – соответственно достаточным условием минимума функции $U(\tau, \widehat{x}(\Lambda), \Lambda)$ по Λ .

Поясним эти утверждения, получив, к примеру, формулу (4.2.18). Для этого перепишем равенства (4.2.8) и (4.2.15), переобозначив в последнем индекс k на j :

$$-Q(\tau, \widehat{\xi}_j(\Lambda)) = -\sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \lambda_i \quad \forall j = [1, n].$$

$$-Q\left(\tau, \widehat{\xi}_j\right) = -\sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \widehat{\lambda}_i(\widehat{\widehat{\xi}}_j) \quad \forall j = [1, n].$$

Первая группа этих равенств верна при любых положительных $\lambda_i \quad \forall i = [1, m]$, в том числе и при $\widehat{\lambda}_i(\widehat{\widehat{\xi}}_j) \quad \forall i = [1, m]$. Очевидно, что в этом случае правые части равенств оказываются одинаковыми. Но тогда будут равны и левые, то есть

$$Q\left(\tau, \widehat{\xi}_j(\widehat{\widehat{\Lambda}})\right) = Q\left(\tau, \widehat{\xi}_j\right) \quad \forall j = [1, n].$$

Последнее же равенство означает, что в силу монотонности по s функции $Q(\tau, s)$ верны равенства

$$\widehat{\xi}_j(\widehat{\widehat{\Lambda}}) = \widehat{\xi}_j \quad \forall j = [1, n],$$

то есть $\widehat{\widehat{x}} = \widehat{x}(\widehat{\widehat{\Lambda}})$.

Теперь из сопоставления формул (4.2.12) и (4.2.16) мы получаем, что

$$\min_{\Lambda} \max_x U(\tau, x, \Lambda) = \max_x \min_{\Lambda} U(\tau, x, \Lambda).$$

Это означает, что функция $U(\tau, x, \Lambda)$ имеет седловую точку [3], которая, в силу непрерывной дифференцируемости этой функции, является для нее стационарной.

Наконец, условия стационарности функции $U(\tau, x, \Lambda)$, которые можно записать в виде

$$\begin{cases} \underset{x}{\operatorname{grad}} U = o, \\ \underset{\Lambda}{\operatorname{grad}} U = o, \end{cases}$$

равносильны в своей совокупности системе (4.1.10).

Теорема доказана.

Утверждение теоремы 4.2.2 проиллюстрируем следующим примером.

Предположение 4.2.1.

Пусть функция $P(\tau, s)$ такова, что

$$P(\tau, s) = \tau \exp \frac{s}{\tau} \implies \frac{\partial P}{\partial s} = \exp \frac{s}{\tau}.$$

Тогда функция, обратная к $\frac{\partial P}{\partial s}$, определяется условием $s = \exp \frac{Q}{\tau}$ и равна $Q(\tau, s) = \tau \ln s$.

Рассмотрим тривиальную задачу математического программирования:

максимизировать 2ξ
при условиях: $\xi \geq 0$ и $\xi \leq 3$.

Задача, двойственная к данной, также тривиальна и имеет следующий вид:

минимизировать 3λ
при условиях: $\lambda \geq 0$ и $\lambda \geq 2$.

В этом случае система (4.1.9) может быть записана так:

$$\begin{cases} \bar{\lambda} = \exp \frac{\bar{\xi} - 3}{\tau}, \\ \bar{\xi} = \exp \frac{2 - \bar{\lambda}}{\tau} \end{cases}$$

или в форме (4.1.10):

$$\begin{cases} -3 + \bar{\xi} = \tau \ln \bar{\lambda}, \\ -2 + \bar{\lambda} = -\tau \ln \bar{\xi}. \end{cases}$$

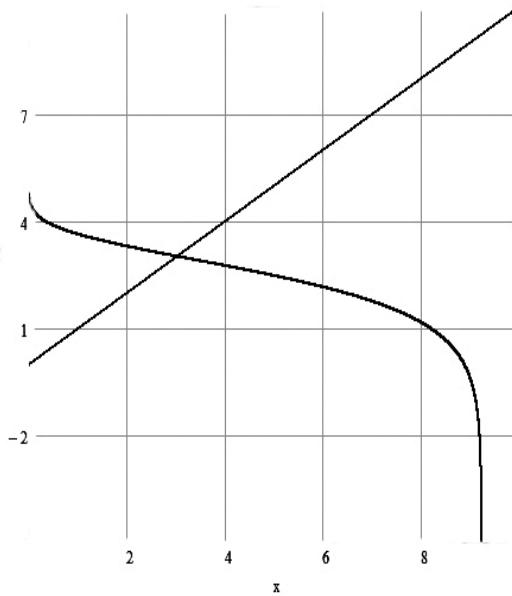


Рис. 4.1. Графическая интерпретация решения уравнения (4.2.19)

Исключение из последней системы переменной $\bar{\lambda}$ приводит к форме

$$\bar{\xi} = 3 + \tau \ln (2 - \tau \ln \bar{\xi}). \quad (4.2.19)$$

Нетрудно видеть, что правая часть этого уравнения на всей своей области определения $0 < \bar{\xi} < \alpha$ (где $\alpha = \exp \frac{2}{\tau}$) имеет отрицательную

производную и, следовательно, есть монотонно убывающая функция от $\bar{\xi}$. Кроме того, эта функция имеет вертикальные асимптоты, для которых

$$\lim_{\bar{\xi} \rightarrow +0} (3 + \tau \ln (2 - \tau \ln \bar{\xi})) = +\infty$$

и

$$\lim_{\bar{\xi} \rightarrow \alpha-0} (3 + \tau \ln (2 - \tau \ln \bar{\xi})) = -\infty.$$

Эти свойства в своей совокупности гарантируют существование $\forall \tau > 0$ положительного решения уравнения (4.1.10). Графики правой и левой частей этого уравнения показаны на рис. 4.1.

Кроме того, важное для дальнейшего свойство функции $R(\tau, s)$ описывает

Лемма 4.2.1 Для фиксированного $\forall s > 0$ $\lim_{\tau \rightarrow +0} R(\tau, s) = 0$.

Доказательство.

Приведем доказательство предполагая, что функция $P(\tau, s)$ не только удовлетворяет условиям (2.1.5) – (2.1.7), но также,

что $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$ является функцией одного аргумента $u = \frac{s}{\tau}$,

то есть $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s) = \Phi\left(\frac{s}{\tau}\right)$, где $\Phi(u)$ – непрерывно дифференцируемая и неотрицательная на всей вещественной оси функция от u .

В этом случае функция обратной связи $Q(\tau, s)$ определяется соотношением $\Phi\left(\frac{Q}{\tau}\right) = s$ и имеет вид $Q(\tau, s) = \tau\Psi(s)$, где $\Psi(u)$ есть функция, определенная на интервале $(0, +\infty)$, обратная к $\Phi(u)$.

Тогда из

$$R(\tau, s) = \int_a^s \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, u) du = \tau \int_a^s \Psi(u) du, \quad \text{где } Q(\tau, a) = 0,$$

следует справедливость утверждения леммы.

Лемма доказана.

Теорема 4.2.3 Для любых допустимых x и Λ в регулярных задачах (4.1.1) и (4.1.2):

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} U(\tau, x, \Lambda) = L(x, \Lambda) ,$$

где $L(x, \Lambda)$ – функция Лагранжа задач (4.1.1) и (4.1.2).

Доказательство.

Функция Лагранжа задач (4.1.1) и (4.1.2) имеет вид

$$L(x, \Lambda) = \sum_{j=1}^n \sigma_j \xi_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(-\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \right) ,$$

или

$$L(x, \Lambda) = \sum_{j=1}^n \sigma_j \xi_j + \sum_{i=1}^m \beta_i \lambda_i - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \lambda_i .$$

Теперь очевидно, что применение леммы 4.2.1 к формуле (4.2.4) позволяет сделать заключение о справедливости утверждения данной теоремы.

Теорема доказана.

Дадим

Определение 4.2.1 Назовем совокупность точек пространства $E^n \otimes E^m$ вида $\{\bar{x}(\tau); \bar{\Lambda}(\tau)\} \forall \tau > 0$ – седловой траекторией U -функции пары задач (4.1.1) и (4.1.2).

На седловой траектории определены вектор-функции $\bar{x}(\tau)$, $\bar{\Lambda}(\tau)$ и $U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau))$. Их свойства описывает

Теорема 4.2.4 Для собственных задач (4.1.1) и (4.1.2), т.е. задач, имеющих ограниченные оптимальные значения целевых функций, вектор-функции $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ имеют ограниченные компоненты на множестве $\forall \tau > 0$ и неограничена для несобственных.

Доказательство.

1°. Исходя из (4.1.9), условия стационарности вспомогательной U -функции (4.2.4) можно записать в виде

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_i(\tau) = \frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, \sigma_j - \sum_{q=1}^m \alpha_{qj} \bar{\lambda}_q(\tau) \right) \right) \\ \forall i = [1, m], \\ \bar{\xi}_j(\tau) = \frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, \sigma_j - \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, -\beta_i + \sum_{p=1}^n \alpha_{ip} \bar{\xi}_p(\tau) \right) \right) \\ \forall j = [1, n]. \end{cases} \quad (4.2.20)$$

То есть система (4.1.9) распадается на две независимые подсистемы, неизвестными в первой из которых являются компоненты вектор-функции $\bar{\Lambda}(\tau)$, а во второй – компоненты $\bar{x}(\tau)$.

Исследуем подробно вторую из них, введя для удобства следующие скалярные функции

$$W_j(\tau, \bar{x}(\tau)) = \sigma_j - \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, V_i(\bar{x}(\tau)) \right) \quad \forall j = [1, n]$$

и

$$V_i(\bar{x}(\tau)) = -\beta_i + \sum_{p=1}^n \alpha_{ip} \bar{\xi}_p(\tau) \quad \forall i = [1, m].$$

В этом случае вторая группа уравнений в (4.2.20) принимает вид системы равенств

$$\bar{\xi}_j(\tau) = \frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, W_j(\tau, \bar{x}(\tau)) \right) \quad \forall j = [1, n], \quad (4.2.21)$$

а частная производная от функции $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, W_j(\tau, x))$ по $\xi_k \forall k = [1, n]$ будет

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, W_j(\tau, x) \right) = \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} \left(\tau, W_j(\tau, x) \right) \cdot \frac{\partial W_j}{\partial \xi_k} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, W_j(\tau, x)) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\sigma_j - \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, V_i(\tau, x)) \right) = \\
&= - \frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, W_j(\tau, x)) \cdot \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, x) \frac{\partial V_i}{\partial \xi_k} \right) = \\
&= - \frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, W_j(\tau, x)) \cdot \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, x) \alpha_{ik} \right).
\end{aligned}$$

Откуда, принимая во внимание, что в силу (4.2.3) вторая производная $\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, s)$ определена и строго положительна $\forall s$, получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, W_j(\tau, x)) = \\
&= - \frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, W_j(\tau, x)) \cdot \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{ik}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, x) \right) \leq 0,
\end{aligned}$$

причем в случае $\sum_{i=1}^m |\alpha_{ik}| > 0$ это неравенство будет строгим.

Таким образом, правая часть каждого уравнения в системе (4.2.21) есть монотонно убывающая функция любой компоненты вектора $\bar{x}(\tau)$.

2°. Рассмотрим теперь j -е уравнение в системе (4.2.21), в котором зафиксированы все неизвестные, кроме ξ_j . Пусть оно имеет вид $\xi_j = Z(\xi_j)$. Заметим, что как область определения функции $Z(\xi_j)$, так и область ее значений есть множество положительных чисел. При этом из 1° следует, что на всей области определения непрерывная функция $Z(\xi_j)$ монотонно убывающая. Тогда для нее существует монотонно убывающая *обратная* функция $T(\xi_j)$.

Пусть $\bar{\xi}_j$ решение этого уравнения, то есть $\bar{\xi}_j = Z(\bar{\xi}_j)$. Очевидно, что и $T(\bar{\xi}_j) = \bar{\xi}_j$. Если $\bar{\xi}_j$ имеет нижнюю ненулевую грань, то $\exists d_j > 0 : \bar{\xi}_j \geq d_j$, но тогда и $d_j \leq \bar{\xi}_j = Z(\bar{\xi}_j) = T(\bar{\xi}_j) \leq D_j$, где $D_j = \min\{Z(d); T(d)\}$.

Аналогично можно показать, что из существования верхней грани для $\bar{\xi}_j$ следует существование нижней. Следовательно $\bar{\xi}_j$ ограничена, причем строго положительными величинами.

3°. Покажем теперь, что в *собственном* случае решения системы (4.2.20) ограничены $\forall \tau > 0$ и имеют неограниченные компоненты в случае *несобственном*.

Действительно, если решения задач (4.1.1)–(4.1.2) существуют и конечны, то системы

$$\begin{cases} \sigma_j - \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \lambda_i \leq 0 & \forall j = [1, n], \\ \lambda_i \geq 0 & \forall i = [1, m] \end{cases} \quad (4.2.22)$$

$$\begin{cases} -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \leq 0 & \forall i = [1, m], \\ \xi_j \geq 0 & \forall j = [1, n] \end{cases}$$

совместны.

Рассмотрим вторую из них. В этом случае для каждого $j = [1, n]$ найдется вектор $x_{(j)}$ такой, что $W_j(\tau, x_{(j)}) = 0$. Заметим, что каждая левая часть в уравнениях (4.2.21), которая по теореме 4.2.2 имеет конечное значение при любом фиксированном $\tau > 0$, может оказаться равной, большей или меньшей, чем $\Phi(0) = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, 0)$.

Тогда в силу оценок п. 2°, она оказывается ограниченной как снизу, так и сверху одним из трех строго положительных чисел $T(\Phi(0))$, $\Phi(0)$ или $D(\Phi(0))$, каждое из которых по предположению леммы 4.2.1 не зависит от τ . Следовательно, все левые части в (3.18) равномерно ограничены на множестве значений $\tau \in (0, +\infty)$.

Для первой из систем (4.2.22) рассуждения аналогичны.

Из приведенных выше рассуждений следует, что значения $\bar{\xi}_j \forall j = [1, n]$ и $\bar{\lambda}_i \forall i = [1, m]$ ограничены сверху равномерно по $\tau > 0$ в положительном ортанте пространства $E^n \otimes E^m$. Однако, в силу того, что $\lim_{s \rightarrow +0} Q(\tau, s) = -\infty$, необходимо также оценить значения $\bar{\xi}_j$ и $\bar{\lambda}_i$ в малой окрестности начала координат, в случае, когда последние там оказываются.

Для этого предположим, что условия неотрицательности переменных в задачах (4.1.1) и (4.1.2) записаны в форме $-\bar{\xi}_j \leq 0 \forall j = [1, n]$ и $-\bar{\lambda}_i \leq 0 \forall i = [1, m]$ и включены в набор ограничений данных задач.

Иначе говоря, среди функций $f_i(\bar{x})$ имеются функции $f_i(\bar{x}) = \bar{\xi}_j$, а среди $g_j(\bar{\Lambda})$ – функции $g_j(\bar{\Lambda}) = \bar{\lambda}_i$. Тогда система условий (4.1.10) примет вид

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\beta_i + \nu_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \bar{\xi}_j & = & Q(\tau, \bar{\lambda}_i) \quad \forall i = [1, m], \\ -\bar{\xi}_j & = & Q(\tau, \bar{\mu}_j) \quad \forall j = [1, n], \\ -\sigma_j - \mu_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \bar{\lambda}_i & = & -Q(\tau, \bar{\xi}_j) \quad \forall j = [1, n], \\ -\bar{\lambda}_i & = & Q(\tau, \bar{\nu}_i) \quad \forall i = [1, m]. \end{array} \right.$$

Кроме того, как и раньше, мы будем считать выполненными предположения леммы 4.2.1, по которым $Q(\tau, s) = \tau \Phi(s)$. В силу чего для $\bar{\xi}_j$ и $\bar{\lambda}_i$ оказываются справедливыми оценки

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \bar{\xi}_j(\tau) & = & -\tau \Phi(\bar{\mu}_j) \quad \forall j = [1, n], \\ \bar{\lambda}_i(\tau) & = & -\tau \Phi(\bar{\nu}_i) \quad \forall i = [1, m], \end{array} \right.$$

из которых следует ограниченность производных по τ для вектор-функций $\bar{\xi}_j(\tau)$ и $\bar{\lambda}_i(\tau)$ и как следствие, их равномерная непрерывность в положительном ортанте пространства $E^n \otimes E^m$.

В несобственном же случае по крайней мере одна из систем (4.2.22) несовместна. Допустим, что это – вторая из них. Тогда хотя бы при одном значении индекса i будет $f_i(x) > 0$ при всех x с неотрицательными компонентами. В том числе и для $\bar{x}(\tau)$ – решения системы (4.2.21), которое существует по теореме 4.2.2.

Но тогда в силу $\bar{\lambda}_i(\tau) = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i(\bar{x}(\tau))) = \Phi\left(\frac{f_i(\bar{x}(\tau))}{\tau}\right)$ окажется верным равенство $\lim_{\tau \rightarrow +0} \Phi\left(\frac{f_i(\bar{x}(\tau))}{\tau}\right) = +\infty$, что и приводит к заключению о наличии неограниченных компонент у решений системы (3.17) для несобственной пары задач (4.1.1)–(4.1.2).

В случае несовместности первой из систем (4.2.22) рассуждения аналогичны.

Теорема доказана.

Теорема 4.2.5 Для собственных задач (4.1.1) и (4.1.2), вектор-функции $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ непрерывно дифференцируемы $\forall \tau > 0$.

Доказательство.

1°. Обозначим $\kappa_j = \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} \quad \forall j = [1, n]$ и $\mu_i = \frac{\partial Q}{\partial \lambda_i} \quad \forall i = [1, m]$.
Матрица Якоби системы (4.1.10) в этом случае имеет вид

$$\|H\| = \left\| \begin{array}{cccc|cccc} -\kappa_1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{11} & -\alpha_{21} & \dots & -\alpha_{m1} \\ 0 & -\kappa_2 & \dots & 0 & -\alpha_{12} & -\alpha_{22} & \dots & -\alpha_{m2} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\kappa_n & -\alpha_{1n} & -\alpha_{2n} & \dots & -\alpha_{nn} \\ \hline -\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1n} & \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{22} & \dots & -\alpha_{2n} & 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ -\alpha_{m1} & -\alpha_{m2} & \dots & -\alpha_{mn} & 0 & 0 & \dots & \mu_m \end{array} \right\|$$

или, в блочной записи, $\|H\| = \begin{vmatrix} -\|X\| & -\|A\|^T \\ -\|A\| & \|Y\| \end{vmatrix}$. Заметим, что эта матрица также является матрицей Гессе вспомогательной функции (4.2.4),

Здесь элементами матрицы $\|A\|$ являются числа $\alpha_{ij} \quad \forall i = [1, m], j = [1, n]$, а диагональные матрицы $\|X\|$ и $\|Y\|$ имеют элементы, определяемые формулами $\delta_{ij} \kappa_j \quad \forall i, j = [1, n]$ и $\delta_{ij} \mu_i \quad \forall i, j = [1, m]$ соответственно.

Оценим знак величины $\det \|H\|$. По свойству шуровского дополнения (см., напр., гл. 4, § 6, п. 5 в [31]) и в силу правил действия с матрицами, в рассматриваемом случае справедливо равенство

$$\det \|H\| = \det \|X\| \cdot \det \left(\|Y\| + \|A\| \|X\|^{-1} \|A\|^T \right).$$

Числа $\kappa_j \quad \forall j = [1, n]$ и $\mu_i \quad \forall i = [1, m]$ положительные, поскольку функция $Q(\tau, s)$ строго монотонно возрастающая. Поэтому очевидно, что $\det \|X\|^{-1} > 0$.

Найдем теперь знак второго сомножителя, который имеет вид: $\det \left(\|Y\| + \|A\| \|X\|^{-1} \|A\|^T \right)$. Заметим, что матрицу $\|Y\|$ можно рассматривать как матрицу некоторой положительно определенной квадратичной формы в пространстве E^m , в то время как матрица $\|A\| \|X\|^{-1} \|A\|^T$ (при любом значении ранга матрицы $\|A\|$) по следствию теоремы Бине–Коши (см. гл. 4, § 5, п. 6 в [31]) задает либо положительно определенную, либо положительно полуопределенную квадратичную форму в том же пространстве.

Ясно, что в этом случае матрица $\left(\|Y\| + \|A\| \|X\|^{-1} \|A\|^T \right)$ также задает в E^m положительно определенную квадратичную форму и имеет (в силу критерия Сильвестра) положительный детерминант. Поэтому, окончательно мы получаем, что $\det \|H\| > 0$.

2°. Невырожденность матрицы Якоби для системы уравнений (4.1.9) в сочетании со сделанными предположениями о гладкости функции $Q(\tau, s)$ допускает применение утверждений теоремы о неявных функциях [13] к этой системе. Откуда следует непрерывность вектор-функций $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$.

При этом компоненты вектор-функций $\frac{d\bar{x}}{d\tau}$ и $\frac{d\bar{\Lambda}}{d\tau}$ определяются $\forall \tau > 0$ системой линейных уравнений

$$\begin{vmatrix} -\|X\| & -\|A\|^T \\ -\|A\| & \|Y\| \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \left\| \frac{d\bar{x}}{d\tau} \right\| \\ \left\| \frac{d\bar{\Lambda}}{d\tau} \right\| \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \tau} \right\| \\ \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial \Lambda \partial \tau} \right\| \end{vmatrix}, \quad (4.2.23)$$

где $\left\| \frac{d\bar{x}}{d\tau} \right\|_j = \frac{d\bar{\xi}_j}{d\tau} \quad \forall j = [1, n], \quad \left\| \frac{d\bar{\Lambda}}{d\tau} \right\|_i = \frac{d\bar{\lambda}_i}{d\tau} \quad \forall i = [1, m],$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \tau} \right\|_j &= -\frac{\partial Q}{\partial \tau}(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) \quad \forall j = [1, n] \quad \text{и} \\ \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial \Lambda \partial \tau} \right\|_i &= \frac{\partial Q}{\partial \tau}(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) \quad \forall i = [1, m]. \end{aligned}$$

Причем последние функции ограничены и непрерывны в силу теоремы 4.2.4. Поэтому из (4.2.23) вытекает непрерывная дифференцируемость вектор-функций $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ на множестве $\tau > 0$.

Теорема доказана.

Следствие 4.2.1 **На седловой траектории для собственной пары задач (4.1.1) и (4.1.2) существуют конечные пределы**

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau), \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\Lambda}(\tau) \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)).$$

Доказательство.

Из непрерывной дифференцируемости и ограниченности вектор-функций $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ $\forall \tau > 0$ в собственном случае следует их равномерная непрерывность на этом множестве. Поэтому пределы, указанные в формулировке следствия, существуют и конечны.

Следствие доказано.

Свойства этих пределов описывают следующая теорема.

Теорема 4.2.6 **На седловых траекториях для собственных задач (4.1.1) и (4.1.2), т.е. задач, имеющих ограниченные оптимальные значения целевых функций, существуют конечные пределы** $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau)$ **и** $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\Lambda}(\tau)$, **для которых**

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} U\left(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)\right) = F(x^*) = G(\Lambda^*), \quad (4.2.24)$$

а в случае единственности решений (регулярности) пары задач (4.1.1) и (4.1.2) справедливы также равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau) = x^* \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\Lambda}(\tau) = \Lambda^*. \quad (4.2.25)$$

Доказательство.

На седловой траектории в силу (4.2.4) выполняется равенство

$$U\left(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)\right) = L\left(\bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)\right) - \sum_{j=1}^n R\left(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)\right) + \sum_{i=1}^m R\left(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)\right) \quad \forall \tau > 0.$$

Тогда $\forall \tau > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} U\left(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)\right) &\leq L\left(\bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)\right) + \sum_{i=1}^m R\left(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)\right) \leq \\ &\leq G^* + m \max_{i=[1,m]} R\left(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)\right) \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

и

$$\begin{aligned} U\left(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)\right) &\geq L\left(\bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)\right) - \sum_{j=1}^n R\left(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)\right) \geq \\ &\geq F^* - n \max_{j=[1,n]} R\left(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)\right). \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

Для собственных задач в силу теоремы 4.2.4 значения всех компонент вектор-функций $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ одновременно ограничены на седловой траектории.

Поскольку $-\infty < F^* = G^* < +\infty$, то в силу ограниченности вектор-функций $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ и утверждения теоремы 4.2.3

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \max_{i=[1,m]} R\left(\tau, \bar{x}_i(\tau)\right) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \max_{j=[1,n]} R\left(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)\right) = 0,$$

существуют пределы

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +0} U\left(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)\right) &= F^* = G^* \quad \text{и} \\ \lim_{\tau \rightarrow +0} L\left(\bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)\right) &= F^* = G^*. \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

В сделанных выше предположениях вектор-функции $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ непрерывны $\forall \tau > 0$, поскольку к определяющей их системе (4.1.10) применима теорема о неявных функциях [13]. Тогда из непрерывности $L(x, \Lambda)$, равенств (4.2.28) и свойств суперпозиции непрерывных функций получаем, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} L\left(\bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)\right) = L\left(\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau), \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\Lambda}(\tau)\right) = F^* = G^*.$$

А это означает, что конечные пределы (4.2.24) существуют, и что для них $F\left(\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau)\right) = F^*$ и $G\left(\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\Lambda}(\tau)\right) = G^*$. Наконец в регулярном случае функция Лагранжа задач (4.2.1) и (4.1.2) имеет единственную седловую точку $\{x^*, \Lambda^*\}$. В силу чего справедливы равенства (4.2.25).

Теорема доказана.

Здесь следует отметить, что представление U -функции в виде суммы классической функции Лагранжа и регуляризирующей добавки можно рассматривать как вариант коррекции собственных задач выпуклого программирования, аналогичный предложенному в [16].

Утверждение теоремы 4.2.6 означает близость значений функций $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ к значениям зависимостей x^* и λ^* там, где последние существуют и однозначны.

Кроме того, функции $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ определены и имеют положительные (в силу условий теоремы 4.2.2) значения, даже если среди задач

(4.1.1) или (4.1.2) имеются несовместные, и, кроме того, определены однозначно в случаях нерегулярности этих задач.

В заключение приведем конкретные примеры функций $Q(\tau, s)$, за-дающих правые части уравнений системы (4.1.10). В табл. 4.2.1 при-веденены некоторые из них, представляющие интерес с точки зрения вычислительной практики.

При этом еще раз отметим, что если функция $P(\tau, s)$ удовлетворяет предположению 4.2.1, то есть $\frac{\partial P}{\partial s}$ является функцией только одного аргумента $\frac{s}{\tau}$, то функция обратной связи $Q(\tau, s)$ имеет специальный вид, а именно: $Q(\tau, s) = \tau \Psi(s)$.

Отметим также, что в практических расчетах важен вид лишь функций $Q(\tau, s)$, входящих в условие системы (4.1.10). Степень слож-ности остальных функций, приведенных в табл. 4.2.1, особой роли не играет.

Таблица 4.2.1

$P(\tau, s)$	$\frac{\partial P}{\partial s}$	$Q(\tau, s)$	$R(\tau, s)$
$\tau \exp \frac{s}{\tau}$	$\exp \frac{s}{\tau}$	$\tau \ln s$	$\tau s \ln \frac{s}{e}$
$\frac{\tau}{2} \ln \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{s}{2} \frac{\partial P}{\partial s}$	$\sqrt{\left(\frac{s}{\tau}\right)^2 + 1} + \frac{s}{\tau}$	$\frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s}\right)$	$\frac{\tau}{2} \left(\frac{s^2}{2} - \ln s\right)$
Через элементарные функции не выражается	$\ln \left(1 + \exp \frac{s}{\tau}\right)$	$\tau \ln (\exp s - 1)$	Через элементарные функции не выражается

§ 4.3. Метод обратных связей в нерегулярных линейных задачах

Напомним, достаточно широко используемое на практике

Определение 4.3.1	Пара взаимнодвойственных задач (4.1.1) – (4.1.2) называется <i>регулярной</i> , если каждая из них имеет решение и притом единственное. Во всех остальных случаях эта пара задач называется <i>нерегулярной</i> . Если хотя бы одна из взаимнодвойственных задач является несовместной, такую пару задач (следуя [7]) будем называть <i>несобственной</i> .
-----------------------------	--

Из доказанных в § 4.2 теорем следует, что система (4.1.10) имеет при фиксированном $\tau > 0$ единственное решение независимо от того, являются ли задачи (4.1.1) и (4.1.2) регулярными или нет. Причем в регулярном случае при достаточно малых положительных значениях τ решение системы (4.1.10) близко к решениям задач (4.1.1) – (4.1.2). В нерегулярном случае анализ связи между этими решениями может потребовать специального исследования, что иллюстрируют приводимые ниже примеры.

В нерегулярном случае для каждой из взаимнодвойственных задач возможны (но не в любой комбинации!) неединственность решения, переопределенность решения, несовместность задачи и неограниченность целевой функции в допустимой области.

Продемонстрируем особенности применения функций обратной связи для этих случаев, сравнивая решения системы (4.1.10) с результатами получаемыми методом гладких штрафных функций, основанном на оптимизации вспомогательных функций (4.1.3) и (4.1.4). Для расчетов будем использовать штрафную функцию:

$$P(\tau, s) = \tau \exp\left(\frac{s}{\tau}\right)$$

и функцию обратной связи: $Q(\tau, s) = \tau \ln s$.

Задача
4.3.1 Прямая задача: максимизировать в E^2 целевую функцию
 $F = 2\xi_1 + 2\xi_2$, если $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$ и $\xi_1 + \xi_2 \leq 1$.

Двойственная задача: минимизировать в E^1 функцию $G = \lambda_1$ при условиях: $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 2$, $\lambda_1 \geq 2$.

Решение. Легко видеть, что прямая задача имеет решение:

$$\xi_1^* = t, \quad \xi_2^* = 1 - t, \quad t \in [0, 1], \quad F^* = 2,$$

оно *неединственное*, в то время как двойственная задача *переопределенная* (то есть задача, в точке решения которой число активных ограничений больше числа переменных) и имеет решение $\lambda_1^* = 2, G^* = 2$.

Рассмотрим вначале метод гладких штрафных функций, использующий вспомогательные функции (4.1.3) и (4.1.4). Они будут иметь вид

$$A_P(\tau, \xi_1, \xi_2) = 2\xi_1 + 2\xi_2 - \tau \exp\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 - 1}{\tau}\right) - \tau \exp\left(-\frac{\xi_1}{\tau}\right) - \tau \exp\left(-\frac{\xi_2}{\tau}\right),$$

$$A_D(\tau, \lambda_1) = \lambda_1 + 2\tau \exp\left(\frac{2 - \lambda_1}{\tau}\right) + \tau \exp\left(-\frac{\lambda_1}{\tau}\right),$$

а их условия стационарности соответственно суть

$$\begin{cases} 2 - \exp\left(\frac{\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 - 1}{\tau}\right) + \exp\left(-\frac{\tilde{\xi}_1}{\tau}\right) = 0, \\ 2 - \exp\left(\frac{\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 - 1}{\tau}\right) + \exp\left(-\frac{\tilde{\xi}_2}{\tau}\right) = 0 \end{cases}$$

и

$$1 - 2 \exp\left(\frac{2 - \tilde{\lambda}_1}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tau}\right) = 0,$$

причем обе эти системы условий стационарности имеют единственное решение.

Система же уравнений (4.1.10) будет также однозначно разрешима и иметь вид

$$\begin{cases} 1 - \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2 + \tau \ln \bar{\lambda}_1 = 0, \\ 2 - \bar{\lambda}_1 - \tau \ln \bar{\xi}_1 = 0, \\ 2 - \bar{\lambda}_1 - \tau \ln \bar{\xi}_2 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что при любом $\tau > 0$ она имеет решение

$$\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2 = \exp\left(\frac{2 - \bar{\lambda}_1}{\tau}\right),$$

где $\bar{\lambda}_1$ – корень уравнения $1 - 2 \exp\left(\frac{2 - \bar{\lambda}_1}{\tau}\right) + \tau \ln \bar{\lambda}_1 = 0$, имеющего единственное решение, что нетрудно показать, проведя те же рассуждения, что и для уравнения (4.2.19).

Наконец отметим, что полученные в данном примере решения системы (4.1.10) удовлетворяют предельным соотношениям $\bar{\lambda}_1 \rightarrow 2$ и $\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2 \rightarrow \frac{1}{2}$ при $\tau \rightarrow +0$. Результаты получено численных расчетов приведены в табл. 4.3.1.

Таблица 4.3.1

τ	0.1	0.02	0.003	0.001	0.0005	0.0001
$\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2$	0.536192	0.506999	0.501041	0.500347	0.500173	0.500035
$\bar{\lambda}_1$	2.062326	2.013585	2.002073	2.000693	2.000346	2.000069

В вычислительной практике могут встречаться и другие виды нерегулярных задач, например:

Задача 4.3.2 Прямая задача: максимизировать в E^2 целевую функцию $F = 2\xi_1 + 6\xi_2$ при условиях: $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$ и

$$\begin{aligned} \xi_1 + 3\xi_2 &\leq 3, \\ 2\xi_1 + \xi_2 &\leq 6. \end{aligned}$$

Двойственная задача: минимизировать в E^2 функцию $G = 3\lambda_1 + 6\lambda_2$ при условиях: $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ и

$$\begin{aligned}\lambda_1 + 2\lambda_2 &\geq 2, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 &\geq 6.\end{aligned}$$

Решение. Геометрически нетрудно убедиться, что обе эти задачи *совместные*, причем задача (P) имеет неединственное решение $\xi_1^* = 3 - 3t$, $\xi_2^* = t \forall t \in [0, 1]$ с переопределенной точкой $\|3\ 0\|^\text{T}$, а задача (D) – единственное и переопределенное решение $\lambda_1^* = 2$, $\lambda_2^* = 0$, причем $F^* = G^* = 6$.

Поскольку для данной задачи условия стационарности вспомогательных функций стандартного метода гладких штрафных функций обладают свойствами, аналогичными рассмотренным в задаче 4.3.1, то мы ограничимся лишь формулировкой и решением системы (4.1.10), которая будет иметь следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned}3 - \bar{\xi}_1 - 3\bar{\xi}_2 &= -\tau \ln \bar{\lambda}_1, \\ 6 - 2\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2 &= -\tau \ln \bar{\lambda}_2, \\ -2 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2 &= -\tau \ln \bar{\xi}_1, \\ -6 + 3\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 &= -\tau \ln \bar{\xi}_2.\end{aligned} \right.$$

Результаты численных расчетов приведены в табл. 4.3.2. При этом можно заметить, что, хотя решения системы (4.1.10) заметно различаются для разных значений параметра τ , они незначительно нарушают равенство

Решение $\xi_1 + 3\xi_2 = 3$ и обеспечивают близость значений целевых получено. функционалов задач (4.1.1) и (4.1.2).

Другую важную особенность нерегулярных задач можно продемонстрировать решением задачи 4.3.2 при помощи функции обратной свя-

зи $Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right)$, для которой $\frac{\partial P}{\partial s} = \sqrt{\left(\frac{s}{\tau} \right)^2 + 1 + \frac{s}{\tau}}$.

Таблица 4.3.2

τ	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$\bar{\xi}_1$	0.8979272	0.8902497	2.7084863	2.9698500	2.9969125
$\bar{\xi}_2$	0.7239748	0.7055625	0.0974029	0.0100732	0.0010315
$\bar{\lambda}_1$	2.0107666	2.0011625	2.0005990	2.0001271	2.0000195
$\bar{\lambda}_2$	$7.7 \cdot 10^{-16}$	$2 \cdot 10^{-153}$	$1 \cdot 10^{-208}$	$4 \cdot 10^{-218}$	$4 \cdot 10^{-228}$
$\bar{\xi}_1 + 3\bar{\xi}_2 - 3$	0.0698516	$6.94 \cdot 10^{-3}$	$6.95 \cdot 10^{-4}$	$6.96 \cdot 10^{-5}$	$6.96 \cdot 10^{-6}$
\bar{F}	6.1397032	6.0138746	6.0013900	6.0001391	6.0000139
\bar{G}	6.0322999	6.0034876	6.0017971	6.0003812	6.0000586

Предварительно также заметим, что система (4.1.10) может быть преобразована к виду

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \bar{\lambda}_i & = & \frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, f_i \left(\frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, -g_1(\bar{\Lambda}(\tau)) \right), \dots, \frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, -g_n(\bar{\Lambda}(\tau)) \right) \right) \right) \\ & & \forall i = [1, m], \end{array} \right. \quad (4.3.1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \bar{\xi}_j & = & \frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, -g_j \left(\frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, f_1(\bar{x}(\tau)) \right), \dots, \frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, f_m(\bar{x}(\tau)) \right) \right) \right) \\ & & \forall j = [1, n], \end{array} \right. \quad (4.3.1b)$$

получаемому из системы (4.1.9), равносильной системе (4.1.10).

Данный вид интересен тем, что в системе (4.3.1a)–(4.3.1b) первая подсистема, состоящая из m ее уравнений, зависит только от m неизвестных $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_m$, в то время как вторая, состоящая из n уравнений, зависит только от n неизвестных $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_n$.

Иначе говоря, система (4.1.10) распадается на две системы (4.3.1a) и (4.3.1b), которые можно решать независимо друг от друга. Напом-

ним, что аналогичные преобразования были ранее использованы при получении формулы (4.2.19).

Теперь решим прямую и двойственную задачи 4.3.2 следующими методами: методом гладких штрафных функций со штрафом (3.4.11) (то есть с первой радикальной штрафной функцией), затем при помощи систем (4.3.1a) и (4.3.1b) и наконец методом функций обратных связей – при помощи системы (4.1.10).

Заметим, что задачи решались одним и тем же алгоритмом, с одинаковой начальной точкой, но для различных значений параметра τ .

Условие стационарности для вспомогательной функции прямой задачи в методе гладких штрафных функций $A_P(\tau, \xi_1, \xi_2)$ со штрафом вида (3.4.11) будет

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + \sqrt{\left(\frac{-\tilde{\xi}_1}{\tau}\right)^2 + 1 + \frac{-\tilde{\xi}_1}{\tau}} - \\ - \left(\sqrt{\left(\frac{-3 + \tilde{\xi}_1 + 3\tilde{\xi}_2}{\tau}\right)^2 + 1 + \frac{-3 + \tilde{\xi}_1 + 3\tilde{\xi}_2}{\tau}} \right) - \\ - 2 \left(\sqrt{\left(\frac{-6 + 2\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2}{\tau}\right)^2 + 1 + \frac{-6 + 2\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2}{\tau}} \right) = 0, \\ \\ 6 + \sqrt{\left(\frac{-\tilde{\xi}_2}{\tau}\right)^2 + 1 + \frac{-\tilde{\xi}_2}{\tau}} - \\ - 3 \left(\sqrt{\left(\frac{-3 + \tilde{\xi}_1 + 3\tilde{\xi}_2}{\tau}\right)^2 + 1 + \frac{-3 + \tilde{\xi}_1 + 3\tilde{\xi}_2}{\tau}} \right) - \\ - \left(\sqrt{\left(\frac{-6 + 2\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2}{\tau}\right)^2 + 1 + \frac{-6 + 2\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2}{\tau}} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (4.3.2a)$$

Соответствующее условие стационарности вспомогательной функции двойственной задачи 4.3.2 $A_D(\tau, \lambda_1, \lambda_2)$ будет

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 - \left(\sqrt{\left(\frac{-\tilde{\lambda}_1}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{-\tilde{\lambda}_1}{\tau} \right) - \\ - \left(\sqrt{\left(\frac{2 - \tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{2 - \tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2}{\tau} \right) - \\ - 3 \left(\sqrt{\left(\frac{6 - 3\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{6 - 3\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2}{\tau} \right) = 0, \\ \\ 6 - \left(\sqrt{\left(\frac{-\tilde{\lambda}_2}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{-\tilde{\lambda}_2}{\tau} \right) - \\ - 2 \left(\sqrt{\left(\frac{2 - \tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{2 - \tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2}{\tau} \right) - \\ - \left(\sqrt{\left(\frac{6 - 3\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{6 - 3\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2}{\tau} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (4.3.2b)$$

Система (4.1.10) для задачи 4.3.2 имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} -3 + \bar{\xi}_1 + 3\bar{\xi}_2 = \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right), \\ \\ -6 + 2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 = \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right), \\ \\ -2 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2 = -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_1 - \frac{1}{\bar{\xi}_1} \right), \\ \\ -6 + 3\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_2 - \frac{1}{\bar{\xi}_2} \right). \end{array} \right. \quad (4.3.3)$$

Т а б л и ц а 4.3.2а

Сравнение решения задачи (4.3.2) различными методами

τ	P (МГШФ) (4.3.1b)	D (МГШФ) (4.3.1a)	P (МФОС) (4.3.2a)	D (МФОС) (4.3.2b)	P+D (МФОС) (4.3.3)
1.00E-01	4.44E-16	8.88E-16	2.48E-15	4.00E-15	6.38E-16
1.00E-02	4.85E-14	4.44E-15	7.58E-15	5.25E-15	1.67E-16
1.00E-03	4.44E-16	1.73E-14	9.30E-14	3.23E-13	6.83E-16
1.00E-04	0.00E+00	1.33E-12	1.06E-12	1.06E-12	6.77E-16
1.00E-05	4.44E-16	1.48E-06	8.53E-07	8.00E-02	9.19E-07
1.00E-06	4.44E-16	3.87E-05	4.90E-05	3.42E+00	3.09E-06
1.00E-07	4.44E-16	8.62E-05	1.17E-05	1.33E+01	5.09E-16
1.00E-08	4.44E-16	2.75E-06	2.42E-05	4.12E-09	3.66E-16
1.00E-09	9.68E-01	1.99E+00	1.34E-05	2.95E+01	2.22E-08
1.00E-10	9.68E-01	1.99E+00	2.93E-05	7.86E+01	1.64E-08
1.00E-11	9.68E-01	1.99E+00	6.55E-06	1.26E+03	8.44E-09
1.00E-12	9.68E-01	1.99E+00	8.16E-05	1.59E+04	3.36E-09
1.00E-13	9.68E-01	1.99E+00	1.95E-03	5.07E+04	1.07E-09
1.00E-14	9.68E-01	1.99E+00	4.00E-02	1.57E+05	3.41E-10
1.00E-15	1.71E+00	1.99E+00	4.00E-01	5.40E+03	1.09E-10
1.00E-16	1.71E+00	1.99E+00	1.66E+00	4.15E+04	3.49E-11
1.00E-17	1.71E+00	1.99E+00	2.98E+00	2.40E+03	1.08E-11
1.00E-18	1.71E+00	1.99E+00	2.00E+00	7.66E+01	3.45E-12
1.00E-19	1.71E+00	1.99E+00	2.00E+00	2.81E+02	1.07E-12
1.00E-20	2.38E+00	2.46E+00	2.00E+00	9.34E+03	3.38E-13
1.00E-21	2.38E+00	2.46E+00	3.00E+00	6.46E+05	1.10E-13
1.00E-22	2.38E+00	2.46E+00	3.00E+00	2.35E+04	5.95E-14
1.00E-23	2.38E+00	2.46E+00	3.00E+00	4.93E+05	7.79E-14
1.00E-24	2.38E+00	2.46E+00	3.00E+00	1.53E+08	2.21E-12
1.00E-25	2.38E+00	2.46E+00	3.00E+00	2.54E+08	2.61E-16
1.00E-26	2.38E+00	2.46E+00	3.00E+00	9.17E+06	3.71E-15
1.00E-27	2.38E+00	2.46E+00	3.00E+00	1.72E+06	9.21E-15
1.00E-28	2.38E+00	2.50E+00	3.00E+00	1.83E+06	1.94E-12
1.00E-29	2.38E+00	2.93E+00	3.00E+00	4.93E+06	1.94E-13
1.00E-30	2.38E+00	3.00E+00	3.00E+00	2.49E+07	1.91E-14
1.00E-31	1.00E+00	3.00E+00	3.00E+00	1.00E+08	1.71E-15
1.00E-32	1.00E+00	3.00E+00	3.00E+00	1.85E+08	2.43E-16

Уточним, что в столбцах табл. 4.3.2а приведены оценки значений минимально возможной погрешности, которой удалось достичь при решении пары задач 4.3.2. Точнее говоря, эти значения являются суммой абсолютных величин нарушений уравнений решаемых систем в точках, для которых процесс решения был завершен (необязательно

успешно!). Затененной подсветкой выделены варианты, для которых итоговая величина погрешности оказалась приемлемой.

Аббревиатуры МГШФ и МФОС означают соответственно «метод гладких штрафных функций» и «метод функций обратных связей». Индексами «Р» и «Д» отмечены прямая и двойственная задачи. В заголовке столбцов указаны также номера формулировок решаемых задач.

Напомним также, что все варианты задач решались *одной и той же* программой при *одинаковых* начальных приближениях.

Анализ данных табл. 4.3.2а показывает, что использование схемы функций обратных связей позволяет получать заметно лучшие по сходимости решения задач. Конкретно для вариантов задач, решения которых приведены в колонках 2–5 табл. 4.3.2а, обратная связь между прямыми и двойственными задачами была разорвана, в то время как для вариантов задач в 6-й колонке она использовалась. Хотя для большей объективности следует заметить, что функция обратной связи

$$Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right),$$

используемая при решении задачи (4.3.3), существенно проще для компьютерной реализации, чем выражение

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \sqrt{\left(\frac{s}{\tau} \right)^2 + 1 + \frac{s}{\tau}},$$

содержащееся в формулировках остальных задач.

Рассмотрим теперь примеры несобственных задач.

- Задача 4.3.3** Прямая задача: максимизировать в E^2 целевую функцию $F = 2\xi_1$ при условиях: $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$ и $\xi_1 - \xi_2 \leq 1$.
Двойственная задача: минимизировать в E^1 функцию $G = \lambda_1$ при условиях: $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 2$, $-\lambda_1 \geq 0$.

- Решение.** Первая из этих задач совместна, но значение ее целевой функции *неограничено* в допустимой области. Двойственная задача в этом примере *несовместна*.

Сначала рассмотрим схему, основанную на использовании функций (4.1.3) и (4.1.4). Они будут иметь вид

$$A_P(\tau, \xi_1, \xi_2) = 2\xi_1 - \tau \exp\left(\frac{\xi_1 - \xi_2 - 1}{\tau}\right) - \tau \exp\left(-\frac{\xi_1}{\tau}\right) - \tau \exp\left(-\frac{\xi_1}{\tau}\right),$$

$$A_D(\tau, \lambda_1) = \lambda_1 + \tau \exp\left(\frac{2 - \lambda_1}{\tau}\right) + \tau \exp\left(\frac{\lambda_1}{\tau}\right) + \tau \exp\left(-\frac{\lambda_1}{\tau}\right),$$

а их условия стационарности соответственно суть

$$\begin{cases} 2 - \exp\left(\frac{\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2 - 1}{\tau}\right) + \tau \exp\left(-\frac{\xi_1}{\tau}\right) = 0, \\ \exp\left(\frac{\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2 - 1}{\tau}\right) + \exp\left(-\frac{\xi_2}{\tau}\right) = 0 \end{cases}$$

и

$$1 - \exp\left(\frac{2 - \tilde{\lambda}_1}{\tau}\right) + \exp\left(\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tau}\right) = 0.$$

Второе условие имеет асимптотическое решение $\tilde{\lambda}_1 \rightarrow 1$ при $\tau \rightarrow +0$, в то время как первая система очевидно несовместна, что означает неприменимость метода гладких штрафных функций для решения данной задачи.

Рассмотрим теперь систему уравнений (4.1.10) вида

$$\begin{cases} 1 - \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 + \tau \ln \bar{\lambda}_1 = 0, \\ 2 - \bar{\lambda}_1 - \tau \ln \bar{\xi}_1 = 0, \\ \bar{\lambda}_1 - \tau \ln \bar{\xi}_2 = 0. \end{cases}$$

Она имеет решения $\bar{\xi}_1 = \exp\left(\frac{2 - \bar{\lambda}_1}{\tau}\right)$ и $\bar{\xi}_2 = \exp\left(\frac{\bar{\lambda}_1}{\tau}\right)$, где $\bar{\lambda}_1$ – корень уравнения

$$1 - \exp\left(\frac{2 - \bar{\lambda}_1}{\tau}\right) + \exp\left(\frac{\bar{\lambda}_1}{\tau}\right) + \tau \ln \bar{\lambda}_1 = 0,$$

имеющего единственное решение при любом $\tau > 0$.

В заключение отметим, что полученные в данном примере решения системы (4.1.10) удовлетворяют предельным соотношениям $\bar{\lambda}_1 \rightarrow 1$ и $\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2 \rightarrow 1$ при $\tau \rightarrow +0$, хотя пределы $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\xi}_1$ и $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\xi}_2$ не существуют.

Решение Результаты численных расчетов по методу обратных связей приведены в табл. 4.3.3.

Таблица 4.3.3

τ	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
$\bar{\xi}_1$	5.7996196	7.8969374	12.683928	28.535267	148.91394	22026.966
$\bar{\xi}_2$	4.8333558	6.9138386	11.695904	27.536873	147.91407	22025.966
$\bar{\lambda}_1$	0.9453246	0.9667625	0.9836955	0.9946578	0.9993263	0.9999977

В случае несобственной пары задач несовместными могут одновременно оказаться задачи (4.1.1) и (4.1.2).

Задача 4.3.4 Прямая задача: максимизировать в E^2 целевую функцию

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 &\leq 3, \\ -\xi_1 + \xi_2 &\leq -4. \end{aligned}$$

Двойственная задача: минимизировать в E^2 функцию $G = 3\lambda_1 - 4\lambda_2$ при условиях: $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ и

$$\begin{aligned}\lambda_1 - \lambda_2 &\geq 1, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 &\geq 3.\end{aligned}$$

Решение. Легко видеть, что обе эти задачи *несовместные*, при этом условия стационарности вспомогательных функций

$$\begin{aligned}A_P(\tau, \xi_1, \xi_2) &= \xi_1 + 3\xi_2 - \tau \exp\left(\frac{\xi_1 - \xi_2 - 3}{\tau}\right) - \\ &\quad - \tau \exp\left(\frac{-\xi_1 + \xi_2 + 4}{\tau}\right) - \tau \exp\left(\frac{-\xi_1}{\tau}\right) - \tau \exp\left(\frac{-\xi_2}{\tau}\right), \\ A_D(\tau, \lambda_1, \lambda_2) &= 3\lambda_1 - 4\lambda_2 + \tau \exp\left(\frac{1 - \lambda_1 + \lambda_2}{\tau}\right) + \\ &\quad + \tau \exp\left(\frac{3 + \lambda_1 - \lambda_2}{\tau}\right) + \tau \exp\left(\frac{-\lambda_1}{\tau}\right) + \tau \exp\left(\frac{-\lambda_2}{\tau}\right)\end{aligned}$$

очевидно противоречивые:

$$\begin{cases} 1 - \exp\left(\frac{\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2 - 3}{\tau}\right) + \exp\left(\frac{-\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + 4}{\tau}\right) + \\ \quad + \exp\left(\frac{-\xi_1}{\tau}\right) = 0, \\ 3 + \exp\left(\frac{\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2 - 3}{\tau}\right) - \exp\left(\frac{-\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + 4}{\tau}\right) + \\ \quad + \exp\left(\frac{-\xi_2}{\tau}\right) = 0 \end{cases}$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 - \exp\left(\frac{1 - \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2}{\tau}\right) + \\ \quad + \exp\left(\frac{3 + \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2}{\tau}\right) - \exp\left(\frac{-\lambda_1}{\tau}\right) = 0, \\ \\ -4 + \exp\left(\frac{1 - \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2}{\tau}\right) - \\ \quad - \exp\left(\frac{3 + \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2}{\tau}\right) - \exp\left(\frac{-\lambda_2}{\tau}\right) = 0, \end{array} \right.$$

поэтому стандартный вариант метода гладких штрафных функций в данном примере не может быть использован.

Как альтернативу рассмотрим систему уравнений (4.1.10), она будет иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 - \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 + \tau \ln \bar{\lambda}_1 = 0, \\ -4 + \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2 + \tau \ln \bar{\lambda}_2 = 0, \\ 1 - \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 - \tau \ln \bar{\xi}_1 = 0, \\ 3 + \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 - \tau \ln \bar{\xi}_2 = 0. \end{array} \right.$$

Заметим, что эта система имеет решения при $\tau > 0$, удовлетворяющие притом легко проверяемому следствию:

$$\ln \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 = 4 \ln \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2.$$

Однако, как и в задаче 4.3.3, пределы

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\xi}_1, \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\xi}_2, \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\lambda}_1 \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\lambda}_2$$

Решение получено. не существуют.

Результаты численных расчетов с допустимой погрешностью 10^{-7} приведены в табл. 4.3.4.

Таблица 4.3.4

τ	1.0	0.75	0.5	0.25	0.15
ξ_1	9.1243426	16.132626	56.328286	2982.7001	61743.938
ξ_2	5.9837900	12.839029	52.921156	2979.2170	61743.588
$\bar{\lambda}_1$	1.1509095	1.4791425	2.2575066	6.9058856	27.536084
$\bar{\lambda}_2$	2.3618554	2.5647752	3.2731050	7.9060316	28.536084
$\ln \frac{\xi_1 \xi_2}{(\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2)^4}$	$1.5 \cdot 10^{-8}$	$-1.1 \cdot 10^{-7}$	$-2.0 \cdot 10^{-8}$	$5.5 \cdot 10^{-8}$	$7.9 \cdot 10^{-9}$

Приведенные примеры иллюстрируют практическую эффективность схемы, использующей функции обратных связей как возможной альтернативы методу гладких штрафных функций.

В заключение рассмотрим использование алгоритма функций обратной связи для решения пары взаимно двойственных задач линейного *параметрического* программирования, то есть задач, имеющих экзогенные параметры в формулировке их условий.

Продемонстрируем, что эти задачи при различных значениях параметров могут оказаться разных типов, например, как регулярными, так и нерегулярными.

Задача
4.3.5

Прямая задача: максимизировать в $E^2 \forall u$ функцию

$$F = 2\xi_1 + 3\xi_2$$

при условиях: $\xi_1 \geq 0$; $\xi_2 \geq 0$; $\xi_2 \leq 3$;
 $\xi_1 + 2\xi_2 \leq u$; $2\xi_1 + \xi_2 \leq 6$.

Двойственная задача: минимизировать в $E^3 \forall u$ функцию

$$G = 3\lambda_1 + u\lambda_2 + 6\lambda_3$$

при условиях: $\lambda_1 \geq 0$; $\lambda_2 \geq 0$; $\lambda_3 \geq 0$;
 $\lambda_2 + 2\lambda_3 \geq 2$;
 $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \geq 3$.

Решение. В таблице 4.3.5 приведены значения функций $x^*(u)$ и Λ_u^* – точных решений задач взаимодвойственной пары.

Качественно данные, приведенные в табл. 4.3.5, означают, что

- при $u < 0$ прямая задача несовместна, а двойственная задача совместна, но имеет в допустимой области неограниченную целевую функцию;
- при $u \geq 0$ обе задачи совместны, причем в точках, где

$$u = 0, \quad u = 3 \quad \text{или} \quad u = \frac{15}{2}$$

прямая задача переопределена, а двойственная задача имеет неединственное решение.

Рассмотрим теперь решение пары задач 4.3.5, использовав метод функции обратных связей. Система уравнений (4.1.10) при использовании

$$Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right) \quad (4.3.4)$$

будет иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 - \bar{\xi}_2 + \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right) = 0, \\ u - \bar{\xi}_1 - 2\bar{\xi}_2 + \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right) = 0, \\ 6 - 2\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2 + \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_3 - \frac{1}{\bar{\lambda}_3} \right) = 0, \\ 2 - \bar{\lambda}_2 - 2\bar{\lambda}_3 - \frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_1 - \frac{1}{\bar{\xi}_1} \right) = 0, \\ 3 - \bar{\lambda}_1 - 2\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_3 - \frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_2 - \frac{1}{\bar{\xi}_2} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Таблица 4.3.5

u	$-\infty$	0	\longleftrightarrow	3	\longleftrightarrow	$\frac{15}{2}$	$+\infty$
$\xi_1^*(u)$	не сущ.	0	u	3	$-\frac{1}{3}u + 4$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
$\xi_2^*(u)$	не сущ.	0	0	0	$\frac{2}{3}u - 2$	3	3
$\lambda_1^*(u)$	0	0	0	0	0	$r, r \in [0, 2]$	2
$\lambda_2^*(u)$	не огран.	$[2, +\infty)$	2	$\frac{2-2t}{t \in [0, \frac{1}{3}]}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4-2r}{3}$	0
$\lambda_3^*(u)$	0	0	0	t	$\frac{1}{3}$	$\frac{1+r}{3}$	1
$F^*(u)$	не сущ.	0	$2u$	6	$\frac{4}{3}u + 2$	12	12
$G^*(u)$	не огран.	0	$2u$	6	$\frac{4}{3}u + 2$	12	12

Для уменьшения зависимости процесса решения от выбора начальных приближений и значений допусков погрешностей система (4.1.10) была несколько изменена:

$$\begin{cases} -\beta_i(u) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(u) |\bar{\xi}_j| = Q(\tau, |\bar{\lambda}_i|) & \forall i = [1, m], \\ -\sigma_j(u) + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}(u) |\bar{\lambda}_i| = -Q(\tau, |\bar{\xi}_i|) & \forall j = [1, n]. \end{cases} \quad (4.3.5)$$

Такая модификация, описанная более подробно в конце следующего параграфа, делает все уравнения системы (4.1.10) четными по каж-

дой из неизвестных и позволяет не проверять выполнения условий их положительности для каждого пробного шага.

В этом случае решение системы (4.1.10) необязательно оказывается в первом октанте пространства $E^n \otimes E^m$, однако искомыми решениями системы (4.1.10) оказываются абсолютные величины решений системы (4.3.5), поскольку они положительны и, очевидно, удовлетворяют всем уравнениям системы (4.1.10).

Результаты расчетов для коэффициентов $\tau = 0.1$, $\tau = 0.01$ и $\tau = 0.001$ соответственно приведены в табл. 4.3.6а, 4.3.6б и 4.3.6с, каждая строка которых содержит значения неизвестных системы (4.1.10) при фиксированном параметре $u \in [-0.001, 11]$.

Данные, относящиеся к значениям параметра u , при которых происходит смена оптимального базиса задачи 4.3.5, в этих таблицах выделены пустыми строками. Графическое представление этих решений показано на рис. 4.2–4.4.

Кроме того, на отдельный рис. 4.5 вынесен график зависимостей от u разности значений функций Лагранжа и U для значений параметра $\tau = 0.1$, $\tau = 0.01$ и $\tau = 0.001$ соответственно. Для большей наглядности график для $\tau = 0.001$ показан дважды: как с тем же масштабом по вертикальной оси, что и для двух предыдущих случаев, так и с масштабом, меньшим примерно в 50 раз.

Последние графики можно рассматривать как представление зависимости суммарной погрешности метода функций обратных связей от значений параметра u . Соответствующие численные значения приведены в табл. 4.3.7.

Эффект сглаживания зависимостей решений задач от экзогенного параметра u особенного наглядно проявляется при сравнении зависимостей решений, полученных для различных значений инструментального параметра τ . В окрестностях точек нерегулярности задачи параметрического программирования для сглаженных аппроксимаций непрерывность их производных первого и второго порядка сохраняется, однако сходимость к точным решениям при предельном переходе $\tau \rightarrow +0$ является лишь поточечной, но не равномерной. Последняя имеет место лишь для замкнутых промежутков на оси Ou , не содержащих нерегулярных точек.

Решение задачи 4.3.5 при $\tau = 0.1$

u	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$
-0.0010	0.07192540	0.02105030	0.01677970	2.67443170	0.00856821
-0.0001	0.07240060	0.02113190	0.01678020	2.66984230	0.00856972
0.0000	0.07245360	0.02114100	0.01678020	2.66933480	0.00856989
0.0001	0.07250650	0.02115000	0.01678030	2.66882770	0.00857006
0.0010	0.07298440	0.02123160	0.01678070	2.66428550	0.00857158
0.0100	0.07788310	0.02204280	0.01678530	2.62091940	0.00858720
0.0250	0.08651590	0.02337190	0.01679280	2.55637310	0.00861471
0.0500	0.10210820	0.02549420	0.01680480	2.46724260	0.00866443
0.1000	0.13709210	0.02927940	0.01682620	2.34031050	0.00877659
0.2500	0.26072470	0.03707450	0.01687040	2.16036110	0.00918791
1.0000	0.97235970	0.05062600	0.01694790	1.97783630	0.01248350
2.0000	1.94305140	0.06217220	0.01701450	1.87986960	0.02435530
2.5000	2.41650680	0.07313990	0.01707820	1.80863540	0.04561510
2.9000	2.72750760	0.11247310	0.01731070	1.65375880	0.11409880
2.9500	2.74755580	0.12632850	0.01739410	1.62111530	0.12985240
2.9900	2.75827070	0.14006320	0.01747760	1.59492940	0.14264220
3.0000	2.76022490	0.14386330	0.01750080	1.58853780	0.14578270
3.0100	2.76190210	0.14780470	0.01752500	1.58224330	0.14888250
3.0500	2.76603450	0.16489730	0.01763060	1.55830420	0.16073530
3.1000	2.76624350	0.18885150	0.01778070	1.53176910	0.17399690
3.5000	2.68452190	0.42574650	0.01941580	1.42302540	0.23068690
4.0000	2.53611230	0.74809330	0.02219250	1.37385640	0.25952660
5.0000	2.22133820	1.40335100	0.03128490	1.31897030	0.29623590
6.0000	1.90246140	2.06076830	0.05038050	1.26837340	0.33139260
7.0000	1.59088900	2.71195300	0.16864580	1.15883410	0.39652520
7.4000	1.49536800	2.94508510	0.59171220	0.86578460	0.54644180
7.4500	1.48878330	2.96766910	0.72765650	0.77415710	0.59249410
7.4900	1.48451980	2.98383570	0.85133700	0.69100050	0.63422720
7.5000	1.48357680	2.98759380	0.88360440	0.66932670	0.64509840
7.5100	1.48267870	2.99123430	0.91617740	0.64745470	0.65606710
7.5500	1.47949710	3.00458260	1.04687500	0.55975130	0.70003460
7.6000	1.47632820	3.01844280	1.20129220	0.45621650	0.75191740
8.0000	1.46788180	3.05606610	1.70710770	0.11741040	0.92162910
9.0000	1.46602570	3.06414000	1.82942140	0.03552470	0.96263990
10.0000	1.46569520	3.06556490	1.85142240	0.02079680	0.97001600
11.0000	1.46555850	3.06615310	1.86053980	0.01469350	0.97307260

Т а б л и ц а 4.3.6b

Решение задачи 4.3.5 при $\tau = 0.01$

u	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$
-0.0010	0.00679480	0.00202362	0.00166779	2.73415220	0.00083551
-0.0001	0.00726337	0.00210449	0.00166783	2.68667800	0.00083565
0.0000	0.00731683	0.00211344	0.00166784	2.68164790	0.00083567
0.0001	0.00737057	0.00212238	0.00166784	2.67666540	0.00083568
0.0010	0.00786648	0.00220234	0.00166789	2.63389760	0.00083583
0.0100	0.01386250	0.00290630	0.00166828	2.35894050	0.00083761
0.0250	0.02639440	0.00362906	0.00166868	2.18761970	0.00084124
0.0500	0.04977350	0.00416820	0.00166898	2.09851020	0.00084799
0.1000	0.09870570	0.00454781	0.00166919	2.04843740	0.00086236
0.2500	0.24796180	0.00482246	0.00166935	2.01710620	0.00090921
1.0000	0.99746440	0.00501004	0.00166945	1.99752540	0.00124998
2.0000	1.99720980	0.00510604	0.00166950	1.98751870	0.00249939
2.5000	2.49701700	0.00517737	0.00166954	1.97952540	0.00499594
2.9000	2.89602430	0.00554245	0.00166975	1.93787160	0.02468740
2.9500	2.94479850	0.00600751	0.00167001	1.89140310	0.04778540
2.9900	2.97779540	0.00891675	0.00167163	1.71042080	0.13818460
3.0000	2.98103000	0.01197440	0.00167334	1.61495900	0.18590660
3.0100	2.98112600	0.01665200	0.00167596	1.53674580	0.22501290
3.0500	2.97138360	0.04108860	0.00168981	1.41758670	0.28461950
3.1000	2.95556920	0.07385930	0.00170873	1.38144090	0.30273650
3.5000	2.82303100	0.33998770	0.00187968	1.34486590	0.32139510
4.0000	2.65651150	0.67322240	0.00214888	1.33840810	0.32509580
5.0000	2.32332880	1.33979070	0.00301164	1.33250240	0.32901650
6.0000	1.99012860	2.00637090	0.00503193	1.32743160	0.33256510
7.0000	1.65702550	2.67288240	0.01528150	1.31723910	0.33874660
7.4000	1.52451940	2.93895440	0.08136380	1.27187610	0.36189050
7.4500	1.50881950	2.97155830	0.17067700	1.21217530	0.39179720
7.4900	1.49925040	2.99493640	0.61453470	0.91616050	0.53983910
7.5000	1.49811760	2.99919850	0.92305730	0.71046030	0.64269330
7.5100	1.49740700	3.00234780	1.26197480	0.48450190	0.75567510
7.5500	1.49654080	3.00627470	1.80803190	0.12044720	0.93770560
7.6000	1.49639700	3.00690310	1.90543410	0.05550970	0.97017480
8.0000	1.49629740	3.00733310	1.97336120	0.01022310	0.99281850
9.0000	1.49628240	3.00739770	1.98365830	0.00335810	0.99625110
10.0000	1.49627940	3.00741040	1.98568200	0.00200891	0.99692570
11.0000	1.49627820	3.00741580	1.98654570	0.00143312	0.99721360

Решение задачи 4.3.5 при $\tau = 0.001$

u	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$
-0.0010000	0.0003393	0.0001267	0.0001667	3.4733085	0.0000833
-0.0001000	0.0006800	0.0002024	0.0001667	2.7351375	0.0000834
0.0000000	0.0007322	0.0002114	0.0001667	2.6826765	0.0000834
0.0001000	0.0007872	0.0002202	0.0001667	2.6349672	0.0000834
0.0010000	0.0013872	0.0002906	0.0001667	2.3602772	0.0000834
0.0100000	0.0098733	0.0004541	0.0001667	2.0504696	0.0000836
0.0250000	0.0248011	0.0004807	0.0001667	2.0199799	0.0000840
0.0500000	0.0497757	0.0004902	0.0001667	2.0098507	0.0000847
0.1000000	0.0997627	0.0004951	0.0001667	2.0047896	0.0000862
0.2500000	0.2497547	0.0004982	0.0001667	2.0016953	0.0000909
1.0000000	0.9997496	0.0005001	0.0001667	1.9997503	0.0001250
2.0000000	1.9997471	0.0005010	0.0001667	1.9987502	0.0002500
2.5000000	2.4997453	0.0005017	0.0001667	1.9979502	0.0005000
2.9000000	2.8997361	0.0005050	0.0001667	1.9937232	0.0024997
2.9500000	2.9497252	0.0005089	0.0001667	1.9886990	0.0049978
2.9900000	2.9896349	0.0005416	0.0001667	1.9491697	0.0247513
3.0000000	2.9981490	0.0011752	0.0001667	1.6172945	0.1906866
3.0100000	2.9955854	0.0073707	0.0001671	1.3788870	0.3098910
3.0500000	2.9823252	0.0339872	0.0001686	1.3434584	0.3276090
3.1000000	2.9656681	0.0673138	0.0001705	1.3385872	0.3300493
3.5000000	2.8323429	0.3339749	0.0001875	1.3345083	0.3321260
4.0000000	2.6656776	0.6673072	0.0002143	1.3338493	0.3325027
5.0000000	2.3323458	1.3339729	0.0003001	1.3332557	0.3328962
6.0000000	1.9990138	2.0006387	0.0005003	1.3327493	0.3332507
7.0000000	1.6656827	2.6673038	0.0015029	1.3317448	0.3338612
7.4000000	1.5323575	2.9339648	0.0075713	1.3275681	0.3359960
7.4500000	1.5157007	2.9672912	0.0152828	1.3224107	0.3385807
7.4900000	1.5024466	2.9939007	0.0814330	1.2782975	0.3606420
7.5000000	1.4998095	2.9999241	0.9269567	0.7146122	0.6424856
7.5100000	1.4996374	3.0006967	1.9155124	0.0555747	0.9720044
7.5500000	1.4996275	3.0007397	1.9835365	0.0102253	0.9946791
7.6000000	1.4996264	3.0007446	1.9912900	0.0050563	0.9972637
8.0000000	1.4996255	3.0007484	1.9973711	0.0010022	0.9992907
9.0000000	1.4996253	3.0007490	1.9983741	0.0003336	0.9996250
10.0000000	1.4996253	3.0007491	1.9985743	0.0002001	0.9996918
11.0000000	1.4996253	3.0007492	1.9986601	0.0001429	0.9997204

К задаче 4.3.5. Зависимость $L - U$ от u
при $\tau = 0.1, 0.01$ и $\tau = 0.001$

u	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.01$	$\tau = 0.001$
-0.0010	0.24721200	0.02510610	...
-0.0001	0.24719530	0.02507860	0.0025137
0.0000	0.24719400	0.02507830	0.0025110
0.0001	0.24719210	0.02507840	0.0025134
0.0010	0.24718080	0.02510060	0.0026470
0.0100	0.24727020	0.02642730	0.0035788
0.0250	0.24812680	0.02916320	0.0040416
0.0500	0.25093880	0.03223520	0.0043874
0.1000	0.25905550	0.03559310	0.0047258
0.2500	0.28308790	0.03985620	0.0051457
1.0000	0.31248760	0.04293350	0.0054462
2.0000	0.24608220	0.03547580	0.0046965
2.5000	0.17730890	0.02752420	0.0038992
2.9000	0.10952810	0.01493730	0.0026289
2.9500	0.10458940	0.01108920	0.0022180
2.9900	0.10223760	0.00623193	0.0013679
3.0000	0.10187450	0.00570703	0.0005294
3.0100	0.10159730	0.00606394	0.0011231
3.0500	0.10128300	0.00908834	0.0018641
3.1000	0.10236010	0.01175730	0.0022165
3.5000	0.12672530	0.01993920	0.0031092
4.0000	0.14807950	0.02374830	0.0035031
5.0000	0.15018400	0.02555420	0.0036966
6.0000	0.10482230	0.02218720	0.0033712
7.0000	-0.00795027	0.01228150	0.0024001
7.4000	-0.09999910	0.00090650	0.0013267
7.4500	-0.10943920	-0.00357177	0.0009344
7.4900	-0.11385380	-0.01080830	0.0000305
7.5000	-0.11442000	-0.01184150	-0.0011875
7.5100	-0.11475640	-0.01076870	0.0002272
7.5500	-0.11378180	-0.00232395	0.0011214
7.6000	-0.10780720	0.00213951	0.0014792
8.0000	-0.03342830	0.01106560	0.0022929
9.0000	0.03210960	0.01670660	0.0028437
10.0000	0.06007980	0.01929030	0.0030994
11.0000	0.07796050	0.02098530	0.0032678

Значения переменных при $\tau=0.1$

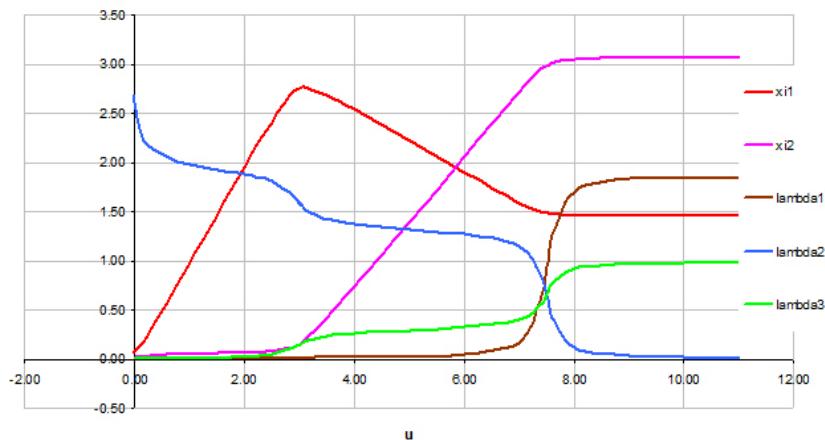


Рис. 4.2. Зависимость решений системы (4.1.10) в задаче 4.3.5 от значения параметра u для $\tau = 0.1$

Значения переменных при $\tau=0.01$

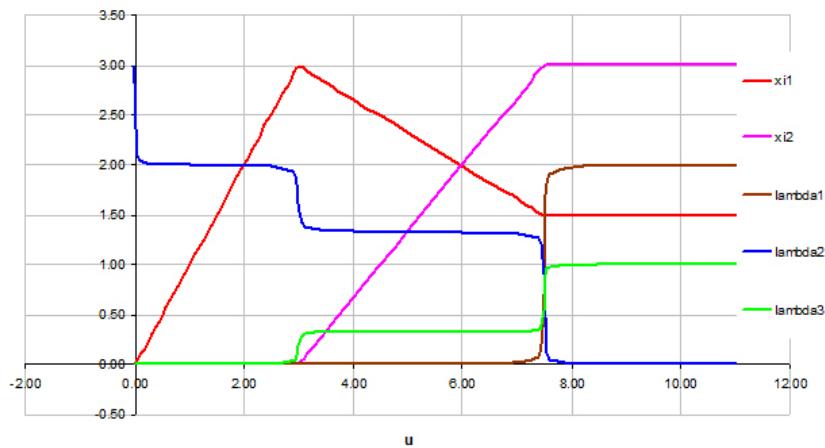


Рис. 4.3. Зависимость решений системы (4.1.10) в задаче 4.3.5 от значения параметра u для $\tau = 0.01$

Значения переменных при $\tau=0.001$

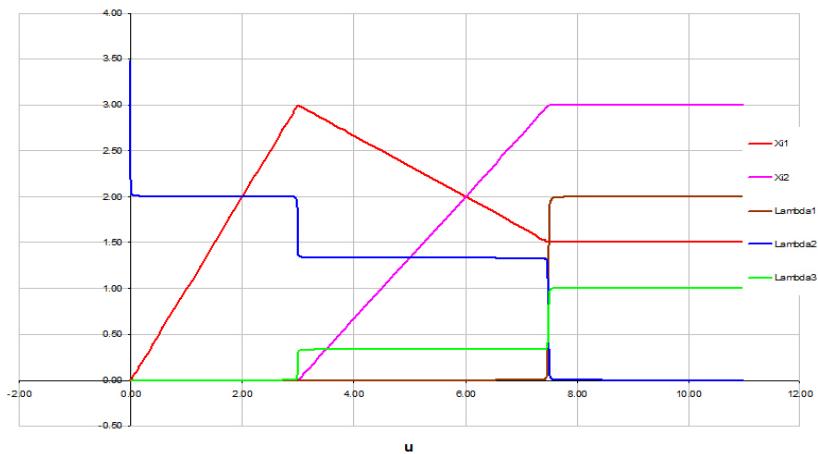


Рис. 4.4. Зависимость решений системы (4.1.10) в задаче 4.3.5 от значения параметра u для $\tau = 0.001$

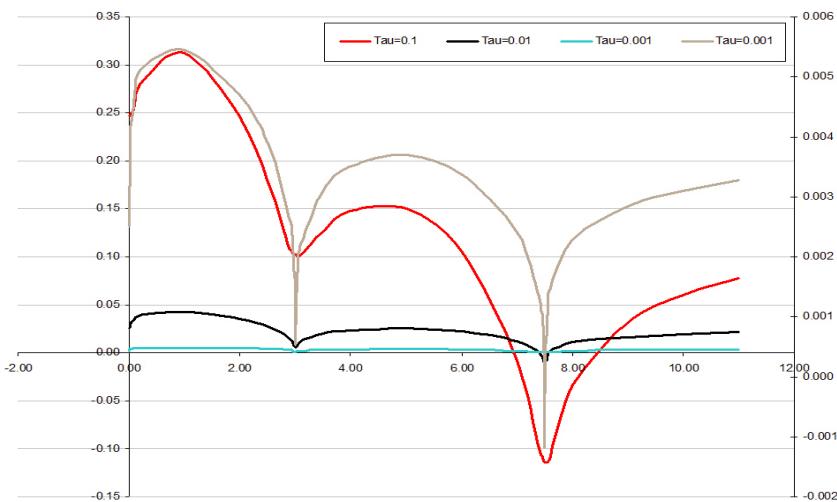


Рис. 4.5. График зависимости разности $L - U$ от значения параметра u для $\tau = 0.1$, $\tau = 0.01$ и $\tau = 0.001$

при фиксированном параметре $u \in [-0.001, 11]$.

при которых происходит смена оптимального базиса задачи 4.3.5, как с тем же масштабом по вертикальной оси,

§ 4.4. Другие виды функций обратных связей

В предыдущих рассуждениях мы использовали в качестве функций обратных связей $Q(\tau, s)$ функции, обратные к $\frac{\partial P}{\partial s}$, предполагая при этом, что гладкая штрафная функция $P(\tau, s)$ удовлетворяет условиям (2.1.5) – (2.1.7).

При этом естественным образом возникает вопрос о возможности построения функций обратных связей как-либо иначе. Более конкретно: здесь мы попробуем строить функции обратных связей без предположения о выполнении *всех* условий теоремы 3.1.1.

Для иллюстрации особенностей этого случая используем параметрический вариант пары взаимодвойственных задач линейного программирования 4.1.1–4.1.2.

Задача 4.4.1 Найти решения пары взаимно двойственных задач линейного программирования при фиксированных значениях скалярных параметров u и v :

прямая задача: максимизировать в E^2 функцию

$$F = 2\xi_1 + u\xi_2$$

при условиях: $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$ и

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 &\leq v, \\ 2\xi_1 + \xi_2 &\leq 6; \end{aligned}$$

двойственная задача: минимизировать в E^2 функцию

$$G = v\lambda_1 + 6\lambda_2$$

при условиях: $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ и

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 &\geq 2, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 &\geq u. \end{aligned}$$

При этом заметим, что за счет выбора конкретных значений параметров u и v , задача 4.4.1 может оказаться разных типов: регулярной, нерегулярной или несобственной.

Функции обратных связей при барьерных штрафах

Рассмотрим случай *барьерных* функций, предположив, что решаемая задача собственная, то есть имеет непустую ограниченную внутренность множества допустимых точек для задачи 4.1.1.

В этом предположении все теоремы § 4.2 оказываются справедливыми $\forall s < 0$, и, например, для логарифмической штрафной функции

$$P(\tau, s) = -\tau \ln(-s) ,$$

мы получаем из $\frac{\partial P}{\partial s} = -\frac{\tau}{s}$ функцию обратных связей $Q(\tau, s) = -\frac{\tau}{s}$.

Следующие примеры демонстрируют возможность использования функций обратных связей данного типа как для регулярного, так и для нерегулярного случаев.

Рассмотрим вначале *регулярный* вариант задачи 4.4.1, получающийся при значениях параметров $u = 3$ и $v = 6$. Нетрудно геометрически убедиться, что обе из пары взаимодвойственных задач в данном случае имеют единственные решения:

$$\xi_1^* = 2, \xi_2^* = 2, F(x^*) = 10$$

и

$$\lambda_1^* = \frac{4}{3}, \lambda_2^* = \frac{1}{3}, G(\Lambda^*) = 10 .$$

Система (4.1.10) в этом случае имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -6 + \bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 & = & -\frac{\tau}{\bar{\lambda}_1}, \\ -6 + 2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 & = & -\frac{\tau}{\bar{\lambda}_2}, \\ -2 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2 & = & \frac{\tau}{\bar{\xi}_1}, \\ -3 + 2\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 & = & \frac{\tau}{\bar{\xi}_2}, \end{array} \right. \quad (4.4.0)$$

Т а б л и ц а 4.4.0

Решение системы (4.4.0) с функцией обратных связей

$$Q(\tau, s) = -\frac{\tau}{s} \text{ для разных значений } \tau$$

τ	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	\bar{F}	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	\bar{G}
10^{-1}	1.83605745	2.04487324	9.80673463	1.34778035	0.35334209	10.20673463
10^{-2}	1.98259841	2.00495541	9.98006306	1.33497713	0.33503338	10.02006306
10^{-3}	1.99825097	2.00049956	9.99800063	1.33349977	0.33350033	10.00200063
10^{-4}	1.99982501	2.00005000	9.99980001	1.33335000	0.33335000	10.00020001
10^{-5}	1.99998250	2.00000500	9.99998000	1.33333500	0.33333500	10.00002000
10^{-6}	1.99999825	2.00000050	9.99999800	1.33333350	0.33333350	10.00000200

решения которой для различных значений параметра τ приведены в табл. 4.4.0.

Следует отметить, что штрафная функция в примере 4.1.3 не полностью удовлетворяет условиям теоремы 3.1.1. Этот и подобные ему

случаи требуют дополнительного обоснования и будут рассмотрены далее в этом параграфе.

Приведем теперь пример *нерегулярного* варианта задачи вида 4.4.1, который получается при $u = 3$ и $v = 3$.

Как и ранее, здесь геометрически несложно убедиться, что прямая задача имеет переопределенное единственное решение:

$$\xi_1^* = 3, \quad \xi_2^* = 0, \quad F(x^*) = 6,$$

в то время как у двойственной задачи решение неединственное:

$$\lambda_1^* = 2 - 2t \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \lambda_2^* = t, \quad G(\Lambda^*) = 6.$$

Система (4.1.17) при выбранных значениях параметров u и v будет

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -3 + \bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 & = & -\frac{\tau}{\bar{\lambda}_1}, \\ -6 + 2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 & = & -\frac{\tau}{\bar{\lambda}_2}, \\ -2 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2 & = & \frac{\tau}{\bar{\xi}_1}, \\ -3 + 2\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 & = & \frac{\tau}{\bar{\xi}_2}, \end{array} \right. \quad (4.4.1)$$

решения которой для различных τ приведены в таблице 4.4.1а, б. Для полноты картины в таблицы результатов включены значения величин

$\bar{\Delta} = \bar{F} - \bar{G}$ и $\bar{g}_1 = -2 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2$. Последняя из этих количественных характеристик представляет интерес, поскольку множество решений двойственной задачи является подмножеством точек прямой $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 2$.

Рассмотрим теперь *несобственный* вариант задачи 4.4.1. Например, при значении параметров $u = 3$ и $v = -1$ оказывается, что прямая задача несовместна, а двойственная имеет неограниченное решение.

Т а б л и ц а 4.4.1a

Решение системы (4.4.1) для различных значений параметра τ

τ	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	\bar{F}	\bar{G}
10^{-1}	2.60508444	0.16833018	5.71515942	6.11515942
10^{-2}	2.95792543	0.01809713	5.97014224	6.01014224
10^{-3}	2.99576835	0.00182157	5.99700141	6.00100141
10^{-4}	2.99957660	0.00018227	5.99970001	6.00010001
10^{-5}	2.99995766	$1.82 \cdot 10^{-5}$	5.99997000	6.00001000
10^{-6}	2.99999592	$2.18 \cdot 10^{-6}$	5.99999836	6.00000100

Т а б л и ц а 4.4.1b

Решение системы (4.4.1) для различных значений параметра τ

τ	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\Delta}$	\bar{g}_1
10^{-1}	1.71658487	0.16090080	$-4.00 \cdot 10^{-1}$	0.03838647
10^{-2}	1.70058904	0.15139585	$-4.00 \cdot 10^{-2}$	0.00338075
10^{-3}	1.69920714	0.15056333	$-4.00 \cdot 10^{-3}$	0.00033380
10^{-4}	1.69907096	0.15048119	$-4.00 \cdot 10^{-4}$	$3.33 \cdot 10^{-5}$
10^{-5}	1.69905736	0.15047299	$-4.00 \cdot 10^{-5}$	$3.33 \cdot 10^{-6}$
10^{-6}	1.63990383	0.18004825	$-4.00 \cdot 10^{-6}$	$3.33 \cdot 10^{-7}$

Система (4.1.17) в этом случае принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 1 + \bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 & = & -\frac{\tau}{\bar{\lambda}_1}, \\ -6 + 2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 & = & -\frac{\tau}{\bar{\lambda}_2}, \\ -2 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2 & = & \frac{\tau}{\bar{\xi}_1}, \\ -3 + 2\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 & = & \frac{\tau}{\bar{\xi}_2}. \end{array} \right. \quad (4.4.2)$$

В силу свойств функций обратных связей, рассмотренных в § 4.2, эта система совместна при всех положительных τ . Ее решения для различных значений параметра τ приведены в табл. 4.4.2a, b.

Т а б л и ц а 4.4.2a

Решение системы (4.4.2) для различных значений параметра τ

τ	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	\bar{F}	\bar{G}
10^{-1}	4.1748112	-2.62586831	0.47201749	0.87201749
10^{-2}	4.31600591	-2.66176220	0.64672524	0.68672524
10^{-3}	4.33158507	-2.66616763	0.66466726	0.66866726
10^{-4}	4.33315835	-2.66661668	0.66646667	0.66686667
10^{-5}	4.33331583	-2.66666167	0.66664667	0.66668667
10^{-6}	4.33333158	-2.66666617	0.66666467	0.66666867

Последняя колонка табл. 4.4.2b содержит значение вспомогательной переменной Err , которая равна сумме абсолютных величин разностей правых и левых частей всех уравнений системы (4.4.2), вычисленных для найденных значений переменных. Иначе говоря, Err есть

Решение системы (4.4.2) для различных значений параметра τ

τ	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\Delta}$	Err
10^{-1}	1.29996051	0.36199633	$-4.00 \cdot 10^{-1}$	0.00000000
10^{-2}	1.33005641	0.33613028	$-4.00 \cdot 10^{-2}$	0.00000000
10^{-3}	1.33300633	0.33361227	$-4.00 \cdot 10^{-3}$	0.00000000
10^{-4}	1.33330064	0.33336122	$-4.00 \cdot 10^{-4}$	0.00000000
10^{-5}	1.33333006	0.33333612	$-4.00 \cdot 10^{-5}$	0.00000000
10^{-6}	1.33333301	0.33333361	$-4.00 \cdot 10^{-6}$	0.00000000

некоторая количественная оценка погрешности полученного решения системы (4.4.2).

Как видно из табл. 4.4.2а, каждый вариант решения системы (4.4.2) имеет *отрицательную* компоненту. А тот факт, что эта система не может иметь неотрицательных решений, демонстрирует несовместность системы вида

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 1 + |\bar{\xi}_1| + 2|\bar{\xi}_2| & = & -\frac{\tau}{|\bar{\lambda}_1|}, \\ -6 + 2|\bar{\xi}_1| + |\bar{\xi}_2| & = & -\frac{\tau}{|\bar{\lambda}_2|}, \\ -2 + |\bar{\lambda}_1| + 2|\bar{\lambda}_2| & = & \frac{\tau}{|\bar{\xi}_1|}, \\ -3 + 2|\bar{\lambda}_1| + |\bar{\lambda}_2| & = & \frac{\tau}{|\bar{\xi}_2|}. \end{array} \right. \quad (4.4.3)$$

Зависимость Err – суммарного нарушения уравнений системы (4.4.3) – от величины параметра τ представлена в табл. 4.4.3.

Таким образом, в силу существования *барьерного* типа штрафной функции $P(\tau, s)$ не для любых s , использование записанной формально системы (4.1.17) может оказаться полезным лишь при решении *собственной* пары взаимодейственных задач вида 4.4.1.

Функции обратных связей для степенных штрафов

Штрафные функции $P(\tau, s)$ *внешнего* типа, равные тождественно нулю в допустимой области (в отличие от барьерных), определены $\forall s$, однако при этом удовлетворяют не всем условиям теоремы 3.1.1. Точнее говоря, для них обратная функция к $\frac{\partial P}{\partial \tau}$ существует не для любого s .

Проанализируем возможности использования в этом случае системы (4.1.17) на примере квадратичной штрафной функции

$$P(\tau, s) = \begin{cases} \frac{s^2}{2\tau} & \text{при } s > 0, \\ 0 & \text{при } s \leq 0, \end{cases}$$

производная от которой имеет обратную лишь $\forall s > 0$.

Т а б л и ц а 4.4.3

τ	Err
10^{-1}	1.000977557
10^{-2}	1.000345340
10^{-3}	1.000142606
10^{-4}	1.000067366
10^{-5}	1.000032149
10^{-6}	1.000017294

Конкретно, в области $s \geq 0$ производная этой функции $\frac{\partial P}{\partial \tau}(\tau, s) = \frac{s}{\tau}$ имеет обратную функцию вида $Q(\tau, s) = \tau s$.

Данная функция не обладает *всеми* свойствами функции обратных связей. Например, у нее нет вертикальной асимптоты $Q(\tau, s) \rightarrow -\infty$ при $s \rightarrow +0$.

Заметим, что отсутствие данного свойства функции обратных связей является несущественным для тех пар взаимодейственных задач линейного программирования, у которых в оптимальной точке все ограничения вида

$$f_i(x) = -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \leq 0$$

или

$$g_j(\Lambda) = -\sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \lambda_i \geq 0$$

активны.

Регулярный вариант задачи 4.4.1 при $u = 3$ и $v = 6$ демонстрирует это.

В этом случае, как уже отмечалось, обе задачи из пары взаимодвойственных имеют единственное решение:

$$\xi_1^* = 2, \xi_2^* = 2, F(x^*) = 10 \quad \text{и} \quad \lambda_1^* = \frac{4}{3}, \lambda_2^* = \frac{1}{3}, G(\Lambda^*) = 10.$$

Система (4.1.17) при выбранных значениях параметров u и v оказывается линейной и имеет вид

$$\begin{cases} -6 + \bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 = \tau\bar{\lambda}_1, \\ -6 + 2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 = \tau\bar{\lambda}_2, \\ -2 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2 = -\tau\bar{\xi}_1, \\ -3 + 2\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = -\tau\bar{\xi}_2, \end{cases} \quad (4.4.4)$$

решения которой для различных значений параметра τ приведены в табл. 4.4.4а, б.

Опять же, как и ранее, для полноты картины в таблицы результатов включены значения величин $\bar{\Delta} = \bar{F} - \bar{G}$ и $\bar{g}_1 = -2 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2$.

Покажем теперь, что функция обратной связи вида $Q(\tau, s) = \tau s$ может быть успешно использована и в *нерегулярном* случае.

Рассмотрим вариант задачи (4.4.1), который возникает при $u = 3$ и $v = 3$. В этом случае прямая задача имеет переопределенное единственное решение: $\xi_1^* = 3, \xi_2^* = 0, F(x^*) = 6$. В то время как у двойственной задачи решение неединственное: $\lambda_1^* = 2 - 2t \forall t \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \lambda_2^* = t, G(\Lambda^*) = 6$.

Система (4.1.17) при выбранных значениях параметров u и v будет

$$\begin{cases} -3 + \bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 = \tau\bar{\lambda}_1, \\ -6 + 2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 = \tau\bar{\lambda}_2, \\ -2 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2 = -\tau\bar{\xi}_1, \\ -3 + 2\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = -\tau\bar{\xi}_2, \end{cases} \quad (4.4.5)$$

решения которой приведены в таблице 4.4.5а, б.

Т а б л и ц а 4.4.4a

Решение системы (4.4.4) для различных значений параметра τ

τ	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	\bar{F}	\bar{G}
10^{-1}	1.97602224	2.07503214	10.17714091	9.18978912
10^{-2}	1.99775603	2.00775503	10.01877713	9.91988978
10^{-3}	1.99977756	2.00077756	10.00188778	9.99199889
10^{-4}	1.99997778	2.00007778	10.00018888	9.99919999
10^{-5}	1.99999778	2.00000778	10.00001889	9.99992000
10^{-6}	1.99999978	2.00000078	10.00000189	9.99999200

Т а б л и ц а 4.4.4b

Решение системы (4.4.4) для различных значений параметра τ

τ	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\Delta}$	\bar{g}_1
10^{-1}	1.26086527	0.27076626	0.98735179	-0.19760222
10^{-2}	1.32660749	0.32670748	0.09888735	-0.01997756
10^{-3}	1.33266607	0.33266707	0.00988889	-0.00199978
10^{-4}	1.33326666	0.33326667	0.00098889	-0.00020000
10^{-5}	1.33332667	0.33332667	$-9.89 \cdot 10^{-5}$	$-2.00 \cdot 10^{-5}$
10^{-6}	1.33333267	0.33333267	$-9.89 \cdot 10^{-6}$	$-2.00 \cdot 10^{-6}$

Т а б л и ц а 4.4.5a

Решение системы (4.4.5) для различных значений параметра τ

τ	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	\bar{F}	\bar{G}
10^{-1}	-0.00857133	3.06073560	9.16506412	8.08177932
10^{-2}	-0.00208844	3.00761060	9.01865492	8.90977168
10^{-3}	-0.00022089	3.00077611	9.00188656	8.99099767
10^{-4}	$-2.22 \cdot 10^{-5}$	3.00007776	9.00018887	8.99909998
10^{-5}	$-2.22 \cdot 10^{-6}$	3.00000778	9.00001889	8.99991000
10^{-6}	$-2.22 \cdot 10^{-7}$	3.00000078	9.00000189	8.99999100

Т а б л и ц а 4.4.5b

Решение системы (4.4.5) для различных значений параметра τ

τ	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\Delta}$	\bar{g}_2
10^{-1}	1.12899858	0.43592928	1.08328480	-0.30607356
10^{-2}	1.31327564	0.34337263	0.10888324	-0.03007611
10^{-3}	1.33133274	0.33433374	0.01088888	-0.00300078
10^{-4}	1.33313333	0.33343334	0.00108889	-0.00030001
10^{-5}	1.33331333	0.33334333	0.00010889	$-3.00 \cdot 10^{-5}$
10^{-6}	1.33333133	0.33333433	$1.09 \cdot 10^{-5}$	$-3.00 \cdot 10^{-6}$

Т а б л и ц а 4.4.6a

Решение системы (4.4.6) для различных значений параметра τ

τ	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	\bar{F}	\bar{G}
10^{-1}	-0.65252030	7.36728168	20.79680443	15.22049208
10^{-2}	-0.66852550	7.34067358	20.68496976	20.12389377
10^{-3}	-0.66688526	7.33410674	20.66854970	20.61243863
10^{-4}	-0.66668885	7.33341107	20.66685550	20.66124439
10^{-5}	-0.66666890	7.33334111	20.66668556	20.66612444
10^{-6}	-0.66666690	7.33333411	20.66666856	20.66661244

Т а б л и ц а 4.4.6b

Решение системы (4.4.6) для различных значений параметра τ

τ	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\Delta}$	Err
10^{-1}	0.82043055	0.62241074	5.57631235	$2.86 \cdot 10^{-15}$
10^{-2}	1.28216709	0.36225908	0.56107599	$1.86 \cdot 10^{-15}$
10^{-3}	1.32822163	0.33622263	0.05611108	$4.75 \cdot 10^{-15}$
10^{-4}	1.33282222	0.33362223	0.00561111	$5.15 \cdot 10^{-15}$
10^{-5}	1.33328222	0.33336222	0.00056111	$1.85 \cdot 10^{-15}$
10^{-6}	1.33332822	0.33333622	0.00005611	$2.61 \cdot 10^{-15}$

Для полноты картины в таблицы результатов включены значения величин $\bar{\Delta} = \bar{F} - \bar{G}$ и $\bar{g}_2 = -3 + 2\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2$. Значение величины g_2 представляет интерес, поскольку множество решений двойственной задачи является подмножеством точек прямой $2\lambda_1 + \lambda_2 = 3$.

Отметим, что для несобственных пар взаимодвойственных задач свойства функций обратных связей в случае квадратичного штрафа аналогичны логарифмическому штрафу в предположении, что нарушенные ограничения в несовместных задачах считаются активными.

Здесь важно отметить, что функция τs не позволяет получать верные решения при помощи системы (4.1.17), если в оптимальной точке имеются неактивные ограничения.

Рассмотрим этот случай на следующем примере. Пусть параметры $u = 3$ и $v = 14$. Это *регулярный* вариант задачи 4.4.1, в котором обе задачи из пары взаимодвойственных имеют единственное решение:

$$\xi_1^* = 0, \xi_2^* = 6, F(x^*) = 18 \quad \text{и} \quad \lambda_1^* = 0, \lambda_2^* = 3, G(\Lambda^*) = 18.$$

Система (4.1.17) при выбранных значениях параметров u и v будет

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -14 + \bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 & = & \tau\bar{\lambda}_1, \\ -6 + 2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 & = & \tau\bar{\lambda}_2, \\ -2 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2 & = & -\tau\bar{\xi}_1, \\ -3 + 2\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 & = & -\tau\bar{\xi}_2, \end{array} \right. \quad (4.4.6)$$

решения которой для различных значений параметра τ приведены в табл. 4.4.6а, б.

В таблицы результатов включены значения величин $\bar{\Delta} = \bar{F} - \bar{G}$ и, кроме того, последняя колонка таблицы 4.4.6б содержит значение вспомогательной переменной Err , которая в данном случае равна сумме абсолютных величин разностей правых и левых частей всех уравнений системы (4.4.6).

Система (4.4.6) совместна для различных значений параметра τ , но, как видно из табл. 4.4.6а, б, все решения этой системы имеют *отрицательные* компоненты. Неотрицательных же решений системы (4.4.6)

иметь не может, что следует из факта несовместности системы вида

$$\begin{cases} -14 + |\bar{\xi}_1| + 2|\bar{\xi}_2| = \tau|\bar{\lambda}_1|, \\ -6 + 2|\bar{\xi}_1| + |\bar{\xi}_2| = \tau|\bar{\lambda}_2|, \\ -2 + |\bar{\lambda}_1| + 2|\bar{\lambda}_2| = -\tau|\bar{\xi}_1|, \\ -3 + 2|\bar{\lambda}_1| + |\bar{\lambda}_2| = -\tau|\bar{\xi}_2|. \end{cases} \quad (4.4.7)$$

Зависимость Err – суммарного нарушения уравнений системы (4.4.7) – от величины параметра τ представлена в табл. 4.4.7.

Т а б л и ц а 4.4.7

Зависимость Err от значения τ для решений системы (4.4.7)

τ	Err
10^{-1}	4.045625872
10^{-2}	4.024523488
10^{-3}	4.002645323
10^{-4}	4.000266453
10^{-5}	4.000026665
10^{-6}	4.000002667

Построение новых функций обратных связей

Из изложенных в текущем параграфе рассуждений следует, что формальная запись системы (4.1.17) для функций $P(\tau, s)$, не полностью удовлетворяющих условиям теоремы 3.1.1, вообще говоря, не позволяет находить решения пары взаимодейственных задач 4.4.1 при произвольных значениях параметров u и v .

Если же при построении функции обратных связей отказаться от ее формальной привязки к порождающей штрафной функции $P(\tau, s)$, то возникающие затруднения можно преодолеть подходящей модификацией «дефектной» функции $Q(\tau, s)$.

Рассмотрим эту процедуру для функции $Q(\tau, s) = \tau s$.

Как было видно на примере системы (4.4.6), данная функция не позволяет находить решение пары взаимодвойственных задач в случае, когда в оптимальной точке имеются неактивные ограничения. Причиной этой проблемы является то, что $Q(\tau, s) = \tau s$ не имеет вертикальной асимптоты $Q(\tau, s) \rightarrow -\infty$ при $s \rightarrow +0$.

Для ее устранения поступим следующим образом: переопределим функцию $Q(\tau, s) = \tau s$ в малой, правой полуокрестности точки $s = 0$ к виду $Q_1(\tau, s)$ так, чтобы при фиксированном положительном τ

1° в полуокрестности $s \in (0, \tau)$ имело место $Q_1(\tau, s) \sim -\frac{1}{s}$;

2° функция $Q_1(\tau, s)$ была непрерывно дифференцируемой в точке $s = 0$.

При сделанных предположениях такое переопределение единственно, а новая функция обратных связей имеет вид

$$Q_1(\tau, s) = \begin{cases} \tau s, & s \geq \tau, \\ -\frac{\tau^3}{s} + 2\tau^2, & 0 < s < \tau. \end{cases}$$

Убедимся, что с ее помощью можно найти правильное решение *регулярного* варианта задачи 4.4.1 при значениях параметров $u = 3$ и $v = 14$, в котором обе задачи из пары взаимодвойственных имеют единственное решение:

$$\xi_1^* = 0, \xi_2^* = 6, F(x^*) = 18 \quad \text{и} \quad \lambda_1^* = 0, \lambda_2^* = 3, G(\Lambda^*) = 18.$$

Система (4.1.17) при выбранных значениях параметров u и v и новой функции обратных связей $Q_1(\tau, s)$ будет

$$\begin{cases} -14 + \bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 = Q_1(\tau, \bar{\lambda}_1), \\ -6 + 2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 = Q_1(\tau, \bar{\lambda}_2), \\ -2 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2 = -Q_1(\tau, \bar{\xi}_1), \\ -3 + 2\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = -Q_1(\tau, \bar{\xi}_2), \end{cases} \quad (4.4.8)$$

решения которой для различных значений параметра τ приведены в табл. 4.4.8а, б.

Опять же, как и ранее, для полноты картины в таблицы результатов включены значения величин $\bar{\Delta} = \bar{F} - \bar{G}$ и Err .

Т а б л и ц а 4.4.8a

Решение системы (4.4.8) для различных значений параметра τ

τ	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	\bar{F}	\bar{G}
10^{-1}	0.00036092	6.23678099	18.71106482	14.25922500
10^{-2}	$2.58 \cdot 10^{-7}$	6.02939654	18.08819012	17.63823724
10^{-3}	$2.5 \cdot 10^{-10}$	6.00299400	18.00898199	17.96398204
10^{-4}	$2.5 \cdot 10^{-13}$	6.00029994	18.00089982	17.99639982
10^{-5}	0.00000000	6.00003000	18.00009000	17.99964000
10^{-6}	0.00000000	6.00000300	18.00000900	17.99996400

Т а б л и ц а 4.4.8b

Решение системы (4.4.8) для различных значений параметра τ

τ	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\Delta}$	Err
10^{-1}	0.00064680	2.37502830	4.45183981	0.00000000
10^{-2}	$5.15 \cdot 10^{-7}$	2.93970500	0.44995288	0.00000000
10^{-3}	$5.0 \cdot 10^{-10}$	2.99399701	0.04499995	$1.1 \cdot 10^{-15}$
10^{-4}	$5.0 \cdot 10^{-13}$	2.99939997	0.00450000	$1.1 \cdot 10^{-15}$
10^{-5}	0.00000000	2.99994000	0.00045000	0.00000000
10^{-6}	0.00000000	2.99999400	0.00004500	0.00000000

Непосредственный анализ полученных результатов показывает, что погрешность решения для разных компонент векторов $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ значительно различается, например: для $\bar{\xi}_1$ она порядка τ^3 , в то время как погрешность $\bar{\xi}_2 \sim \tau$.

Это свидетельствует о плохой обусловленности системы (4.4.8), что, в свою очередь, требует дополнительных усилий для подбора начального приближения при решении этой системы.

Важно отметить, что плохая обусловленность в данном случае порождена не задачей 4.4.1, а специфическими свойствами не очень удачно подобранный функции обратных связей $Q_1(\tau, s)$.

Покажем, что возможны другие способы переопределения функции $Q(\tau, s) = \tau s$ к виду $Q_2(\tau, s)$, при которых эффекта ухудшения обусловленности не возникает.

Например, пусть в правой полуокрестности точки $s = 0$ вертикальная асимптота $Q_2(\tau, s) \rightarrow -\infty$ при $s \rightarrow +0$ обладает свойством $Q_2(\tau, s) \sim -\frac{1}{s^2}$. В этом случае, если переопределение $Q(\tau, s) = \tau s$ выполнять на $s \in (0, \sqrt[3]{\tau})$, непрерывно дифференцируемая функция $Q_2(\tau, s)$ определяется однозначно и имеет вид

$$Q_2(\tau, s) = \begin{cases} \tau s, & s \geq \sqrt[3]{\tau}, \\ -\frac{\tau^2}{2s^2} + \frac{3}{2}\tau\sqrt[3]{\tau}, & 0 < s < \sqrt[3]{\tau}. \end{cases}$$

В качестве примера ее использования рассмотрим тот же вариант задачи 4.4.1, что и для $Q_1(\tau, s)$, то есть со значениями параметров $u = 3$ и $v = 14$.

Система (4.1.17) при данных значениях параметров u и v имеет вид

$$\begin{cases} -14 + \bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 = Q_2(\tau, \bar{\lambda}_1), \\ -6 + 2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 = Q_2(\tau, \bar{\lambda}_2), \\ -2 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2 = -Q_2(\tau, \bar{\xi}_1), \\ -3 + 2\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = -Q_2(\tau, \bar{\xi}_2), \end{cases} \quad (4.4.9)$$

решения которой для различных значений параметра τ приведены в табл. 4.4.9а, б.

В таблицы результатов опять же включены значения вспомогательных величин $\bar{\Delta} = \bar{F} - \bar{G}$ и Err .

Т а б л и ц а 4.4.9a

Решение системы (4.4.9) для различных значений параметра τ

τ	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	\bar{F}	\bar{G}
10^{-1}	0.04318806	6.14149836	18.51087119	14.42220645
10^{-2}	0.00359553	6.02210559	18.07350784	17.64878700
10^{-3}	0.00035415	6.00228471	18.00756241	17.96498749
10^{-4}	$3.54 \cdot 10^{-5}$	6.00022921	18.00075835	17.99649988
10^{-5}	$3.54 \cdot 10^{-6}$	6.00002293	18.00007586	17.99965000
10^{-6}	$3.54 \cdot 10^{-7}$	6.00000229	18.00000759	17.99996500

Т а б л и ц а 4.4.9b

Решение системы (4.4.9) для различных значений параметра τ

τ	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\Delta}$	Err
10^{-1}	0.05355273	2.27874470	4.08866474	$1.89 \cdot 10^{-15}$
10^{-2}	0.00505667	2.92966561	0.42472084	$1.02 \cdot 10^{-15}$
10^{-3}	0.00050060	2.99299652	0.04257492	$1.77 \cdot 10^{-15}$
10^{-4}	$5.00 \cdot 10^{-5}$	2.999299965	0.00425847	$1.29 \cdot 10^{-15}$
10^{-5}	$5.00 \cdot 10^{-6}$	2.99993000	0.00042586	$1.15 \cdot 10^{-15}$
10^{-6}	$5.00 \cdot 10^{-7}$	2.99999300	$4.26 \cdot 10^{-5}$	$1.19 \cdot 10^{-15}$

Рассматривая данные, приведенные в табл. 4.4.9а, б, нетрудно заметить: порядки погрешностей у всех компонент вектор-функций $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ при использовании функции обратных связей вида $Q_2(\tau, s)$ примерно одинаковые и равные τ .

Исследование зависимости погрешности метода функций обратных связей от параметра τ будет рассмотрено далее, в § 5.3 по схеме, аналогичной использованной в § 3.3 для метода штрафных функций.

Следует отметить, что также существуют другие функции обратных связей $Q_3(\tau, s)$, мало отличающиеся от τs при больших положительных s и имеющие вертикальную асимптоту $Q_3(\tau, s) \rightarrow -\infty$ при

$$s \rightarrow +0 \text{ вида } Q_3(\tau, s) \sim -\frac{\tau}{s}.$$

Действительно, поскольку функция τs имеет малые значения при малых положительных s , то можно, например, просто сложить асимптотические описания и получить, что

$$Q_3(\tau, s) = \tau \left(s - \frac{1}{s} \right) \quad \forall s > 0.$$

Но это есть (с точностью до множителя $\frac{1}{2}$) уже неоднократно использованная нами ранее функция обратных связей, указанная в табл. 4.2.1 и получаемая как производная по s от 1-й радикальной штрафной функции вида (3.4.11).

Наконец укажем, что упомянутая ранее проблема выбора подходящего начального решения может возникнуть не только в случае задачи с плохой обусловленностью. Дело в том, что функция обратных связей $Q(\tau, s)$ должна быть определена, по крайней мере, на своем «рабочем» промежутке $s > 0$. Но задающие ее формулы могут иметь смысл и вне этого промежутка, и, более того, у системы (4.1.17) могут также оказаться побочные решения с отрицательными компонентами.

Понятно, что необходимость специального контроля за процессом решения задачи, не допускающего нарушения каких-либо ограничений, в общем случае может представлять достаточно серьезную проблему.

Однако для системы (4.1.17) подобных затруднений удается избежать при помощи следующей модификации постановки решаемой системы:

$$\begin{cases} -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} |\bar{\xi}_j| = Q(\tau, |\bar{\lambda}_i|) & \forall i = [1, m], \\ -\sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} |\bar{\lambda}_i| = -Q(\tau, |\bar{\xi}_j|) & \forall j = [1, n]. \end{cases} \quad (4.4.10)$$

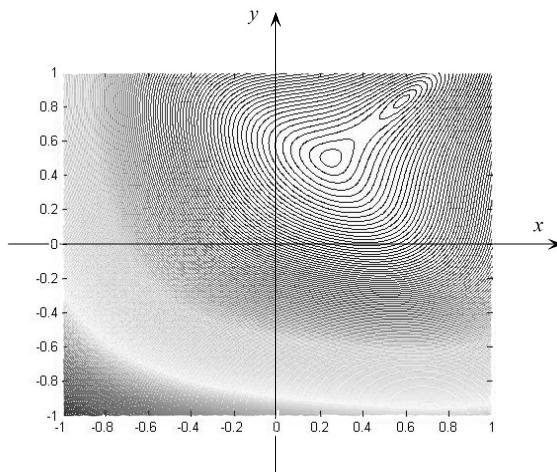


Рис. 4.6. Вид системы изолиний для функции $\langle \text{grad } T(x, y) \rangle^2$.

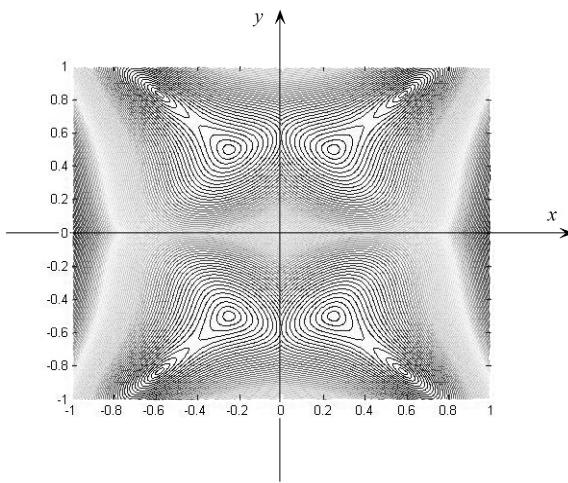


Рис. 4.7. Вид системы изолиний для функции $\langle \text{grad } T(|x|, |y|) \rangle^2$.

Решаемая задача становится четной по всем своим переменным, и потому процесс решения системы (4.4.10) может заканчиваться в различных (а проходить даже в нескольких) координатных квадрантах. За окончательное решение в этом случае можно принять вектор, координатами которого являются абсолютные величины полученно-

го решения. Необходимость контроля за нарушением границ области определения функции $Q(\tau, s)$ в этом случае отсутствует.

Геометрический смысл используемой модификации иллюстрируют рис. 4.6 и 4.7. На этих рисунках показаны системы изолиний соответственно для функций

$$\sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}(x, y)\right)^2} \quad \text{и} \quad \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial x}(|x|, |y|)\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}(|x|, |y|)\right)^2},$$

$$\text{где } T(x, y) = \left(x - \frac{1}{4}\right)^3 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^3 - \left(x - \frac{1}{4}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right).$$

Нетрудно видеть, что функция $T(x, y)$ имеет две стационарные точки: седловую $\left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right\}$ и локальный минимум $\left\{\frac{7}{12}; \frac{5}{6}\right\}$, в которых норма градиента $T(x, y)$ равна нулю и которые находятся в первом квадранте.

С другой стороны, функция $T(|x|, |y|)$ имеет восемь стационарных точек, расположенных симметрично относительно координатных осей. Две из этих точек совпадают со стационарными точками функции $T(x, y)$, найти координаты которых не представляет большого труда: при любом выборе начальной точки и завершении процесса решения в любом квадранте координатной плоскости искомые решения суть абсолютные величины решений системы (4.4.10).

Наконец укажем, что существуют и другие способы модификации системы (4.1.17). Например, неизвестные величины в (4.1.17) можно представлять в виде любых четных функций, имеющих положительные значения для положительных значений аргумента. Скажем, использовать в системе (4.4.10) вместо $|\bar{\xi}_j|$ и $|\bar{\lambda}_i|$ величины $\bar{\xi}_j^2$ и $\bar{\lambda}_i^2$, что также позволит улучшить сходимость, хотя и с усложненными расчетами при переходе к исходным переменным.

Альтернативный метод введения функций обратных связей

До сих пор мы рассматривали существенно гладкие виды функций обратных связей, по крайней мере, мы считали их непрерывно дифференцируемыми. Эта гладкость является очевидным следствием гладкости штрафных функций $P(\tau, s)$, поскольку в качестве функций обратных связей $Q(\tau, s)$ нами использовались функции, обратные к функции $\frac{\partial P}{\partial s}$.

Но, если обратиться к условию теоремы 2.3.1, являющейся основой метода штрафных функций, то несложно увидеть, что высокая степень гладкости собственно говоря здесь не требуется. Основные необходимые свойства – это непрерывность и локальная выпуклость, на которых построено большинство современных, эффективно работающих вариантов метода штрафных функций. Все это, естественно, приводит к вопросу: «Нельзя ли построить функцию обратной связи без привязки к гладким штрафным функциям?»

Понятно, что обоснованный ответ на этот вопрос должен быть результатом специального, достаточно объемного исследования и заведомо выходит за рамки нашего курса. Однако рассмотренные нами свойства функций обратных связей позволяют сделать некоторые предположения о потенциальной перспективности альтернативной схемы их использования без непосредственной привязки к методу гладких штрафных функций.

Рассмотрим один из вариантов такой схемы подробнее.

Напомним (см. § 4.1), что для пары взаимодейственных линейных задач (4.1.1) – (4.1.2) векторы \tilde{x} и $\tilde{\Lambda}$, получаемые методом гладких штрафных функций из условий (4.1.5), являются близкими (по значениям) асимптотическими оценками решений задач (4.1.1) – (4.1.2).

В свою очередь, близость значений

$$\lambda_i \text{ и } \frac{\partial P}{\partial f_i}(\tau, f_i(\tilde{x}(\tau))) \quad \forall i = [1, m], \quad \xi_j \text{ и } \frac{\partial P}{\partial g_j}(\tau, -g_j(\tilde{\Lambda}(\tau))) \quad \forall j = [1, n]$$

в сочетании с положительностью $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$ явилась основой предположения о том, что решения системы уравнений (4.1.9):

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_i &= \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i(\bar{x}(\tau))) & \forall i = [1, m], \\ \bar{\xi}_j &= \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, -g_j(\bar{\Lambda}(\tau))) & \forall j = [1, n] \end{cases}$$

или равносильной ей (в силу взаимной обратности функций $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$ и $Q(\tau, s)$), системы (4.1.10):

$$\begin{cases} -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \bar{\xi}_j &= Q(\tau, \bar{\lambda}_i) & \forall i = [1, m], \\ -\sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \bar{\lambda}_i &= -Q(\tau, \bar{\xi}_j) & \forall j = [1, n] \end{cases}$$

могут служить асимптотическими оценками решений исходных задач (4.1.1) – (4.1.2). Таким образом, основываясь на методе гладких штрафных функций, мы получали схему решения задач (4.1.1) – (4.1.2) при помощи функций обратных связей $Q(\tau, s)$.

Альтернативный же способ введения функций обратных связей может заключаться в следующем.

Аксиоматически примем систему (4.1.10) за исходную, задав свойства функций обратных связей $Q(\tau, s)$ в виде

- функция $Q(\tau, s)$ непрерывна $\forall \tau > 0 \ \forall s \geq 0$ и имеет вертикальную асимптоту при $\tau \rightarrow +0$;
- область значений функции $Q(\tau, s)$ есть интервал $(-\infty, +\infty)$;
- функция $Q(\tau, s)$ строго монотонно возрастающая по $s \ \forall s \geq 0$;
- функция $InvQ(\tau, s)$, обратная к $Q(\tau, s)$, определена и неотрицательна $\forall \tau > 0 \ \forall s$.

Убедимся вначале экспериментально, что такой подход может быть работоспособным, рассмотрев несколько линейных задач разных типов для функции обратных связей вида

$$Q(\tau, s) = \begin{cases} \tau(s - \tau) & \text{при } s \geq \tau, \\ \frac{s - \tau}{s} & \text{при } 0 < s < \tau. \end{cases} \quad (4.4.11)$$

Рассмотрим следующую пару взаимодейственных задач линейного программирования, записанную в общем виде.

Задача 4.4.2. Условие имеет вид

Прямая задача:

максимизировать $\sigma_1 \xi_1 + \sigma_2 \xi_2$

при условиях: $\xi_1 \geq 0, \ \xi_2 \geq 0$ и

$$\begin{array}{rclcl} \xi_1 & & \leq & \beta_1, \\ & \xi_2 & \leq & \beta_2, \\ \alpha_{31} \xi_1 + \alpha_{32} \xi_2 & \leq & \beta_3, \\ \alpha_{41} \xi_1 + \alpha_{42} \xi_2 & \leq & \beta_4. \end{array}$$

Двойственная задача:

$$\text{минимизировать } \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 + \beta_3\lambda_3 + \beta_4\lambda_4$$

при условиях: $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$ и $\lambda_4 \geq 0$,

$$\begin{array}{lllll} \lambda_1 & + & \alpha_{31}\lambda_3 & + & \alpha_{41}\lambda_4 \geq \sigma_1, \\ \lambda_2 & + & \alpha_{32}\lambda_3 & + & \alpha_{42}\lambda_4 \geq \sigma_2. \end{array}$$

Выполним для задачи 4.4.2 расчеты по формулам (4.1.10) для различных значений ее параметров. Конкретно система уравнений (4.1.10) в данном случае будет иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\beta_1 + \bar{\xi}_1 & = & Q(\tau, \bar{\lambda}_1), \\ -\beta_2 + \bar{\xi}_2 & = & Q(\tau, \bar{\lambda}_2), \\ -\beta_3 + \alpha_{31}\bar{\xi}_1 + \alpha_{32}\bar{\xi}_2 & = & Q(\tau, \bar{\lambda}_3), \\ -\beta_4 + \alpha_{41}\bar{\xi}_1 + \alpha_{42}\bar{\xi}_2 & = & Q(\tau, \bar{\lambda}_4), \\ -\sigma_1 + \bar{\lambda}_1 + \alpha_{31}\bar{\lambda}_3 + \alpha_{41}\bar{\lambda}_4 & = & -Q(\tau, \bar{\xi}_1), \\ -\sigma_2 + \bar{\lambda}_2 + \alpha_{32}\bar{\lambda}_3 + \alpha_{42}\bar{\lambda}_4 & = & -Q(\tau, \bar{\xi}_2), \end{array} \right. \quad (4.4.12)$$

где функция $Q(\tau, s)$ определена формулой (4.4.11).

Условие задачи 4.4.2 сформулировано в общем виде, позволяющем решать систему (4.4.12) для линейных задач разных типов. Рассмотрим вначале 1-й вариант – регулярную пару взаимодвойственных задач при следующих значениях параметров:

$$\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 3, \beta_1 = 3, \beta_2 = 4, \beta_3 = 6, \beta_4 = 6,$$

$$\alpha_{11} = 1, \alpha_{12} = 0, \alpha_{21} = 0, \alpha_{22} = 1, \alpha_{31} = 1, \alpha_{32} = 2, \alpha_{41} = 2, \alpha_{42} = 1.$$

Для 1-го варианта как прямая, так и двойственная задачи имеют конечные единствственные решения вида

$$\xi_1^* = 2, \xi_2^* = 2, F^* = G^* = 10, \lambda_1^* = 4/3, \lambda_2^* = 1/3.$$

Результаты вычислений для 1-го варианта, выполненные по формулам (4.4.12), приведены в табл. 4.4.10а, б.

Рассмотрим теперь 2-й вариант – собственную, но нерегулярную пару взаимодвойственных задач, первая из которых имеет переопределеное единственное решение, а решение двойственной к ней конечное, но неединственное. Этот случай будет иметь место при $\beta_3 = 3$ в задачах 4.4.1. Значения остальных параметров остаются теми же, что и в 1-м варианте.

Т а б л и ц а 4.4.10a

**Использование функции обратной связи (4.4.11)
для 1-го варианта пары задач 4.4.2**

Ит.	τ	ξ_1	ξ_2	F	G
1	0.1	1.973262639	2.070412572	10.157762996	9.038219960
2	0.01	1.997726606	2.007708722	10.018579379	9.901856180
3	0.001	1.999777260	2.000777092	10.001885796	9.987502068
4	0.0001	1.999977773	2.000077771	10.000188858	9.999050032
5	0.00001	1.999997778	2.000007778	10.000018889	9.999901667
6	0.000001	1.999999778	2.000000778	10.000001889	9.999993167
7	0.0000001	1.999999978	2.000000078	10.000000189	9.999999017

Т а б л и ц а 4.4.10b

**Использование функции обратной связи (4.4.11)
для 1-го варианта пары задач 4.4.2**

Ит.	τ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1	0.1	0.033038876	0.051824550	1.240877842	0.269378509
2	0.01	$3.33 \cdot 10^{-3}$	$5.22 \cdot 10^{-3}$	1.324405069	0.326193428
3	0.001	$3.33 \cdot 10^{-4}$	$5.00 \cdot 10^{-4}$	1.332444048	0.332611933
4	0.0001	$3.33 \cdot 10^{-5}$	$5.00 \cdot 10^{-5}$	1.333244440	0.333261119
5	0.00001	$3.33 \cdot 10^{-6}$	$5.00 \cdot 10^{-6}$	1.333324444	0.333326111
6	0.000001	$3.33 \cdot 10^{-7}$	$5.00 \cdot 10^{-7}$	1.333332444	0.333332611
7	0.0000001	$3.33 \cdot 10^{-8}$	$5.00 \cdot 10^{-8}$	1.333333244	0.333333261

Конкретно, для 2-го варианта прямая задача имеет решение:

$$\xi_1^* = 3, \quad \xi_2^* = 0, \quad F^* = 6.$$

В то время как решение двойственной задачи будет описываться (проверьте это самостоятельно) условиями:

$$G^* = 6 \quad \text{при} \quad \begin{cases} \lambda_1^* = 0, \\ \lambda_2^* = 0, \\ \lambda_3^* = 2 - 2u, \\ \lambda_4^* = u \quad \forall u = [0, 1]. \end{cases}$$

Результаты вычислений для 2-го варианта, выполненные по формулам (4.4.2), приведены в табл. 4.4.11a, b.

Рассмотрим теперь 3-й вариант – несобственную пару взаимодвойственных задач, первая из которых несовместна, а решение двойственной к ней неограниченное. Этот случай будет иметь место при $\beta_3 = -1$ в задачах 4.4.2 при неизмененных значениях остальных параметров.

Т а б л и ц а 4.4.11a

**Использование функции обратной связи (4.4.11)
для 2-го варианта пары задач 4.4.2**

Ит.	τ	ξ_1	ξ_2	F	G
1	0.1	2.948346947	0.094237603	6.179406702	5.117427513
2	0.01	2.996903075	$8.71 \cdot 10^{-3}$	6.019933159	5.907868812
3	0.001	2.999706441	$8.65 \cdot 10^{-4}$	6.002008855	5.992253970
4	0.0001	2.999970806	$8.65 \cdot 10^{-5}$	6.000201041	5.998675042
5	0.00001	2.999997082	$8.65 \cdot 10^{-6}$	5.999968223	5.999922500
6	0.000001	2.999999708	$8.65 \cdot 10^{-7}$	5.999996822	5.999986750
7	0.0000001	2.999999971	$8.65 \cdot 10^{-8}$	6.000000201	5.999998675

В 3-м варианте у прямой задачи решение – пустое множество, решение двойственной задачи будет неограниченным снизу, поскольку значение ее целевого функционала при $\beta_3 = -1$ может быть отрицательным и сколь угодно большим по модулю на очевидно допустимом векторе:

$$\begin{cases} \lambda_1^* = 0, \\ \lambda_2^* = 0, \\ \lambda_3^* = u \quad \forall u \geq 0, \\ \lambda_4^* = 0. \end{cases}$$

Результаты вычислений для 3-го варианта, выполненные по формулам (4.4.12), приведены в табл. 4.4.12a, b.

Т а б л и ц а 4.4.11b

**Использование функции обратной связи (4.4.11)
для 2-го варианта пары задач 4.4.2**

Ит.	τ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1	0.1	0.033038876	0.051824550	1.240877842	0.269378509
2	0.01	$3.33 \cdot 10^{-3}$	$5.22 \cdot 10^{-3}$	1.324405069	0.326193428
3	0.001	$3.33 \cdot 10^{-4}$	$5.00 \cdot 10^{-4}$	1.332444048	0.332611933
4	0.0001	$3.33 \cdot 10^{-5}$	$5.00 \cdot 10^{-5}$	1.333244440	0.333261119
5	0.00001	$3.33 \cdot 10^{-6}$	$5.00 \cdot 10^{-6}$	1.333324444	0.333326111
6	0.000001	$3.33 \cdot 10^{-7}$	$5.00 \cdot 10^{-7}$	1.333332444	0.333332611
7	0.0000001	$3.33 \cdot 10^{-8}$	$5.00 \cdot 10^{-8}$	1.333333244	0.333333261

Т а б л и ц а 4.4.12a

**Использование функции обратной связи (4.4.11)
для 3-го варианта пары задач 4.4.2**

Ит.	τ	ξ_1	ξ_2	F	G
1	0.1	0.010680714	$5.36 \cdot 10^{-3}$	0.037432339	-10.222833165
2	0.01	$1.01 \cdot 10^{-4}$	$5.05 \cdot 10^{-5}$	$3.53 \cdot 10^{-4}$	-100.037123683
3	0.001	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$5.00 \cdot 10^{-7}$	$3.50 \cdot 10^{-6}$	-1000.005409000
4	0.0001	$3.26 \cdot 10^{-8}$	$1.63 \cdot 10^{-8}$	$1.14 \cdot 10^{-7}$	-3065.354844000

В процессе решения системы (4.4.12) для 3-го варианта задач 4.4.2 с $\tau = 0.0001$ была зафиксирована потеря точности. При этом суммарное по абсолютным величинам нарушение условий системы (4.4.12) (для данных приведенных в табл. 4.4.12b) составило приблизительно 0.7.

Итак мы продемонстрировали, что функция (4.4.11) реализует обратные связи для пары задач 4.4.2. Рассмотрим подробнее ее свойства.

Из формулы (4.4.11) следует, что она непрерывна $\forall \tau > 0 \ \forall s \geq 0$ и имеет вертикальную асимптоту при $\tau \rightarrow +0$.

**Использование функции обратной связи (4.4.11)
для 3-го варианта пары задач 4.4.2**

Ит.	τ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1	0.1	0.020042814	0.025033526	10.313946547	0.014340451
2	0.01	$2.00 \cdot 10^{-3}$	$2.50 \cdot 10^{-3}$	100.030195165	$1.43 \cdot 10^{-3}$
3	0.001	$2.00 \cdot 10^{-4}$	$2.50 \cdot 10^{-4}$	1000.00300200	$1.43 \cdot 10^{-4}$
4	0.0001	$2.00 \cdot 10^{-5}$	$2.50 \cdot 10^{-5}$	3065.35484400	$1.43 \cdot 10^{-5}$

Далее, поскольку

$$\frac{\partial Q}{\partial s}(\tau, s) = \begin{cases} \frac{\tau}{s^2} & \text{при } s \geq \tau, \\ \frac{\tau}{s^2} & \text{при } 0 < s < \tau, \end{cases}$$

то она монотонно возрастает $\forall s$, но имеет разрывную по s производную в точке $s = \tau$.

Функция, обратная по s к функции (4.4.11), которая формально должна обозначаться как $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$, в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s) = \begin{cases} \frac{s}{\tau} + \tau & \text{при } s \geq 0, \\ \frac{\tau}{1-s} & \text{при } s < 0 \end{cases}$$

и, соответственно,

$$P(\tau, s) = \begin{cases} \frac{s^2}{2\tau} + \tau s & \text{при } s \geq 0, \\ -\tau \ln(1-s) & \text{при } s < 0. \end{cases}$$

Проверьте самостоятельно, что функция $P(\tau, s)$, во-первых, является непрерывно дифференцируемой, но не дважды непрерывно дифференцируемой, и, во-вторых, удовлетворяет условиям теоремы 3.1.2, но не удовлетворяет следствию 3.1.1. Кроме того, следует отметить, что к данной штрафной функции $P(\tau, s)$ не применима теорема 2.3.1, поскольку эта функция стремится к нулю при $\tau \rightarrow +0$ на множестве

$s \leq 0$ поточечно, но неравномерно. Тот факт, что функция $P(\tau, s)$ в рассматриваемом случае является штрафной, требует специального обоснования, аналогичного, например, доказательству теоремы 8 в [1].

Для полноты картины найдем также вид функции $R(\tau, s)$, исходя из соотношения $Q(\tau, s) = \frac{\partial R}{\partial s}(\tau, s)$. Имеем

$$R(\tau, s) = \begin{cases} \frac{\tau s^2}{2} - \tau^2 s + \frac{\tau^3}{2} & \text{при } s \geq \tau, \\ s - \tau \ln s - \tau + \tau \ln \tau & \text{при } 0 < s < \tau. \end{cases}$$

Постоянные интегрирования были выбраны так, чтобы обеспечить непрерывность $R(\tau, s)$ и чтобы $R(\tau, \tau) = 0$, поскольку из последнего равенства (как легко убедиться) следует $R(\tau, s) \geq 0 \ \forall s > 0$.

Графики функций $P(\tau, s)$, $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$, $Q(\tau, s)$ и $R(\tau, s)$ при различных значениях τ показаны на рис. 4.8.

Рассмотрим теперь вопрос об обосновании рассмотренной выше схемы.

Вначале введем вспомогательную функцию $U(\tau, s)$ по стандартной формуле

$$U(\tau, x, \Lambda) = \sum_{j=1}^n \left(\sigma_j \xi_j - R(\tau, \xi_j) \right) + \sum_{i=1}^m \left(\beta_i \lambda_i + R(\tau, \lambda_i) \right) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \xi_j \lambda_i.$$

Отличие этой формулы от (4.2.4) заключается в том, что используемая для ее записи функция $U(\tau, s)$ есть непрерывно дифференцируемая, но не является дважды дифференцируемой функцией.

Несложный анализ показывает, что и в этом случае будут справедливы следующие теоремы.

Теорема
4.4.1

Функция $U(\tau, x, \Lambda)$ строго выпукла вверх по x и строго выпукла вниз по Λ в любой конечной точке с положительными координатами в пространстве $E^n \otimes E^m$.

Теорема
4.4.2

Система уравнений (4.1.10) имеет решение с положительными компонентами при любом фиксированном $\tau > 0$ для любой пары взаимодвойственных задач 4.1.1 и 4.1.2.

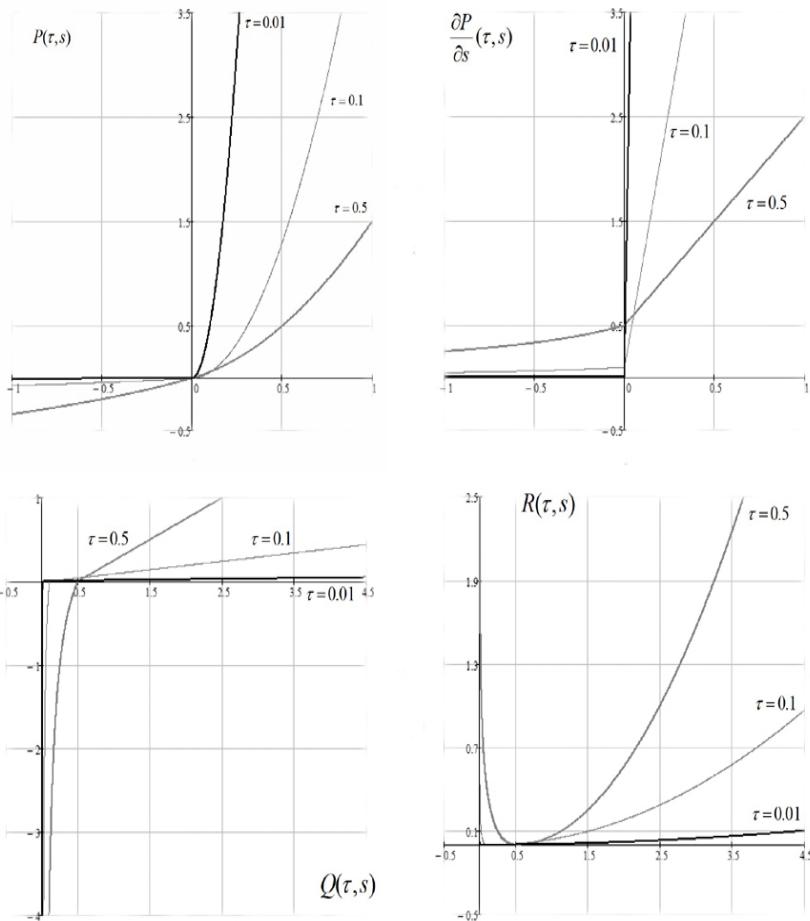


Рис. 4.8. Вид графиков зависимости функций $P(\tau, s)$, $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$, $Q(\tau, s)$ и $R(\tau, s)$ от s при различных значениях τ

Убедитесь в этом самостоятельно, используя тот факт, что производная от гладкой функции есть функция непрерывная.

Глава 5. Функции обратных связей в задачах нелинейного программирования

§ 5.1. Функции обратных связей для нелинейных задач

Теперь рассмотрим использование метода функций обратных связей для решения *нелинейной* задачи математического программирования:

максимизировать по $\|x\| = \|\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\|^T$ дважды непрерывно дифференцируемую целевую функцию $F(x)$ при условиях:

$$\xi_j \geq 0 \quad \forall j = [1, n], \quad (5.1.1)$$

$$f_i(x) \leq 0 \quad \forall i = [1, m], \quad (5.1.2)$$

где функции $f_i(x) \forall i = [1, m]$ также дважды непрерывно дифференцируемые.

Решение этой задачи (как и в линейном случае) будем обозначать x^* .

Вначале выясним, как будет выглядеть для задачи (5.1.1) – (5.1.2) система вспомогательных уравнений (4.1.10), использовав для записи этих соотношений формат, не использующий явно линейность решаемой задачи.⁴

⁴На возможность подобного подхода внимание авторов обратил А.Г. Бирюков.

Стандартная функция Лагранжа для пары задач (4.1.1) – (4.1.2) будет

$$L(x, \Lambda) = \sum_{j=1}^n \sigma_j \xi_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(-\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \right),$$

где $\|\Lambda\| = \|\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m\|^\text{T}$. Несложно убедиться, что в этом случае условие стационарности вспомогательной U -функции (4.2.4), т. е. систему (4.1.10), можно представить в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\bar{x}, \bar{\Lambda}) = -Q(\tau, \bar{\lambda}_i) & \forall i = [1, m], \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_j}(\bar{x}, \bar{\Lambda}) = Q(\tau, \bar{\xi}_j) & \forall j = [1, n]. \end{cases} \quad (5.1.3)$$

Предположим теперь, что $L(x, \Lambda)$ есть функция Лагранжа для задачи (5.1.1) – (5.1.2), то есть,

$$L(x, \Lambda) = F(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x), \quad (5.1.4)$$

и определим U -функцию как

$$U(\tau, x, \Lambda) = L(x, \Lambda) - \sum_{j=1}^n R(\tau, \xi_j) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i). \quad (5.1.5)$$

Условия стационарности такой вспомогательной функции по-прежнему будут иметь вид (5.1.3), однако их можно (с учетом равенства $Q(\tau, s) = \frac{\partial R}{\partial s}$) записать и так:

$$\begin{cases} f_i(\bar{x}) = Q(\tau, \bar{\lambda}_i) & \forall i = [1, m], \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_j}(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}(\bar{x}) = Q(\tau, \bar{\xi}_j) & \forall j = [1, n]. \end{cases} \quad (5.1.6)$$

Заметим, что, если в условиях (5.1.1) отсутствует неравенство с индексом $p \in [1, n]$, или/и в (5.1.2) вместо неравенства с индексом $q \in [1, m]$ указано равенство, то формула (5.1.5) не будет содержать слагаемых с этими индексами.

Продемонстрируем на следующем простом примере принципиальную возможность использования вспомогательной функции (5.1.5) для решения задач вида (5.1.1) – (5.1.2).

Пример 5.1.1. Максимизировать по переменной ξ функцию

$$F(\xi) = (\xi - 2)^2,$$

при условиях: $\xi \geq 0, \quad 1 \leq \xi \leq 4.$

Вспомогательная U -функция (5.1.5) с $Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right)$ и с $R(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(\frac{s^2}{2} - \ln s - \frac{1}{2} \right)$ для такой задачи будет

$$U(\tau, \xi, \lambda_1, \lambda_2) = (\xi - 2)^2 - \lambda_1(-4 + \xi) - \lambda_2(1 - \xi) -$$

$$- \frac{\tau}{2} \left(\frac{\xi^2}{2} - \ln \xi \right) + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\lambda_1^2}{2} - \ln \lambda_1 \right) + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\lambda_2^2}{2} - \ln \lambda_2 \right) + \frac{\tau}{4},$$

а условия стационарности соответственно

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2(\bar{\xi} - 2) - \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 & = & \frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi} - \frac{1}{\bar{\xi}} \right), \\ 4 - \bar{\xi} & = & - \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right), \\ -1 + \bar{\xi} & = & - \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right). \end{array} \right. \quad (5.1.7)$$

Если принять во внимание, что функция, обратная к $Q(\tau, s)$ имеет вид $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s) = \sqrt{\left(\frac{s}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{s}{\tau}$, то из системы (5.1.7) можно исключить неизвестные $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}_2$. И система окажется равносильной уравнению $\bar{\xi} = \Phi(\tau, \bar{\xi})$ т.е., конкретно, уравнению

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= 2 + \frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi} - \frac{1}{\bar{\xi}} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{1 - \bar{\xi}}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{1 - \bar{\xi}}{\tau} \right) + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{\bar{\xi} - 4}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{\bar{\xi} - 4}{\tau} \right), \end{aligned}$$

графическое решение которого для значений $\tau = 0.25, 0.1, 0.025$ приведены на рис. 5.1 для трех различных масштабов вертикальной оси.

Из рис. 5.1 видно, что задача примера 5.1.1 имеет два локальных решения $\xi_1^* = 1$ и $\xi_1^* = 4$, находящихся на границе допустимого множества. Кроме того, имеется внутренняя стационарная точка $\tilde{\xi} = 2$, не являющаяся решением, поскольку в ней целевая функция имеет минимум.

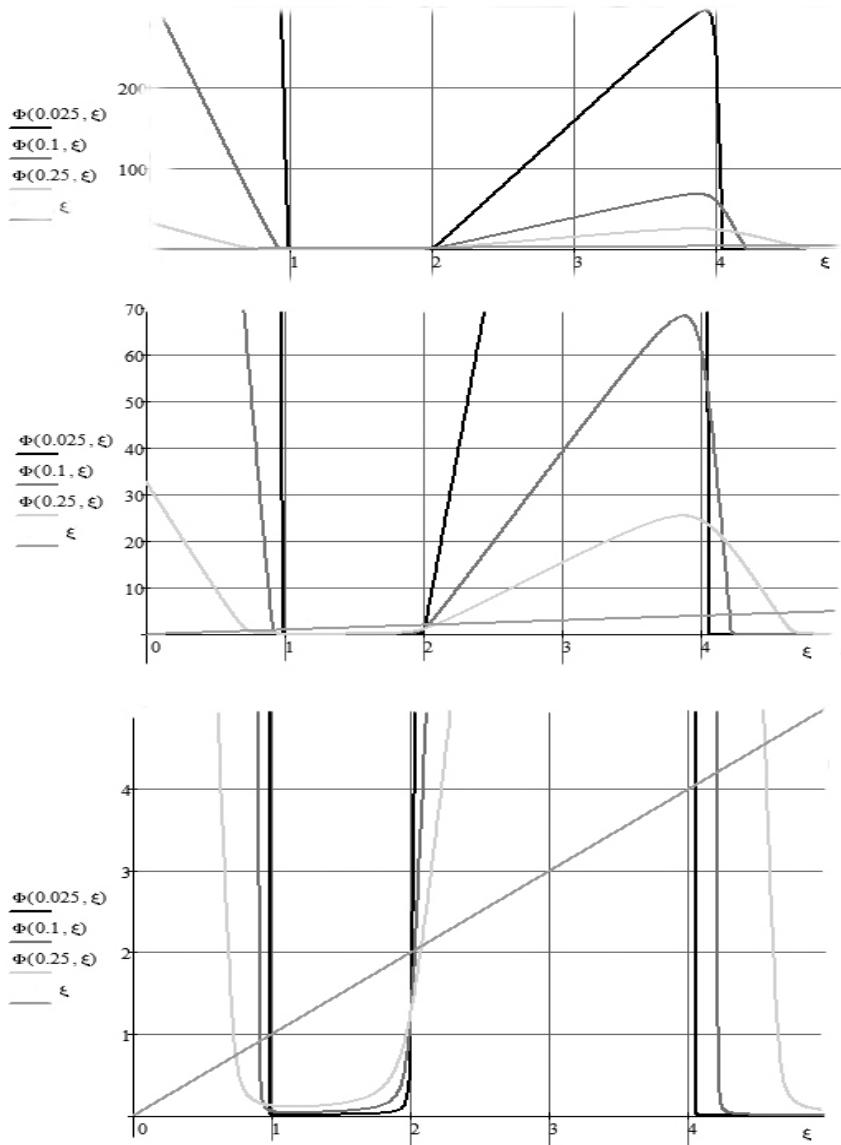


Рис. 5.1. Графическое решение системы (5.1.7).

Рассматриваемая U –функция при малых положительных значениях τ имеет три стационарные точки, принадлежащих окрестностям точек $\left\{ \xi_{(1)}^* = 1, \lambda_{1(1)}^* = 0, \lambda_{2(1)}^* = 2 \right\}$, $\left\{ \xi_{(2)}^* = 2, \lambda_{1(2)}^* = 0, \lambda_{2(2)}^* = 0 \right\}$ и $\left\{ \xi_{(3)}^* = 4, \lambda_{1(3)}^* = 4, \lambda_{2(3)}^* = 0 \right\}$.

На рис. 5.2(a,b) показаны, иллюстрирующие пример 5.1.1, ортогональные проекции системы изоповерхностей функции $U(\tau, \xi, \lambda_1, \lambda_2)$ на плоскости $\lambda_1 = 0.001$ и $\lambda_2 = 0.001$ соответственно для значения $\tau = 0.01$.

Т а б л и ц а 5.1.1а

Начальная точка: $\xi = 3.0000$, $\lambda_1 = 0.0001$ и $\lambda_2 = 1.0000$

τ	$\bar{\xi}$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$
0.1	0.913982619	0.016197861	2.179226119
0.03	0.976545575	$4.961 \cdot 10^{-3}$	2.051157858
0.01	0.992395202	$1.662 \cdot 10^{-3}$	2.016795705
0.003	0.997740608	$4.996 \cdot 10^{-4}$	2.005011622
0.001	0.999248958	$1.666 \cdot 10^{-4}$	2.001667958
0.0003	0.999774906	$5.000 \cdot 10^{-5}$	2.000500116
0.0001	2.000025002	$2.500 \cdot 10^{-5}$	2.005011622
0.00007	2.000017501	$1.750 \cdot 10^{-5}$	$3.500 \cdot 10^{-5}$
0.00003	4.000056251	4.000061251	$5.000 \cdot 10^{-6}$
0.00001	4.000018750	4.000020417	$1.667 \cdot 10^{-6}$

Кроме того, как видно из результатов решения системы (5.1.7) (приведенных в табл. 5.1.1(a,b,c)), найденных одним и тем же алгоритмом, точка сходимости зависит как от начального приближения, так и от значения параметра τ . Это означает, что сходимость к решениям задачи (5.1.1) – (5.1.2) по седловым траекториям вспомогательной U –функции (5.1.5) имеет, вообще говоря, локальный характер, т. е. для конкретной стационарной точки она имеет место лишь $\forall \tau \in [0, \tau_0]$, где τ_0 некоторое, достаточно малое положительное число.

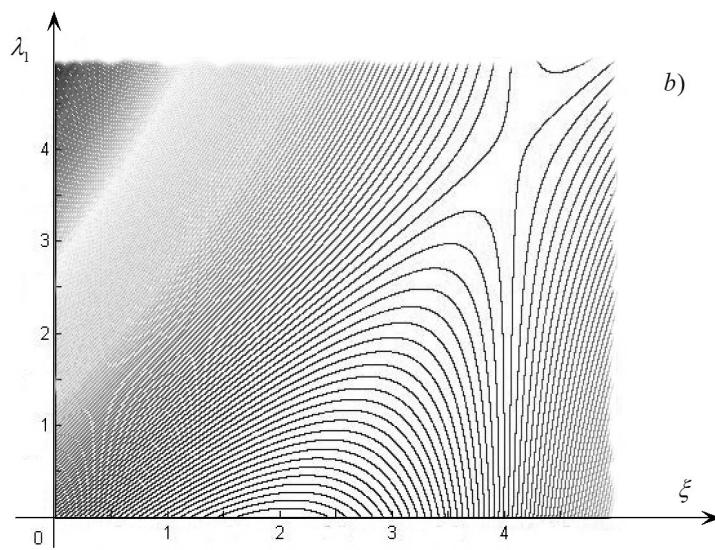
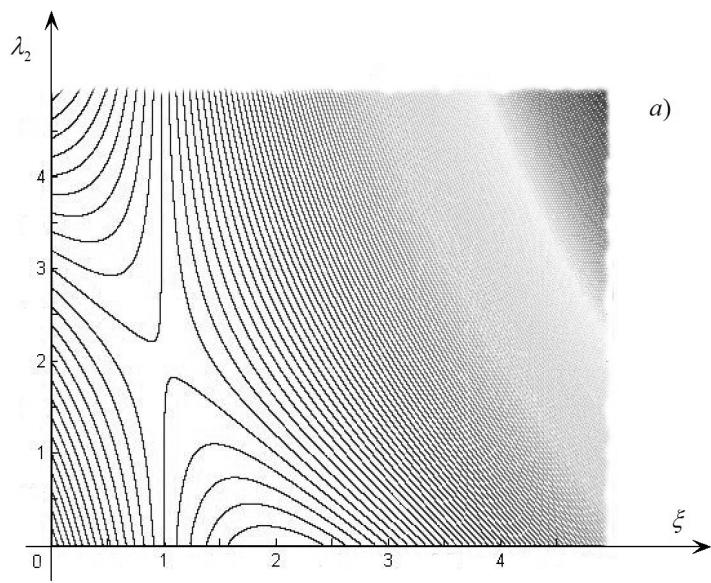


Рис. 5.2. Системы изолиний для U -функции из примера 5.1.1.

Т а б л и ц а 5.1.1b

Начальная точка: $\xi = 3.0000$, $\lambda_1 = 2.0000$ и $\lambda_2 = 1.0000$

τ	$\bar{\xi}$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$
0.1	4.198909106	4.215407122	0.015626512
0.03	4.057240840	4.062226428	$4.906 \cdot 10^{-3}$
0.01	4.018859002	4.020524093	$1.656 \cdot 10^{-3}$
0.003	4.005634776	4.006134635	$4.991 \cdot 10^{-4}$
0.001	4.001876085	4.002042736	$1.666 \cdot 10^{-4}$
0.0003	4.000562598	4.000612596	$4.999 \cdot 10^{-5}$
0.0001	4.000187511	4.000204177	$1.667 \cdot 10^{-5}$
0.00007	4.000131255	4.000142922	$1.167 \cdot 10^{-5}$
0.00003	4.000056251	4.000061251	$5.000 \cdot 10^{-6}$
0.00001	4.000018750	4.000020417	$1.667 \cdot 10^{-6}$

Т а б л и ц а 5.1.1c

Начальная точка: $\xi = 3.0000$, $\lambda_1 = 0.0001$ и $\lambda_2 = 0.0001$

τ	$\bar{\xi}$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$
0.1	2.026700857	0.025322030	0.048584723
0.03	2.007644332	$7.528 \cdot 10^{-3}$	0.014882908
0.01	2.002515762	$2.503 \cdot 10^{-3}$	$4.987 \cdot 10^{-3}$
0.003	2.000751410	$7.503 \cdot 10^{-4}$	$1.499 \cdot 10^{-3}$
0.001	2.000250156	$2.500 \cdot 10^{-4}$	$4.999 \cdot 10^{-4}$
0.0003	2.000075014	$7.500 \cdot 10^{-5}$	$1.500 \cdot 10^{-4}$
0.0001	2.000025002	$2.500 \cdot 10^{-5}$	$5.000 \cdot 10^{-5}$
0.00007	2.000017501	$1.750 \cdot 10^{-5}$	$3.500 \cdot 10^{-5}$
0.00003	2.000007500	$7.500 \cdot 10^{-6}$	$1.500 \cdot 10^{-5}$
0.00001	4.000018750	4.000020417	$1.667 \cdot 10^{-6}$

Теоретическое обоснование

Исследуем условия применимости метода функций обратных связей для решения *нелинейной* задачи вида (5.1.1) – (5.1.2) с конечным

значением F^* и, быть может, не единственным решением x^* . Пусть для этой задачи существует регулярная функция Лагранжа $L(x, \Lambda)$ вида, использованного в формуле (5.1.4), имеющая в $\{x^*; \Lambda^*\}$ седловую точку.

При этом предположим, что для некоторого $\tau_0 > 0$ существуют выпуклые компактные множества $\Theta_x \subset E^n$ и $\Theta_\Lambda \subset E^m$ такие, что найдется хотя бы одна пара векторов $x^* \in \Theta_x$ и $\Lambda^* \in \Theta_\Lambda$, для которой $L(x^*, \Lambda^*) = F^*$.

Пусть также множества $\Omega_x = \Theta_x \cap E_+^n$ и $\Omega_\Lambda = \Theta_\Lambda \cap E_+^m$ имеют непустые внутренности, где E_+^n и E_+^m суть соответственно неотрицательные ортанты пространств E^n и E^m . Множества Θ_x и Θ_Λ являются компактами по построению.

Теперь введем функцию обратной связи $Q(\tau, s)$ для $\tau > 0$ и $s > 0$ в следующем специальном виде: $Q(\tau, s) = \tau \Psi(s)$, где $\Psi(s)$ обладает следующими свойствами⁵

- 3-1. $\Psi(s)$ строго монотонно возрастает по s и причем предельные переходы по s монотонны.
- 3-2. $\Psi(s)$ непрерывно дифференцируема.
- 3-3. Имеется функция $R(\tau, s)$, такая, что

$$R(\tau, s) = \tau \int_{\alpha}^s \Psi(u) du,$$

где α есть решение уравнения $\Psi(\alpha) = 0$. При сделанных предположениях это решение, очевидно, существует и единственное.

Такой выбор вида функции $Q(\tau, s)$, с одной стороны, значительно упрощает дальнейшие рассуждения, а, с другой стороны, является частным случаем метода построения функции обратной связи, описанного в главе 3.

Действительно, пусть функция $P(\tau, s)$, имеет вид $\Phi\left(\frac{s}{\tau}\right)$, где

функция $\Phi(u)$ одной переменной u такова, что выполняются все условия налагаемые на $P(\tau, s)$. В этом случае, если $\Psi(s)$ — обратная функция для $\Phi(s)$, то по определению обратной функции имеем

⁵Выбор вида функции $Q(\tau, s)$, равно как и сделанные выше предположения, играют сугубо инструментальную роль, обусловленную желанием упростить обоснование рассматриваемой схемы. Вопрос о том, насколько это влияет на ее практическую эффективность, в данной статье не рассматривается и требует отдельного исследования.

$$\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, Q) = s \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{Q}{\tau}\right) = s \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{\tau} = \Psi(s) \quad \Rightarrow \quad Q(\tau, s) = \tau \Psi(s).$$

Для задачи (1.1.1) – (5.1.2) $\forall \tau > 0$ построим вспомогательную функцию вида (5.1.5)

$$U(\tau, x, \Lambda) = L(x, \Lambda) + W(\tau, x, \Lambda), \quad (5.1.8)$$

где

$$W(\tau, x, \Lambda) = - \sum_{j=1}^n R(\tau, \xi_j) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i),$$

а функция $R(\tau, s)$ определена как

$$R(\tau, s) = \int_{\alpha}^s Q(\tau, u) du = \tau \int_{\alpha}^s \Psi(u) du$$

и α есть корень уравнения $\Psi(\alpha) = 0$. Заметим, что в сделанных предположениях α существует и единственno.

Примеры конкретных видов функций $Q(\tau, s)$ и $R(\tau, s)$, обладающих указанными свойствами, были рассмотрены ранее в § 4.4 .

Свойства функций R , W и U описывают следующие утверждения

Лемма 5.1.1 При любом фиксированном $\tau > 0$ функция $R(\tau, s)$ неотрицательна, дважды непрерывно дифференцируема, строго выпукла вниз, имеет при $s = \alpha$ единственный минимум, в котором $R(\tau, \alpha) = 0$. Для $R(\tau, s)$ также справедливо неравенство $\frac{\partial^2 R}{\partial s^2} > 0$.

Доказательство.

Согласно определению функции α $\forall \tau > 0$ функция $Q(\tau, s)$ положительна при $s > \alpha$ и отрицательна при $s < \alpha$. Тогда в силу (5.1.8) функция $R(\tau, s)$ положительна при $s \neq \alpha$ и равна 0 при $s = \alpha$.

Из условий строгой монотонности и непрерывной дифференцируемости функции $Q(\tau, s)$ а также равенств

$$Q(\tau, s) = \frac{\partial R}{\partial s} \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{\partial^2 R}{\partial s^2}$$

следует, что функция $R(\tau, s)$ дважды непрерывно дифференцируема по s , и для нее справедливо неравенство $\frac{\partial^2 R}{\partial s^2} > 0$.

Лемма доказана.

Лемма **Функция $W(\tau, x, \Lambda)$ имеет $\forall \tau > 0$**

5.1.2

- 1°. **Единственный максимум по $\Lambda \in E_+^m$ для каждого фиксированного $x \in E_+^n$;**
- 2°. **Единственный минимум по $x \in E_+^n$ для каждого фиксированного $\Lambda \in E_+^m$.**

Доказательство.

Исходя из сепарабельности функции $W(\tau, x, \Lambda)$ по компонентам вектора Λ , формул 3.1, равенства

$$\left. \frac{\partial R}{\partial s} \right|_{s=\alpha} = Q(\tau, \alpha(\tau)) = 0$$

и неравенства $\frac{\partial Q}{\partial s} > 0 \quad \forall s > 0$, верного для всех положительных τ и s , приходим к заключению, что эта функция $\forall \Lambda \in \text{int } E_+^m$ имеет глобальный минимум по $\Lambda \in \text{int } E_+^m$.

Рассуждая аналогично, получаем, что функция $W(\tau, x, \Lambda)$ имеет глобальный максимум $\forall \Lambda \in \text{int } E_+^m$ по совокупности компонент вектора $x \in \text{int } E_+^n$.

Лемма доказана.

Теорема 5.1.1 **Функция $U(\tau, x, \Lambda)$ имеет единственную седловую точку строго внутри компакта Ω .**

Доказательство.

- 1) Пусть $\tau > 0$ фиксировано. Покажем, что функция $U(\tau, x, \Lambda)$ имеет во внутренности Ω глобальный максимум по x при фиксированном $\Lambda \in \Omega_\Lambda$ и глобальный минимум по Λ при фиксированном $x \in \Omega_x$.

Рассмотрим первый случай. По построению при фиксированном $\Lambda \in \Omega_\Lambda$ Функция Лагранжа имеет по сделанным предположениям глобальный максимум по x на Ω , а регуляризирующая добавка $W(\tau, x, \Lambda)$ имеет глобальный максимум на внутренности Ω по лемме 5.1.2.

Чтобы не вводить дополнительных предположений о знаковой определенности второго дифференциала функции Лагранжа, воспользуемся тем, что точка максимума функции $U(\tau, x, \Lambda)$ по x должна принадлежать множеству Парето (в смысле определений использованных в [9]) для системы двух, подлежащих максимизации по x , функций $\{L(x, \Lambda), W(\tau, x, \Lambda)\}$.

Данное множество Парето принадлежит Ω , причем некоторая часть его находится строго внутри Ω . Точка $\{\bar{x}, \bar{\Lambda}\}$ также будет принадлежать $\text{int}\Omega$, в силу предположений о свойствах условия задачи (5.1.1) – (5.1.2) и поскольку $\lim_{s \rightarrow 0} Q(\tau, s) = -\infty$.

- 2) Рассуждая аналогично предыдущему пункту 3), можно показать, что функция $U(\tau, x, \Lambda)$ имеет минимум по Λ на внутренности компакта Ω при каждом фиксированном достаточно малом $\tau > 0$.
- 3) Наконец, на основании теоремы XX (гл. 3, §16 [2]) , заключаем, что функция $U(\tau, x, \Lambda)$ имеет седловую точку $\in \text{int}\{E_+^n \otimes E_+^m\}$ на внутренности этого компакта при каждом фиксированном достаточно малом $\tau > 0$.

Теорема доказана.

Далее мы будем использовать $\tau_0 > 0$ такое, что вектор-функции $\bar{x}(\tau) \in \Omega_x$ и $\bar{\Lambda}(\tau) \in \Omega_\Lambda$ при $\tau \in (0, \tau_0)$.

Вектор-функцию $\{\bar{x}(\tau); \bar{\Lambda}(\tau)\} \forall \tau \in (0, \tau_0]$ будем называть *локальной седловой траекторией* функции $U(\tau, x, \Lambda)$.

Теорема 5.1.2 **На седловой траектории задачи (5.1.1)–(5.1.2) имеем**

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} U(\tau, x, \Lambda) = L(x, \Lambda) \quad \forall \{x, \Lambda\} \in \Omega \quad (5.1.9)$$

и

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) = F^*, \quad (5.1.10)$$

а в случае локальной единственности решения задачи (5.1.1)–(5.1.2) справедливы также равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau) = x^* \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\Lambda}(\tau) = \Lambda^*. \quad (5.1.11)$$

Доказательство.

1) Оценим разницу между значениями вспомогательной функции U и функции Лагранжа L . Для точки $\{x, \Lambda\}$ в силу леммы 5.1.1 и (5.1.8) имеем

$$\begin{aligned} U(\tau, x, \Lambda) &= L(x, \Lambda) - \sum_{j=1}^n R(\tau, \xi_j) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i) \geq \\ &\geq L(x, \Lambda) - \sum_{j=1}^n R(\tau, \xi_j) \geq \\ &\geq L(x, \Lambda) - n \left\{ \max_{\substack{x \in \Omega_x \\ j = 1, n}} \right\} R(\tau, \xi_j) \geq \\ &\geq L(x, \Lambda) + n \left\{ \min_{\substack{x \in \Omega_x \\ j = 1, n}} \right\} R(\tau, \xi_j). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
U(\tau, x, \Lambda) &= L(x, \Lambda) - \sum_{j=1}^n R(\tau, \xi_j) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i) \leq \\
&\leq L(x, \Lambda) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i) \leq \\
&\leq L(x, \Lambda) + m \max_{\substack{\lambda \in \Omega_\lambda \\ i = 1, m}} R(\tau, \lambda_i) \leq \\
&\leq L(x, \Lambda) - m \min_{\substack{\lambda \in \Omega_\lambda \\ i = 1, m}} R(\tau, \lambda_i).
\end{aligned}$$

Как было показано ранее, для $\tau > 0$ и $s \in (0, -\infty)$ имеем $R(\tau, s) \geq 0$, $\lim_{\tau \rightarrow +0} = 0$ и $\min_{s \in (0, -\infty)} R(\tau, s) = 0$.

Тогда, например, согласно лемме 5.1 [17], верны соотношения

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \min_{s \in (0, +\infty)} R(\tau, s) = \min_{s \in (0, +\infty)} \lim_{\tau \rightarrow +0} R(\tau, s) = 0.$$

Это дает

$$\begin{cases} \lim_{\tau \rightarrow +0} \min_{\substack{x \in \Omega_x \\ j = 1, n}} R(\tau, x_j) = \min_{\substack{x \in \Omega_x \\ j = 1, n}} \lim_{\tau \rightarrow +0} R(\tau, x_j) = 0, \\ \lim_{\tau \rightarrow +0} \min_{\substack{\lambda \in \Omega_\lambda \\ i = 1, m}} R(\tau, \lambda_i) = \min_{\substack{\lambda \in \Omega_\lambda \\ i = 1, m}} \lim_{\tau \rightarrow +0} R(\tau, \lambda_i) = 0. \end{cases}$$

Из этих соотношений и неравенств

$$\begin{aligned}
L(x, \Lambda) + n \min_{\substack{x \in \Omega_x \\ j = 1, n}} R(\tau, \xi_j) &\leq \\
&\leq U(\tau, x, \Lambda) \leq \\
&\leq L(x, \Lambda) - m \min_{\substack{\lambda \in \Omega_\lambda \\ i = 1, m}} R(\tau, \lambda_i),
\end{aligned}$$

при предельном переходе $\tau \rightarrow +0$ получаем, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} U(\tau, x, \Lambda) = L(x, \Lambda) \quad \forall \{x, \Lambda\} \in \Omega.$$

2) Пусть $\tau \in (0, \tau_0)$. Тогда в силу сделанных предположений имеем $\max_{x \in \Omega_x} \min_{\lambda \in \Omega_\lambda} L(x, \Lambda) = F^*$.

С другой стороны, используя теорему 5.1.1 и рассуждая как в 1), получаем

$$\max_{x \in \Omega_x} \min_{\lambda \in \Omega_\lambda} L(x, \Lambda) = \max_{x \in \Omega_x} \min_{\lambda \in \Omega_\lambda} \lim_{\tau \rightarrow +0} U(\tau, x, \Lambda) =$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow +0} \max_{x \in \Omega_x} \min_{\lambda \in \Omega_\lambda} U(\tau, x, \Lambda) = \lim_{\tau \rightarrow +0} U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)).$$

Это дает $\lim_{\tau \rightarrow +0} U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) = F^*$.

3) $\{\bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)\}$ принадлежит Ω , ограниченному как компакт. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса множество $\{\bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)\}$ имеет предельную точку $\{\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{\Lambda}}\}$ при $\tau \rightarrow +0$, для которой $L(\bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) = F^* = L(x^*, \Lambda^*)$.

Тогда, в силу непрерывности функции Лагранжа, в случае единственности решения задачи (5.1.1)–(5.1.2) мы получаем, что $\bar{\bar{x}} = x^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau)$.

Теорема доказана.

Теорема 5.1.3 На седловой траектории вектор-функции $\{\bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)\}$ непрерывно дифференцируемы $\forall \tau \in (0, \tau_0)$ и являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} \underset{x}{\text{grad}} U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) = o, \\ \underset{\Lambda}{\text{grad}} U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) = o. \end{cases} \quad (5.1.12)$$

Доказательство.

1) Покажем сначала, что для каждого $\tau \in (0, \tau_0)$ определитель матрицы Гессе для вспомогательной функции U не равен нулю. Эта матрица имеет вид

$$\|H\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_j \partial \xi_k} & \forall j, k = \overline{1, n} & \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_j \partial \lambda_q} & \forall j = \overline{1, n} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_i \partial \xi_k} & \forall k = \overline{1, n} & \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_i \partial \lambda_q} & \forall i, q = \overline{1, m} \end{vmatrix}.$$

В силу равенств (5.3.8) имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_j \partial \xi_k} = A_{jk} = \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_j \partial \xi_k} - \delta_{jk} \frac{\partial Q}{\partial s}(\xi_j) \quad \forall j, k = \overline{1, n},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_j \partial \lambda_q} = B_{jq} = -\frac{\partial f_q}{\partial \xi_j} \quad \forall j = \overline{1, n}, \forall q = \overline{1, m},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_i \partial \lambda_q} = C_{iq} = \delta_{iq} \frac{\partial Q}{\partial s}(\lambda_i) \quad \forall i, q = \overline{1, m},$$

где δ_{jk} — символ Кронекера, т.е. $\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$
Или, в блочной форме, .

$$\|H\| = \begin{vmatrix} \|A\| & \|B\| \\ \|B\|^T & \|C\| \end{vmatrix}.$$

- 2) Если $\tau \in (0, \tau_0)$, то определитель подматрицы $\|A\|$ ненулевой. Действительно, квадратная матрица $\|A\|$ есть сумма матрицы $\|\nabla^2 L\|$ и диагональной матрицы с элементами $-\delta_{jk} \frac{\partial Q}{\partial s}(\xi_j)$. Первое слагаемое является отрицательно полуопределенным в силу предположения о свойствах функции Лагранжа. Второе слагаемое строго отрицательно определено, так как $\frac{\partial Q}{\partial s} > 0$ в силу леммы 5.1.1. Тогда полная матрица $\|A\|$ будет строго отрицательно определена и по критерию Сильвестра $\det \|A\| \neq 0$. В этом случае также существует $\|A\|^{-1}$.

Аналогичные рассуждения показывают, что матрица $\|C\|$ положительно определена и $\det \|C\| > 0$.

- 3) Используем формулу Шура

$$\det \|H\| = \det \|A\| \cdot \det \left(\|C\| - \|B\|^T \|A\|^{-1} \|B\| \right).$$

Из теоремы Бине-Копши [31] следует, что при любом ранге матрицы $\|B\|$ матрица $\|B\|^T \|A\|^{-1} \|B\|$ либо отрицательно определена, либо отрицательно полуопределенна. Тогда матрица $\|C\| - \|B\|^T \|A\|^{-1} \|B\|$ положительно определена и ее детерминант положителен. Наконец, по формуле Шура $\det \|H\| \neq 0$.

4) Пусть $\tau \in (0, \tau_0)$. Рассмотрим систему уравнений (5.1.12) как неявно задающую вектор-функцию $\{\bar{x}(\tau); \bar{\Lambda}(\tau)\}$. Для фиксированного τ имеем:

1. Левые части (5.1.12) — непрерывно дифференцируемые функции.
2. Определитель матрицы Якоби для системы (5.1.2) (или, что то же самое, гессиан вспомогательной функции U) не равен нулю.

Применим к системе (5.1.12) теорему о неявной функции [12, 13]. Из этой теоремы следует существование непрерывно дифференцируемой вектор-функции $\{\bar{x}(\tau); \bar{\Lambda}(\tau)\}$ при фиксированном τ .

Теорема доказана.

Отметим также, что,

во-первых, как и в линейном случае, условия неотрицательности прямых и двойственных переменных обеспечиваются свойствами функций $Q(\tau, s)$.

Во-вторых, значения функций и производных в (5.1.12) вычисляются на элементах $\bar{x} \in E^n$ и $\bar{\Lambda} \in E^m$, которые являются для системы (5.1.12) неизвестными. Отыскание значений этих неизвестных при фиксированном значении параметра τ и является основной задачей, решаемой при использовании метода функций обратных связей.

Наконец, как и в линейном случае, вспомогательная функция (5.1.8) есть сумма функции Лагранжа и регуляризационного слагаемого [9], [17] вида $\sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i) - \sum_{j=1}^n R(\tau, \xi_j)$, что позволяет рассматривать вспомогательную функцию U как вариант модифицированной функции Лагранжа.

Описание других свойств функции (5.1.8) выполним по схеме, аналогичной использованной при исследовании свойств вспомогательной функции (4.2.4).

Теорема 5.1.4 **Если x^* и Λ^* — решения задачи (5.1.1)–(5.1.2), то $\{\bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)\}$ — стационарная точка функции $U(\tau, x, \Lambda)$ в $E^n \otimes E^m$ — удовлетворяет при $\tau \rightarrow +0$ условиям Каруша – Куна – Таккера.**

Доказательство.

Свойства вектор-функций $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ на седловых траекториях аналогичны их свойствам для линейного случая в некоторой малой окрестности $\forall \tau \in (0, \tau_0]$.

Поэтому в пределе, при $\tau \rightarrow +0$, условия (5.1.6) при учете равенств

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} Q(\tau, s) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \Psi(s) = 0,$$

превращаются в условия Каруша–Куна–Таккера.

Таким образом, мы приходим к заключению о наличии на седловых траекториях аналогичных, указанных в теореме 4.2.4, свойств для систем (5.1.6) или (5.1.12), однако лишь локально, то есть, при $\forall \tau \in (0, \tau_0]$.

Теорема доказана.

Сравнение методов функций обратной связи и гладких штрафных функций

Методом гладких штрафных функций будем называть алгоритм, описанный в §5.4 [17] и в [1], с дополнительным предположением, что используемая штрафная функция дважды непрерывно дифференцируема.

Функция $Q(\tau, s)$ в силу свойств $(3-1^\circ) - (3-3^\circ)$ при фиксированном $\tau \in (0, \tau_0]$ имеет обратную по s функцию, которую обозначим⁶ как $\underset{s}{\text{inv}}(Q(\tau, s))$. Введем в рассмотрение функцию $P(\tau, s)$ такую, что

$$P(\tau, s) = \int_{-\infty}^s \underset{u}{\text{inv}}(Q(\tau, u)) du \quad \text{или} \quad \frac{\partial P}{\partial s} = \underset{s}{\text{inv}}(Q(\tau, s)).$$

Из этого определения следует, что функция $P(\tau, s)$ определена $\forall s \in R$, имеет положительные значения и на всей своей области определения эта функция является строго монотонно возрастающей и строго выпуклой вниз по s .

Для функции $P(\tau, s)$ при фиксированном $\tau \in (0, \tau_0]$ будут выполнены предельные соотношения

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} P(\tau, s) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} P(\tau, s) = +\infty,$$

⁶Эти обозначения совпадают с использованными в [?].

а для $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$ выполняются следующие предельные равенства

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s) = +\infty.$$

Также будут выполнены соотношения $\lim_{\tau \rightarrow 0} P(\tau, s) = 0 \ \forall s < 0$ и $\lim_{\tau \rightarrow 0} P(\tau, s) = +\infty \ \forall s > 0$, предельные переходы в которых монотонны.

Наконец, $\forall s \in R$ верны неравенства $\frac{\partial P}{\partial s} > 0$ и $\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} > 0$.

В своей совокупности эти условия позволяют использовать функцию $P(\tau, s)$ как штрафную в методе гладких штрафных функций для решения задачи (1.1). При этом, подлежащая безусловной максимизации, вспомогательная функция метода штрафов будет иметь вид

$$A(\tau, x) = F(x) - \sum_{i=1}^m P(\tau, -f_i(x)). \quad (5.1.13)$$

Получим теперь связь функции $A(\tau, x)$ и функций обратных связей.

Для этого вначале запишем условия стационарности вспомогательной функции $U(\tau, x, \Lambda)$ в форме (5.1.6):

$$\begin{cases} -f_i(\bar{x}) = Q(\tau, \bar{\lambda}_i) & \forall i = [1, m], \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_j}(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}(\bar{x}) = Q(\tau, \bar{\xi}_j) & \forall j = [1, n]. \end{cases} \quad (5.1.14)$$

Возьмем от обеих частей каждого уравнения первой группы системы (5.1.14) функцию $\frac{\partial P}{\partial s}$ и воспользуемся равенством (при фиксированном $\tau > 0$) для взаимно обратных функций $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, Q(\tau, s)) = s$. Получим систему равносильную, в сделанных предположениях, системе (5.1.14)

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_i = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, -f_i(\bar{x})) & \forall i = [1, m], \\ Q(\tau, \bar{\xi}_j) = \frac{\partial F}{\partial \xi_j}(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}(\bar{x}) & \forall j = [1, n]. \end{cases} \quad (5.1.15)$$

Если во вторую группу системы уравнений (5.1.15) подставить $\bar{\lambda}_i \ \forall i = [1, m]$ из первой группы, то получается система относительно лишь компонент вектора \bar{x} вида

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(\tau, \bar{\xi}_j) = \frac{\partial F}{\partial \xi_j}(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, -f_i(\bar{x})) \right) \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}(\bar{x}) \\ \forall j = [1, n], \end{array} \right. \quad (5.1.16)$$

а, если использовать также и (5.1.13), то система (5.1.16) может быть записана в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(\tau, \bar{\xi}_j) = \frac{\partial A}{\partial \xi_j}(\tau, \bar{x}) \\ \forall j = [1, n]. \end{array} \right. \quad (5.1.17)$$

Из последнего равенства также следует, что в n -мерном случае функция $\Phi(\tau, \bar{x})$, использованная в п.2 при решении примера 5.1.1, имеет вид

$$\Phi(\tau, \bar{\xi}_j) = \frac{\partial P}{\partial s} \left(\tau, \frac{\partial A}{\partial \xi_j}(\tau, \bar{x}) \right) \quad \forall j = [1, n].$$

Пусть $\tilde{x}(\tau)$ есть вектор-функция, описывающая *траекторию локальных максимумов* вспомогательной функции (5.1.13), получаемой для задачи (5.1.1) – (5.1.2) методом гладких штрафных функций, то есть, верны равенства

$$\frac{\partial A}{\partial \xi_j}(\tau, \tilde{x}) = 0 \quad \forall j = [1, n].$$

Сопоставление последней системы и системы уравнений (5.1.17) приводит к заключению о том, что должна быть справедлива

Теорема 5.1.5 **На седловой траектории задачи (5.1.1)–(5.1.2) справедливы равенства**

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} Q(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) = 0 \quad \forall j = [1, n]. \quad (5.1.18)$$

Доказательство.

Из равенства $\frac{\partial A}{\partial \xi_j}(\tau, \tilde{x}) = 0 \quad \forall j = [1, n]$ и системы (5.1.17) $\forall \tau \in (0, \tau_0]$ очевидно следует

$$\left| Q\left(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)\right) \right| = \left| \frac{\partial A}{\partial \xi_j}(\tau, \bar{x}(\tau)) - \frac{\partial A}{\partial \xi_j}(\tau, \tilde{x}(\tau)) \right| \quad \forall j = [1, n]. \quad (5.1.19)$$

Функция $A(\tau, \bar{x})$ (в силу сделанных предположений) дважды непрерывно дифференцируема на компакте Ω_x . Поэтому к правым частям (5.1.19) применима лемма Адамара [29], гл. 2 §4, из которой следуют оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial A}{\partial \xi_j}(\tau, \bar{x}(\tau)) - \frac{\partial A}{\partial \xi_j}(\tau, \tilde{x}(\tau)) \right| &\leq \sum_{k=1}^n \left| \bar{\xi}_{kj} - \tilde{\xi}_{jk} \right| \left| \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \right| \leq \\ &\leq n M_j \left\langle \bar{x}(\tau) - \tilde{x}(\tau) \right\rangle, \quad \forall j = [1, n] \end{aligned}$$

где $0 < M_j < +\infty \quad \forall j = [1, n]$ суть некоторые константы, а $\langle a \rangle$ — норма вектора $a \in E^n$.

Применяя неравенство треугольника и учитывая ограниченность производных в оценках (5.3.3), получаем, что найдется такое $0 < M < +\infty$, что

$$\begin{aligned} \left\langle \bar{x}(\tau) - \tilde{x}(\tau) \right\rangle &= \left\langle (\bar{x}(\tau) - x^*) + (x^* - \tilde{x}(\tau)) \right\rangle \leq \\ &\leq \left\langle \bar{x}(\tau) - x^* \right\rangle + \left\langle x^* - \tilde{x}(\tau) \right\rangle = M\tau + o(\tau). \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\left| Q\left(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)\right) \right| \leq n M_j M \tau + o(\tau) \quad \forall j = [1, n].$$

Откуда и следует справедливость утверждения теоремы.

Теорема доказана.

В заключение, использование рассматриваемого подхода проиллюстрируем следующими примерами, содержащими нелинейные ограничения.

Пример 5.1.2.

Особенности использования метода функций обратных связей проиллюстрируем на примере следующей задачи:

максимизировать по $x \in E^2$ функцию

$$F(x) = (\xi_1 - a)^2 + (\xi_2 - b)^2$$

при условиях $\xi \geq 0$, $\xi \geq 0$ и

$$\begin{aligned} \xi_1^2 + \xi_2^2 &\leq 4\xi_1 + 4\xi_2 + 2, \\ 3\xi_1 + 5\xi_2 &\leq 20. \end{aligned}$$

При $a = b = 2$ эта задача имеет три решения:

$$\xi_1^* = 0, \xi_2^* = 0, F^* = 8,$$

$$\xi_1^* = 0, \xi_2^* = 4, F^* = 8 \quad \text{и} \quad \begin{cases} \xi_1^* = 2 + t, \\ \xi_2^* = 2 - \sqrt{10 - t^2} \end{cases} \quad \forall t \in [\sqrt{6}; 3] \quad F^* = 10.$$

Отметим, что, во-первых, первые два из них являются локально единственными, а последнее решение глобальное, но не единственное и, во-вторых, целевая функция задачи имеет в допустимой области внутренний локальный минимум $\xi_1^* = 2, \xi_2^* = 2, F^* = 0$, а также три точки локального граничного минимума:

$$\begin{aligned} \xi_1^* = 0, \xi_2^* = 2, F^* = 4, \quad &\xi_1^* = 2, \xi_2^* = 0, F^* = 4 \quad \text{и} \\ \xi_1^* = \frac{40}{17}, \xi_2^* = \frac{44}{17}, F^* = \frac{8}{17}. \end{aligned}$$

Геометрическое представление примера 5.1.2 показано на рис. 3.

Обозначая: $f_1(x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 - 4\xi_1 - 4\xi_2 - 2$ и $f_2(x) = -20 + 3\xi_1 + 5\xi_2$, приведем описания седловых траекторий в задаче 2, исходящих из разных начальных точек и сходящихся соответственно: к точке A (табл. 5.1.2ab), точке принадлежащей дуге CD (табл. 5.1.3ab) и точке B (табл. 5.1.4ab).

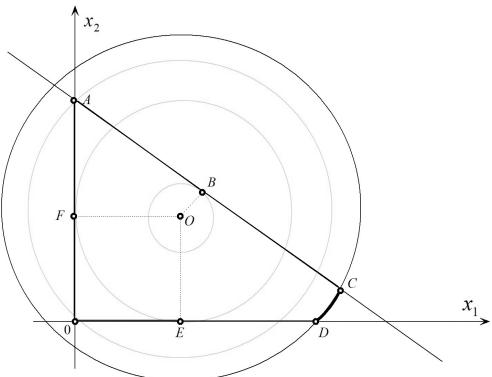


Рис. 3. Графическая интерпретация примера 5.1.2.

τ	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$
Нач. знач.	1	3	1	1
10^{-1}	$8.19 \cdot 10^{-3}$	3.98894596	0.02406173	0.73905286
10^{-2}	$7.85 \cdot 10^{-4}$	3.99906331	$2.49 \cdot 10^{-3}$	0.79388413
10^{-3}	$7.82 \cdot 10^{-5}$	3.99990795	$2.50 \cdot 10^{-4}$	0.79938827
10^{-4}	$7.81 \cdot 10^{-6}$	3.99999081	$2.50 \cdot 10^{-5}$	0.79993883
10^{-5}	$7.81 \cdot 10^{-7}$	3.99999908	$2.50 \cdot 10^{-6}$	0.79999388
10^{-6}	$7.81 \cdot 10^{-8}$	3.99999991	$2.50 \cdot 10^{-7}$	0.79999939
10^{-7}	$7.81 \cdot 10^{-9}$	3.99999999	$2.50 \cdot 10^{-8}$	0.79999994
Точн. знач.	0	4	0	$\frac{4}{5}$

Т а б л и ц а 5.1.2a

$f_1(\bar{x})$	$f_2(\bar{x})$	$F(\bar{x})$	$L(\bar{x}, \bar{\Lambda})$	$U(\tau, \bar{x}, \bar{\Lambda})$
Нач. знач.				
-2.07678512	-0.03070152	7.92321488	7.99587598	7.56949791
-2.00688494	-0.00232873	7.99311506	7.99996377	7.95701868
-2.00068085	-0.00022578	7.99931915	7.99999964	7.99570301
-2.00006801	$-2.25 \cdot 10^{-5}$	7.99993199	8.00000000	7.99957031
-2.00000680	$-2.25 \cdot 10^{-6}$	7.99999320	8.00000000	7.99995703
-2.00000068	$-2.25 \cdot 10^{-7}$	7.99999932	8.00000000	7.99999570
-2.00000007	$-2.25 \cdot 10^{-8}$	7.99999993	8.00000000	7.99999957
-2	0	8	8	8

Т а б л и ц а 5.1.2b

τ	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$
Нач. знач.	3	1	1	1
10^{-1}	4.61087081	0.21717602	0.95227348	$9.84 \cdot 10^{-3}$
10^{-2}	4.61178753	0.21716011	0.99522775	$9.84 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	4.61179649	0.21715996	0.99952278	$9.84 \cdot 10^{-5}$
10^{-4}	4.61179658	0.21715995	0.99995228	$9.84 \cdot 10^{-6}$
10^{-5}	4.61179658	0.21715995	0.99999523	$9.84 \cdot 10^{-7}$
10^{-6}	4.71920600	0.38571417	0.99999960	$1.28 \cdot 10^{-7}$
10^{-7}	4.74018380	0.42158537	0.99999996	$1.36 \cdot 10^{-8}$
Точн. знач.	*	*	1	0

Таблица 5.1.3a.

$f_1(\bar{x})$	$f_2(\bar{x})$	$F(\bar{x})$	$L(\bar{x}, \bar{\Lambda})$	$U(\tau, \bar{x}, \bar{\Lambda})$
-0.00489225	-5.08150747	9.99510775	10.04976167	9.71868390
-0.00004784	-5.07883685	9.99995216	10.00499977	9.98378740
$-4.77 \cdot 10^{-7}$	-5.07881075	9.99999952	10.00050000	9.99953430
$-4.48 \cdot 10^{-9}$	-5.07881049	10.00000000	10.00005000	10.00006860
0.00000001	-5.07881049	10.00000000	10.00005000	10.00006860
$1.76 \cdot 10^{-9}$	-3.91381114	10.00000000	10.00000050	10.00000288
0.00000000	-3.67152174	10.00000000	10.00000005	10.00000040
	*	10	10	10

Таблица 5.1.3b.

τ	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$
Нач. знач.	2	2	1	10^{-7}
10^{-1}	2.34276522	2.54511405	$5.22 \cdot 10^{-3}$	0.19538622
10^{-2}	2.35225684	2.58455780	$5.24 \cdot 10^{-4}$	0.23150285
10^{-3}	2.35287532	2.58787261	$5.25 \cdot 10^{-5}$	0.23491656
10^{-4}	2.35293462	2.58819908	$5.25 \cdot 10^{-6}$	0.23525638
10^{-5}	2.35294052	2.58823167	$5.25 \cdot 10^{-7}$	0.23529034
10^{-6}	2.35294111	2.58823493	$5.25 \cdot 10^{-8}$	0.23529374
10^{-7}	2.35294117	2.58823526	$5.25 \cdot 10^{-9}$	0.23529408
Точн. знач.	$\frac{40}{17}$	$\frac{44}{17}$	0	$\frac{4}{17}$

Таблица 5.1.4a.

$f_1(\bar{x})$	$f_2(\bar{x})$	$F(\bar{x})$	$L(\bar{x}, \bar{\Lambda})$	$U(\tau, \bar{x}, \bar{\Lambda})$
-9.58536268	-0.24613410	0.41463732	0.51272717	0.55015260
-9.53420730	-0.02044049	0.46579270	0.47552473	0.48950054
-9.52988480	-0.00201096	0.47011521	0.47108761	0.47362589
-9.52945900	-0.00020077	0.47054100	0.47063823	0.47100708
-9.52941649	$-2.01 \cdot 10^{-5}$	0.47058351	0.47059324	0.47064163
-9.52941224	$-2.01 \cdot 10^{-6}$	0.47058776	0.47058874	0.47059473
-9.52941181	$-2.01 \cdot 10^{-7}$	0.47058819	0.47058829	0.47058900
	0	$\frac{8}{17}$	$\frac{8}{17}$	$\frac{8}{17}$

Таблица 5.1.4b.

Пример 5.1.3. Максимизировать функцию $F = -(\xi_1 - a)^2 - (\xi_2 - b)^2$

при условиях: $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$ и

$$\begin{array}{rcl} \xi_1 & + & 2\xi_2 \leq 3, \\ \xi_1^2 & - & \xi_2 \leq 0. \end{array}$$

Имеем $L(x, \Lambda) = -(\xi_1 - a)^2 - (\xi_2 - b)^2 - \lambda_1(\xi_1 + 2\xi_2 - 3) - \lambda_2(\xi_1^2 - \xi_2)$.

И пусть функция обратной связи $Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right)$. Тогда вспомогательная система уравнений (5.1.6) (с учетом изменений, аналогичных сделанным для системы (4.4.10)) в данной задаче имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} -3 + |\bar{\xi}_1| + 2|\bar{\xi}_2| = \frac{\tau}{2} \left(|\bar{\lambda}_1| - \frac{1}{|\bar{\lambda}_1|} \right), \\ |\bar{\xi}_1|^2 - |\bar{\xi}_2| = \frac{\tau}{2} \left(|\bar{\lambda}_2| - \frac{1}{|\bar{\lambda}_2|} \right), \\ -2(|\bar{\xi}_1| - a) - |\bar{\lambda}_1| - 2|\bar{\xi}_1| \cdot |\bar{\lambda}_2| = \frac{\tau}{2} \left(|\bar{\xi}_1| - \frac{1}{|\bar{\xi}_1|} \right), \\ -2(|\bar{\xi}_2| - b) - 2|\bar{\lambda}_1| + |\bar{\lambda}_2| = \frac{\tau}{2} \left(|\bar{\xi}_2| - \frac{1}{|\bar{\xi}_2|} \right). \end{array} \right. \quad (5.1.19)$$

Задача имеет выпуклую вверх целевую функцию, определенную на выпуклом допустимом множестве при любых значениях параметров a и b . Ее решения, полученные при различных коэффициентах τ , приведены в табл. 5.1.2–5.1.6.

Всего рассмотрено пять вариантов с различной структурой оптимального множества активных ограничений. Оптимальная точка каждого варианта пронумерована арабскими цифрами в круглых скобках. Соответствующая ей изолиния целевой функции показана штриховой линией и выделена отдельным цветом.

В большинстве вариантов решения примера 5.1.2 очевидны (легко проверяются графически, см. рис. 5.2), но для некоторых значений параметров подобная проверка может представлять определенную проблему. Например, при $a = 1$ и $b = 0$ (см. табл. 5.1.5) оптимальное

значение λ_2 есть положительный корень уравнения $\lambda_2(\lambda_2+1)^2 - 2 = 0$, равный $\left(\sqrt[3]{28+3\sqrt{87}} - 1\right)^2 / 3\sqrt[3]{28+3\sqrt{87}} \approx 0.69562077$.

Другой проблемой может оказаться более медленная (по сравнению с другими вариантами) сходимость используемой вычислительной процедуры при решении системы (5.1.19), вызываемая ухудшением обусловленности задачи при уменьшении значения коэффициента τ . Это наглядно иллюстрирует вариант, приведенный в табл. 5.1.6. При этом несложно убедиться, что точное решение данного варианта задачи 5.1.2 имеет вид: $\xi_1^* = 0$; $\xi_2^* = 0$; $\lambda_1^* = 0$; $\lambda_2^* = 2$.

Таблица 5.1.2

Вариант (1) при $a = -1$ и $b = 2$

τ	ξ_1	ξ_2	λ_1	λ_2
0.1	0.019369832	1.457551752	0.540297817	0.034272627
0.01	1.993374914*10^-3	1.495306682	0.504298833	3.343767165*10^-3
0.001	1.999333755*10^-4	1.499525574	0.500432983	3.334387665*10^-4
0.0001	1.999933338*10^-5	1.499952506	0.50004333	3.333438877*10^-5
0.00001	1.999993333*10^-6	1.499995250	0.500004333	3.333343889*10^-6
0.000001	1.999999333*10^-7	1.499999525	0.500000433	3.333334389*10^-7
0.0000001	1.999999933*10^-8	1.499999953	0.500000043	3.333333439*10^-8

Таблица 5.1.3

Вариант (2) при $a = 1$ и $b = 2$

τ	ξ_1	ξ_2	λ_1	λ_2
0.1	0.583548042	1.198338239	0.821611165	0.058091273
0.01	0.598042642	1.199867650	0.802184510	5.936533717*10^-3
0.001	0.599800647	1.199987317	0.800218561	5.950774255*10^-4
0.0001	0.599980028	1.199998737	0.800021857	5.952220054*10^-5
0.00001	0.599998002	1.199999874	0.800002186	5.952364860*10^-6
0.000001	0.599999800	1.199999987	0.800000219	5.952379343*10^-7
0.0000001	0.599999980	1.199999999	0.800000022	5.952380791*10^-8

Таблица 5.1.4

Вариант (3) при $a = 2$ и $b = 1$

τ	ξ_1	ξ_2	λ_1	λ_2
0.1	0.974069007	0.968103086	0.446274903	0.825513741
0.01	0.997047324	0.996317696	0.405095735	0.802789972
0.001	0.999700482	0.999625692	0.400515343	0.800281696
0.0001	0.999970005	0.999962507	0.400051593	0.800028197
0.00001	0.999997000	0.999996250	0.400005160	0.800002820
0.000001	0.999999700	0.999999625	0.400000516	0.800000282
0.0000001	0.999999970	0.999999963	0.400000052	0.800000028

Таблица 5.1.5

Вариант (4) при $a = 1$ и $b = 0$

τ	ξ_1	ξ_2	λ_1	λ_2
0.1	0.590384707	0.382763237	0.030383906	0.714803394
0.01	0.590024813	0.351817238	2.930221987*10^-3	0.697042081
0.001	0.589784721	0.348216783	2.917524171*10^-4	0.695755291
0.0001	0.589757566	0.347851082	2.916233632*10^-5	0.695634142
0.00001	0.589754818	0.347814455	2.916104368*10^-6	0.695622106
0.000001	0.589754543	0.347810792	2.91609144*10^-7	0.695620903
0.0000001	0.589754515	0.347810425	2.916090147*10^-8	0.695620783

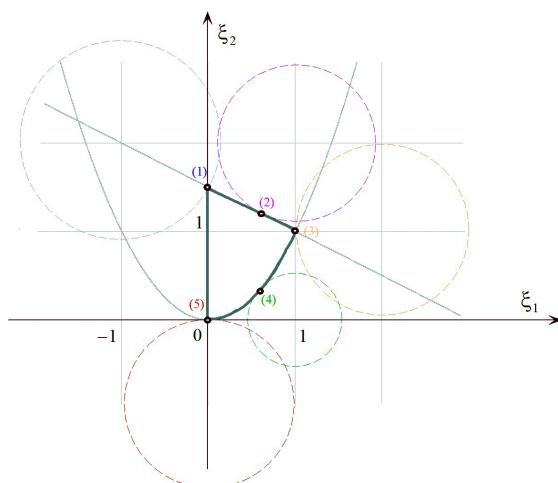


Рис. 5.3. Графическое представление решения задачи 5.1.2

Таблица 5.1.6

Вариант (5) при $a = 0$ и $b = -1$

τ	$\xi 1$	$\xi 2$	$\lambda 1$	$\lambda 2$
10^{-01}	0.115087159	0.037662406	0.017790571	0.785205278
10^{-02}	0.037312698	$4.029 \cdot 10^{-03}$	$1.692 \cdot 10^{-03}$	0.770494044
10^{-03}	0.011862237	$4.059 \cdot 10^{-04}$	$1.674 \cdot 10^{-04}$	0.769365417
10^{-04}	$3.756 \cdot 10^{-03}$	$4.063 \cdot 10^{-05}$	$1.669 \cdot 10^{-05}$	0.769400400
10^{-05}	$1.144 \cdot 10^{-03}$	$4.588 \cdot 10^{-06}$	$1.667 \cdot 10^{-06}$	0.910130875
10^{-06}	$3.039 \cdot 10^{-04}$	$1.704 \cdot 10^{-06}$	$1.667 \cdot 10^{-07}$	1.706590368
10^{-07}	$1.090 \cdot 10^{-04}$	$5.577 \cdot 10^{-08}$	$1.667 \cdot 10^{-08}$	1.103504385
10^{-08}	$2.901 \cdot 10^{-05}$	$1.675 \cdot 10^{-07}$	$1.667 \cdot 10^{-09}$	1.970155153
10^{-09}	$9.201 \cdot 10^{-06}$	$1.067 \cdot 10^{-08}$	$1.667 \cdot 10^{-10}$	1.953155113
10^{-10}	$2.888 \cdot 10^{-06}$	$1.727 \cdot 10^{-08}$	$1.667 \cdot 10^{-11}$	1.997104296
10^{-11}	$9.130 \cdot 10^{-07}$	$5.326 \cdot 10^{-09}$	$1.667 \cdot 10^{-12}$	1.999061299
10^{-12}	$2.921 \cdot 10^{-07}$	$7.0728 \cdot 10^{-12}$	$1.667 \cdot 10^{-13}$	1.929300047
10^{-13}	$9.129 \cdot 10^{-08}$	$6.531 \cdot 10^{-10}$	$1.667 \cdot 10^{-14}$	1.929300047
10^{-14}	$2.887 \cdot 10^{-08}$	$1.841 \cdot 10^{-10}$	$1.667 \cdot 10^{-15}$	1.999972835
10^{-15}	$1.090 \cdot 10^{-08}$	0	0	1.105359814
10^{-16}	$2.887 \cdot 10^{-09}$	$1.971 \cdot 10^{-11}$	0	1.999997463
10^{-17}	$9.129 \cdot 10^{-10}$	$3.362 \cdot 10^{-12}$	0	1.999998513

В заключение укажем, что дополнительные вычислительные затруднения при использовании метода функций обратных связей могут возникать в случае *нерегулярности* решаемой задачи.

Разъясним их природу на примере следующей задачи, аналогичной рассмотренной в [17], гл.4, § 2. Здесь будем также использовать функцию обратной связи вида $Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right)$.

Пример 5.1.4. Максимизировать функцию $F(\xi_1, \xi_2) = -\xi_1$ при условиях: $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$,

$$\begin{aligned} -(\xi_1 - 1)^2 \operatorname{sgn}(\xi_1 - 1) + \xi_2 &\leq 2, \\ (\xi_1 - 1)^3 + \xi_2 &\geq 2. \end{aligned}$$

Причиной вычислительных затруднений в этой задаче является линейная зависимость в точке решения градиентов левых частей ограничений, для преодоления которых достаточно использовать более общую форму функции Лагранжа $L(x, \Lambda) = \lambda_0 F(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$,

При использовании функции Лагранжа общего вида система уравнений (5.1.3) в данной задаче примет вид

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\xi}_1 &= \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_0 - \frac{1}{\bar{\lambda}_0} \right), \\ -2 - (\bar{\xi}_1 - 1)^2 \operatorname{sgn}(\bar{\xi}_1 - 1) + \bar{\xi}_2 &= \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right), \\ 2 - (\bar{\xi}_1 - 1)^3 - \bar{\xi}_2 &= \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right), \\ -\bar{\lambda}_0 - 2(\bar{\xi}_1 - 1) \operatorname{sgn}(\bar{\xi}_1 - 1) \bar{\lambda}_1 + 3(\bar{\xi}_1 - 1)^2 \bar{\lambda}_2 &= \frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_1 - \frac{1}{\bar{\xi}_1} \right), \\ -\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 &= \frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_2 - \frac{1}{\bar{\xi}_2} \right). \end{aligned} \right. \quad (5.1.20)$$

Таблица 5.1.7

τ	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	$\bar{\lambda}_0$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	F	$N.\text{grad}U$
10^{-1}	0.97577343	1.99598738	0.05110756	0.96632969	1.04107881	-0.02422658	0.09365079
10^{-2}	1.00250692	1.99996562	$5.0 \cdot 10^{-3}$	0.99594217	1.00344196	$2.5 \cdot 10^{-3}$	0
10^{-3}	0.99999996	1.99999868	$2.8 \cdot 10^{-4}$	0.56191608	0.56268763	-0.0002499	$1.0 \cdot 10^{-3}$
10^{-4}	0.99999373	2.00020406	$3.7 \cdot 10^{-5}$	0.18598853	0.18606352	$-6.3 \cdot 10^{-6}$	0.36102541
10^{-5}	0.99999750	2	$5.0 \cdot 10^{-6}$	0.99999656	1.00000406	$-2.5 \cdot 10^{-6}$	$2.0 \cdot 10^{-6}$
10^{-6}	0.99962261	2.00000267	$4.7 \cdot 10^{-7}$	0.17587858	0.17587933	-0.00037739	0.06776044
10^{-7}	1.00000003	2	$5.0 \cdot 10^{-8}$	1.9999996	1.00000004	$2.5 \cdot 10^{-8}$	0

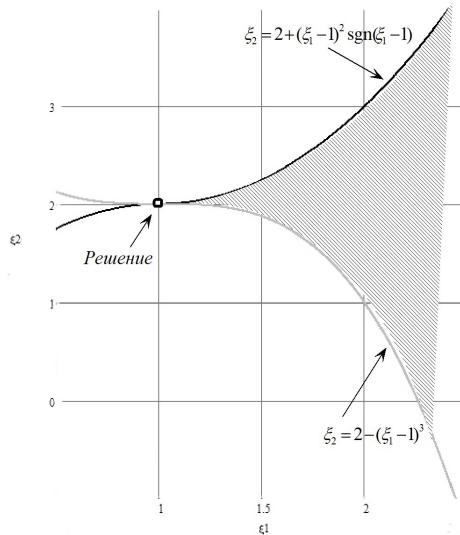


Рис. 5.4. Графическое представление примера 5.1.4.

Иначе говоря, мы вводим дополнительную, неотрицательную переменную λ_0 , нулевое значение которой, позволяет учесть случай вырождения – линейной зависимости градиентов активных ограничений

в оптимальной точке. Заметим также, что в вырожденном случае двойственные переменные могут определяться неоднозначно.

Например точное решение примера 5.1.4 будет:

$$\xi_1^* = 1; \quad \xi_2^* = 2; \quad \lambda_0^* = 0; \quad \lambda_1^* = v; \quad \lambda_2^* = v \quad \forall v > 0.$$

При использовании функции Лагранжа общего вида вспомогательная функция (5.1.5) имеет изолированную седловую точку $\forall \tau > 0$. Решения системы (5.1.20), определяющей эту точку, включая норму градиента U -функции, приведены в табл. 5.1.7.

Графическая интерпретация примера 5.1.3 показана на рис. 5.3, при этом допустимая область выделена штриховкой.

§ 5.2. Использование метода обратных связей в нелинейных параметрических задачах

Теперь рассмотрим использование предлагаемого подхода в случае нелинейной задачи математического программирования, условие которой содержит *векторный экзогенный параметр* u , для которого $\|u\| = \|\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k\|^T$:

при каждом $u \in \Theta \subseteq E^k$ максимизировать по $\|x\| = \|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n\|^T$ выпуклую вверх по $x \in E^n$ и достаточно гладкую целевую функцию:

$$F(x, u) \quad (5.2.1)$$

при условиях:

$$f_i(x, u) \leq 0 \quad \forall i = [1, m], \quad (5.2.2)$$

где функции $f_i(x, u) \forall i = [1, m]$ достаточно гладкие в $\Omega \subset E^n \otimes E^k$ и такие, что множество (5.2.2) при фиксированном u выпукло по $x \in \Omega$ во всех случаях, когда множество (5.2.2) непусто.

Решение этой задачи будем обозначать, как и раньше, при фиксированном $u \in \Theta$ x_u^* .

Рассмотрим задачу (5.2.1)–(5.2.2) опять же как обобщение задачи (4.1.1)–(4.1.2) на нелинейный, локально выпуклый, параметрический случай и выясним, как будет выглядеть система вспомогательных уравнений (5.1.6) для задачи (5.2.1)–(5.2.2).

Рассуждая так же как и в § 5.1, и предполагая, что x_u^* – решение задачи (5.2.1)–(5.2.2) – существует, построим линейную аппроксимацию этой задачи в малой окрестности x_u^* . Заметим, что возможная негладкость x_u^* , $u \in \Theta$, в этом случае существенной роли не играет.

В результате мы приходим к соотношениям, аналогичным системе (5.1.6). Конкретно, обобщением системы уравнений (4.1.10) на случай задачи (5.2.1)–(5.2.2) оказывается система уравнений вида

$$\begin{cases} f_i(\bar{x}, u) = Q(\tau, \bar{\lambda}_i) & \forall i = [1, m], \\ \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(F(\bar{x}, u) - \sum_{t=1}^m \bar{\lambda}_t f_t(\bar{x}, u) \right) = Q(\tau, \bar{\xi}_j) & \forall j = [1, n] \end{cases}$$

или же (полагая, что $\|\Lambda\| = \|\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m\|^T$) в более компактной форме

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\bar{x}, \bar{\Lambda}, u) = -Q(\tau, \bar{\lambda}_i) & \forall i = [1, m], \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_j}(\bar{x}, \bar{\Lambda}, u) = Q(\tau, \bar{\xi}_j) & \forall j = [1, n], \end{cases} \quad (5.2.3)$$

где

$$L(x, \Lambda, u) = F(x, u) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x, u)$$

– стандартная функция Лагранжа параметрической задачи (5.2.1) – (5.2.2).

Параметрические задачи, в постановку которых входят зависимости x_u^* и Λ_u^* ,⁷ как правило, решаются при помощи методов, основанных на использовании ограниченного набора локальных числовых характеристик этих зависимостей, таких как значения функций, их производных или обобщенных градиентов и т. п. Поэтому в методе обратных связей представляется целесообразным исследование способов вычисления подобных характеристик для функций $\bar{x}(\tau, u)$ и $\bar{\Lambda}(\tau, u)$, поскольку последние (в силу теоремы 3.2.4 и п. 3 теоремы 1.2.2) аппроксимируют зависимости x_u^* и Λ_u^* с погрешностью порядка τ и обладают при этом достаточно высокой степенью гладкости.

Аналогично § 4.2 для системы уравнений (5.2.3) введем новую вспомогательную функцию вида

$$U(\tau, x, \Lambda, u) = F(x, u) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x, u) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i) - \sum_{j=1}^n R(\tau, \xi_j) \quad (5.2.4)$$

или $U(\tau, x, \Lambda, u) = L(x, \Lambda, u) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i) - \sum_{j=1}^n R(\tau, \xi_j)$, где по-

прежнему $\frac{\partial R}{\partial s}(\tau, s) = Q(\tau, s)$. При этом

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} U\left(\tau, \bar{x}(\tau, u), \bar{\Lambda}(\tau, u), u\right) = L\left(x^*(u), \Lambda^*(u), u\right),$$

и, в регулярном случае,

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau, u) = x^*(u), \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\Lambda}(\tau, u) = \Lambda^*(u).$$

Для функции $U(\tau, x, \Lambda, u)$ при каждом $u \in \Omega$ имеют место теоремы 5.1.1 и 5.1.2. Поэтому $\forall \tau \in (0, \Delta]$ условия (5.2.3) являются условиями стационарности функции $U(\tau, x, \Lambda, u)$. А в силу сделанных предположений о достаточной гладкости функций $F(x, u), f_i(x, u) \quad \forall i \in [1, m]$ и $P(\tau, s)$ и согласно теореме о системе функций, заданных неявно [13], существуют локально непрерывно дифференцируемые вектор-функции $\bar{x}(\tau, u)$ и $\bar{\Lambda}(\tau, u)$, значения которых при фиксированных τ и u определяются из системы (5.2.3).

⁷См., например, задачу 1.1.2.

Соответственно, значения частных производных первого порядка по всем компонентам параметра u , согласно той же теореме о неявных функциях, находятся из системы линейных уравнений вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_t \partial \xi_j} \frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial \nu_h} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_t \partial \lambda_i} \frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial \nu_h} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_t \partial \nu_h} \quad \forall t = [1, n], \quad \forall h = [1, k], \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_r \partial \xi_j} \frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial \nu_h} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_r \partial \lambda_i} \frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial \nu_h} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_r \partial \nu_h} \quad \forall r = [1, m], \quad \forall h = [1, k]. \end{array} \right. \quad (5.2.5)$$

Заметим, что при необходимости и соответствующих предположениях о гладкости, из линейных систем с той же основной матрицей находятся значения производных второго и/или более высокого порядка. Невырожденность основной матрицы системы (5.2.5) следует из теоремы 5.1.2.

Проиллюстрируем использование рассмотренной в данном параграфе схемы для решения следующей двухуровневой задачи параметрического программирования:

максимизировать по $\|u\| = \|\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k\|^T$ целевую функцию:

$$F(x_u^*, u) \quad (5.2.6)$$

при условиях: $u \in E^k$, а x_u^* – решение задачи (5.2.1) – (5.2.2).

В данном примере естественно считать задачу (5.2.1) – (5.2.2) задачей *нижнего уровня*, решение которой использовано в формулировке задачи *верхнего уровня* (5.2.6).

Предположим, что для решения задачи (5.2.6) используется один из методов второго порядка, например метод Ньютона. При его реализации необходимо находить для u – каждой пробной точки в пространстве параметров, три вида числовых характеристик функции $F(x_u^*, u)$: ее значение, вектор градиента и матрицу Гессе (вторых частных производных).

Вообще говоря, при сделанных ранее предположениях о свойствах функций $F(x, u)$ и $f_i(x, u) \forall i \in [1, m]$ – достаточной гладкости и локальной выпуклости, гарантии существования, указанных выше характеристик для $F(x_u^*, u)$, нет. Поэтому следует воспользоваться, например, гладкой аппроксимацией зависимости x_u^* , функцией $\bar{x}(\tau, u)$, являющейся в сочетании с $\bar{\Lambda}(\tau, u)$ седловой точкой вспомогательной функции для задачи (5.2.1) – (5.2.2) вида

$$U(\tau, x, \Lambda, u) = L(x, \Lambda, u) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i) - \sum_{j=1}^n R(\tau, \xi_j), \quad (5.2.7)$$

с условием стационарности $\forall u :$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\bar{x}, \bar{\Lambda}, u) = -Q(\tau, \bar{\lambda}_i) & \forall i = [1, m], \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_j}(\bar{x}, \bar{\Lambda}, u) = Q(\tau, \bar{\xi}_j) & \forall j = [1, n]. \end{cases} \quad (5.2.8)$$

В этом случае задача (5.2.6) в силу теоремы 3.2.3 может быть сведена к задаче отыскания стационарной точки функции

$$\bar{U}(\tau, u) = U(\tau, \bar{x}(\tau, u), \bar{\Lambda}(\tau, u), u), \quad (5.2.9)$$

значения которой существуют при любом u .

Решение этой задачи обычно требует знания значений частных производных первого и второго порядка вспомогательной функции $\bar{U}(\tau, u)$ по компонентам вектора параметров u , найти которые можно следующим способом.

Согласно правилу дифференцирования сложной функции:

$$\bar{U}'_{\nu_l} = \frac{\partial U}{\partial \nu_l} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial \xi_j} \frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial \nu_l} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial \nu_l} \quad \forall l = [1, k],$$

где частные производные в правых частях вычисляются в точке $\{\bar{x}(\tau, u); \bar{\Lambda}(\tau, u)\}$. Тогда в силу (5.2.7) и (5.2.8) получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \xi_j} = \frac{\partial L}{\partial \xi_j}(\bar{x}, \bar{\Lambda}, u) - Q(\tau, \bar{\xi}_i) = 0 & \forall j = [1, n], \\ \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\bar{x}, \bar{\Lambda}, u) + Q(\tau, \bar{\lambda}_i) = 0 & \forall i = [1, m]. \end{cases}$$

И окончательно

$$\bar{U}'_{\nu_l} = \frac{\partial U}{\partial \nu_l} \quad \forall l = [1, k]. \quad (5.2.10)$$

Отметим, что для нахождения первых частных производных вспомогательной функции $\bar{U}(\tau, u)$ необходимы лишь значения $\bar{x}(\tau, u)$ и $\bar{\Lambda}(\tau, u)$.

Вторые частные производные находятся аналогичным методом. Учитывая соотношения (5.2.9), получаем

$$\bar{U}''_{\nu_l \nu_h} = \frac{\partial^2 U}{\partial \nu_l \partial \nu_h} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \nu_l \partial \xi_j} \frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial \nu_h} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \nu_l \partial \lambda_i} \frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial \nu_h} \quad \forall l, h = [1, k]. \quad (5.2.11)$$

Из соотношений (5.2.11) следует, что при вычислении вторых частных производных от $\bar{U}(\tau, u)$, помимо значений $\bar{x}(\tau, u)$ и $\bar{\Lambda}(\tau, u)$, необходимо найти также значения производных $\frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial \nu_h} \forall j = [1, n], \forall h = [1, k]$ и $\frac{\partial \bar{\Lambda}_i}{\partial \nu_h} \forall i = [1, m], \forall h = [1, k]$. Значения этих производных (как было показано выше) находятся из системы линейных уравнений (5.2.5).

Таким образом, решив систему уравнений (5.2.8) и подсчитав значения первых и вторых производных по формулам (5.2.10) – (5.2.11), можно либо построить локальную тейлоровскую аппроксимацию второго порядка для вспомогательной функции $\bar{U}(\tau, u)$, либо непосредственно использовать эти численные характеристики для реализации какого-либо метода второго порядка решения задачи (5.2.6) в пространстве параметров.

Проиллюстрируем описанный выше метод решения двухуровневых параметрических задач, применив его для решения задач 3.2.1 и 1.1.2.

Рассмотрим вначале пару задач 3.2.1. Их условия имеют вид

Прямая задача:

максимизировать 2ξ

при условиях: $\xi \geq 0$, $\xi \leq 3$ и $\xi \leq \nu$.

Двойственная задача:

минимизировать $3\lambda_1 + \nu\lambda_2$

при условиях: $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 2$.

Функции обратной связи выберем следующего вида:

$$R(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(\frac{s^2}{2} - \ln s \right) \quad \text{и} \quad Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right).$$

Тогда U -функция будет

$$\begin{aligned} U(\xi, \lambda_1, \lambda_2, \nu) = & 2\xi - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\xi^2}{2} - \ln \xi \right) + \\ & + 3\lambda_1 + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\lambda_1^2}{2} - \ln \lambda_1 \right) + \nu\lambda_2 + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\lambda_2^2}{2} - \ln \lambda_2 \right) - \xi\lambda_1 - \xi\lambda_2, \end{aligned}$$

а условия ее стационарности соответственно

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -3 + \bar{\xi} & = & \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right), \\ -\nu + \bar{\xi} & = & \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right), \\ -2 + \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 & = & -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi} - \frac{1}{\bar{\xi}} \right). \end{array} \right.$$

Графическое представление решения этой системы уравнений показаны на рис. 5.3 и 5.4, иллюстрирующих эффект сглаживания точного решения задачи 3.2.1 функциями $\bar{U}(\tau, \nu)$ и $\bar{U}(\tau, \nu) - L(\nu)$, где

$$\bar{U}(\nu) = U(\bar{\xi}(\nu), \bar{\lambda}_1(\nu), \bar{\lambda}_2(\nu), \nu),$$

а $L^*(\nu)$ – значение стандартной функции Лагранжа в оптимальной точке:

$$L^*(\nu) = L(\xi^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \nu) = 2\xi^* + 3\lambda_1^* + \nu\lambda_2^* - \xi^*\lambda_1^* - \xi^*\lambda_2^*,$$

вычисленное при разных величинах экзогенного параметра ν .

Рассмотрим теперь задачу 1.1.2. Заметим, что решение этой задачи в § 1.1 основывалось на геометрических соображениях и сканировании по сетке параметров, приведенной в приложении 7.1.

Прямая задача нижнего уровня имеет вид

максимизировать по ξ_1 и ξ_2 функцию $F(\xi_1, \xi_2) = 2\xi_1 + 3\xi_2$

при условиях: $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$,

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 &\leq \nu_1, \\ 2\xi_1 + \nu_2\xi_2 &\leq 17 - \nu_1. \end{aligned}$$

Пусть $\xi_1^*(\nu_1, \nu_2)$ и $\xi_2^*(\nu_1, \nu_2)$ ее решение при фиксированных значениях параметров ν_1 и ν_2 . В этом случае целевая функция двойственной задачи: $G(\lambda_1, \lambda_2) = \nu_1\lambda_1 + (17 - \nu_1)\lambda_2$.

Задача верхнего уровня формулируется при этом так:

максимизировать по ξ_1 и ξ_2 функцию $2\xi_1^*(\nu_1, \nu_2) + 3\xi_2^*(\nu_1, \nu_2)$

при условиях: $0 \leq \nu_1 \leq 17$, $\frac{1}{4} \leq \nu_2 \leq 3$.

Поскольку задача нижнего уровня линейна по ξ_1 и ξ_2 , U -функцию для нее строим по стандартной схеме, используя опять же в качестве функций обратной связи

$$R(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(\frac{s^2}{2} - \ln s \right) \quad \text{и} \quad Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right).$$

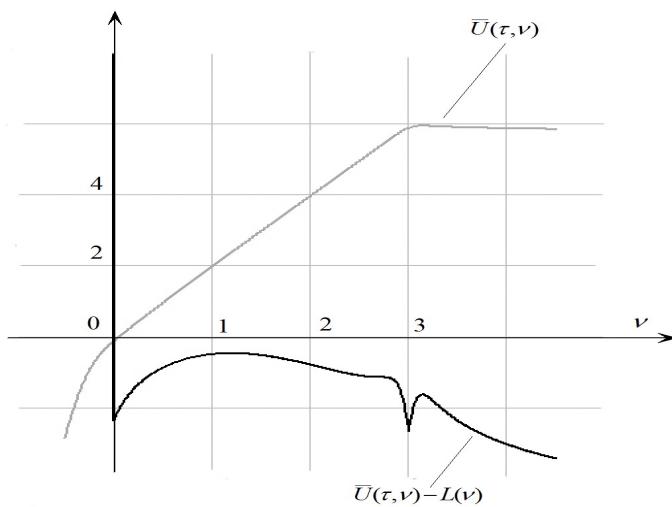


Рис. 5.5. Графики функций $\bar{U}(\tau, \nu)$ и $\bar{U}(\tau, \nu) - L(\nu)$ для задачи 3.2.1 при $\tau = 0.1$

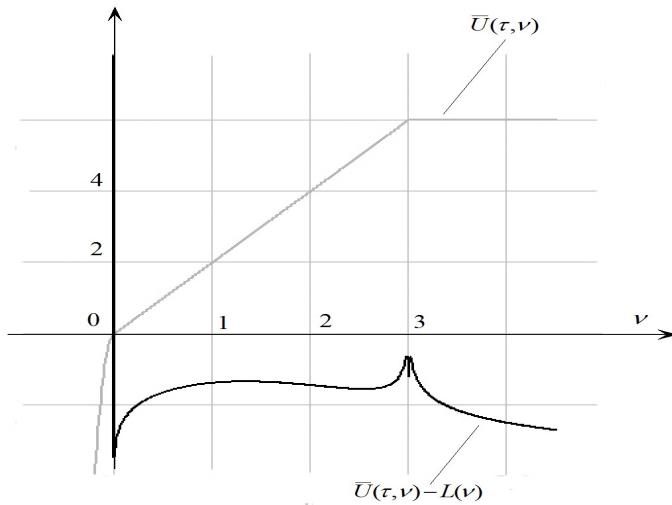


Рис. 5.6. Графики функций $\bar{U}(\tau, \nu)$ и $\bar{U}(\tau, \nu) - L(\nu)$ для задачи 3.2.1 при $\tau = 0.01$

$$\begin{aligned}
U(\xi_1, \xi_2, \lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2) = & \\
= 2\xi_1 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\xi_1^2}{2} - \ln \xi_1 \right) + 3\xi_2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\xi_2^2}{2} - \ln \xi_2 \right) + & \\
+ \nu_1 \lambda_1 + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\lambda_1^2}{2} - \ln \lambda_1 \right) + (17 - \nu_1) \lambda_2 + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\lambda_2^2}{2} - \ln \lambda_2 \right) - & \\
- \xi_1 \lambda_1 - 2\xi_1 \lambda_2 - 2\xi_2 \lambda_1 - \nu_2 \xi_2 \lambda_2. & \\
\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Задача верхнего уровня в рассматриваемом случае сводится к максимизации по ν_1 и ν_2 функции

$$\bar{U}(\nu_1, \nu_2) = U(\bar{\xi}_1(\nu_1, \nu_2), \bar{\xi}_2(\nu_1, \nu_2), \bar{\lambda}_1(\nu_1, \nu_2), \bar{\lambda}_2(\nu_1, \nu_2), \nu_1, \nu_2),$$

где функции $\bar{\xi}_1(\nu_1, \nu_2)$, $\bar{\xi}_2(\nu_1, \nu_2)$, $\bar{\lambda}_1(\nu_1, \nu_2)$, $\bar{\lambda}_2(\nu_1, \nu_2)$ определяются неявно условиями стационарности по переменным ξ_1, ξ_2, λ_1 и λ_2 функции (5.2.12), задаваемыми следующей системой уравнений:

$$\left\{
\begin{aligned}
-\nu_1 + \bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 &= \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right), \\
-17 + \nu_1 + 2\bar{\xi}_1 + \nu_2 \bar{\xi}_2 &= \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right), \\
-2 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2 &= -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_1 - \frac{1}{\bar{\xi}_1} \right), \\
-3 + 2\bar{\lambda}_1 + \nu_2 \bar{\lambda}_2 &= -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_2 - \frac{1}{\bar{\xi}_2} \right).
\end{aligned} \right. \tag{5.2.13}$$

Для решения задачи верхнего уровня используем итеративный градиентный метод наискорейшего подъема, описываемый формулами

$$u_{k,(t+1)} = u_{k,(t)} + s_{(t)} w_{k,(t)}, \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2. \tag{5.2.14}$$

Здесь t – номер итерации (показан нижним индексом в круглых скобках), $w_{(t)} = \frac{\nabla \bar{U}_{(t)}}{\|\nabla \bar{U}\|}$ – вектор, задающий направление наискорейшего подъема, $s_{(t)}$ – величина шага по этому направлению, а \bar{U}_t определяется формулой

$$U\left(\bar{\xi}_1(\nu_{1(t)}, \nu_{2(t)}), \bar{\xi}_2(\nu_{1(t)}, \nu_{2(t)}), \bar{\lambda}_1(\nu_{1(t)}, \nu_{2(t)}), \bar{\lambda}_2(\nu_{1(t)}, \nu_{2(t)}), \nu_{1(t)}, \nu_{2(t)}\right).$$

Откуда следует, что на каждой итерации нужно для текущих значений параметра решить систему (5.2.13). Затем найти градиент функ-

ции $\bar{U}(\nu_1, \nu_2)$ по $\{\nu_1, \nu_2\}$, используя соотношения (5.2.10), и по формулам (5.2.14) получить новое приближение к решению задачи верхнего уровня.

Стереометрическое представление графика U -функции для задачи (5.2.6) показано на рис. 5.5. Сравнение этого рисунка с рис. 1.1 наглядно демонстрирует эффект сглаживания решения задачи 1.1.2 возникающий при использовании метода функций обратной связи.

Для решаемой задачи в силу равенств (5.2.10) имеем

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \nu_1} = \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2, \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial \nu_2} = -\bar{\xi}_2 \bar{\lambda}_2.$$

Результаты вычислений для нескольких начальных итераций процесса решения задачи (5.2.6) при значении $\tau = 0.01$ приведены в табл. 5.2.1а и 5.2.1б.

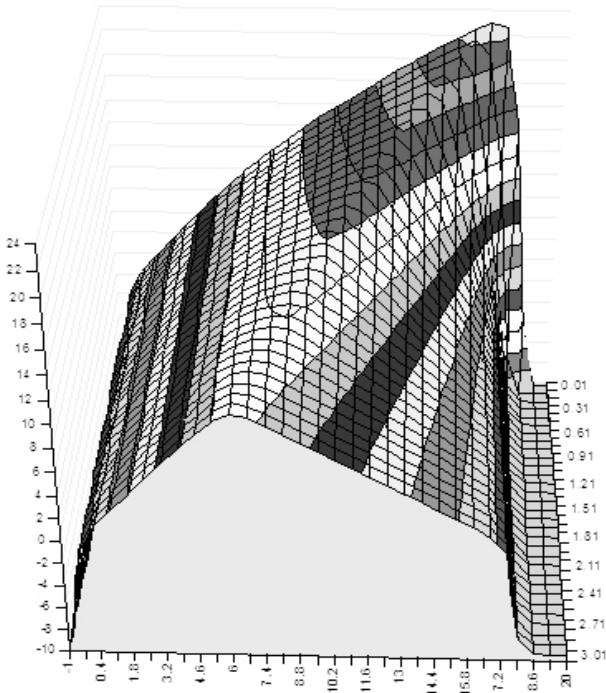


Рис. 5.7. 3D-представление графика U -функции при $\tau = 0.1$ для задачи верхнего уровня (5.2.6)

**Поиск стационарной точки U -функции задачи (5.2.6)
по параметрам ν_1 и ν_2 градиентным методом**

Итер.	ν_1	ν_2	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$
0	3.00	2.00	3.00	0.00	1.99	0.00
1	5.84	2.00	5.32	0.26	1.04	0.47
2	14.32	0.23	0.52	6.90	1.45	0.28
3	14.43	0.25	1.11	6.66	1.47	0.26

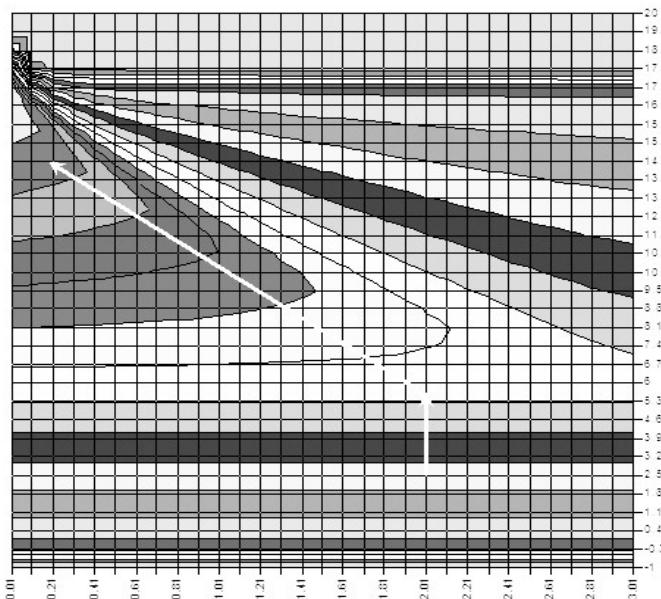


Рис. 5.8. Графическое представление перемещения в пространстве параметров при решении задачи верхнего уровня (5.2.6)

Графическое представление траекторий движения в пространстве параметров для задачи (5.2.6) показано белыми стрелками на рис. 5.7.

**Поиск стационарной точки U -функции задачи (5.2.6)
по параметрам ν_1 и ν_2 градиентным методом**

Итер.	F	G	\bar{U}	$ \text{grad } \bar{U} $	w_1	w_2	Step
0	6.01	5.97	6.00	1.98	1.00	0.00	2.836
1	11.41	11.29	11.36	0.59	0.98	-0.20	8.667
2	21.753	21.52	21.64	2.25	0.52	-0.85	0.217
3	22.21	21.99	22.12	***	***	***	***

Отметим также, что включение в табл. 5.2.1a, 5.2.1b и 5.2.1c данных, относящихся лишь к нескольким первым итерациям, связано с тем, что значения пределов

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{\nu}_1(t) \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{\nu}_2(t)$$

принципиально отличаются от точного решения задачи верхнего уровня (5.2.6) по порядку на величину значения инструментального параметра τ .

Проблема получения точного решения задач верхнего и нижнего уровней рассматривается в следующем параграфе пособия. Здесь же в качестве иллюстративного примера, приведем процедуру решения следующей задачи нелинейного программирования.

Задача 5.2.15: максимизировать в E^4 функцию $F = 2\xi_1 + 3\xi_2$

при условиях: $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$ и

$$\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0 \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2} \leq \xi_3 \leq \frac{6}{5}, \quad -\frac{1}{2} \leq \xi_4 \leq \frac{6}{5},$$

$$\begin{aligned} \xi_1 + (2\xi_3 + \xi_4 - 1)^2 \xi_2 &\leq 6, \\ (\xi_3 - 2\xi_4 + 1)^2 \xi_1 + \xi_2 &\leq 6, \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

решение которой имеет вид

$$\xi_1^* = 6, \xi_2^* = 6, \xi_3^* = \frac{1}{5}, \xi_4^* = \frac{3}{5}, F^* = 30.$$

Используем для решения этой задачи метод параметрической линеаризации, сводящийся к тому, что если переменные ξ_3 и ξ_4 принять за параметры, то задача (5.2.15) становится линейной по переменным ξ_1 и ξ_2 . Положим ⁸ $\xi_3 = p$ и $\xi_4 = q$, где $-\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{6}{5}$ и $-\frac{1}{2} \leq q \leq \frac{6}{5}$ – фиксированные параметры.

Мы приходим к задаче линейного программирования вида

максимизировать в E^2 функцию $F = 2\xi_1 + 3\xi_2$

при условиях $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$ и

$$\begin{aligned} \xi_1 + (2p + q - 1)^2 \xi_2 &\leq 6, \\ (p - 2q + 1)^2 \xi_1 + \xi_2 &\leq 6. \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

Если $\xi_1^*(p, q)$ и $\xi_2^*(p, q)$ – решения задачи (5.2.16), то графические представления зависимости $F^*(p, q) = 2\xi_1^*(p, q) + 3\xi_2^*(p, q)$ будут иметь вид, показанный на рис. 5.8 (как 3D-проекция) и на рис. 5.9 (как система изолиний).

Решение задачи (5.2.15) будем искать методом *наискорейшего подъема* в пространстве параметров E^2 , элементы которого имеют координатные представления вида $\|u\| = \begin{vmatrix} p \\ q \end{vmatrix}$.

Метод наискорейшего подъема был реализован в виде стандартной итерационной процедуры: $u^{t+1} = u^t + \sigma^t w^t$, $t = 0, 1, 2, 3, \dots$, где u^t – вектор параметров на t -й итерации, w^t – улучшающая вариация, компоненты которой суть нормированные координаты градиента функции $\bar{U}(\tau, p, q)$, а σ^t – оптимальная величина шага по улучшающему направлению.

В рассматриваемом примере:

$$\begin{cases} w_p^T = \frac{1}{|\text{grad} \bar{U}|} \frac{\partial \bar{U}}{\partial p}, \\ w_q^T = \frac{1}{|\text{grad} \bar{U}|} \frac{\partial \bar{U}}{\partial q}, \end{cases} \quad |\text{grad} \bar{U}| = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial q}\right)^2}, \quad \begin{cases} p^0 = 0.5, \\ q^0 = 0.5. \end{cases}$$

⁸ Для упрощения записи формул используем обозначения $\nu_1 = p$ и $\nu_2 = q$.

Система уравнений (4.3.3) с $Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right)$ для задачи (5.2.16) будет иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 - \bar{\xi}_1 - (2p + q - 1)^2 \bar{\xi}_2 + \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right) = 0, \\ 6 - (p - 2q + 1)^2 \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2 + \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right) = 0, \\ 2 - \bar{\lambda}_1 - (p - 2q + 1)^2 \bar{\lambda}_2 - \frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_1 - \frac{1}{\bar{\xi}_1} \right) = 0, \\ 3 - (2p + q - 1)^2 \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 - \frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_2 - \frac{1}{\bar{\xi}_2} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (5.2.17)$$

решения которой, позволяют находить значения вспомогательной функции $\bar{U}(\tau, p, q)$ и ее частных производных первого порядка.

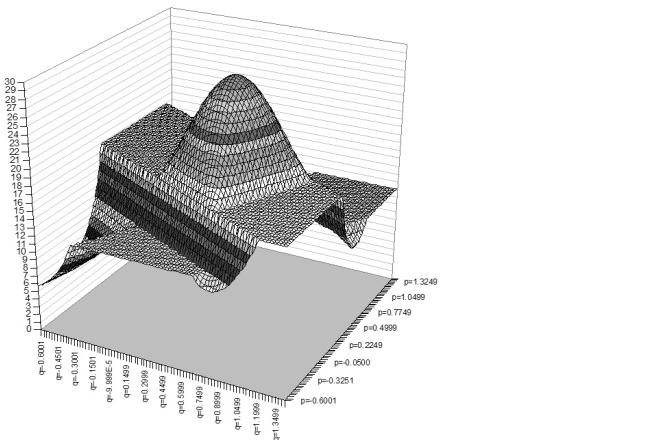


Рис. 5.9. Графическое 3D-представление зависимости целевой функции задачи 5.2.16 от параметров p и q

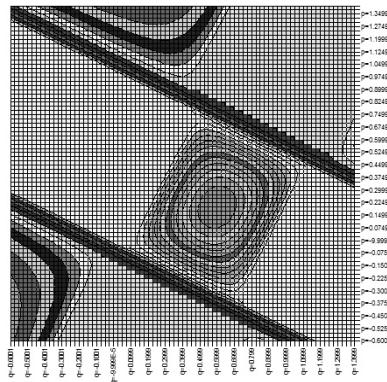


Рис. 5.10. Система изолиний зависимости целевой функции задачи 5.2.16 от параметров p и q

В рассматриваемом примере:

$$\begin{aligned}
 \bar{U}(\tau, p, q) = U\left(\tau, \bar{\xi}_1(p, q), \bar{\xi}_2(p, q), \bar{\lambda}_1(p, q), \bar{\lambda}_2(p, q), p, q\right) = \\
 = 2\bar{\xi}_1 + R(\tau, \bar{\xi}_1)) + 3\bar{\xi}_2 + R(\tau, \bar{\xi}_2) + \\
 + 6\bar{\lambda}_1 - R(\tau, \bar{\lambda}_1) + 6\bar{\lambda}_2 - R(\tau, \bar{\lambda}_2) - \\
 - \bar{\xi}_1\bar{\lambda}_1 - (p - 2q + 1)^2\bar{\xi}_1\bar{\lambda}_2 - \\
 - (2p + q - 1)^2\bar{\xi}_2\bar{\lambda}_1 - \bar{\xi}_2\bar{\lambda}_2.
 \end{aligned} \tag{5.2.18}$$

Тогда, используя (5.2.10), получим, что

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{U}}{\partial p} = -2(p - 2q + 1)\bar{\xi}_1\bar{\lambda}_2 - 4(2p + q - 1)\bar{\xi}_2\bar{\lambda}_1, \\
 \frac{\partial \bar{U}}{\partial q} = 4(p - 2q + 1)\bar{\xi}_1\bar{\lambda}_2 - 2(2p + q - 1)\bar{\xi}_2\bar{\lambda}_1.
 \end{aligned} \tag{5.2.19}$$

На каждой итерации решалась система уравнений (5.2.17) и находились компоненты $\text{grad} \bar{U}$ по формулам (5.2.19) при $\tau = 0.01$. Результаты вычислений приведены в табл. 5.2.2а и 5.2.2б.

**Оптимизация по параметрам при использовании
метода первого порядка**

t	p^t	q^t	$\bar{\xi}_1^t$	$\bar{\xi}_2^t$	$\bar{\lambda}_1^t$	$\bar{\lambda}_2^t$
0	0.50000	0.50000	4.79992	4.81137	1.31498	2.64823
1	0.26033	0.68044	5.76609	5.95449	1.94282	2.89242
2	0.19071	0.54760	5.97713	5.95859	1.94394	2.96125
3	0.19013	0.60010	6.00500	6.01256	1.97051	2.97001
4	0.20092	0.59798	6.00732	6.01316	1.97079	2.97077
5	0.20000	0.59998	6.00732	6.01317	1.97080	2.97077

Воспользуемся теперь для решения задачи (6.1.9) методом второго порядка – методом Ньютона. Применим ту же итерационную схему, что и в методе наискорейшего подъема. Вектор улучшающего направления будем находить при помощи системы линейных уравнений

$$\|\text{Hess}\bar{U}\| \|w\| = -\|\text{grad}\bar{U}\|, \quad (5.2.20)$$

координатный вид которой

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial p^2} w_p + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial p \partial q} w_q = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial p}, \\ \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial p \partial q} w_p + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial q^2} w_q = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial q}. \end{cases} \quad (5.2.21)$$

В рассматриваемом случае правые части системы линейных уравнений (6.1.21) находятся по формулам (5.2.19), а элементы матрицы Гессе для функции $\bar{U}(\tau, p, q)$ согласно соотношениям (5.2.11) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial p^2} = & -2\bar{\xi}_1\bar{\lambda}_2 - 8\bar{\xi}_2\bar{\lambda}_1 + (-2(p-2q+1)\bar{\lambda}_2) \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial p} + (-4(2p+q-1)\bar{\lambda}_1) \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial p} + \\ & + (-4(2p+q-1)\bar{\xi}_2) \frac{\partial \bar{\lambda}_1}{\partial p} + (-2(p-2q+1)\bar{\xi}_1) \frac{\partial \bar{\lambda}_2}{\partial p}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial p \partial q} = 4\bar{\xi}_1\bar{\lambda}_2 - 4\bar{\xi}_2\bar{\lambda}_1 + (-2(p-2q+1)\bar{\lambda}_2) \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial q} + (-4(2p+q-1)\bar{\lambda}_1) \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial q} +$$

**Оптимизация по параметрам при использовании
метода первого порядка**

t	\bar{U}	$ \text{grad} \bar{U} $	w_p^t	w_q^t	σ^t
0	23.91610	31.74962	-0.79891	0.60145	0.30000
1	29.21261	12.82739	-0.46448	-0.88558	0.15000
2	29.63970	8.40637	-0.01098	0.99994	0.05250
3	29.85448	1.31453	0.98130	-0.19247	0.01100
4	29.86083	0.09268	-0.40583	0.91395	0.00050
5	29.86086	0.00333	-0.14259	0.98987	0.00002

$$\begin{aligned}
 & + (-4(2p+q-1)\bar{\xi}_2) \frac{\partial \bar{\lambda}_1}{\partial q} + (-2(p-2q+1)\bar{\xi}_1) \frac{\partial \bar{\lambda}_2}{\partial q}, \\
 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial q^2} = & -8\bar{\xi}_1\bar{\lambda}_2 - 2\bar{\xi}_2\bar{\lambda}_1 + (4(p-2q+1)\bar{\lambda}_2) \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial q} + (-2(2p+q-1)\bar{\lambda}_1) \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial q} + \\
 & + (-2(2p+q-1)\bar{\xi}_2) \frac{\partial \bar{\lambda}_1}{\partial q} + (4(p-2q+1)\bar{\xi}_1) \frac{\partial \bar{\lambda}_2}{\partial q}.
 \end{aligned}$$

При этом в силу (5.2.11) вычисление значений производных

$$\frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial p}, \quad \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial p}, \quad \frac{\partial \bar{\lambda}_1}{\partial p}, \quad \frac{\partial \bar{\lambda}_2}{\partial p} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial q}, \quad \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial q}, \quad \frac{\partial \bar{\lambda}_1}{\partial q}, \quad \frac{\partial \bar{\lambda}_2}{\partial q}$$

сводится к решению систем линейных уравнений (5.2.5), основная матрица которых в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{vmatrix}
 -\frac{\tau}{2} - \frac{\tau}{2\xi_1^2} & 0 & -1 & -(p-2q+1)^2 \\
 0 & -\frac{\tau}{2} - \frac{\tau}{2\xi_2^2} & -(2p+q-1)^2 & -1 \\
 -1 & -(2p+q-1)^2 & \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2\lambda_1^2} & 0 \\
 -(p-2q+1)^2 & -1 & 0 & \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2\lambda_2^2}
 \end{vmatrix},$$

при этом столбцы правых частей для производных по p и q будут

$$\left\| \begin{array}{c} -2\bar{\lambda}_2(p-2q+1) \\ -4\bar{\lambda}_1(2p+q-1) \\ -4\bar{\xi}_2(2p+q-1) \\ -2\bar{\xi}_1(p-2q+1) \end{array} \right\| \text{ и } \left\| \begin{array}{c} 4\bar{\lambda}_2(p-2q+1) \\ -2\bar{\lambda}_1(2p+q-1) \\ -2\bar{\xi}_2(2p+q-1) \\ 4\bar{\xi}_1(p-2q+1) \end{array} \right\|. \quad (5.2.22)$$

Вычисления (5.2.21) – (5.2.22) выполнялись для каждого шага итерационного процесса $u^{t+1} = u^t + \sigma^t w^t$, $t = 0, 1, 2, 3, \dots$, причем величина шага по улучшающему направлению определялась стандартно. Результаты расчетов приведены в табл. 5.2.3a и 5.2.3b.

Т а б л и ц а 5.2.3a

**Оптимизация по параметрам при использовании
метода второго порядка**

t	p^t	q^t	$\bar{\xi}_1^t$	$\bar{\xi}_2^t$	$\bar{\lambda}_1^t$	$\bar{\lambda}_2^t$
0	0.50000	0.50000	4.79992	4.81137	1.31498	2.64823
1	0.24338	0.54181	6.00205	5.85998	1.89502	2.97001
2	0.19840	0.59940	6.00723	6.01317	1.97080	2.97074
3	0.20000	0.60000	6.00732	6.01317	1.97080	2.97077

**§ 5.3. Последовательная линейная
экстраполяция в методе функций
обратных связей**

Рассмотрим теперь процедуру линейной экстраполяции, аналогичную описанной в § 3.3 в методе гладких штрафных функций, для случая двухуровневой параметрической задачи (5.2.1) – (5.2.2), условие которой содержит вектор экзогенных параметров u с координатным представлением $\|u\| = \|\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k\|^T$. Чтобы отличать линейную

**Оптимизация по параметрам при использовании
метода второго порядка**

t	\bar{U}	$ \text{grad} \bar{U} $	w_p^t	w_q^t	σ^t
0	23.91610	31.74962	-0.98698	0.16083	0.26000
1	29.39627	12.81467	-0.61555	0.78810	0.07307
2	29.86068	0.20332	0.93689	0.34963	0.00170
3	29.86086	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

экстраполяцию в методах гладких штрафных функций и функций обратных связей, второй случай будем именовать *последовательной линейной экстраполяцией*.

В этой задаче требуется при каждом $u \in \Omega \subset E^k$ максимизировать по $\|x\| = \|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n\|^T$ выпуклую вверх по $x \in E^n$ и достаточно гладкую целевую функцию:

$$F(x, u) \quad (5.3.1)$$

при условиях: $\xi_j \geq 0 \quad \forall j = [1, n]$,

$$f_i(x, u) \leq 0 \quad \forall i = [1, m], \quad (5.3.2)$$

где функции $f_i(x, u) \quad \forall i = [1, m]$ достаточно гладкие и такие, что множество (5.3.2) выпукло по $x \in E^n$ во всех случаях, когда оно непусто.

Решение задачи (5.3.1) – (5.3.2) будем находить методом функций обратной связи.

Предположим, что решаемая задача регулярна, то есть вектор $\{x_u^*, \Lambda_u^*\}$ существует для некоторого фиксированного u . Поскольку для каждого достаточно малого $\tau \in (0, \tau_0]$ функция (5.2.7) имеет единственную седловую точку $\{\bar{x}(\tau, u), \bar{\Lambda}(\tau, u)\}$, то в пространстве $E^n \otimes E^m$ в силу теоремы о неявных функциях [13] определена траектория локальных экстремумов (см. определение 2.1.2), для которой справедливы равенства (5.2.3) и имеет место асимптотическое приближение к $\{x_u^*, \Lambda_u^*\}$ при $\tau \rightarrow 0 + 0$.

При этом, как показано в [19], из (2.1.5), п. 3° и системы уравнений (5.2.3) следует, что зависимости $\bar{x}(\tau, u)$ и $\bar{\Lambda}(\tau, u)$ являются достаточно гладкими функциями не только параметра u , но и коэффициента

штрафа τ . Тейлоровские аппроксимации этих зависимостей в окрестности некоторого значения τ имеют вид

$$\bar{x}(\tau + \Delta\tau, u) = \bar{x}(\tau, u) + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau} \Delta\tau + o(\Delta\tau)$$

и

$$\bar{\Lambda}(\tau + \Delta\tau, u) = \bar{\Lambda}(\tau, u) + \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial \tau} \Delta\tau + o(\Delta\tau).$$

Если в этих соотношениях перейти к пределу при $\Delta\tau \rightarrow -\tau + 0$ и учесть соотношения (4.2.20), то получаются следующие оценки для x_u^* и Λ_u^* :

$$x_u^* = \bar{x}(\tau, u) - \frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau} \tau + o(\tau) \quad \text{и} \quad \Lambda_u^* = \bar{\Lambda}(\tau, u) - \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial \tau} \tau + o(\tau). \quad (5.3.3)$$

Значения производных $\frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau}$ и $\frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial \tau}$ могут быть найдены при помощи теоремы о неявных функциях [13], примененной к системе уравнений (5.2.3). Для их вычисления необходимо решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_p \partial \xi_j} \frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_p \partial \lambda_i} \frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial \tau} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_p \partial \tau} & \forall p = [1, n], \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial \xi_j} \frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial \lambda_i} \frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial \tau} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_r \partial \tau} & \forall q = [1, m]. \end{cases} \quad (5.3.4)$$

Соотношения (5.3.3) позволяют построить итерационную процедуру (аналогичную предложенной в [18] процедуре многошаговой экстраполяции) последовательного уточнения значений сглаженных оценок для зависимостей $\bar{x}(\tau, u)$ и $\bar{\Lambda}(\tau, u)$, сходящуюся к значениям x_u^* и Λ_u^* там, где последние определены однозначно.

Уточнение сглаженного решения на первом шаге этой процедуры выполняется по очевидным в силу (5.3.3) формулам

$$x_{(1)}(u) = \bar{x}(\tau, u) - \frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau} \tau \quad \text{и} \quad \Lambda_{(1)}(u) = \bar{\Lambda}(\tau, u) - \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial \tau} \tau. \quad (5.3.5)$$

Геометрическая интерпретация процедуры последовательной линейной экстраполяции дана на рис. 5.8, где траектория локальных экстремумов показана черной жирной линией. Если коэффициент штрафа τ достаточно мал, то в силу свойств тейлоровской аппроксимации отклонение $\{x_{(1)}(u), \Lambda_{(1)}(u)\}$ от $\{x_u^*, \Lambda_u^*\}$ будет меньше, чем отклонение $\{\bar{x}(\tau, u), \bar{\Lambda}(\tau, u)\}$ от $\{x_u^*, \Lambda_u^*\}$.

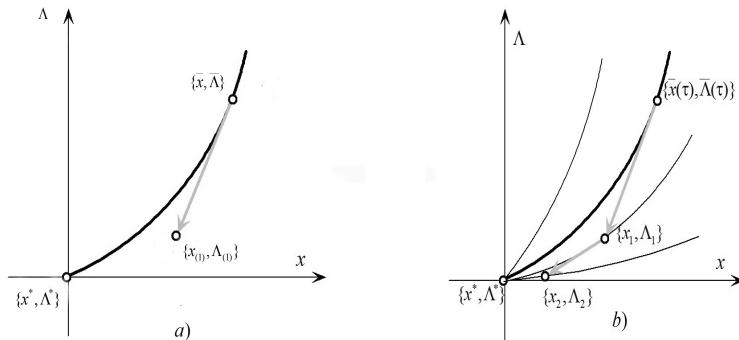


Рис. 5.11. Траектории метода последовательной линейной экстраполяции при $\tau \rightarrow 0 + 0$

Если полученная точность оказывается неудовлетворительной, то возможно выполнение дополнительных шагов, аналогичных первому. При этом следует обратить внимание, что результат линейной экстраполяции дает точку, которая уже не принадлежит седловой траектории (см. рис. 5.10a). При этом, однако, оказывается возможной некоторая модификация U -функции, при которой эта точка оказывается на другой седловой траектории, ведущей опять-таки к точному решению задачи.

Иначе говоря, изменим функцию $U(\tau, x, \Lambda, u)$, не меняя ее основных свойств, так, чтобы точка $\{x(1)(u), \Lambda(1)(u)\}$ оказалась для нее стационарной.

Для этого уединим в функции $U(\tau, x, \Lambda, u)$ слагаемые, явно зависящие от τ , и заменим параметр τ константами $\{gx_j \cdot \tau, g\Lambda_i \cdot \tau\}$ так, чтобы вспомогательная функция приняла вид

$$\widehat{U}(\tau, x, \Lambda, u) = U_0(\tau, x, \Lambda, u) + \sum_{j=1}^n R(gx_j \cdot \tau, \xi_j) - \sum_{i=1}^m R(g\Lambda_i \cdot \tau, \lambda_i), \quad (5.3.6)$$

где $U_0(\tau, x, \Lambda, u)$ – слагаемые в функции (5.2.7), не зависящие от τ .

Теперь подберем значения величин $\{gx_j, g\Lambda_i\}$ так, чтобы

$$\text{grad}_x \widehat{U}(\tau, x(1)(u), \Lambda(1)(u), u) = o \quad \text{и} \quad \text{grad}_\Lambda \widehat{U}(\tau, x(1)(u), \Lambda(1)(u), u) = o. \quad (5.3.7)$$

Здесь мы предположим, что функция $\frac{\partial P}{\partial s}$ зависит только от одной переменной $\frac{s}{\tau}$, то есть она удовлетворяет следствию 3.1.1, и верны

равенства:

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \Phi\left(\frac{s}{\tau}\right) \quad \text{и} \quad Q(\tau, s) = \tau\Psi(s). \quad (5.3.8)$$

В этом случае уравнения системы (5.2.3) линейны по τ , поэтому искомые значения $\{gx_j, g\Lambda_i\}$ будут равны

$$gx_j = \frac{\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(F(x_{(1)}, u) - \sum_{t=1}^m \lambda_{(1)t} f_t(x_{(1)}, u) \right)}{\tau\Psi(\xi_{(1)j})} \quad \forall j = [1, n],$$

$$g\Lambda_i = \frac{f_i(x, u)}{\tau\Psi(\lambda_{(1)i})} \quad \forall i = [1, m]. \quad (5.3.9)$$

Из вышеизложенного следует, что точка $\{x_{(1)}(u), \Lambda_{(1)}(u)\}$ оказывается принадлежащей одной из других траекторий локальных экстремумов (эти линии показаны рис. 5.10b тонкими черными линиями). Тогда в этой точке для новой траектории оказывается возможным повторение вычислений по формулам, аналогичным (5.3.5):

$$\xi_{(2)j}(u) = \xi_{(1)j}(u) - \frac{\partial \xi_{(1)j}}{\partial \tau} \tau \quad \forall j = [1, n],$$

$$\Lambda_{(2)i}(u) = \Lambda_{(1)i}(u) - \frac{\partial \Lambda_{(1)i}}{\partial \tau} \tau \quad \forall i = [1, m]. \quad (5.3.9)$$

Значения производных по параметру τ находятся из системы (5.3.4), в которой функция $U(\tau, x, \Lambda, u)$ заменена на $\widehat{U}(\tau, x, \Lambda, u)$.

И поскольку на каждой из этих траекторий локальных экстремумов, точки $\{\bar{x}(\tau, u), \bar{\Lambda}(\tau, u)\}$ асимптотически приближаются к $\{x_u^*, \Lambda_u^*\}$ при $\tau \rightarrow 0 + 0$, возникает *последовательная линейная экстраполяция* – процедура, сходящаяся к $\{x_u^*, \Lambda_u^*\}$, определяемая соотношениями

$$\xi_{(t+1)j}(u) = \xi_{(t)j}(u) - \frac{\partial \xi_{(t)j}}{\partial \tau} \tau \quad \forall j = [1, n],$$

$$\Lambda_{(t+1)i}(u) = \Lambda_{(t)i}(u) - \frac{\partial \Lambda_{(t)i}}{\partial \tau} \tau \quad \forall i = [1, m]. \quad (5.3.10)$$

Примерный вид траектории последовательной линейной экстраполяции показан на рис. 5.10 серым цветом при $\forall t = 0, 1, 2, \dots, t, \dots$

Очевидно, что процедура (5.3.7) – (5.3.9) может повторяться до получения приемлемой точности решения. Однако следует отметить, что

ее применение оправдано лишь после получения оптимального решения в пространстве параметров, поскольку уточнять промежуточные оценки данного решения заведомо нецелесообразно.

Как и всякая итерационная процедура, последовательная линейная экстраполяция для схемы функций обратных связей нуждается в обосновании ее сходимости.⁹ Рассуждения, из которых данный факт вытекает, оформлены в виде нижеследующей теоремы 5.3.1.

Теорема 5.3.1 В пространстве $E^n \otimes E^m$ существует окрестность точки $\{x_u^*, \Lambda_u^*\}$ – решение задач (5.2.1), из каждой точки которой процедура (5.3.10) сходится к $\{x_u^*, \Lambda_u^*\}$.

Доказательство.

Докажем данную теорему в следующих предположениях:

- задача (5.1.1) – (5.1.2) линейная;
- функция $\frac{\partial P}{\partial s}$ зависит только от одной переменной $\frac{s}{\tau}$, то есть она удовлетворяет следствию 3.1.1 и справедливо равенство (4.2.25).

Из курса высшей математики (см., например § 4.2 в [25]) известно, что для локальной сходимости в некоторой области банахова пространства Ω процедуры вида

$$\vec{\omega}_{t+1} = \hat{\Phi}(\vec{\omega}_t) \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots$$

достаточно, чтобы оператор $\hat{\Phi}(\vec{x})$ был сжимающим $\forall x \in \Omega$.

В нашем случае равенства (5.3.10) в матричном виде можно записать так:

$$\|\vec{\omega}_{t+1} - \vec{\omega}_t\| = \tau \left\| \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \tau} \right\| \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{где } \|\vec{\omega}\| = \left\| \begin{array}{c} \|\vec{x}\| \\ \|\Lambda\| \end{array} \right\|.$$

⁹ В этом параграфе там, где будет возможно, мы не будем (ради упрощения изложения) указывать явную зависимость параметров задачи от u .

Поскольку в силу следствия 3.1.1 предел $\lim_{t \rightarrow +0} \left\| \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \tau} \right\|$ существует и конечен по норме, то $\lim_{t \rightarrow +0} \|\vec{\omega}_{t+1} - \vec{\omega}_t\| = \|o\|$.

В свою очередь это и означает, что оператор, определяемый системами соотношений:

$$\xi_{(t+1)j}(u) = \xi_{(t)j}(u) - \frac{\partial \xi_{(t)j}}{\partial \tau} \tau \quad \forall j = [1, n],$$

$$\Lambda_{(t+1)i}(u) = \Lambda_{(t)i}(u) - \frac{\partial \Lambda_{(t)i}}{\partial \tau} \tau \quad \forall i = [1, m]$$

и

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_p \partial \xi_j} \frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_p \partial \lambda_i} \frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial \tau} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_p \partial \tau} & \forall p = [1, n], \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial \xi_j} \frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial \lambda_i} \frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial \tau} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_r \partial \tau} & \forall q = [1, m], \end{cases}$$

является сжимающим в некоторой окрестности своей неподвижной точки.

Теорема доказана.

Применение метода последовательной линейной экстраполяции вначале проиллюстрируем решением небольшой серии линейных задач различных типов.

Рассмотрим следующую пару взаимодейственных задач линейного программирования.

Задача 5.3.1. Условие имеет вид

Прямая задача:

максимизировать $\sigma_1\xi_1 + \sigma_2\xi_2$

при условиях: $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$ и

$$\begin{aligned} \xi_1 &\leq \beta_1, \\ \xi_2 &\leq \beta_2, \\ \alpha_{31}\xi_1 + \alpha_{32}\xi_2 &\leq \beta_3, \\ \alpha_{41}\xi_1 + \alpha_{42}\xi_2 &\leq \beta_4. \end{aligned}$$

Двойственная задача:

минимизировать $\beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 + \beta_3\lambda_3 + \beta_4\lambda_4$

при условиях: $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$, и $\lambda_4 \geq 0$,

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \alpha_{31}\lambda_3 + \alpha_{41}\lambda_4 &\geq \sigma_1, \\ \lambda_2 + \alpha_{32}\lambda_3 + \alpha_{42}\lambda_4 &\geq \sigma_2. \end{aligned}$$

Воспользуемся функцией обратной связи $R(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(\frac{s^2}{2} - \ln s \right)$,

для которой $\frac{\partial R}{\partial s} = Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right)$, а U -функция будет

$$U(\xi_1, \xi_2, \lambda_1, \lambda_2) = \sigma_1\xi_1 + \sigma_2\xi_2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\xi_1^2}{2} - \ln \xi_1 \right) - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\xi_2^2}{2} - \ln \xi_2 \right) +$$

$$+ \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 + \beta_3\lambda_3 + \beta_4\lambda_4 +$$

$$+ \frac{\tau}{2} \left[\left(\frac{\lambda_1^2}{2} - \ln \lambda_1 \right) + \left(\frac{\lambda_2^2}{2} - \ln \lambda_2 \right) + \left(\frac{\lambda_3^2}{2} - \ln \lambda_3 \right) + \left(\frac{\lambda_4^2}{2} - \ln \lambda_4 \right) \right] -$$

$$- \xi_1\lambda_1 - \alpha_{31}\xi_1\lambda_3 - \alpha_{41}\xi_1\lambda_4 - \xi_2\lambda_2 - \alpha_{32}\xi_2\lambda_3 - \alpha_{42}\xi_2\lambda_4,$$

а условия ее стационарности (с учетом коррекции коэффициента τ по формулам (5.3.8)) соответственно

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\beta_1 + \bar{\xi}_1 & = & \frac{g\Lambda_1\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right), \\ -\beta_2 + \bar{\xi}_2 & = & \frac{g\Lambda_2\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right), \\ -\beta_3 + \alpha_{31}\bar{\xi}_1 + \alpha_{32}\bar{\xi}_2 & = & \frac{g\Lambda_3\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_3 - \frac{1}{\bar{\lambda}_3} \right), \\ -\beta_4 + \alpha_{41}\bar{\xi}_1 + \alpha_{42}\bar{\xi}_2 & = & \frac{g\Lambda_4\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_4 - \frac{1}{\bar{\lambda}_4} \right), \\ -\sigma_1 + \bar{\lambda}_1 + \alpha_{31}\bar{\lambda}_3 + \alpha_{41}\bar{\lambda}_4 & = & -\frac{gx_1\tau}{2} \left(\bar{\xi}_1 - \frac{1}{\bar{\xi}_1} \right), \\ -\sigma_2 + \bar{\lambda}_2 + \alpha_{32}\bar{\lambda}_3 + \alpha_{42}\bar{\lambda}_4 & = & -\frac{gx_2\tau}{2} \left(\bar{\xi}_2 - \frac{1}{\bar{\xi}_2} \right). \end{array} \right. \quad (5.3.11)$$

Наконец система линейных уравнений (5.3.4), позволяющая находить компоненты производных $\frac{d\bar{x}}{d\tau}$ и $\frac{d\bar{\lambda}}{d\tau}$, для решаемой задачи имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\frac{d\bar{\xi}_1}{d\tau} + \frac{g\Lambda_1\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\lambda}_1^2} \right) \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\tau} & = & -\frac{g\Lambda_1}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right), \\ -\frac{d\bar{\xi}_2}{d\tau} + \frac{g\Lambda_2\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\lambda}_2^2} \right) \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\tau} & = & -\frac{g\Lambda_2}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right), \\ -\alpha_{31} \frac{d\bar{\xi}_1}{d\tau} - \alpha_{32} \frac{d\bar{\xi}_2}{d\tau} + \frac{g\Lambda_3\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\lambda}_3^2} \right) \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\tau} & = & -\frac{g\Lambda_3}{2} \left(\bar{\lambda}_3 - \frac{1}{\bar{\lambda}_3} \right), \\ -\alpha_{41} \frac{d\bar{\xi}_1}{d\tau} - \alpha_{42} \frac{d\bar{\xi}_2}{d\tau} + \frac{g\Lambda_4\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\lambda}_4^2} \right) \frac{d\bar{\lambda}_4}{d\tau} & = & -\frac{g\Lambda_4}{2} \left(\bar{\lambda}_4 - \frac{1}{\bar{\lambda}_4} \right), \\ -\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\tau} - \alpha_{31} \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\tau} - \alpha_{41} \frac{d\bar{\lambda}_4}{d\tau} + \frac{gx_1\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\xi}_1^2} \right) \frac{d\bar{\xi}_1}{d\tau} & = & \frac{gx_1}{2} \left(\bar{\xi}_1 - \frac{1}{\bar{\xi}_1} \right), \\ -\frac{d\bar{\lambda}_2}{d\tau} - \alpha_{32} \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\tau} - \alpha_{42} \frac{d\bar{\lambda}_4}{d\tau} + \frac{gx_2\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\xi}_2^2} \right) \frac{d\bar{\xi}_2}{d\tau} & = & \frac{gx_2}{2} \left(\bar{\xi}_2 - \frac{1}{\bar{\xi}_2} \right). \end{array} \right. \quad (5.3.12)$$

Условие задачи 5.3.1 сформулировано в общем виде, позволяющем использовать формулы (5.3.11) и (5.3.12) для решения линейных задач разных типов. Рассмотрим вначале стандартную регулярную пару

взаимодвойственных задач при следующих значениях параметров:

$$\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 3, \beta_1 = 3, \beta_2 = 4, \beta_3 = 6, \beta_4 = 6,$$

$$\alpha_{11} = 1, \alpha_{12} = 0, \alpha_{21} = 0, \alpha_{22} = 1,$$

$$\alpha_{31} = 1, \alpha_{32} = 2, \alpha_{41} = 2, \alpha_{42} = 1.$$

Нетрудно убедиться, что как прямая, так и двойственная задачи имеют конечные единственные решения вида

$$\xi_1^* = 2, \xi_2^* = 2, F^* = G^* = 10, \lambda_1^* = \frac{4}{3}, \lambda_2^* = \frac{1}{3}.$$

Результаты вычислений, полученные при помощи процедуры последовательной линейной экстраполяции, приведены в табл. 5.3.1a–d. При этом в качестве нулевой итерации рассматривалось решение системы (5.3.11). Звездочками в таблицах заменены данные, значения которых не использовались.

Т а б л и ц а 5.3.1a

Использование линейной экстраполяции для регулярной задачи линейного программирования

Ит.	τ	ξ_1	ξ_2	F	G	$F - G$
0	0.01	1.9900707	2.0064031	9.9993508	9.9800516	0.0192992
1	0.01	2.0000660	1.9999872	10.0000936	9.9999475	$1.46 \cdot 10^{-4}$
2	$1.46 \cdot 10^{-4}$	1.9999999	2.0000001	9.9999999	10.0000000	$-2.81 \cdot 10^{-8}$
3	$2.81 \cdot 10^{-8}$	2	2	10	10	0

Рассмотрим теперь два варианта нерегулярных задач, в первом из которых прямая задача переопределена, то есть число активных ограничений в ее оптимальной точке больше размерности пространства E^n , а двойственная имеет неединственное решение. Такая ситуация будет иметь место, например, при следующих значениях параметров:

$$\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 3, \beta_1 = 4, \beta_2 = 3, \beta_3 = 3, \beta_4 = 6,$$

$$\alpha_{11} = 1, \alpha_{12} = 0, \alpha_{21} = 0, \alpha_{22} = 1,$$

$$\alpha_{31} = 1, \alpha_{32} = 2, \alpha_{41} = 2, \alpha_{42} = 1.$$

Т а б л и ц а 5.3.1b

Использование линейной экстраполяции для регулярной задачи линейного программирования

Ит.	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	$g\xi_1$	$g\xi_2$
0	$2.49 \cdot 10^{-3}$	$5.03 \cdot 10^{-3}$	1.3282604	0.3309070	***	***
1	$1.24 \cdot 10^{-5}$	$-3.22 \cdot 10^{-5}$	1.3334065	0.3332592	1	1
2	$-4.09 \cdot 10^{-10}$	$-4.14 \cdot 10^{-10}$	1.3333333	0.3333334	0.5716039	-0.3657372
3	0	0	1.3333333	0.3333333	-0.1634906	-0.0203627

Т а б л и ц а 5.3.1c

Использование линейной экстраполяции для регулярной задачи линейного программирования

Ит.	$g\lambda_1$	$g\lambda_2$	$g\lambda_3$	$g\lambda_4$	$\frac{d\xi_1}{d\tau}$	$\frac{d\xi_2}{d\tau}$
0	***	***	***	***	***	***
1	1	1	1	1	-0.9995301	0.6415983
2	0.3397871	-0.4416031	0.9465110	-0.6119839	0.4522301	-0.0880281
3	-0.0583092	-0.0295078	-0.9645581	0.8843010	-0.6922688	0.2054697

Т а б л и ц а 5.3.1d

Использование линейной экстраполяции для регулярной задачи линейного программирования

Ит.	$\frac{d\lambda_1}{d\tau}$	$\frac{d\lambda_2}{d\tau}$	$\frac{d\lambda_3}{d\tau}$	$\frac{d\lambda_4}{d\tau}$	Новое τ
0	***	***	***	***	0.0192992
1	0.2475233	0.5064332	-0.5146078	-0.2352220	$1.46 \cdot 10^{-4}$
2	0.0849428	-0.2207959	0.5012929	-0.5074929	$2.81 \cdot 10^{-8}$
3	-0.0145773	-0.0147539	-0.0257144	0.0814548	0

То есть, по сравнению с регулярным случаем, изменено только лишь значение параметра β_3 . Результаты вычислений для первого нерегу-

лярного случая приведены в табл. 5.3.2a–d. Геометрически легко увидеть, что прямая задача имеет единственное решение:

$$\xi_1^* = 3, \xi_2^* = 0, F^* = 6,$$

в котором активными являются три ограничения с $i = 2, 3, 4$. В то время как двойственная имеет неединственное решение вида

$$\lambda_1^* = 2 - 2s, \lambda_2^* = s, G^* = 6 \quad \forall s \in \left[0, \frac{1}{3}\right].$$

Для контроля за сходимостью процедуры на каждой ее итерации вычислялась дополнительная величина $Dop1 = -\sigma_1 + \alpha_{31}\lambda_3 + \alpha_{41}\lambda_4$, которая, естественно, должна стремиться к нулю при $\tau \rightarrow +0$.

Т а б л и ц а 5.3.2a

Использование линейной экстраполяции для 1-й нерегулярной задачи линейного программирования

Ит.	τ	ξ_1	ξ_2	F	G	$F - G$
0	0.01	2.9808206	0.0120766	5.9978709	5.9702458	0.0276251
1	0.01	3.0007350	$-3.56 \cdot 10^{-4}$	6.0004024	5.9997429	$6.59 \cdot 10^{-4}$
2	$6.59 \cdot 10^{-4}$	2.9999997	$1.60 \cdot 10^{-7}$	5.9999998	6.0000000	$-1.86 \cdot 10^{-7}$
3	$1.86 \cdot 10^{-7}$	3	$3.47 \cdot 10^{-14}$	6	6	0

Т а б л и ц а 5.3.2b

Использование линейной экстраполяции для 1-й нерегулярной задачи линейного программирования

Ит.	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	$g\xi_1$	$g\xi_2$
0	$4.91 \cdot 10^{-3}$	$1.67 \cdot 10^{-3}$	1.6142380	0.1838147	***	***
1	$9.61 \cdot 10^{-5}$	$-6.95 \cdot 10^{-6}$	1.6175984	0.1910974	1	1
2	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$-8.25 \cdot 10^{-10}$	1.6176530	0.1911736	0.1259457	-0.4600719
3	$-2.26 \cdot 10^{-14}$	0	1.6176529	0.1911735	-0.1371348	-0.7376106

Во втором варианте нерегулярной задачи прямая задача имеет неединственное решение, в котором имеется переопределенная точка. Решение двойственной задачи будет переопределенено, что имеет место при следующих значениях параметров:

$$\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 3, \beta_1 = 4, \beta_2 = 3, \beta_3 = 2, \beta_4 = 6,$$

$$\alpha_{11} = 1, \alpha_{12} = 0, \alpha_{21} = 0, \alpha_{22} = 1,$$

$$\alpha_{31} = 1, \alpha_{32} = 2, \alpha_{41} = 3, \alpha_{42} = 1.$$

Т а б л и ц а 5.3.2c

Использование линейной экстраполяции для 1-й нерегулярной задачи линейного программирования

Ит.	$g\lambda_1$	$g\lambda_2$	$g\lambda_3$	$g\lambda_4$	$\frac{d\xi_1}{d\tau}$	$\frac{d\xi_2}{d\tau}$
0	***	***	***	***	***	***
1	1	1	1	1	-1.9914396	1.2432450
2	0.2911949	-0.0632706	0.0705518	-0.6701484	1.1149921	-0.5398700
3	-0.7620938	-0.0266804	0.0189288	1.0220427	-1.7200738	0.8647666

Т а б л и ц а 5.3.2d

Использование линейной экстраполяции для 1-й нерегулярной задачи линейного программирования

Ит.	$\frac{d\lambda_1}{d\tau}$	$\frac{d\lambda_2}{d\tau}$	$\frac{d\lambda_3}{d\tau}$	$\frac{d\lambda_4}{d\tau}$	$Dop1$
0	***	***	***	***	-0.0181325
1	0.4809701	0.1680352	-0.3360349	-0.72826430	$-2.07 \cdot 10^{-4}$
2	0.1458117	-0.0105426	-0.0827751	-0.1155335	$1.05 \cdot 10^{-7}$
3	-0.3810467	$-4.45 \cdot 10^{-3}$	0.1462624	0.2088153	$2.71 \cdot 10^{-14}$

То есть, по сравнению с регулярным случаем, изменены значения уже трех параметров σ_2 , β_3 и α_{41} . Результаты вычислений для второго нерегулярного случая приведены в табл. 5.3.3a–d. Геометрически

легко увидеть, что прямая задача имеет неединственное решение:

$$\xi_1^* = 2 - 2s, \xi_2^* = s, F^* = 4 \quad \forall s \in [0, 1],$$

содержащее переопределенную точку $\|2, 0\|^T$. В то время как двойственная имеет переопределенное решение вида

$$\lambda_1^* = 2, \lambda_2^* = 0, G^* = 4,$$

в котором активными являются три ограничения.

Для контроля за сходимостью процедуры на каждой ее итерации также вычислялась дополнительная величина:

$$Dop2 = -\beta_3 + \alpha_{31}\xi_1 + \alpha_{32}\xi_2,$$

которая также должна стремиться к нулю при $\tau \rightarrow +0$.

Т а б л и ц а 5.3.3а

Использование линейной экстраполяции для 2-й нерегулярной задачи линейного программирования

Ит.	τ	ξ_1	ξ_2	F	G	$F - G$
0	0.01	0.5840969	0.7117013	4.0149992	4.0207620	$-5.76 \cdot 10^{-3}$
1	0.01	0.5831199	0.7084404	4.0000012	4.0000283	$-2.71 \cdot 10^{-5}$
2	$2.71 \cdot 10^{-5}$	0.5831196	0.7084402	4	4	$-6.26 \cdot 10^{-11}$
3	$6.26 \cdot 10^{-11}$	0.5831187	0.7084407	4	4	0

Применение экстраполяционной процедуры уточнения решения нелинейной параметрической задачи продемонстрируем на примере задачи (5.2.15) из предыдущего § 5.2.

Задача 5.3.2. В качестве начального приближения примем, приведенное в табл. 5.2.2а, решение задачи (5.2.15), найденное для $\tau = 0.01$:

$$\begin{aligned} p &= 0.200000000, & q &= 0.600000000, \\ \bar{\xi}_1 &= 6.007316932, & \bar{\xi}_2 &= 6.013170760, \\ \lambda_1 &= 1.970795734, & \lambda_2 &= 2.970765654. \end{aligned}$$

Т а б л и ц а 5.3.3b

Использование линейной экстраполяции для 2-й нерегулярной задачи линейного программирования

Ит.	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	$g\xi_1$	$g\xi_2$
0	$1.46 \cdot 10^{-3}$	$2.19 \cdot 10^{-3}$	1.9999339	$1.41 \cdot 10^{-3}$	***	***
1	$-4.12 \cdot 10^{-7}$	$-3.09 \cdot 10^{-6}$	2.0000270	$-2.47 \cdot 10^{-6}$	1	1
2	$3.22 \cdot 10^{-14}$	$2.12 \cdot 10^{-13}$	2	$6.68 \cdot 10^{-13}$	1.2503215	5.0821174
3	0	0	2	0	0.5037575	1.4767019

Т а б л и ц а 5.3.3c

Использование линейной экстраполяции для 2-й нерегулярной задачи линейного программирования

Ит.	$g\lambda_1$	$g\lambda_2$	$g\lambda_3$	$g\lambda_4$	$\frac{d\xi_1}{d\tau}$	$\frac{d\xi_2}{d\tau}$
0	***	***	***	***	***	***
1	1	1	1	1	0.0977082	0.3260961
2	-0.1038331	-0.5222391	0.0285809	-0.6448233	$9.83 \cdot 10^{-3}$	$5.80 \cdot 10^{-3}$
3	0.0003516	0.0155547	-0.2790940	0.0756173	$1.42 \cdot 10^4$	$-7.10 \cdot 10^3$

Т а б л и ц а 5.3.3d

Использование линейной экстраполяции для 2-й нерегулярной задачи линейного программирования

Ит.	$\frac{d\lambda_1}{d\tau}$	$\frac{d\lambda_2}{d\tau}$	$\frac{d\lambda_3}{d\tau}$	$\frac{d\lambda_4}{d\tau}$	$Dop2$
0	***	***	***	***	$7.50 \cdot 10^{-3}$
1	0.1464151	0.2188112	$-9.31 \cdot 10^{-3}$	0.1416492	$5.82 \cdot 10^{-7}$
2	-0.0151941	-0.1139484	0.9958069	-0.0910202	$-1.31 \cdot 10^{-11}$
3	$5.15 \cdot 10^{-4}$	$3.39 \cdot 10^{-3}$	0.2525382	0.0106738	0

В данном примере для модифицированной вспомогательной функции $\hat{U}(\tau, x, \Lambda, u)$ равенства (5.3.6), используемые для определения зна-

чений f_{x_j} и g_{Λ_i} , имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 - \bar{\lambda}_1 - (p - 2q + 1)^2 \bar{\lambda}_2 - \frac{g_{\xi_1} \tau}{2} \left(\bar{\xi}_1 - \frac{1}{\bar{\xi}_1} \right) = 0, \\ 3 - (2p + q - 1)^2 \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 - \frac{g_{\xi_2} \tau}{2} \left(\bar{\xi}_2 - \frac{1}{\bar{\xi}_2} \right) = 0, \\ 6 - \bar{\xi}_1 - (2p + q - 1)^2 \bar{\xi}_2 + \frac{g_{\lambda_1} \tau}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right) = 0, \\ 6 - (p - 2q + 1)^2 \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2 + \frac{g_{\lambda_2} \tau}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right) = 0, \end{array} \right.$$

а расширенная матрица системы (5.3.4) для $\widehat{U}(\tau, x, \Lambda, u)$ будет отличаться от матриц (5.2.22) лишь столбцом правых частей:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{g_{\xi_1}}{2} \left(\bar{\xi}_1 - \frac{1}{\bar{\xi}_1} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{g_{\xi_2}}{2} \left(\bar{\xi}_2 - \frac{1}{\bar{\xi}_2} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{g_{\lambda_1}}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{g_{\lambda_2}}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right) \end{array} \right\|.$$

Результаты расчетов приведены в табл. 5.3.4a и 5.3.4b, где величина $t = 0, 1, 2, \dots$ – номер шага экстраполяционной процедуры.

Степень погрешности определялась по величине модуля разности значений целевых функций прямой и двойственной задач. Величина этой погрешности также использовалась для оценки текущего значения коэффициента τ .

Т а б л и ц а 5.3.4а

Решение нелинейной задачи методом линейной экстраполяции

t	$\bar{\xi}_1^t$	$\bar{\xi}_2^t$	$\bar{\lambda}_1^t$	$\bar{\lambda}_2^t$
0	6.007316932	6.13170760	1.970795734	2.970765654
1	6.000183847	6.000163106	2.000036654	3.000066837
2	5.999999994	5.999999995	1.999999999	2.999999998
3	6	6	2	3

Т а б л и ц а 5.3.4б

Решение нелинейной задачи методом линейной экстраполяции

t	$ F - G $	τ	g_{ξ_1}	g_{ξ_2}	g_{λ_1}	g_{λ_2}
0	0.404777819	$1.00e-02$	1.00	1.00	1.00	1.00
1	0.000236069	$1.00e-04$	-0.13	-0.23	2.45	1.22
2	$6.20977e-09$	$1.00e-09$	0.41	0.66	-7.49	-3.41
3	0	0	-	-	-	-

В завершение обсуждения процедуры последовательной линейной экстраполяции приведем решение варианта 4 из примера 5.1.2. В этом варианте мы имели:

$$\begin{aligned}
 n &= 2; \quad m = 2; \quad a = 1; \quad b = 0; \\
 F(\xi_1, \xi_2) &= -(\xi_1 - a)^2 - (\xi_2 - b)^2 \rightarrow \max; \\
 f_1(\xi_1, \xi_2) &= -3 + \xi_1 + 2\xi_2 \leq 0; \\
 f_2(\xi_1, \xi_2) &= \xi_1^2 - \xi_2 \leq 0; \\
 L(\xi_1, \xi_2, \lambda_1, \lambda_2) &= F(\xi_1, \xi_2) - \lambda_1 f_1(\xi_1, \xi_2) - \lambda_2 f_2(\xi_1, \xi_2).
 \end{aligned}$$

В качестве начального приближения воспользуемся решением системы (5.1.12) при $\tau = 0.01$, приведенным во второй строке значений табл. 5.1.1.

Используем в процедуре последовательной линейной экстраполяции параметр τ как $n+m$ -компонентный вектор с координатным представлением $\| \tau_{\xi_1} \tau_{\xi_2} \dots \tau_{\xi_n} \tau_{\lambda_1} \tau_{\lambda_2} \dots \tau_{\lambda_m} \|^\text{T}$. В этом случае за счет подбора значений координат данного вектора мы сможем обеспечить попадание каждой экстраполяционной точки на одну из седловых траекторий, ведущих к решению задачи при норме τ стремящейся к нулю.

Конкретно, вспомогательная U -функция и условия ее стационарности, в решаемой задаче будут иметь следующий вид:

$$U(\tau, x, \Lambda) = L(x, \Lambda) - R(\tau_{\xi_1}, \xi_1) - R(\tau_{\xi_2}, \xi_2) + R(\tau_{\lambda_1}, \lambda_1) + R(\tau_{\lambda_2}, \lambda_2) \quad (5.3.13)$$

и

$$\left\{
 \begin{aligned}
 -3 + |\bar{\xi}_1| + 2|\bar{\xi}_2| &= \frac{\tau_{\lambda_1}}{2} \left(|\bar{\lambda}_1| - \frac{1}{|\bar{\lambda}_1|} \right), \\
 |\bar{\xi}_1|^2 - |\bar{\xi}_2| &= \frac{\tau_{\lambda_2}}{2} \left(|\bar{\lambda}_2| - \frac{1}{|\bar{\lambda}_2|} \right), \\
 -2(|\bar{\xi}_1| - a) - |\bar{\lambda}_1| - 2|\bar{\xi}_1| \cdot |\bar{\lambda}_2| &= \frac{\tau_{\xi_1}}{2} \left(|\bar{\xi}_1| - \frac{1}{|\bar{\xi}_1|} \right), \\
 -2(|\bar{\xi}_2| - b) - 2|\bar{\lambda}_1| + |\bar{\lambda}_2| &= \frac{\tau_{\xi_2}}{2} \left(|\bar{\xi}_2| - \frac{1}{|\bar{\xi}_2|} \right).
 \end{aligned}
 \right. \quad (5.3.14)$$

Последовательное уточнение значений прямых и двойственных переменных будем выполнять по формулам (5.3.9) с использованием решений системы линейных уравнений (5.3.4).

Для решаемой задачи система (5.3.4) будет иметь основную матрицу вида

$$\left\| \begin{array}{cccc} -\frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\xi_1^2} \right) - 2 - 2\lambda_2 & 0 & -1 & -2\xi_1 \\ 0 & -\frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\xi_2^2} \right) - 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & \frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\lambda_1^2} \right) & 0 \\ -2\xi_1 & 1 & 0 & \frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\lambda_2^2} \right) \end{array} \right\|,$$

при этом столбец правых частей для производных от условий стационарности по τ будет

$$\left\| \begin{array}{cccc} -\frac{\tau}{2} \left(\xi_1 - \frac{1}{\xi_1} \right) & -\frac{\tau}{2} \left(\xi_2 - \frac{1}{\xi_2} \right) & \frac{\tau}{2} \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) & \frac{\tau}{2} \left(\lambda_2 - \frac{1}{\lambda_2} \right) \end{array} \right\|^T.$$

Поскольку мы используем функции обратных связей в предположении (5.3.8), то $Q(\tau, s) = \tau \Psi(s)$.

Поэтому, если, полученная на некотором шаге последовательной линейной экстраполяции, точка имеет координатное представление вида $\| \xi_1 \xi_2 \lambda_1 \lambda_2 \|_T^T$, то значения координат вектора $\| \tau_{\xi_1} \tau_{\xi_2} \dots \tau_{\xi_n} \tau_{\lambda_1} \tau_{\lambda_2} \dots \tau_{\lambda_m} \|_T^T$, гарантирующих принадлежность этой точки некоторой седловой траектории, в силу (5.3.14) будут опре-

деляться соотношениями

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \tau_{\xi_1} & = & \frac{\frac{\partial L}{\partial \xi_1}}{\Psi(\xi_1)} = \frac{2(-2(\xi_1 - a) - \lambda_1 - 2\xi_1\lambda_2)}{\xi_1 - \frac{1}{\xi_1}}, \\ \tau_{\xi_2} & = & \frac{\frac{\partial L}{\partial \xi_2}}{\Psi(\xi_2)} = \frac{2(-2(\xi_2 - b) - 2\lambda_1 + \lambda_2)}{\xi_2 - \frac{1}{\xi_2}}, \\ \tau_{\lambda_1} & = & \frac{\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}}{-\Psi(\lambda_1)} = \frac{2(-3 + \xi_1 + 2\xi_2)}{\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1}}, \\ \tau_{\lambda_2} & = & \frac{\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}}{-\Psi(\lambda_2)} = \frac{2(\xi_1^2 - \xi_2)}{\lambda_2 - \frac{1}{\lambda_2}}. \end{array} \right. \quad (5.3.15)$$

Результаты расчетов вычислений приведены в табл. 5.3.5а и 5.3.5б.

Т а б л и ц а 5.3.5а

**Решение задачи 5.1.2 (вар. 4) методом
последовательной линейной экстраполяции**

Iter	ξ_1	ξ_2	F	λ_1	λ_2
1	0.590024813	0.351817238	-0.291855023	-0.002930222	0.697042081
2	0.589788382	0.347873253	-0.289289372	$-1.390 \cdot 10^{-5}$	0.695539663
3	0.589754522	0.347810387	-0.289289372	$1.294 \cdot 10^{-9}$	0.695620736
4	0.589754512	0.347810385	-0.289273424	0	0.695620770

Т а б л и ц а 5.3.5b

**Решение задачи 5.1.2 (вар. 4) методом
последовательной линейной экстраполяции**

<i>Iter</i>	<i>f</i> ₁	<i>f</i> ₂	<i>L</i>	<i>L</i> – <i>F</i>	<i>U</i>
1	–1.706340711	–0.003687958	–0.284284404	0.007570619	–0.261142713
2	–1.714465112	$–2.291 \cdot 10^{-5}$	–0.289297265	$–7.893 \cdot 10^{-6}$	–0.289593289
3	–1.714624703	$8.824 \cdot 10^{-9}$	–0.289273422	$–3.920 \cdot 10^{-9}$	–0.289273422
4	–1.71462471	$–1.11 \cdot 10^{-15}$	–0.289273424	0	–0.290232652

Т а б л и ц а 5.3.5c

**Решение задачи 5.1.2 (вар. 4) методом
последовательной линейной экстраполяции**

<i>Iter</i>	τ_{ξ_1}	τ_{ξ_2}	τ_{λ_1}	τ_{λ_2}	$\lambda_2 - \lambda^*$
1	0.01	0.01	0.01	0.01	0.001421311
2	$9.565 \cdot 10^{-6}$	0.000141717	$–4.767 \cdot 10^{-5}$	$6.176 \cdot 10^{-5}$	$–8.111 \cdot 10^{-5}$
3	$–8.794 \cdot 10^{-9}$	$3.265 \cdot 10^{-8}$	$4.437 \cdot 10^{-9}$	$–2.379 \cdot 10^{-8}$	$–3.373 \cdot 10^{-8}$
4	$–1.41 \cdot 10^{-15}$	0	0	$2.99 \cdot 10^{-15}$	$–4.40 \cdot 10^{-10}$

Следует отметить, что величина погрешности на каждом шаге может быть оценена по значениям двойственных переменных λ_1 и λ_2 , точные значения которых в данной задаче известны и равны соответственно нулю и λ_2^* – положительному корню уравнения

$$\lambda_2(\lambda_2 + 1)^2 - 2 = 0.$$

По формуле Кардано

$$\lambda_2^* = \frac{\left(\sqrt[3]{28 + 3\sqrt{87}} - 1\right)^2}{3\sqrt[3]{28 + 3\sqrt{87}}} \approx 0.69562077.$$

Кроме того, порядок погрешности можно оценить и по абсолютной величине разности значений целевой функции задачи и функции Лагранжа, приведенной в табл. 5.3.5b.

Глава 6. Задачи, сводящиеся к оптимизации по параметрам

К задачам, в процессе решения которых возникает необходимость исследования зависимости оптимальных точек задач математического программирования от параметров, можно отнести различные двух- и многоуровневые схемы оптимизации, методы декомпозиции или интеграции комплексов математических моделей, многокритериальные алгоритмы. При этом решение задач параметрического программирования обычно не является самоцелью исследования, а используется (быть может, в неявной форме) в процессе формирования условий и/или решения других задач.

§ 6.1. Параметрическая линеаризация в задачах математического программирования

При обсуждении, упоминавшегося ранее метода асимптотических оценок, было отмечено, что он позволяет находить решение непараметрических задач путем включения в их постановку искусственных параметров, существенно играющих лишь инструментальную роль, таких, как, скажем, коэффициент штрафа в методе гладких штрафных функций.

Другим примером использования инструментальных параметров может послужить, рассмотренная в [20], схема решения непараметрической задачи математического программирования, именуемая далее *параметрической линеаризацией*.

Например, в задаче математического программирования (1.1.2) превращение переменных ν_1 и ν_2 в параметры приводит к существенно более простой задаче относительно остальных переменных. Далее рассмотрим случай, когда подобная параметризация делает из нелинейной задачи линейную.¹⁰

Приведем краткое описание данной задачи. Предположим (очевидно без потери общности), что непараметризуемые переменные имеют индексы от 1 до n , а подлежащие параметризации – от $n+1$ до $n+k$. Тогда задача (1.2.1):

Максимизировать $\Phi(X)$ по $X \in \Omega \subseteq E^{n+k}$,

$$\text{где } \Omega = \{X \mid \varphi_i(X) \leq 0, \quad i = [1, m]\}, \quad (6.1.1)$$

а функции $\Phi(X)$ и $\varphi_i(X), i = [1, m]$, определены и непрерывны для любых $X \in \Theta \subset E^{n+k}$.

с учетом сделанных предположений может быть переформулирована следующим образом.

Пусть

$$E^{n+k} = E^n \otimes E^k, \quad \|X\| = \begin{vmatrix} \|x\| \\ \|u\| \end{vmatrix},$$

где $x \in E^n, \Lambda \in E^m, u \in E^k$, а их координатные представления соответственно равны

$$\|x\| = \|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n\|^T, \quad \|\Lambda\| = \|\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m\|^T, \quad \|u\| = \|\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k\|^T,$$

причем $u \in \Omega \subseteq E^k$. Тогда прямая линеаризованная задача (нижнего уровня) будет иметь вид

максимизировать по $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$:

$$F(x, u) = \sum_{j=1}^n \sigma_j(u) \xi_j \quad (6.1.2)$$

при условиях: $\xi_j \geq 0 \quad \forall j = [1, n]$ и

$$f_i(x, u) = -\beta_i(u) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(u) \xi_j \leq 0 \quad \forall i = [1, m]. \quad (6.1.3)$$

¹⁰Подобный прием достаточно часто используется в математике, например в линейной алгебре для поиска собственных значений линейного преобразования в конечномерном пространстве.

Эту задачу для краткости (как и ранее) будем именовать *прямой* задачей, а ее решение при фиксированном $u \in \Omega$ обозначать x_u^* . В то время как задача *двойственная* к прямой записывается соответственно минимизировать по $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$

$$G(\Lambda, u) = \sum_{i=1}^m \beta_i(u) \lambda_i \quad (6.1.4)$$

при условиях: $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = [1, m]$ и

$$g_j(\Lambda, u) = -\sigma_j(u) + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}(u) \lambda_i \geq 0 \quad \forall j = [1, n]. \quad (6.1.5)$$

Ее решение при фиксированном $u \in \Omega$ будем обозначать Λ_u^* . Все функции $\sigma_j(u)$, $\beta_i(u)$ и $\alpha_{ij}(u)$ в условиях взаимодвойственной пары задач предполагаются известными и достаточно гладкими.

Рассмотрим процедуру параметрической линеаризации как двухуровневую задачу, в которой задача верхнего уровня решается в пространстве параметров, а для решения задачи нижнего уровня применяется метод функций обратных связей, использующий вспомогательную U -функцию вида

$$U(\tau, x, \Lambda, u) = L(x, \Lambda, u) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i) - \sum_{j=1}^n R(\tau, \xi_j),$$

где $L(x, \Lambda, u)$ – стандартная функция Лагранжа.

В развернутой форме эта функция будет

$$U(\tau, x, \Lambda, u) =$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\sigma_j(u) \xi_j - R(\tau, \xi_j) \right) + \sum_{i=1}^m \left(\beta_i(u) \lambda_i + R(\tau, \lambda_i) \right) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}(u) \xi_j \lambda_i. \quad (6.1.6)$$

Соответственно, условия стационарности функции (6.1.6) по компонентам x и Λ аналогичны системе (4.1.10), а именно:

$$\begin{cases} -\beta_i(u) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(u) \bar{\xi}_j = Q(\tau, \bar{\lambda}_i) & \forall i = [1, m], \\ -\sigma_j(u) + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}(u) \bar{\lambda}_i = -Q(\tau, \bar{\xi}_i) & \forall j = [1, n], \end{cases} \quad (6.1.7)$$

где $\frac{\partial R}{\partial s}(\tau, s) = Q(\tau, s)$.

Решения системы (6.1.7) – вектор-функции $\bar{x}(\tau, u)$ и $\bar{\Lambda}(\tau, u)$, используем для построения, аналогичной (4.2.4), вспомогательной функции:

$$\bar{U}(\tau, u) = U(\tau, \bar{x}(\tau, u), \bar{\Lambda}(\tau, u), u). \quad (6.1.8)$$

Поиск стационарных точек функции (6.1.8) в пространстве параметров можно выполнять (как показано, например, в [5], [20]) по любой итерационной схеме, используемой в классических методах гладкой оптимизации, вычисляя значения ее первых и вторых производных по формулам (5.2.10) – (5.2.11).

Рассмотрим теперь использование схемы параметрической линеаризации для решения задачи дискретного оптимального управления, возникающей при использовании математической модели определения маргинальных оценок качества управления инвестиционной деятельностью на рынке ценных бумаг.

В общем виде эта модель описана в [4]. Для целей нашего курса будет вполне достаточно частного случая этой модели, изложенного в [21], где рассматривается следующая операция на рынке ценных бумаг.

В течении N периодов (например, банковских дней) приобретается и продается определенный вид ценных бумаг с известной доходностью, оплата приобретения которых может осуществляться заемными средствами, привлекаемыми по кредитной линии.

Единицы измерения переменных и параметров в этой модели выбраны условно, но тем не менее рассматриваемый пример в достаточно полной мере демонстрирует специфику практического использования методологии *неполных математических моделей* (см. [22], [24]).

Доходность ценных бумаг и стоимость кредита для каждого из периодов постоянны, но могут быть различными для каждого из периодов.

Максимальные объемы привлекаемых–возвращаемых средств по кредитной линии за один период, так же как и объемы приобретаемых–продаваемых ценных бумаг в течение одного периода, ограничены. Предполагается, что объем портфеля ценных бумаг и задолженность по кредиту как в начале операции, так при ее окончании равны нулю.

Требуется оценить теоретически возможную эффективность данной операции по максимальной величине остатка средств на счете операции в момент ее завершения при фиксированном заранее числе периодов. Необходимо также рассчитать динамику привлечения–возврата заемных средств, равно как и приобретения–продаж ценных

бумаг, обеспечивающую эту эффективность. Функциональная схема операции дана на рис. 6.1.

Для формализованного описания исследуемой операции используем для каждого из периодов следующие количественные характеристики:

- $S(k)$ — остаток средств на счете операции в период k ;
- $Q(k)$ — объем средств, привлеченных (или возвращенных) за период k ;
- $R(k)$ — стоимость ценных бумаг, купленных (или проданных) за период k ;
- $F(k)$ — объем портфеля ценных бумаг в период k ;
- $V(k)$ — величина задолженности по кредиту в период k ;
- $\rho_0(k)$ — процентная ставка по кредиту в период k ;
- $\rho(k)$ — доходность ценных бумаг в период k .

Эти характеристики будут связаны следующими динамическими соотношениями для каждого $k = [0, N - 1]$:

1° динамика счета операции:

$$S(k + 1) = S(k) + Q(k) - R(k) + \rho(k) \cdot F(k) - \rho_0(k) \cdot V(k) ; \quad (6.1.10)$$

2° динамика объема портфеля ценных бумаг:

$$F(k + 1) = F(k) + R(k) ;$$

3° динамика задолженности по кредиту:

$$V(k + 1) = V(k) + Q(k) .$$

В данной системе разностных уравнений переменные S , F и V являются *фазовыми переменными*, а остальные — *управлениями*.

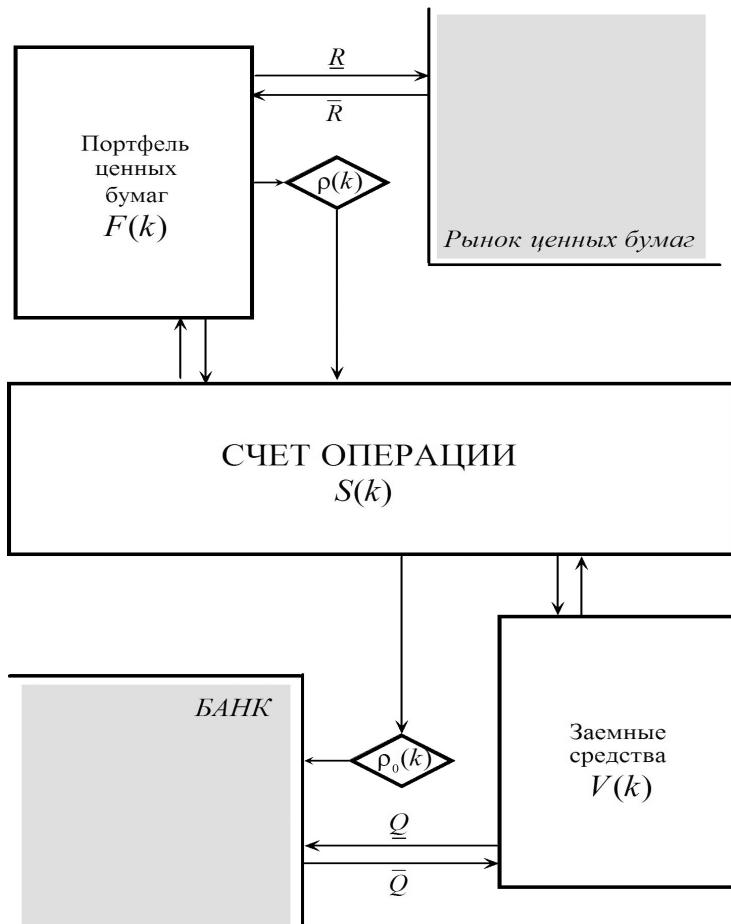


Рис. 6.1. Функциональная схема инвестиционной операции на рынке ценных бумаг

На фазовые переменные и управлении при этом накладываются следующие ограничения:

- $S(k) \geq 0 \quad \forall k = [1, N]$, то есть в ходе операции овердрафт по счету операции не допускается;
- $F(k) \geq 0$ и $V(k) \geq 0 \quad \forall k = [1, N]$ очевидны;
- управление $R(k)$ и $Q(k)$ произвольны по знаку и должны удовлетворять двусторонним неравенствам, отражающими как

технические, так и финансово-экономические ограничения (например, на ликвидность ценных бумаг):

$$\underline{Q}(k) \leq Q(k) \leq \bar{Q}(k) \quad \text{и} \quad \underline{R}(k) \leq R(k) \leq \bar{R}(k) \quad \forall k = [1, N];$$

- начальные условия: $S(1) = V(1) = F(1) = 0$, равно как и конечные условия: $V(N) = F(N) = 0$, вытекают из условий проведения операции.

Наконец, целевое условие операции имеет вид: $S(N) \rightarrow \max$.

Данная совокупность обязательных и желательных условий формально является задачей нелинейного программирования, в которой показатели

$$S(k), F(k), V(k), \rho_0(k), R(k), Q(k) \quad \forall k = [1, N]$$

являются переменными, а число периодов N и величины

$$\underline{Q}(k), \bar{Q}(k), \underline{R}(k), \bar{R}(k), \rho(k) \quad \forall k = [1, N]$$

- параметрами, причем величины $S(k), F(k), V(k)$ имеют размерность «у. е.», величины $R(k), \underline{R}(k), \bar{R}(k), Q(k), \underline{Q}(k)$ и $\bar{Q}(k)$ измеряются в «у. е./период», а $\rho(k)$ и $\rho_0(k)$ – безразмерные.

Поскольку в этой модели очевидно не учтен ряд существенных, но неформализуемых факторов (например, таких как внешние экономические и политические условия, «человеческий» фактор, а также различные риски, обусловленные нестабильностью рынка ценных бумаг или стоимостью кредита), то ее следует отнести к классу неполных моделей, позволяющих получить лишь маргинальную (крайнюю верхнюю) оценку максимально возможной эффективности рассматриваемой операции.

Несложно заметить, что для *нелинейной* задачи (6.1.10) превращение переменных $\rho_0(k) \quad \forall k = [1, N]$ в параметры делает ее *линейной*, то есть позволяет использовать для ее решения процедуру двухуровневой параметрической линеаризации.

Решение исходного варианта задачи нижнего уровня (линейной) найдем для следующего набора значений параметров: $N = 300$ и

$$\begin{aligned} \underline{Q}(k) &= -20.00, & \bar{Q}(k) &= 40.00, \\ \underline{R}(k) &= -50.00, & \bar{R}(k) &= 40.00, \\ \rho_0(k) &= 0.004, & \rho(k) &= 0.008 \quad \forall k = [1, N]. \end{aligned}$$

Численные результаты расчетов, полученные стандартным симплекс-алгоритмом, приведены в табл. 6.1.1a–f. На рис. 6.2 и 6.3 приведе-

ны графики фазовых переменных и управлений, представляющие оптимальную динамику их значений, обеспечивающую максимизацию остатка средств на счете операции при ее завершении.

Описание оптимальной динамики значений показателей модели удобно выполнить, разделив множество всех периодов на четыре непересекающихся подмножества.

Периоды с $1 \leq k \leq 120$.

Для данной группы периодов происходит увеличение объема портфеля ценных бумаг F с максимально возможной скоростью. Величина управления R – скорости приобретения–продажи ценных бумаг – находится на верхней границе его допустимых значений. Оплата приобретаемых бумаг осуществляется как за счет привлекаемых заемных средств, так и реинвестирования дивидендов от уже приобретенных бумаг. Причем по мере роста объема портфеля скорость привлечения заемных средств Q снижается, хотя и остается положительной. Остаток средств на счете операции S для данных периодов нулевой.

Периоды с $121 \leq k \leq 191$.

Для этой группы периодов характерной особенностью является начало возврата привлеченных заемных средств, снижение текущего объема задолженности V с максимально возможной скоростью. Значение соответствующего управления Q – скорости привлечения–возврата заемных средств – отрицательно и находится на нижней границе допустимых значений. На этом этапе рост объема ценных бумаг оказывается еще возможным, но со скоростью меньшей, чем допустимый максимум. Дивиденды тратятся в первую очередь на возврат займа, а их остающаяся часть реинвестируется в ценные бумаги.

Периоды с $192 \leq k \leq 291$.

Эта группа периодов характеризуется началом процесса реализации портфеля ценных бумаг, объем которого уменьшается с максимально возможной скоростью, необходимой для выполнения краевого условия: $F(N) = 0$. Значения обоих управлений находятся на своих нижних допустимых границах. Средства, получаемые от реализации ценных бумаг, и дивиденды от оставшейся части портфеля аккумулируются на счете операции, остаток которой S растет.

Периоды с $292 \leq k \leq 300$.

К началу этой группы периодов объем задолженности становится равным нулю и управление Q принимает нулевое значение.

Таблица 6.1.1а

Решение задачи 6.1.10

k	p_o	p_k	F	V	S	R	Q
0	0.004	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.004	0.008	40.000	39.839	0.000	40.000	39.839
2	0.004	0.008	80.000	79.517	0.000	40.000	39.678
3	0.004	0.008	120.000	119.034	0.000	40.000	39.516
4	0.004	0.008	160.000	158.387	0.000	40.000	39.354
5	0.004	0.008	200.000	197.577	0.000	40.000	39.190
6	0.004	0.008	240.000	236.604	0.000	40.000	39.026
7	0.004	0.008	280.000	275.466	0.000	40.000	38.862
8	0.004	0.008	320.000	314.162	0.000	40.000	38.697
9	0.004	0.008	360.000	352.693	0.000	40.000	38.531
10	0.004	0.008	400.000	391.057	0.000	40.000	38.364
11	0.004	0.008	440.000	429.254	0.000	40.000	38.197
12	0.004	0.008	480.000	467.284	0.000	40.000	38.029
13	0.004	0.008	520.000	505.144	0.000	40.000	37.861
14	0.004	0.008	560.000	542.835	0.000	40.000	37.691
15	0.004	0.008	600.000	580.357	0.000	40.000	37.521
16	0.004	0.008	640.000	617.708	0.000	40.000	37.351
17	0.004	0.008	680.000	654.887	0.000	40.000	37.180
18	0.004	0.008	720.000	691.895	0.000	40.000	37.008
19	0.004	0.008	760.000	728.730	0.000	40.000	36.835
20	0.004	0.008	800.000	765.391	0.000	40.000	36.662
21	0.004	0.008	840.000	801.879	0.000	40.000	36.488
22	0.004	0.008	880.000	838.192	0.000	40.000	36.313
23	0.004	0.008	920.000	874.329	0.000	40.000	36.137
24	0.004	0.008	960.000	910.290	0.000	40.000	35.961
25	0.004	0.008	1000.000	946.074	0.000	40.000	35.784
26	0.004	0.008	1040.000	981.681	0.000	40.000	35.607
27	0.004	0.008	1080.000	1017.110	0.000	40.000	35.428
28	0.004	0.008	1120.000	1052.359	0.000	40.000	35.249
29	0.004	0.008	1160.000	1087.429	0.000	40.000	35.070
30	0.004	0.008	1200.000	1122.318	0.000	40.000	34.889
31	0.004	0.008	1240.000	1157.026	0.000	40.000	34.708
32	0.004	0.008	1280.000	1191.552	0.000	40.000	34.526
33	0.004	0.008	1320.000	1225.896	0.000	40.000	34.344
34	0.004	0.008	1360.000	1260.056	0.000	40.000	34.160
35	0.004	0.008	1400.000	1294.032	0.000	40.000	33.976
36	0.004	0.008	1440.000	1327.823	0.000	40.000	33.791
37	0.004	0.008	1480.000	1361.429	0.000	40.000	33.606
38	0.004	0.008	1520.000	1394.849	0.000	40.000	33.419
39	0.004	0.008	1560.000	1428.081	0.000	40.000	33.232
40	0.004	0.008	1600.000	1461.125	0.000	40.000	33.045
41	0.004	0.008	1640.000	1493.981	0.000	40.000	32.856
42	0.004	0.008	1680.000	1526.648	0.000	40.000	32.667
43	0.004	0.008	1720.000	1559.124	0.000	40.000	32.476
44	0.004	0.008	1760.000	1591.410	0.000	40.000	32.286
45	0.004	0.008	1800.000	1623.504	0.000	40.000	32.094
46	0.004	0.008	1840.000	1655.406	0.000	40.000	31.902
47	0.004	0.008	1880.000	1687.114	0.000	40.000	31.708
48	0.004	0.008	1920.000	1718.629	0.000	40.000	31.515
49	0.004	0.008	1960.000	1749.948	0.000	40.000	31.320
50	0.004	0.008	2000.000	1781.073	0.000	40.000	31.124

Таблица 6.1.1b

Решение задачи 6.1.10

k	p_o	p_k	F	V	S	R	Q
51	0.004	0.008	2040.000	1812.001	0.000	40.000	30.928
52	0.004	0.008	2080.000	1842.732	0.000	40.000	30.731
53	0.004	0.008	2120.000	1873.265	0.000	40.000	30.533
54	0.004	0.008	2160.000	1903.599	0.000	40.000	30.334
55	0.004	0.008	2200.000	1933.734	0.000	40.000	30.135
56	0.004	0.008	2240.000	1963.669	0.000	40.000	29.935
57	0.004	0.008	2280.000	1993.402	0.000	40.000	29.734
58	0.004	0.008	2320.000	2022.934	0.000	40.000	29.532
59	0.004	0.008	2360.000	2052.263	0.000	40.000	29.329
60	0.004	0.008	2400.000	2081.389	0.000	40.000	29.126
61	0.004	0.008	2440.000	2110.310	0.000	40.000	28.921
62	0.004	0.008	2480.000	2139.026	0.000	40.000	28.716
63	0.004	0.008	2520.000	2167.536	0.000	40.000	28.510
64	0.004	0.008	2560.000	2195.840	0.000	40.000	28.303
65	0.004	0.008	2600.000	2223.935	0.000	40.000	28.096
66	0.004	0.008	2640.000	2251.823	0.000	40.000	27.887
67	0.004	0.008	2680.000	2279.501	0.000	40.000	27.678
68	0.004	0.008	2720.000	2306.968	0.000	40.000	27.468
69	0.004	0.008	2760.000	2334.225	0.000	40.000	27.257
70	0.004	0.008	2800.000	2361.270	0.000	40.000	27.045
71	0.004	0.008	2840.000	2388.103	0.000	40.000	26.832
72	0.004	0.008	2880.000	2414.722	0.000	40.000	26.619
73	0.004	0.008	2920.000	2441.126	0.000	40.000	26.405
74	0.004	0.008	2960.000	2467.316	0.000	40.000	26.189
75	0.004	0.008	3000.000	2493.289	0.000	40.000	25.973
76	0.004	0.008	3040.000	2519.045	0.000	40.000	25.756
77	0.004	0.008	3080.000	2544.583	0.000	40.000	25.538
78	0.004	0.008	3120.000	2569.903	0.000	40.000	25.320
79	0.004	0.008	3160.000	2595.003	0.000	40.000	25.100
80	0.004	0.008	3200.000	2619.882	0.000	40.000	24.880
81	0.004	0.008	3240.000	2644.540	0.000	40.000	24.658
82	0.004	0.008	3280.000	2668.976	0.000	40.000	24.436
83	0.004	0.008	3320.000	2693.189	0.000	40.000	24.213
84	0.004	0.008	3360.000	2717.178	0.000	40.000	23.989
85	0.004	0.008	3400.000	2740.942	0.000	40.000	23.764
86	0.004	0.008	3440.000	2764.480	0.000	40.000	23.538
87	0.004	0.008	3480.000	2787.791	0.000	40.000	23.311
88	0.004	0.008	3520.000	2810.874	0.000	40.000	23.083
89	0.004	0.008	3560.000	2833.729	0.000	40.000	22.855
90	0.004	0.008	3600.000	2856.355	0.000	40.000	22.625
91	0.004	0.008	3640.000	2878.750	0.000	40.000	22.395
92	0.004	0.008	3680.000	2900.913	0.000	40.000	22.164
93	0.004	0.008	3720.000	2922.845	0.000	40.000	21.931
94	0.004	0.008	3760.000	2944.543	0.000	40.000	21.698
95	0.004	0.008	3800.000	2966.007	0.000	40.000	21.464
96	0.004	0.008	3840.000	2987.236	0.000	40.000	21.229
97	0.004	0.008	3880.000	3008.229	0.000	40.000	20.993
98	0.004	0.008	3920.000	3028.985	0.000	40.000	20.756
99	0.004	0.008	3960.000	3049.503	0.000	40.000	20.518
100	0.004	0.008	4000.000	3069.782	0.000	40.000	20.279

Таблица 6.1.1c

Решение задачи 6.1.10

k	p_o	p_k	F	V	S	R	Q
101	0.004	0.008	4040.000	3089.821	0.000	40.000	20.039
102	0.004	0.008	4080.000	3109.619	0.000	40.000	19.798
103	0.004	0.008	4120.000	3129.176	0.000	40.000	19.557
104	0.004	0.008	4160.000	3148.490	0.000	40.000	19.314
105	0.004	0.008	4200.000	3167.560	0.000	40.000	19.070
106	0.004	0.008	4240.000	3186.386	0.000	40.000	18.826
107	0.004	0.008	4280.000	3204.966	0.000	40.000	18.580
108	0.004	0.008	4320.000	3223.299	0.000	40.000	18.333
109	0.004	0.008	4360.000	3241.385	0.000	40.000	18.086
110	0.004	0.008	4400.000	3259.221	0.000	40.000	17.837
111	0.004	0.008	4440.000	3276.809	0.000	40.000	17.587
112	0.004	0.008	4480.000	3294.145	0.000	40.000	17.337
113	0.004	0.008	4520.000	3311.230	0.000	40.000	17.085
114	0.004	0.008	4560.000	3328.062	0.000	40.000	16.832
115	0.004	0.008	4600.000	3344.641	0.000	40.000	16.579
116	0.004	0.008	4640.000	3360.965	0.000	40.000	16.324
117	0.004	0.008	4680.000	3377.033	0.000	40.000	16.068
118	0.004	0.008	4720.000	3392.844	0.000	40.000	15.811
119	0.004	0.008	4757.126	3405.536	0.000	37.126	12.691
120	0.004	0.008	4761.677	3385.536	0.000	4.551	-20.000
121	0.004	0.008	4766.346	3365.536	0.000	4.669	-20.000
122	0.004	0.008	4771.133	3345.536	0.000	4.787	-20.000
123	0.004	0.008	4776.039	3325.536	0.000	4.906	-20.000
124	0.004	0.008	4781.066	3305.536	0.000	5.026	-20.000
125	0.004	0.008	4786.213	3285.536	0.000	5.148	-20.000
126	0.004	0.008	4791.483	3265.536	0.000	5.270	-20.000
127	0.004	0.008	4796.876	3245.536	0.000	5.393	-20.000
128	0.004	0.008	4802.393	3225.536	0.000	5.517	-20.000
129	0.004	0.008	4808.035	3205.536	0.000	5.642	-20.000
130	0.004	0.008	4813.803	3185.536	0.000	5.768	-20.000
131	0.004	0.008	4819.699	3165.536	0.000	5.895	-20.000
132	0.004	0.008	4825.722	3145.536	0.000	6.024	-20.000
133	0.004	0.008	4831.875	3125.536	0.000	6.153	-20.000
134	0.004	0.008	4838.158	3105.536	0.000	6.283	-20.000
135	0.004	0.008	4844.573	3085.536	0.000	6.414	-20.000
136	0.004	0.008	4851.119	3065.536	0.000	6.547	-20.000
137	0.004	0.008	4857.800	3045.536	0.000	6.680	-20.000
138	0.004	0.008	4864.614	3025.536	0.000	6.815	-20.000
139	0.004	0.008	4871.565	3005.536	0.000	6.950	-20.000
140	0.004	0.008	4878.652	2985.536	0.000	7.087	-20.000
141	0.004	0.008	4885.877	2965.536	0.000	7.225	-20.000
142	0.004	0.008	4893.241	2945.536	0.000	7.364	-20.000
143	0.004	0.008	4900.744	2925.536	0.000	7.504	-20.000
144	0.004	0.008	4908.389	2905.536	0.000	7.645	-20.000
145	0.004	0.008	4916.177	2885.536	0.000	7.787	-20.000
146	0.004	0.008	4924.107	2865.536	0.000	7.931	-20.000
147	0.004	0.008	4932.183	2845.536	0.000	8.075	-20.000
148	0.004	0.008	4940.404	2825.536	0.000	8.221	-20.000
149	0.004	0.008	4948.772	2805.536	0.000	8.368	-20.000
150	0.004	0.008	4957.288	2785.536	0.000	8.516	-20.000

Таблица 6.1.1d

Решение задачи 6.1.10

k	p_o	p_k	F	V	S	R	Q
151	0.004	0.008	4965.953	2765.536	0.000	8.665	-20.000
152	0.004	0.008	4974.769	2745.536	0.000	8.816	-20.000
153	0.004	0.008	4983.737	2725.536	0.000	8.968	-20.000
154	0.004	0.008	4992.858	2705.536	0.000	9.121	-20.000
155	0.004	0.008	5002.133	2685.536	0.000	9.275	-20.000
156	0.004	0.008	5011.563	2665.536	0.000	9.430	-20.000
157	0.004	0.008	5021.150	2645.536	0.000	9.587	-20.000
158	0.004	0.008	5030.895	2625.536	0.000	9.745	-20.000
159	0.004	0.008	5040.800	2605.536	0.000	9.904	-20.000
160	0.004	0.008	5050.864	2585.536	0.000	10.065	-20.000
161	0.004	0.008	5061.091	2565.536	0.000	10.227	-20.000
162	0.004	0.008	5071.481	2545.536	0.000	10.390	-20.000
163	0.004	0.008	5082.035	2525.536	0.000	10.554	-20.000
164	0.004	0.008	5092.755	2505.536	0.000	10.720	-20.000
165	0.004	0.008	5103.642	2485.536	0.000	10.887	-20.000
166	0.004	0.008	5114.697	2465.536	0.000	11.055	-20.000
167	0.004	0.008	5125.922	2445.536	0.000	11.225	-20.000
168	0.004	0.008	5137.319	2425.536	0.000	11.396	-20.000
169	0.004	0.008	5148.888	2405.536	0.000	11.569	-20.000
170	0.004	0.008	5160.631	2385.536	0.000	11.743	-20.000
171	0.004	0.008	5172.549	2365.536	0.000	11.918	-20.000
172	0.004	0.008	5184.644	2345.536	0.000	12.095	-20.000
173	0.004	0.008	5196.917	2325.536	0.000	12.273	-20.000
174	0.004	0.008	5209.370	2305.536	0.000	12.453	-20.000
175	0.004	0.008	5222.004	2285.536	0.000	12.634	-20.000
176	0.004	0.008	5234.820	2265.536	0.000	12.816	-20.000
177	0.004	0.008	5247.821	2245.536	0.000	13.000	-20.000
178	0.004	0.008	5261.006	2225.536	0.000	13.186	-20.000
179	0.004	0.008	5274.379	2205.536	0.000	13.373	-20.000
180	0.004	0.008	5287.941	2185.536	0.000	13.561	-20.000
181	0.004	0.008	5301.692	2165.536	0.000	13.751	-20.000
182	0.004	0.008	5315.635	2145.536	0.000	13.943	-20.000
183	0.004	0.008	5329.771	2125.536	0.000	14.136	-20.000
184	0.004	0.008	5344.102	2105.536	0.000	14.331	-20.000
185	0.004	0.008	5358.629	2085.536	0.000	14.527	-20.000
186	0.004	0.008	5373.353	2065.536	0.000	14.725	-20.000
187	0.004	0.008	5388.277	2045.536	0.000	14.924	-20.000
188	0.004	0.008	5403.402	2025.536	0.000	15.125	-20.000
189	0.004	0.008	5418.730	2005.536	0.000	15.328	-20.000
190	0.004	0.008	5434.262	1985.536	0.000	15.532	-20.000
191	0.004	0.008	5450.000	1965.536	0.000	15.738	-20.000
192	0.004	0.008	5400.000	1945.536	65.418	-50.000	-20.000
193	0.004	0.008	5350.000	1925.536	130.516	-50.000	-20.000
194	0.004	0.008	5300.000	1905.536	195.294	-50.000	-20.000
195	0.004	0.008	5250.000	1885.536	259.751	-50.000	-20.000
196	0.004	0.008	5200.000	1865.536	323.889	-50.000	-20.000
197	0.004	0.008	5150.000	1845.536	387.707	-50.000	-20.000
198	0.004	0.008	5100.000	1825.536	451.205	-50.000	-20.000
199	0.004	0.008	5050.000	1805.536	514.383	-50.000	-20.000
200	0.004	0.008	5000.000	1785.536	577.241	-50.000	-20.000

Таблица 6.1.1e

Решение задачи 6.1.10

k	p_o	p_k	F	V	S	R	Q
201	0.004	0.008	4950.000	1765.536	639.779	-50.000	-20.000
202	0.004	0.008	4900.000	1745.536	701.996	-50.000	-20.000
203	0.004	0.008	4850.000	1725.536	763.894	-50.000	-20.000
204	0.004	0.008	4800.000	1705.536	825.472	-50.000	-20.000
205	0.004	0.008	4750.000	1685.536	886.730	-50.000	-20.000
206	0.004	0.008	4700.000	1665.536	947.668	-50.000	-20.000
207	0.004	0.008	4650.000	1645.536	1008.286	-50.000	-20.000
208	0.004	0.008	4600.000	1625.536	1068.584	-50.000	-20.000
209	0.004	0.008	4550.000	1605.536	1128.561	-50.000	-20.000
210	0.004	0.008	4500.000	1585.536	1188.219	-50.000	-20.000
211	0.004	0.008	4450.000	1565.536	1247.557	-50.000	-20.000
212	0.004	0.008	4400.000	1545.536	1306.575	-50.000	-20.000
213	0.004	0.008	4350.000	1525.536	1365.273	-50.000	-20.000
214	0.004	0.008	4300.000	1505.536	1423.651	-50.000	-20.000
215	0.004	0.008	4250.000	1485.536	1481.709	-50.000	-20.000
216	0.004	0.008	4200.000	1465.536	1539.446	-50.000	-20.000
217	0.004	0.008	4150.000	1445.536	1596.864	-50.000	-20.000
218	0.004	0.008	4100.000	1425.536	1653.962	-50.000	-20.000
219	0.004	0.008	4050.000	1405.536	1710.740	-50.000	-20.000
220	0.004	0.008	4000.000	1385.536	1767.198	-50.000	-20.000
221	0.004	0.008	3950.000	1365.536	1823.336	-50.000	-20.000
222	0.004	0.008	3900.000	1345.536	1879.154	-50.000	-20.000
223	0.004	0.008	3850.000	1325.536	1934.651	-50.000	-20.000
224	0.004	0.008	3800.000	1305.536	1989.829	-50.000	-20.000
225	0.004	0.008	3750.000	1285.536	2044.687	-50.000	-20.000
226	0.004	0.008	3700.000	1265.536	2099.225	-50.000	-20.000
227	0.004	0.008	3650.000	1245.536	2153.443	-50.000	-20.000
228	0.004	0.008	3600.000	1225.536	2207.341	-50.000	-20.000
229	0.004	0.008	3550.000	1205.536	2260.919	-50.000	-20.000
230	0.004	0.008	3500.000	1185.536	2314.176	-50.000	-20.000
231	0.004	0.008	3450.000	1165.536	2367.114	-50.000	-20.000
232	0.004	0.008	3400.000	1145.536	2419.732	-50.000	-20.000
233	0.004	0.008	3350.000	1125.536	2472.030	-50.000	-20.000
234	0.004	0.008	3300.000	1105.536	2524.008	-50.000	-20.000
235	0.004	0.008	3250.000	1085.536	2575.666	-50.000	-20.000
236	0.004	0.008	3200.000	1065.536	2627.004	-50.000	-20.000
237	0.004	0.008	3150.000	1045.536	2678.021	-50.000	-20.000
238	0.004	0.008	3100.000	1025.536	2728.719	-50.000	-20.000
239	0.004	0.008	3050.000	1005.536	2779.097	-50.000	-20.000
240	0.004	0.008	3000.000	985.536	2829.155	-50.000	-20.000
241	0.004	0.008	2950.000	965.536	2878.893	-50.000	-20.000
242	0.004	0.008	2900.000	945.536	2928.311	-50.000	-20.000
243	0.004	0.008	2850.000	925.536	2977.409	-50.000	-20.000
244	0.004	0.008	2800.000	905.536	3026.186	-50.000	-20.000
245	0.004	0.008	2750.000	885.536	3074.644	-50.000	-20.000
246	0.004	0.008	2700.000	865.536	3122.782	-50.000	-20.000
247	0.004	0.008	2650.000	845.536	3170.600	-50.000	-20.000
248	0.004	0.008	2600.000	825.536	3218.098	-50.000	-20.000
249	0.004	0.008	2550.000	805.536	3265.276	-50.000	-20.000
250	0.004	0.008	2500.000	785.536	3312.134	-50.000	-20.000

Таблица 6.1.1f

Решение задачи 6.1.10

k	p_o	p_k	F	V	S	R	Q
251	0.004	0.008	2450.000	765.536	3358.671	-50.000	-20.000
252	0.004	0.008	2400.000	745.536	3404.889	-50.000	-20.000
253	0.004	0.008	2350.000	725.536	3450.787	-50.000	-20.000
254	0.004	0.008	2300.000	705.536	3496.365	-50.000	-20.000
255	0.004	0.008	2250.000	685.536	3541.623	-50.000	-20.000
256	0.004	0.008	2200.000	665.536	3586.561	-50.000	-20.000
257	0.004	0.008	2150.000	645.536	3631.179	-50.000	-20.000
258	0.004	0.008	2100.000	625.536	3675.476	-50.000	-20.000
259	0.004	0.008	2050.000	605.536	3719.454	-50.000	-20.000
260	0.004	0.008	2000.000	585.536	3763.112	-50.000	-20.000
261	0.004	0.008	1950.000	565.536	3806.450	-50.000	-20.000
262	0.004	0.008	1900.000	545.536	3849.468	-50.000	-20.000
263	0.004	0.008	1850.000	525.536	3892.166	-50.000	-20.000
264	0.004	0.008	1800.000	505.536	3934.544	-50.000	-20.000
265	0.004	0.008	1750.000	485.536	3976.601	-50.000	-20.000
266	0.004	0.008	1700.000	465.536	4018.339	-50.000	-20.000
267	0.004	0.008	1650.000	445.536	4059.757	-50.000	-20.000
268	0.004	0.008	1600.000	425.536	4100.855	-50.000	-20.000
269	0.004	0.008	1550.000	405.536	4141.633	-50.000	-20.000
270	0.004	0.008	1500.000	385.536	4182.091	-50.000	-20.000
271	0.004	0.008	1450.000	365.536	4222.229	-50.000	-20.000
272	0.004	0.008	1400.000	345.536	4262.046	-50.000	-20.000
273	0.004	0.008	1350.000	325.536	4301.544	-50.000	-20.000
274	0.004	0.008	1300.000	305.536	4340.722	-50.000	-20.000
275	0.004	0.008	1250.000	285.536	4379.580	-50.000	-20.000
276	0.004	0.008	1200.000	265.536	4418.118	-50.000	-20.000
277	0.004	0.008	1150.000	245.536	4456.336	-50.000	-20.000
278	0.004	0.008	1100.000	225.536	4494.234	-50.000	-20.000
279	0.004	0.008	1050.000	205.536	4531.811	-50.000	-20.000
280	0.004	0.008	1000.000	185.536	4569.069	-50.000	-20.000
281	0.004	0.008	950.000	165.536	4606.007	-50.000	-20.000
282	0.004	0.008	900.000	145.536	4642.625	-50.000	-20.000
283	0.004	0.008	850.000	125.536	4678.923	-50.000	-20.000
284	0.004	0.008	800.000	105.536	4714.901	-50.000	-20.000
285	0.004	0.008	750.000	85.536	4750.559	-50.000	-20.000
286	0.004	0.008	700.000	65.536	4785.896	-50.000	-20.000
287	0.004	0.008	650.000	45.536	4820.914	-50.000	-20.000
288	0.004	0.008	600.000	25.536	4855.612	-50.000	-20.000
289	0.004	0.008	550.000	5.536	4889.990	-50.000	-20.000
290	0.004	0.008	500.000	0.000	4938.454	-50.000	-5.536
291	0.004	0.008	450.000	0.000	4992.054	-50.000	0.000
292	0.004	0.008	400.000	0.000	5045.254	-50.000	0.000
293	0.004	0.008	350.000	0.000	5098.054	-50.000	0.000
294	0.004	0.008	300.000	0.000	5150.454	-50.000	0.000
295	0.004	0.008	250.000	0.000	5202.454	-50.000	0.000
296	0.004	0.008	200.000	0.000	5254.054	-50.000	0.000
297	0.004	0.008	150.000	0.000	5305.254	-50.000	0.000
298	0.004	0.008	100.000	0.000	5356.054	-50.000	0.000
299	0.004	0.008	50.000	0.000	5406.454	-50.000	0.000
300	0.004	0.008	0.000	0.000	5456.454	-50.000	0.000

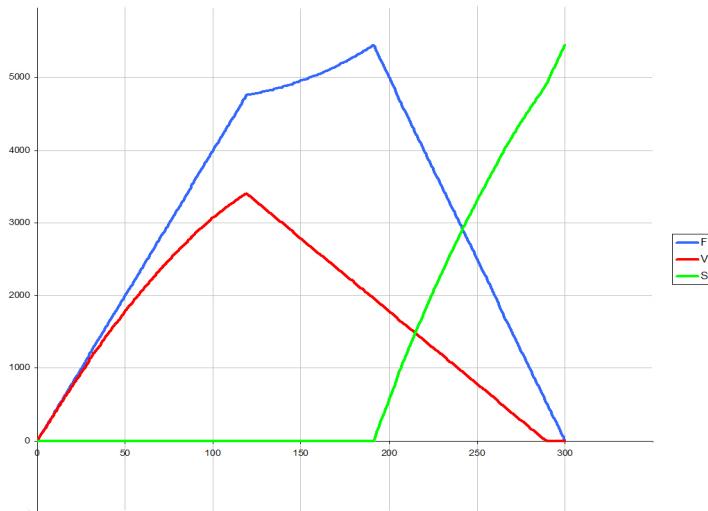


Рис. 6.2. Оптимальная динамика фазовых переменных в задаче 6.1.10

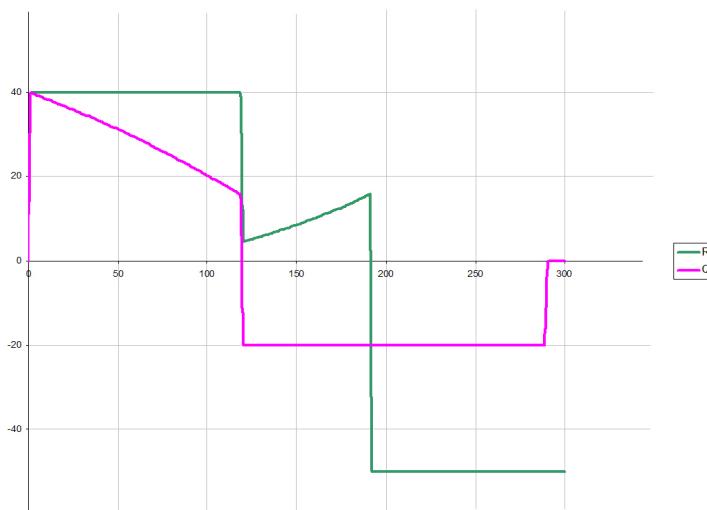


Рис. 6.3. Оптимальная динамика переменных-управлений в задаче 6.1.10

Реализация оставшейся части портфеля ценных бумаг продолжается с максимально возможной скоростью, позволяющей выйти в последнем периоде на нулевой объем портфеля. Скорость аккумулирования средств на счете операции при этом несколько возрастает.

Важно отметить, что полученная оценка максимальной эффективности операции является «верхней оптимистичной», поскольку добавление в неполную модель пополняющих ограничений сужает множество допустимых состояний (точнее, не расширяет его), что может привести лишь к уменьшению значения оценки эффективности.

Из рис. 6.2–6.3 видно, что графики как фазовых переменных, так и управлений имеют нелинейные участки. Определим характер этих нелинейностей, используя аппроксимации данных зависимостей кусочно-непрерывными функциями $S(t)$, $F(t)$, $V(t)$, $R(t)$ и $Q(t)$ для значений $t \in [0, T]$.

Пусть конец k -го периода совпадает с моментом $t = k$. Тогда $T = N$ и система разностных уравнений (6.1.10) (1° – 3°) может быть аппроксимирована системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} F' = R, \\ V' = Q, \\ S' = \rho F - \rho_0 V - R + Q \end{cases} \quad (6.1.11)$$

при условиях:

$$F(0) = V(0) = S(0) = 0; \quad F(T) = V(T) = 0;$$

$$F(t) \geq 0; \quad V(t) \geq 0; \quad S(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T];$$

$$\underline{R} \leq R(t) \leq \bar{R}; \quad \underline{Q} \leq Q(t) \leq \bar{Q}.$$

Наконец, целевой функционал будет иметь вид: $S(T) \rightarrow \max$.

Рассмотрим первую группу периодов. Здесь мы имеем

$$S(t) = 0; \quad R(t) = \bar{R} \implies F(t) = \bar{R}t.$$

Поэтому система (6.1.11) упрощается и принимает вид

$$\begin{cases} V' = Q, \\ 0 = \rho \bar{R}t - \rho_0 V - \bar{R} + Q, \end{cases}$$

что приводит к задаче Коши для $V(t)$: $V' = \rho_0 V - \rho \bar{R}t + \bar{R}$, $V(0) = 0$, решением которой является функция $V(t) = \alpha \exp(\rho_0 t) + \beta t + \gamma$, где α , β и γ – однозначно определяемые константы.

Рассмотрим теперь вторую группу периодов, предполагая, что первая группа завершилась в момент времени t_1 со значениями $V(t_1) = V_1$ и $F(t_1) = F_1$. Для второй группы имеем

$$S(t) = 0; \quad Q(t) = \underline{Q} \quad \Rightarrow \quad V(t) = V_1 + \underline{Q}(t - t_1),$$

поэтому

$$\begin{cases} F' = R, \\ 0 = \rho F - \rho_0(V_1 + \underline{Q}(t - t_1)) - R + \underline{Q}, \end{cases}$$

что приводит к задаче Коши для $F(t)$:

$$F' = \rho F - \rho_0(V_1 + \underline{Q}(t - t_1)) + \underline{Q}, \quad F(t_1) = F_1,$$

с решением вида $F(t) = \kappa \exp(\rho t) + \lambda t + \mu$ и $R(t) = \kappa \rho \exp(\rho t) + \lambda$, где κ, λ и μ – однозначно определяемые константы.

В заключение рассмотрим третью¹¹ группу периодов, предположив, что вторая группа завершается в момент времени t_2 со значениями $V(t_2) = V_2$ и $F(t_2) = F_2$. Для третьей группы имеем

$$Q(t) = \underline{Q} \quad \Rightarrow \quad V(t) = V_2 + \underline{Q}(t - t_2),$$

$$R(t) = \underline{R} \quad \Rightarrow \quad F(t) = F_2 + \underline{R}(t - t_2),$$

тогда система (6.1.11) приобретает вид

$$\begin{cases} F' = \underline{R}, \\ V' = \underline{Q}, \\ S' = \rho(F_2 + \underline{R}(t - t_2)) - \rho_0(V_2 + \underline{Q}(t - t_2)) - \underline{R} + \underline{Q}. \end{cases}$$

Окончательно мы получаем задачу Коши вида

$$S' = \rho(F_2 + \underline{R}(t - t_2)) - \rho_0(V_2 + \underline{Q}(t - t_2)) - \underline{R} + \underline{Q}, \quad S(t_2) = 0,$$

решением которой является функция $F(t) = \sigma t^2 + \theta t + \nu$, где σ, θ и ν – однозначно определяемые константы.

¹¹Исследование четвертой группы полностью аналогично исследованию третьей.

Рассмотрим теперь случай, когда доходность ценных бумаг и стоимость кредита не являются постоянными, а определяются формулами:

$$\rho(k) = \begin{cases} A, & k < K, \\ B, & K \leq k \leq K + \Delta, \\ A, & k > K + \Delta \end{cases}$$

и

$$\rho_0(k) = \begin{cases} A_0, & k < K_0, \\ B_0, & K_0 \leq k \leq K_0 + \Delta, \\ A_0, & k > K_0 + \Delta, \end{cases}$$

то есть функции $\rho(k)$ и $\rho_0(k)$ являются кусочно-постоянными при постоянных A, B, A_0, D_0 и Δ .

Решаемая задача (именуемая далее как *задача 6.1.13*) заключается в анализе (при помощи сформулированной выше модели) зависимости маргинальной оценки величины остатка средств на счете операции при ее завершении от значений параметров K и K_0 – начальных периодов скачков доходности и стоимости кредита на рынке ценных бумаг.

Таким образом, задача верхнего уровня является нелинейной и сводится к построению описания зависимости $S(N)$ от K и K_0 . А поскольку ее размерность невелика, то для решения возможно использование схемы перебора по сетке значений аргументов с постоянным шагом.

Для двух демонстрационных вариантов были использованы следующие значения параметров:

$$1^\circ A = 0.008, \quad B = 0.01, \quad A_0 = 0.004, \quad B_0 = 0.006;$$

$$2^\circ A = 0.008, \quad B = 0.01, \quad A_0 = 0.004, \quad B_0 = 0.002.$$

В обоих случаях выбирались $N = 300$, $\Delta = 50$ с параметрами двумерной сетки $30 \leq K \leq 220$, $20 \leq K_0 \leq 230$, причем величина шага по сетке равнялась 10.

На рис. 6.4 и 6.5 показаны графические представления искомых зависимостей. Результаты расчетов приведены в приложении 7.4.

Краткий качественный анализ полученных результатов показывает, что в случае нестабильного поведения рынка ценных бумаг, проявляющегося в скачке дохода, существует реакция рынка кредитных линий, заключающаяся в скачке стоимости кредита, при котором обеспечивается максимальная эффективность операций.

В рассмотренном выше примере задача верхнего уровня по причине ее низкой размерности решалась методом перебора по координатной сетке с фиксированным шагом. Понятно, что такой подход не всегда приемлем.

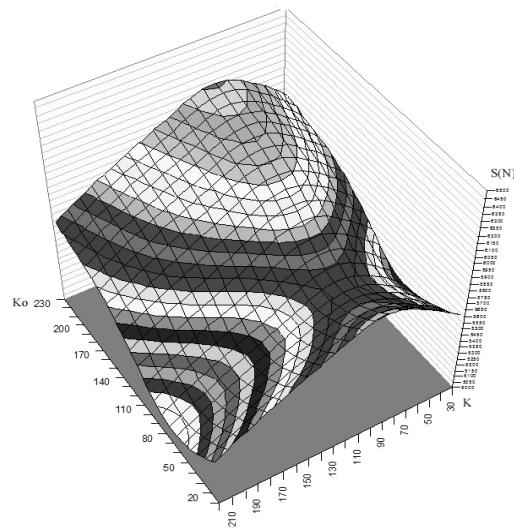


Рис. 6.4. 3D-представление решения задачи 6.1.13 (1°)

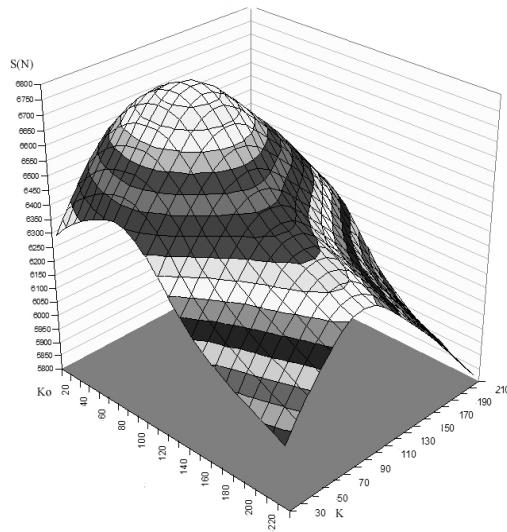


Рис. 6.5. 3D-представление решения задачи 6.1.13 (2°)

§ 6.2. Задачи для комплекса математических моделей

Схема двухуровневой параметрической оптимизации, общий случай которой был рассмотрен в § 5.2, допускает ее использование также при решении задач, сформулированных для системы (комплекса) математических моделей.

Такие задачи возникают либо при декомпозиции модели сложного объекта в совокупность моделей его подсистем, либо в случае, когда необходимо связать изначально независимые модели в единый комплекс, позволяющий решать некоторую, общую для этого комплекса задачу.

Конкретным примером задачи этого типа может служить, например, задача оптимизации распределения ресурсов между различными отраслями экономики или же отраслевыми подсистемами. В последнем случае математическая модель каждой подсистемы рассматривается (с точки зрения управляющего субъекта, например, ЛПР – лица, принимающего решения) как некий «черный ящик», входными параметрами для которого являются объемы инвестируемых в подсистему ресурсов, а выходными служат количественные показатели эффективности функционирования данной подсистемы.

Отметим, что внутренняя структура, функциональная схема, информационная база, а также используемые алгоритмы и программное обеспечение моделей каждой из подсистем, вообще говоря, не только независимы друг от друга, но даже могут быть частично или полностью неизвестными (недоступными) как для других подсистем, так и для управляющего субъекта (ЛПР).

Чтобы описать структуру информационных потоков между управляющим субъектом и подсистемами, необходимую для постановки и решения задач на комплексе в целом, рассмотрим вначале вариант полностью открытых моделей подсистем, т. е. «прозрачных черных ящиков».

В этом случае логистическая задача оптимального распределения ресурсов в отрасли представляет собой двухуровневую параметрическую задачу, на нижнем уровне которой (отдельно для каждой подсистемы) рассчитываются оценки эффективности функционирования при заданном векторе выделенных ресурсов. В то время как на верхнем уровне, по полученным на нижнем уровне оценкам, находятся способы перераспределения ресурсов между подсистемами, приводящие

к улучшению значений показателей функционирования системы в целом.

Рассмотрим формальную постановку подобной задачи и возможный подход к ее решению. Пусть исследуемый объект представляется как совокупность N подсистем (блоков), каждая из которых описывается конечномерным вектором, с компонентами удовлетворяющими некоторой системе ограничений типа неравенство. При этом некоторая часть этих компонент используется в описании нескольких подсистем одновременно. Наконец, имеются как целевые функции отдельных подсистем, так и общая целевая функция, определяющая соотношение предпочтения между различными состояниями системы в целом.

Формальная постановка рассматриваемой задачи для блока с номером s ($\forall s = [1, N]$) является задачей математического программирования следующего вида:

максимизировать по $x_{(s)} \in E^{n(s)}$ функцию¹²

$$F_{(s)}(x_{(s)}, u) \quad (6.2.1)$$

при условиях: $f_{(s)i}(x_{(s)}, u) \leq 0 \quad \forall i = [1, m_{(s)}]$,
каждая из которых решается независимо в пространстве $E^{n(s)}$ при фиксированном векторе параметров $u \in E^K$, имеющего координатное представление $\|u\| = \|\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_K\|^T$.

Рассмотрим также задачу:

максимизировать по $u \in E^K$ функцию

$$\sum_{s=1}^K F_{(s)}(x_{(s)}^*(u), u) \quad (6.2.2)$$

при условиях: $Y_t(u) \leq 0 \quad \forall t = [1, M]$.
Допустим также, что задачи (6.2.1) имеют решение вида $x_{(s)}^*(u_{(s)})$ при $u \in \Omega \subseteq E^K$, а допустимое множество задачи (6.2.2) содержится в Ω .

В этом случае естественно, аналогично ранее рассмотренным схемам, задачи (6.2.1) называть задачами *нижнего уровня*, а задачу (6.2.2) именовать задачей *верхнего уровня*.

Тот факт, что задача (6.2.2) может иметь содержательное и в достаточной степени неочевидное решение, иллюстрирует

¹²Здесь и далее нижний индекс, заключенный в круглые скобки, служит номером элемента какого-то множества (например, числовой или векторной последовательности). Нижний же индекс без скобок является номером компоненты вектора или матрицы.

Задача
6.2.1

Для системы двух задач нижнего уровня:
максимизировать по $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$

$$4\xi_1 + 4\xi_2 \quad (6.2.3)$$

$$\begin{aligned} \text{при условиях: } & 0 \leq \xi_1 \leq 4, \quad 0 \leq \xi_2 \leq 2, \\ & \xi_1 + 2\xi_2 \leq \nu_1, \quad 2\xi_1 + \xi_2 \leq \nu_2 \end{aligned}$$

и максимизировать по $\{\xi_3, \xi_4\} \in E^2$

$$4\xi_1 + 3\xi_2 \quad (6.2.4)$$

$$\begin{aligned} \text{при условиях: } & 0 \leq \xi_3 \leq 4, \quad 0 \leq \xi_4 \leq 2, \\ & 2\xi_3 + \xi_4 \leq \nu_3, \quad \xi_3 + 2\xi_4 \leq \nu_4 \end{aligned}$$

решить следующую задачу верхнего уровня: найти неотрицательные значения параметров $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4\}$, максимизирующих сумму целевых функций (6.2.3) и (6.2.4) при условиях: $\nu_1 + \nu_2 = 16$, $\nu_3 + \nu_4 = 15$.

Решение. Пусть $\{\xi_1^*(\nu_1, \nu_2), \xi_2^*(\nu_1, \nu_2)\}$ и $\{\xi_3^*(\nu_3, \nu_4), \xi_4^*(\nu_3, \nu_4)\}$ решения задач (6.2.3) и (6.2.4), найденные при некоторых допустимых фиксированных значениях параметров. Тогда задача верхнего уровня будет иметь вид
максимизировать по $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4\}$ функцию

$$F = 4\xi_1^*(\nu_1, \nu_2) + 4\xi_2^*(\nu_1, \nu_2) + 4\xi_3^*(\nu_3, \nu_4) + 3\xi_4^*(\nu_3, \nu_4) \quad (6.2.5)$$

$$\begin{aligned} \text{при условиях: } & \nu_1 \geq 0, \quad \nu_2 \geq 0, \quad \nu_3 \geq 0, \quad \nu_4 \geq 0, \\ & \nu_1 + \nu_2 = 16, \quad \nu_3 + \nu_4 = 15. \end{aligned}$$

Результаты вычислений вынесены в приложение 7.2, а графические представления зависимости целевой функции задачи верхнего уровня от параметров ν_1 и ν_3 показаны на рис. 6.3 и 6.5. Само решение задачи (6.2.5) является *неединственным* и имеет вид

Решение
получено.

$$\begin{aligned} \nu_1^* &= \frac{22}{3} - t, \quad \nu_2^* = \frac{26}{3} + t \quad \forall t \in \left[0, \frac{2}{3}\right], \quad \nu_3^* = 9, \quad \nu_4^* = 6, \\ \xi_1^* &= \frac{10}{3} + t, \quad \xi_2^* = 2 - t, \quad \xi_3^* = 4, \quad \xi_4^* = 1, \quad \text{а } F^* = 40\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь возможный вариант процедуры поиска решения задачи верхнего уровня (в пространстве параметров), основанный на методе обратных связей, описание и обоснование которого приведено в гл. 2 и 3.

Вначале построим для модели s -й подсистемы в форме (6.2.1) вспомогательную U -функцию:

$$\begin{aligned} U_{(s)}(\tau, x_{(s)}, \Lambda_{(s)}, u) &= F_{(s)}(x_{(s)}, u) - \sum_{i=1}^{m_{(s)}} \lambda_i f_{(s)i}(x_{(s)}, u) + \\ &+ \sum_{i=1}^{m_{(s)}} R(\tau, \lambda_{(s)i}) - \sum_{j=1}^{n_{(s)}} R(\tau, \xi_{(s)j}) \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

или

$$\begin{aligned} U_{(s)}(\tau, x_{(s)}, \Lambda_{(s)}, u) &= \\ &= L_{(s)}(x_{(s)}, \Lambda_{(s)}, u) + \sum_{i=1}^{m_{(s)}} R(\tau, \lambda_{(s)i}) - \sum_{j=1}^{n_{(s)}} R(\tau, \xi_{(s)j}), \end{aligned}$$

где, как и раньше, $\frac{\partial R}{\partial s}(\tau, s) = Q(\tau, s)$, а $L_{(s)}(x_{(s)}, \Lambda_{(s)}, u)$ – стандартная функция Лагранжа. Вектор u в этих формулах один и тот же для всех s .

Обозначим через $\bar{x}_{(s)}$ и $\bar{\Lambda}_{(s)}$ стационарные точки вспомогательных функций $U_{(s)}$ при фиксированных u . Тогда условия их стационарности, записанные в виде (3.1.4) или просто

$$\begin{cases} \frac{\partial U_{(s)}}{\partial \xi_{(s)j}} = 0 & \forall j = [1, n_{(s)}], \\ \frac{\partial U_{(s)}}{\partial \lambda_{(s)i}} = 0 & \forall i = [1, m_{(s)}], \end{cases} \quad (6.2.7)$$

можно рассматривать как определение неявно заданных вектор-функций $\bar{x}_{(s)}(u)$, $\bar{\Lambda}_{(s)}(u)$.

С другой стороны, исходя из теоремы о системе функций, заданных неявно [13], в случае достаточной гладкости функций $F_{(s)}(x_{(s)}, u)$ и $f_{(s)i}(x_{(s)}, u) \quad \forall i = [1, m_{(s)}]$ в некоторой окрестности точек $\bar{x}_{(s)}$ и $\bar{\Lambda}_{(s)}$ будут существовать непрерывные производные вида

$$\frac{\partial \bar{\xi}_{(s)j}}{\partial \nu_p} \quad \forall j = [1, n_{(s)}] \quad \text{и} \quad \frac{\partial \bar{\lambda}_{(s)i}}{\partial \nu_p} \quad \forall i = [1, m_{(s)}] \quad \forall p = [1, K], \quad (6.2.8)$$

значения которых находятся из следующего набора $\forall p = [1, K]$ систем линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{t=1}^{n_{(s)}} \frac{\partial^2 U_{(s)}}{\partial \xi_{(s)j} \partial \xi_{(s)t}} \frac{\partial \bar{\xi}_{(s)t}}{\partial \nu_p} + \sum_{q=1}^{m_{(s)}} \frac{\partial^2 U_{(s)}}{\partial \xi_{(s)j} \partial \lambda_{(s)q}} \frac{\partial \bar{\lambda}_{(s)q}}{\partial \nu_p} = - \frac{\partial^2 U_{(s)}}{\partial \xi_{(s)j} \partial \nu_p} \\ \quad \forall j = [1, n_{(s)}], \\ \sum_{t=1}^{n_{(s)}} \frac{\partial^2 U_{(s)}}{\partial \lambda_{(s)i} \partial \xi_{(s)t}} \frac{\partial \bar{\xi}_{(s)t}}{\partial \nu_p} + \sum_{q=1}^{m_{(s)}} \frac{\partial^2 U_{(s)}}{\partial \lambda_{(s)i} \partial \lambda_{(s)q}} \frac{\partial \bar{\lambda}_{(s)q}}{\partial \nu_p} = - \frac{\partial^2 U_{(s)}}{\partial \lambda_{(s)i} \partial \nu_p} \\ \quad \forall i = [1, m_{(s)}]. \end{array} \right. \quad (6.2.9)$$

Перейдем теперь к исследованию задачи верхнего уровня (6.2.2). Рассмотрим случай, когда целевая функция в ее постановке есть функция вида

$$\bar{F}(u) = \sum_{s=1}^K F_{(s)}(\bar{x}_{(s)}(u), u),$$

а система ограничений получается объединением условий

$$f_{(s)i}(\bar{x}_{(s)}, u) \leq 0 \quad \forall i = [1, m_{(s)}] \quad \forall s = [1, N]$$

с условиями $Y_t(u) \leq 0 \quad \forall t = [1, M]$.

Последнюю группу ограничений $Y_t(u) \leq 0 \quad \forall t = [1, M]$, которым должны удовлетворять компоненты вектора параметров, проигнорируем, чтобы не затенять суть процедуры обилием технических деталей (их учет может быть сделан на практике любым стандартным методом, скажем, проекции градиента или штрафных функций).

Также нетрудно видеть, что в силу сепарабельности модели по своим переменным объединение моделей подсистем в одну задачу, дает модель, для которой U -функция всей системы равна сумме U -функций этих подсистем.

В итоге, заменив в полученной формулировке зависимости $x_{(s)}^*(u) \quad \forall s = [1, N]$ на их слаженные аппроксимации $\bar{x}_{(s)}(\tau, u)$, найденными при решении системы уравнений (6.2.7), и, соответственно, зависимости $\Lambda_{(s)}^*(u) \quad \forall s = [1, N]$ на аппроксимации $\bar{\Lambda}_{(s)}(\tau, u)$, получим \bar{U} -функцию, для которой стационарная точка будет приближенным решением исходной модели. Иными словами, необходимо искать стационарную точку функции

$$\bar{U}(\tau, u) = \sum_{s=1}^N U_{(s)}(\bar{x}_{(s)}(\tau, u), \bar{\Lambda}_{(s)}(\tau, u), u). \quad (6.2.10)$$

Рассмотрим теперь схему решения задачи верхнего уровня, основанную на градиентном методе отыскания стационарной точки функции (6.2.10) в пространстве параметров u , в предположении, что для любой пробной точки u , введенной в условие каждой задачи нижнего уровня, находится ее решение, включающее значение векторов $\bar{x}_{(s)}(u)$ и $\bar{\Lambda}_{(s)}(u)$.

При использовании наиболее простого варианта градиентного метода – поиска стационарной точки – необходимо в каждой пробной точке находить

- 1° значение функционала $\bar{U}(\tau, u)$;
- 2° значения производных $\bar{U}'_{\nu_t} \quad \forall t = [1, K]$.

Значения целевого функционала $\bar{U}(\tau, u)$ в процессе решения задачи верхнего уровня находятся по формуле (6.2.10). Для вычисления его градиента по компонентам вектора параметров используем правило дифференцирования сложной функции. В результате получим выражение:

$$\bar{U}'_{\nu_t} = \sum_{s=1}^N \left(\frac{\partial U_{(s)}}{\partial \nu_t} + \sum_{j=1}^{n_{(s)}} \frac{\partial U_{(s)}}{\partial \xi_j} \frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial \nu_t} + \sum_{i=1}^{m_{(s)}} \frac{\partial U_{(s)}}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial \nu_t} \right) \quad \forall t = [1, K]. \quad (6.2.11)$$

Наконец, следует отметить, что если целевая функция задачи верхнего уровня равна сумме целевых функций задач нижнего уровня (то есть, если цели функционирования всего комплекса согласованы с целями отдельных подсистем), то формулы (6.2.11) можно упростить, использовав условия стационарности (6.2.7). Результат этого упрощения таков:

$$\bar{U}'_{\nu_t} = \sum_{s=1}^N \frac{\partial U_{(s)}}{\partial \nu_t} \quad \forall t = [1, K]. \quad (6.2.12)$$

Продемонстрируем теперь практическое использование описанного метода на примере решения системы задач (6.2.3) – (6.2.5). Для упрощения (уменьшения числа индексов) формы записи будем использовать для прямых переменных первой подсистемы обозначение ξ , а второй – обозначение η . Двойственные переменные будем обозначать соответственно при помощи λ и μ .

Тогда, согласно (6.2.6), U -функция для первой подсистемы (6.2.3) будет иметь вид

$$U_{(1)}(\tau, u) = 4\xi_1 + 4\xi_2 - \lambda_1(\xi_1 + 2\xi_2 - \nu_1) - \lambda_2(2\xi_1 + \xi_2 + \nu_1 - 16) -$$

$$\begin{aligned}
& -\lambda_3(\xi_1 - 4) - \lambda_4(\xi_2 - 2) - R(\tau, \xi_1) - R(\tau, \xi_2) + \\
& + R(\tau, \lambda_1) + R(\tau, \lambda_2) + R(\tau, \lambda_3) + R(\tau, \lambda_4).
\end{aligned}$$

Здесь конкретно мы будем использовать следующий тип функции обратной связи:

$$Q(\tau, s) = \frac{\partial R}{\partial s} = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right) \quad \text{и} \quad R(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(\frac{s^2}{2} - \ln s \right).$$

Условия стационарности (6.2.7) U -функции первой подсистемы при фиксированном значении параметра ν_1 будут

$$\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial U_1}{\partial \xi_1} &= 4 - \bar{\lambda}_1 - 2\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_3 - \frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_1 - \frac{1}{\bar{\xi}_1} \right) = 0, \\
\frac{\partial U_1}{\partial \xi_2} &= 4 - 2\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_4 - \frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_2 - \frac{1}{\bar{\xi}_2} \right) = 0, \\
\frac{\partial U_1}{\partial \lambda_1} &= -\bar{\xi}_1 - 2\bar{\xi}_2 + \nu_1 + \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right) = 0, \\
\frac{\partial U_1}{\partial \lambda_2} &= 16 - \bar{\xi}_1 - 2\bar{\xi}_2 - \nu_1 + \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right) = 0, \\
\frac{\partial U_1}{\partial \lambda_3} &= 4 - \bar{\xi}_1 + \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_3 - \frac{1}{\bar{\lambda}_3} \right) = 0, \\
\frac{\partial U_1}{\partial \lambda_4} &= 2 - \bar{\xi}_2 + \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_4 - \frac{1}{\bar{\lambda}_4} \right) = 0.
\end{aligned}
\right. \tag{6.2.13}$$

Аналогично U -функция для второй подсистемы (6.2.4) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
U_{(2)}(\tau, u) &= 4\eta_1 + 3\eta_2 - \mu_1(2\eta_1 + \eta_2 - \nu_3) - \mu_2(\eta_1 + 2\eta_2 + \nu_3 - 15) - \\
& - \mu_3(\eta_1 - 4) - \mu_4(\eta_2 - 2) - R(\tau, \eta_1) - R(\tau, \eta_2) + \\
& + R(\tau, \mu_1) + R(\tau, \mu_2) + R(\tau, \mu_3) + R(\tau, \mu_4).
\end{aligned}$$

Условия стационарности (6.2.7) U -функции второй подсистемы при фиксированном значении параметра ν_3 будут

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial U_2}{\partial \eta_1} & = & 4 - 2\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_3 - \frac{\tau}{2} \left(\bar{\eta}_1 - \frac{1}{\bar{\eta}_1} \right) = 0, \\ \frac{\partial U_2}{\partial \eta_2} & = & 3 - \bar{\mu}_1 - 2\bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_4 - \frac{\tau}{2} \left(\bar{\eta}_2 - \frac{1}{\bar{\eta}_2} \right) = 0, \\ \frac{\partial U_2}{\partial \mu_1} & = & -2\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2 + \nu_3 + \frac{\tau}{2} \left(\bar{\mu}_1 - \frac{1}{\bar{\mu}_1} \right) = 0, \\ \frac{\partial U_2}{\partial \mu_2} & = & 15 - \bar{\eta}_1 - 2\bar{\eta}_2 - \nu_3 + \frac{\tau}{2} \left(\bar{\mu}_2 - \frac{1}{\bar{\mu}_2} \right) = 0, \\ \frac{\partial U_2}{\partial \mu_3} & = & 4 - \bar{\eta}_1 + \frac{\tau}{2} \left(\bar{\mu}_3 - \frac{1}{\bar{\mu}_3} \right) = 0, \\ \frac{\partial U_2}{\partial \mu_4} & = & 2 - \bar{\eta}_2 + \frac{\tau}{2} \left(\bar{\mu}_4 - \frac{1}{\bar{\mu}_4} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (6.2.14)$$

Исходя из формул (6.2.12) и равенства

$$U(\tau, \nu_1, \nu_3) = U_1(\tau, \nu_1) + U_2(\tau, \nu_3), \quad (6.2.15)$$

получаем, что для рассматриваемого комплекса двух подсистем

$$U'_{\nu_1} = \frac{\partial U}{\partial \nu_1} = \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2, \quad U'_{\nu_3} = \frac{\partial U}{\partial \nu_3} = \bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2. \quad (6.2.16)$$

Использование в совокупности формул (6.2.15) – (6.2.16) позволяет реализовать градиентный метод поиска стационарной точки для вспомогательной U -функции в пространстве параметров $\{\nu_1, \nu_3\}$.

Результаты вычислений для нескольких первых итераций с начальной точкой $\nu_{1(0)} = 3, \nu_{3(0)} = 3$ при $\tau = 0.01$ приведены в табл. 6.2.1а–с, в записи которых использованы следующие обозначения:

$$\bar{F}_1 = 4\bar{\xi}_1 + 4\bar{\xi}_2, \quad \bar{F}_2 = 4\bar{\eta}_1 + 3\bar{\eta}_2, \quad \bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2,$$

$$\nabla_{\nu_1} = \frac{\partial U}{\partial \nu_1}, \quad \nabla_{\nu_3} = \frac{\partial U}{\partial \nu_3}, \quad \|\nabla\| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial \nu_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \nu_3} \right)^2},$$

$$w_{\nu_1} = \frac{\nabla_{\nu_1}}{\|\nabla\|}, \quad w_{\nu_3} = \frac{\nabla_{\nu_3}}{\|\nabla\|}, \quad \nu_1^* = \nu_1 + step \cdot w_{\nu_1}, \quad \nu_3^* = \nu_3 + step \cdot w_{\nu_3}.$$

Т а б л и ц а 6.2.1a

**Поиск стационарной точки U -функции задачи 6.2.1
по параметрам ν_1 и ν_3 градиентным методом**

Итер.	ν_1	ν_3	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	\bar{F}_1	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_4$
0	3.00	3.00	3.02	0.00	12.07	3.98	0.00	0.00	0.00
1	9.70	6.37	2.15	2.01	16.63	0.00	1.99	0.00	2.00
2	6.69	9.37	3.98	1.36	21.34	1.40	1.19	0.21	0.00
3	6.76	8.86	3.91	1.43	21.34	1.35	1.29	0.05	0.00
4	6.76	8.93	3.90	1.43	21.34	1.35	1.29	0.05	0.00

Т а б л и ц а 6.2.1b

**Поиск стационарной точки U -функции задачи 6.2.1
по параметрам ν_1 и ν_3 градиентным методом**

Итер.	$\bar{\eta}_1$	$\bar{\eta}_2$	\bar{F}_2	$\bar{\mu}_1$	$\bar{\mu}_2$	$\bar{\mu}_3$	$\bar{\mu}_4$	\bar{F}	\bar{U}
0	0.50	2.00	8.01	2.00	0.00	0.00	0.99	20.08	20.16
1	2.19	2.00	14.76	1.99	0.00	0.00	1.00	31.38	31.47
2	4.01	0.81	18.48	0.00	1.49	2.47	0.00	39.82	37.83
3	3.88	1.12	18.88	1.63	0.68	0.04	0.00	40.22	40.21
4	3.93	1.07	18.93	1.61	0.69	0.07	0.00	40.27	40.23

Т а б л и ц а 6.2.1c

**Поиск стационарной точки U -функции задачи 6.2.1
по параметрам ν_1 и ν_3 градиентным методом**

Итер.	$\nabla \nu_1$	$\nabla \nu_3$	$\ \nabla \ $	w_{ν_1}	w_{ν_3}	$Step$	ν_1^*	ν_3^*
0	3.99	2.00	4.46	0.89	0.45	7.50	9.70	6.37
1	-1.99	1.99	2.82	-0.71	0.71	4.25	6.69	9.37
2	0.21	-1.48	1.50	0.14	-0.99	0.50	6.76	8.86
3	0.06	0.95	0.95	0.06	1.99	0.05	6.76	8.92
4	****	****	****	****	****	****	****	****

Графическое представление траекторий движения в пространстве параметров для задачи 6.2.1 показано белыми стрелками на рис. 6.8.

Результаты вычислений для задачи 6.2.1 приведены в приложении 7.2, а графические представления зависимости целевой функции задачи верхнего уровня от параметров ν_1 и ν_3 показаны на рис. 6.6 и 6.8.

Разберем теперь пример случая, когда целевые функции задачи верхнего уровня отличаются от целевых функций, используемых в моделях подсистем.¹³

Для системы моделей (6.2.3) – (6.2.5) рассмотрим задачу *верхнего* уровня следующего вида.

Задача 6.2.2 Найти неотрицательные значения параметров $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4\}$, максимизирующих целевую функцию вида

$$4\xi_1 + 8\xi_2 + 4\xi_3 + 6\xi_4 \quad (6.2.17)$$

$$\begin{aligned} \text{при условиях: } & 0 \leq \xi_1 \leq 4, \quad 0 \leq \xi_2 \leq 2, \\ & \xi_1 + 2\xi_2 \leq \nu_1, \\ & 2\xi_1 + \xi_2 \leq \nu_2, \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

$$\begin{aligned} \text{при условиях: } & 0 \leq \xi_3 \leq 4, \quad 0 \leq \xi_4 \leq 2, \\ & 2\xi_3 + \xi_4 \leq \nu_3, \\ & \xi_3 + 2\xi_4 \leq \nu_4, \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

$$\begin{aligned} & \nu_1 + \nu_2 = 16, \\ & \nu_3 + \nu_4 = 15. \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

Решение задачи (6.2.17) – (6.2.20) регулярно и имеет вид

$$\begin{aligned} \nu_1^* &= \frac{22}{3}, \quad \nu_2^* = \frac{26}{3}, \quad \nu_3^* = 8, \quad \nu_4^* = 7, \\ \xi_1^* &= \frac{10}{3}, \quad \xi_2^* = 2, \quad \xi_3^* = 3, \quad \xi_4^* = 2, \quad \text{а } F^* = 53\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

¹³Эта задача является, вообще говоря, более общей, чем классическая задача математического программирования. Подробный обзор и анализ задач подобных классов и методов их решения можно найти, например, в монографии [27].

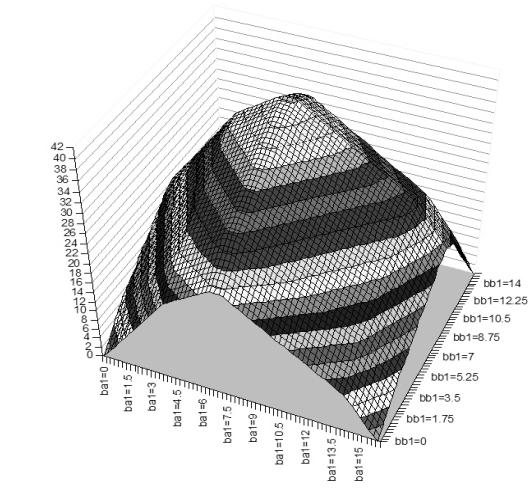


Рис. 6.6. 3D-представление решения задачи 6.2.1

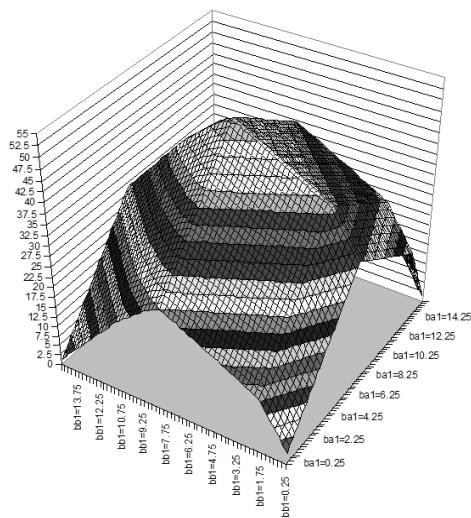


Рис. 6.7. 3D-представление решения задачи 6.2.2

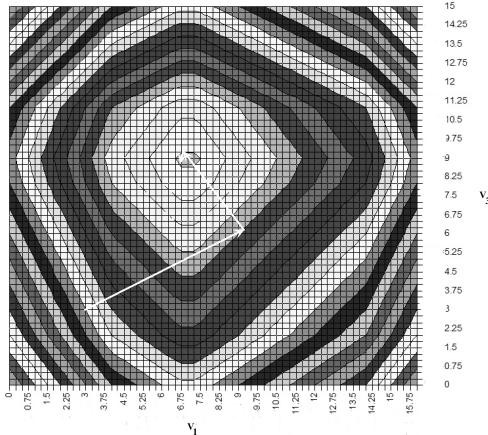


Рис. 6.8. Система изолиний решения задачи 6.2.1

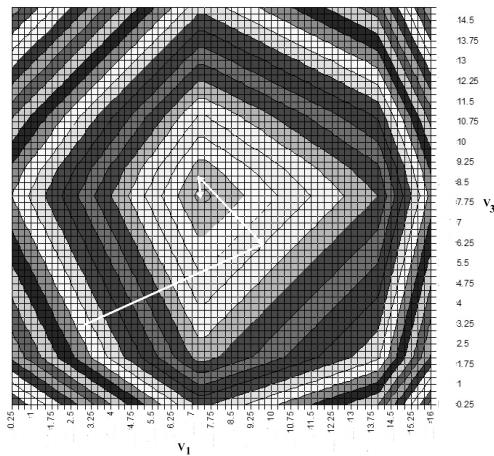


Рис. 6.9. Система изолиний решения задачи 6.2.2

Как и в предыдущем примере (задача 6.2.1) используем для нахождения стационарной точки U -функции стандартный градиентный метод, основанный на использовании формул (6.2.11). Здесь следует отметить, что для задачи 6.2.2 U -функции нижнего и верхнего уровня разные. Поэтому упрощенные формулы (6.2.12) применять здесь

нельзя, а придется использовать непосредственно выражения (6.2.11), вычисляя предварительно в каждой пробной точке не только значения векторов $\bar{x}_{(s)}(\tau, , u)$ и $\bar{\Lambda}_{(s)}(\tau, , u)$ – стационарных точек U -функций задачи нижнего уровня, но и компоненты их матриц чувствительности $\left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \right\|$ и $\left\| \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial u} \right\|$, задаваемых системами линейных уравнений (6.2.9).

При решении задачи 6.2.2, как и ранее, мы будем использовать функции обратной связи вида

$$Q(\tau, s) = \frac{\partial R}{\partial s} = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right)$$

и

$$R(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(\frac{s^2}{2} - \ln s \right).$$

Условия стационарности U -функций подсистем будут опять-таки задаваться формулами (6.2.13) и (6.2.14). При этом сохраним все введенные ранее обозначения. Тогда системы линейных уравнений (6.2.9) для первой и второй подсистем нижнего уровня имеют соответственно следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \nu_1} - 2 \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \nu_1} + \frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\lambda}_1^2} \right) \frac{\partial \bar{\lambda}_1}{\partial \nu_1} & = & -1, \\ -2 \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \nu_1} - \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \nu_1} + \frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\lambda}_2^2} \right) \frac{\partial \bar{\lambda}_2}{\partial \nu_1} & = & 1, \\ -\frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \nu_1} + \frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\lambda}_3^2} \right) \frac{\partial \bar{\lambda}_3}{\partial \nu_1} & = & 0, \\ -\frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \nu_1} + \frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\lambda}_4^2} \right) \frac{\partial \bar{\lambda}_4}{\partial \nu_1} & = & 0, \\ -\frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\xi}_1^2} \right) \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \nu_1} - \frac{\partial \bar{\lambda}_1}{\partial \nu_1} - 2 \frac{\partial \bar{\lambda}_2}{\partial \nu_1} - \frac{\partial \bar{\lambda}_3}{\partial \nu_1} & = & 0, \\ -\frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\xi}_2^2} \right) \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \nu_1} - 2 \frac{\partial \bar{\lambda}_1}{\partial \nu_1} - \frac{\partial \bar{\lambda}_2}{\partial \nu_1} - \frac{\partial \bar{\lambda}_4}{\partial \nu_1} & = & 0 \end{array} \right. \quad (6.2.21)$$

и

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -2\frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial \nu_3} - \frac{\partial \bar{\eta}_2}{\partial \nu_3} + \frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\mu}_1^2} \right) \frac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial \nu_3} & = & -1, \\ -\frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial \nu_3} - 2\frac{\partial \bar{\eta}_2}{\partial \nu_3} + \frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\mu}_2^2} \right) \frac{\partial \bar{\mu}_2}{\partial \nu_3} & = & 1, \\ -\frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial \nu_3} + \frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\mu}_3^2} \right) \frac{\partial \bar{\mu}_3}{\partial \nu_3} & = & 0, \\ -\frac{\partial \bar{\eta}_2}{\partial \nu_3} + \frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\mu}_4^2} \right) \frac{\partial \bar{\mu}_4}{\partial \nu_3} & = & 0, \\ -\frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\eta}_1^2} \right) \frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial \nu_3} - 2\frac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial \nu_3} - \frac{\partial \bar{\mu}_2}{\partial \nu_3} - \frac{\partial \bar{\mu}_3}{\partial \nu_3} & = & 0, \\ -\frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\eta}_2^2} \right) \frac{\partial \bar{\eta}_2}{\partial \nu_3} - \frac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial \nu_3} - 2\frac{\partial \bar{\mu}_2}{\partial \nu_3} - \frac{\partial \bar{\mu}_4}{\partial \nu_3} & = & 0. \end{array} \right. \quad (6.2.22)$$

Используя формулы (6.2.11) получаем, что для комплекса двух подсистем в задаче 6.2.2

$$\begin{aligned} U'_u &= \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial \xi_1} \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial \xi_2} \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial u}, \\ U'_v &= \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial U}{\partial \xi_1} \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial v} + \frac{\partial U}{\partial \xi_2} \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial v}, \end{aligned} \quad (6.2.23)$$

где

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2,$$

$$\frac{\partial U}{\partial v} = \bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_1} = 4 - \bar{\lambda}_1 - 2\bar{\lambda}_2 - \frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_1 - \frac{1}{\bar{\xi}_1} \right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_2} = 8 - 2\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 - \frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_2 - \frac{1}{\bar{\xi}_2} \right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta_1} = 3 - 2\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2 - \frac{\tau}{2} \left(\bar{\eta}_1 - \frac{1}{\bar{\eta}_1} \right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta_2} = 6 - \bar{\mu}_1 - 2\bar{\mu}_2 - \frac{\tau}{2} \left(\bar{\eta}_2 - \frac{1}{\bar{\eta}_2} \right).$$

Остальные слагаемые в формулах (6.2.11) оказываются равными нулю. Значения компонент матриц чувствительности для выполненных итераций содержатся в табл. 6.2.2a–b.

Результаты вычислений для нескольких первых итераций из начальной точки $u_0 = 3, v_0 = 3$ при $\tau = 0.01$ приведены в табл. 6.2.3a–c.

Результаты вычислений для задачи 6.2.2 приведены в приложении 7.2, а графические представления зависимости целевой функции задачи верхнего уровня от параметров ν_1 и ν_3 показаны на рис. 6.7 и 6.9. Траектория движения в пространстве параметров для задачи 6.2.2 показана белыми стрелками на рис. 6.9.

Т а б л и ц а 6.2.2a

**Матрица чувствительности компонент стационарной точки
 U -функции задачи 6.2.2 по параметру ν_1**

Итерация	$\frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \nu_1}$	$\frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \nu_1}$	$\frac{\partial \bar{\lambda}_1}{\partial \nu_1}$	$\frac{\partial \bar{\lambda}_2}{\partial \nu_1}$	$\frac{\partial \bar{\lambda}_3}{\partial \nu_1}$	$\frac{\partial \bar{\lambda}_4}{\partial \nu_1}$
0	1.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00
1	-0.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	-0.59	0.28	-22.75	11.38	0.00	34.11
3	-1.00	1.00	-0.21	0.18	-0.02	0.30
4	-0.65	0.40	-32.90	16.45	0.00	49.34

Т а б л и ц а 6.2.2b

**Матрица чувствительности компонент стационарной точки
 U -функции задачи 6.2.2 по параметру ν_3**

Итерация	$\frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial \nu_3}$	$\frac{\partial \bar{\eta}_2}{\partial \nu_3}$	$\frac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial \nu_3}$	$\frac{\partial \bar{\mu}_2}{\partial \nu_3}$	$\frac{\partial \bar{\mu}_3}{\partial \nu_3}$	$\frac{\partial \bar{\mu}_4}{\partial \nu_3}$
0	0.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	1.00	-1.00	-0.05	0.04	0.07	0.00
3	1.00	-1.00	-0.11	0.21	0.00	-0.31
4	0.99	-0.99	-0.47	0.93	0.00	-1.38

Т а б л и ц а 6.2.3а

**Поиск стационарной точки U -функции задачи 6.2.2
по параметрам ν_1 и ν_3 градиентным методом**

Итер.	ν_1	ν_3	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	\bar{F}_1	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_4$
0	3.00	3.00	3.02	0.00	12.07	3.98	0.00	0.00	0.00
1	9.70	6.37	2.15	2.01	24.66	0.00	1.99	0.00	2.00
2	7.35	8.72	3.33	2.00	29.34	0.34	1.82	0.00	-1.49
3	7.20	8.12	3.46	1.87	28.83	1.31	1.33	0.01	0.04
4	7.34	8.05	3.33	2.00	29.34	0.49	1.74	0.01	-1.27

Т а б л и ц а 6.2.3б

**Поиск стационарной точки U -функции задачи 6.2.2
по параметрам ν_1 и ν_3 градиентным методом**

Итер.	$\bar{\eta}_1$	$\bar{\eta}_2$	\bar{F}_2	$\bar{\mu}_1$	$\bar{\mu}_2$	$\bar{\mu}_3$	$\bar{\mu}_4$	\bar{F}	\bar{U}
0	0.50	2.00	14.01	2.00	0.00	0.00	0.99	26.09	26.16
1	2.19	2.00	20.75	1.99	0.00	0.00	1.00	31.38	31.47
2	3.73	1.28	22.55	1.65	0.67	0.02	0.00	51.89	51.90
3	3.13	1.87	23.75	1.68	0.64	0.01	0.04	52.57	52.61
4	3.06	1.94	23.88	1.68	0.61	0.01	0.08	53.22	53.24

Т а б л и ц а 6.2.3с

**Поиск стационарной точки U -функции задачи 6.2.2
по параметрам ν_1 и ν_3 градиентным методом**

Итер.	∇_{ν_1}	∇_{ν_3}	$\ \nabla\ $	w_{ν_1}	w_{ν_3}	$Step$	ν_1^*	ν_3^*
0	3.98	2.00	4.45	0.89	0.45	7.50	9.70	6.37
1	-1.99	1.99	2.82	-0.71	0.71	0.62	7.20	8.12
2	-0.49	-2.02	2.08	-0.23	-0.97	0.50	6.76	8.72
3	3.97	-1.97	4.43	0.90	-0.44	0.16	7.34	8.05
4	0.35	-1.89	1.92	****	****	****	****	****

§ 6.3. Задачи для многокритериальных моделей

В математическом моделировании достаточно часто формализация отношений предпочтения для состояний моделируемого объекта порождает несколько независимых друг от друга целевых функций.

По исторически сложившейся традиции в этом случае принято говорить о задаче *многокритериальной оптимизации*, хотя такой термин сам по себе логически противоречив.

Конечномерной многокритериальной моделью мы будем называть математическую модель с N целевыми функциями:

$$f_k(x, u) \rightarrow \max_x \quad k = [1, N], \quad (6.3.1)$$

подлежащими максимизации, на обладающем внутренними точками множестве элементов $x \in E^n$, удовлетворяющих условиям вида

$$y_i(x, u) \leq 0 \quad i = [1, m], \quad (6.3.2)$$

где $u \in \Theta \subseteq E^r$ – вектор параметров модели. При этом предполагается, что функции $f_k(x, u)$ и $y_i(x, u)$ достаточно гладкие, то есть они имеют непрерывные частные производные требуемого порядка по всем своим аргументам.

Некорректность в общем случае подобной постановки задачи очевидна, поскольку экстремальный для одной из целевых функций элемент x , вообще говоря, не является таковым для других. При этом, однако, некоторую полезную информацию может дать последовательное решение следующих однокритериальных задач поиска экстремума на множестве (6.3.2) каждой из функций (6.3.1) в отдельности для $k = [1, N]$:

$$\begin{aligned} f_k(x, u) &\rightarrow \max_x \\ \text{при условиях:} \\ y_i(x, u) &\leq 0 \quad i = [1, m]. \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Определение
6.3.1

Целевая функция $f_k(x, u)$ называется *улучшаемой* в допустимой (то есть удовлетворяющей условиям (6.3.3)) точке x_0 , если существует другая допустимая точка x_1 , где $f_k(x_1, u) > f_k(x_0, u)$. Иначе $f_k(x, u)$ называется *неулучшаемой* в этой точке x_0 .

Согласно этому определению целевая функция задачи (6.3.3) является неулучшаемой на $x_k^*(u)$ – оптимальном элементе этой задачи, в то время как другие целевые функции (6.3.1) в этой точке могут оказаться улучшаемыми.

Иначе говоря, определение 6.3.1 позволяет все допустимые точки исходной многокритериальной модели разделить на два множества таких, что в каждой точке первого из них все целевые функции либо улучшаемые, либо неухудшаемые, а для любой точки второго имеется по крайней мере одна целевая функция, каждое допустимое улучшение значения которой приводит к ухудшению значения хотя бы одной другой целевой функции.

Это позволяет дать

Определение 6.3.2	Множество допустимых точек многокритериальной модели (6.3.1) – (6.3.2), для которых любая допустимая ненулевая вариация, улучшающая значение одной из целевых функций, приводит к ухудшению значения по крайней мере одной из других, называется множеством <i>точек паретовского равновесия</i> или просто <i>множеством Парето</i> .
------------------------------	--

Хотя общего универсального подхода к решению задач многокритериальной оптимизации до настоящего времени не предложено, разработаны многочисленные подходы, позволяющие сужать множество «кандидатов» на решение.

Например, при практическом использовании многокритериальных математических моделей, набор независимых целевых функций часто заменяют некоторым единым критерием, переходя таким образом к стандартной задаче математического программирования.

Наиболее простым примером такой замены может служить задача максимизации линейной комбинации (с неотрицательными коэффициентами) целевых функций (6.3.1). Заметим, в частности, что, выбирая последовательно для $k = [1, N]$ подобные линейные комбинации, у которых все коэффициенты равны нулю, кроме k -го, равного единице, мы получаем систему однокритериальных задач (6.3.3).

Другим, менее тривиальным примером этого подхода, является задача поиска на множестве (6.3.2) элемента, минимизирующего величину *рассогласования целевых функций* (то есть максимального по всей совокупности критериев отклонения каждого из критериев от своего

неулучшаемого «идеала»). Иными словами, рассматривается задача математического программирования следующего вида:

минимизировать ρ при условиях: $\rho \geq 0$,

$$y_i(x, u) \leq 0, \quad i = [1, m], \quad (6.3.4)$$

$$f_k(x, u) \geq F_k^*(u) - \rho, \quad k = [1, N],$$

решение которой мы будем обозначать как $\rho^{**}(u)$ и $x^{**}(u)$. Здесь $F_k^*(u) = f_k(x_k^*(u), u)$.

Согласно используемой в нашем курсе классификации, задача (6.3.4) является параметрической задачей *второго уровня*, поскольку формулировка ее условия содержит $x_k^*(u)$ $k = [1, N]$ – решения однокритериальных задач *первого уровня* (6.3.3). При этом как в задачах первого, так и второго уровня вектор параметров $u \in \Theta$ предполагается фиксированным.

Понятно, что экстремальная величина рассогласования критериев в общем случае определяется свойствами множества Парето и является для этого множества некоторой количественной характеристикой, зависящей, вообще говоря, от вектора параметров u . Поэтому естественной представляется постановка для модели (6.3.1) – (6.3.2) оптимизационной задачи *третьего уровня*, например такая:

$$\text{оптимизировать по } u \in \Theta \text{ выражение } \rho^{**}(u), \quad (6.3.5)$$

решением которой будут являться вектор параметров

$$u^{***} \in \Theta \quad \text{и число} \quad \rho^{***} = \rho^{**}(u^{***}). \quad (6.3.6)$$

Рассмотрим теперь задачу отыскания в пространстве параметров стандартным (например, градиентным) методом поиска экстремума величины рассогласованности значений целевых функций многокритериальной модели по схеме (6.3.4) – (6.3.5).

Отметим, что специфика этой схемы заключается в том, что постановка задачи (6.3.5) верхнего (*третьего*) уровня включает $\rho^{**}(u)$ – зависимость, являющуюся решением задачи (6.3.4) *второго уровня*, условие которой, в свою очередь, содержит негладкие зависимости

$$F_k^*(u) = f_k(x_k^*(u), u) \quad \forall k \in [1, N], \quad (6.3.7)$$

определенные решениями задач (6.3.3) нижнего (*первого*) уровня.

Кроме того, поскольку зависимости $\rho^{**}(u)$ и $F_k^*(u)$ $\forall k \in [1, N]$ в общем случае не являются дифференцируемыми функциями, следует

применить либо схемы негладкой оптимизации, либо аппроксимировать эти зависимости гладкими функциями. Ниже мы воспользуемся методом гладких штрафных функций (см. § 1.2), чтобы получить достаточно гладкие аппроксимации зависимостей $\rho^{**}(u)$ и $F_k^*(u)$ $\forall k \in [1, N]$.

При решении задачи верхнего уровня каким-либо итерационным методом для каждого шага этого метода оказывается необходимым решение задач второго и первого уровней при фиксированном векторе параметров u . Рассмотрим вначале возможную схему решения задач первого уровня.

Будем использовать для однокритериальных задач (6.3.3) вспомогательную функцию вида

$$A_k(\tau, x, u) = f_k(x, u) - \sum_{i=1}^m P(\tau, y_i(x, u)) \quad \forall k \in [1, N], \quad (6.3.8)$$

в то время как штрафная функция $P(\tau, s)$ выбирается удовлетворяющую условиям (2.1.4) – (2.1.7).

Как показано в § 1.2, в качестве сглаженной аппроксимации $x_k^*(u)$ – точного решения каждой из задач нижнего уровня (6.3.3), можно принять $\bar{x}_k(u)$ – стационарную точку вспомогательной функции (6.3.8), определяемую системой уравнений

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_j} = 0 \quad \forall j \in [1, n] \quad (6.3.9)$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial P}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = 0 \quad \forall j \in [1, n].$$

Поскольку в условие задачи второго уровня (6.3.4) входят зависимости $F_k^*(u) = f_k(x_k^*(u), u)$ $\forall k \in [1, N]$, не являющиеся дифференцируемыми функциями своих аргументов, то для этих зависимостей также необходимо выбрать сглаженную аппроксимацию.

В качестве такой аппроксимации можно использовать вспомогательную функцию, вычисленную в стационарной точке, то есть функцию $\bar{F}_k(u) = A_k(\tau, \bar{x}_k(u), u)$, так как (в силу свойств метода штрафных функций) ее значение при малых положительных τ близко к оптимальному значению целевой функции k -й задачи (6.3.3).

Стандартные методы оптимизации используемые для задач нижнего уровня, основанные на использовании непрерывных градиентов или

иных дифференциальных характеристик, предполагают, что помимо решения системы (6.3.9) мы можем находить и сами эти характеристики. Продемонстрируем это на примере вычисления производных функции $\bar{F}_k(u)$ по компонентам вектора параметров u .

Поскольку $\bar{F}_k(u) = A_k(\tau, \bar{x}_k(u), u)$, то по правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial u_p} = \frac{\partial A_k}{\partial u_p} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_p} \quad \forall p \in [1, r].$$

Что в силу (6.3.9) дает

$$\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial u_p} = \frac{\partial A_k}{\partial u_p} (\tau, \bar{x}_k(u), u) \quad \forall p \in [1, r]. \quad (6.3.10)$$

Отметим, что последнее упрощение было бы невозможным, если для $F_k^*(u)$ вместо сглаживающей аппроксимации $A_k(\tau, \bar{x}_k(u), u)$ использовать более естественную, на первый взгляд, аппроксимацию $f_k(\bar{x}_k(u), u)$.

Рассмотрим теперь процедуру решения задачи второго уровня.

Запишем условие задачи (6.3.4) в следующем более удобном для применения метода штрафных функций виде:

максимизировать $-\rho$ при условиях: $-\rho \leq 0$,

$$y_i(x, u) \leq 0, \quad i = [1, m],$$

$$Y_k(\rho, x, u) \leq 0, \quad k = [1, N], \quad (6.3.11)$$

$$\text{где } Y_k(\rho, x, u) = F_k^*(u) - \rho - f_k(x, u).$$

Решение этой задачи мы будем, как и раньше, обозначать символами $\rho^{**}(u)$ и $x^{**}(u)$.

Пусть $P(\tau, s)$ – штрафная функция за нарушение ограничения вида $s \leq 0$. Определим для задачи (6.3.10) вспомогательную функцию

$$E(\tau, \rho, x, u) = -\rho - P(\tau, -\rho) - \sum_{k=1}^N P(\tau, Y_k(\rho, x, u)) - \sum_{i=1}^m P(\tau, y_i(x, u)), \quad (6.3.12)$$

заменив предварительно в $Y_k(\rho, x, u)$ зависимость $F_k^*(u)$ на ее сглаженную аппроксимацию $\bar{F}_k(u)$.

Условия стационарности вспомогательной функции (6.3.12) по совокупности переменных $\{\rho, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ будут

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial \rho} = -1 + \frac{\partial P}{\partial \rho} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial P}{\partial Y_k} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial P}{\partial Y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial P}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = 0 \quad \forall j \in [1, n]. \end{cases} \quad (6.3.13)$$

Пусть решения системы (6.3.13) суть $\bar{\rho}(u)$ и $\bar{x}(u)$, тогда в качестве сглаженной аппроксимации зависимости $\rho^{**}(u)$ можно использовать функцию $\bar{\bar{E}}(u) = -E(\tau, \bar{\rho}(u), \bar{x}(u), u)$. Найдем производные этой функции по компонентам вектора параметров u .

По правилу дифференцирования сложной функции многих переменных имеем

$$\frac{\partial \bar{\bar{E}}}{\partial u_p} = \frac{\partial E}{\partial u_p} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial E}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_p} + \frac{\partial E}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial u_p} \quad \forall p \in [1, r],$$

что с учетом $\frac{\partial E}{\partial \rho} = 0$ и $\frac{\partial E}{\partial x_j} = 0 \quad \forall j \in [1, n]$ из (6.3.13) дает существенно более простое выражение:

$$\frac{\partial \bar{\bar{E}}}{\partial u_p} = \frac{\partial E}{\partial u_p}(\tau, \bar{\rho}(u), \bar{x}(u), u) \quad \forall p \in [1, r]. \quad (6.3.14)$$

Наконец получим формулы для компонент градиента от $\bar{\bar{E}}(u)$ в терминах функций, используемых в формулировке многокритериальной модели (6.3.4) – (6.3.5) и методе гладких штрафных функций.

Исходя из (6.3.12), получаем

$$\frac{\partial \bar{\bar{E}}}{\partial u_p} = - \sum_{k=1}^N \frac{\partial P}{\partial Y_k} \frac{\partial Y_k}{\partial u_p} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial P}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial u_p},$$

где $\frac{\partial Y_k}{\partial u_p} = \frac{\partial \bar{F}_k}{\partial u_p} - \frac{\partial f_k}{\partial u_p}$, а значения $\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial u_p}$ находятся из равенств (6.3.10).

Формулы (6.3.14) позволяют решать задачу верхнего уровня, применяя какой-либо из методов первого порядка, например, сопряженных направлений. Для полноты картины здесь следовало бы рассмотр-

реть и методы второго порядка. Однако мы сделаем это в этом параграфе позднее, перейдя сейчас к описанию демонстрационного примера – решению градиентным методом задачи третьего уровня для модели (6.3.3) – (6.3.4).

Проиллюстрируем особенности использования при исследовании многокритериальных моделей сглаживающих свойств метода штрафных функций следующим примером.

Рассмотрим достаточно наглядную многокритериальную математическую модель, в которой $x = \|x_1 x_2 x_3\|^T \in E^3$ – вектор независимых переменных, а вектор параметров $u = \|u_1 u_2\|^T \in E^2$.

Требуется максимизировать по x при некотором $u \in \Theta$ функции

$$f_1(x, u) = x_1, \quad f_2(x, u) = x_2, \quad f_3(x, u) = x_3$$

при условиях: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ и $x_3 \geq 0$,

$$a_1(u_1, u_2)x_1 + a_2(u_1, u_2)x_2 + a_3(u_1, u_2)x_3 \leq b(u_1, u_2),$$

где положительные функции $a_1(u), a_2(u), a_3(u)$ и $b(u)$ задаются условиями приведенными далее.

Геометрическая интерпретация многокритериальной модели приведена на рис. 6.10. Отметим ее основные особенности. Допустимой областью модели (при допустимом фиксированном u) является прямоугольная пирамида OABC. Множество Парето совпадает с гранью ABC или является его частью. Предполагается, что точка A имеет координатное представление $\|u_1 0 0\|^T$, а точка B – $\|0 u_2 0\|^T$.

Для большей наглядности рассмотрим три различных варианта задания в пространстве параметров множества Θ , а именно:

1° сумма длин отрезков OA, OB и OC постоянна и равна 3;

2° площадь треугольника ABC постоянна и равна 3;

3° объем пирамиды OABC постоянен и равен 3.

Применив стандартные методы аналитической геометрии получим, что для совместности системы ограничений модели необходимо существование $r \geq 0$ такого, что

$$\begin{aligned} a_1(u_1, u_2) &= u_2 r, \\ a_2(u_1, u_2) &= u_1 r, \\ a_3(u_1, u_2) &= u_1 u_2, \\ b(u_1, u_2) &= u_1 u_2 r. \end{aligned}$$

Причем выполнение условия 1° может быть обеспечено выбором

$$r = 3 - u_1 - u_2$$

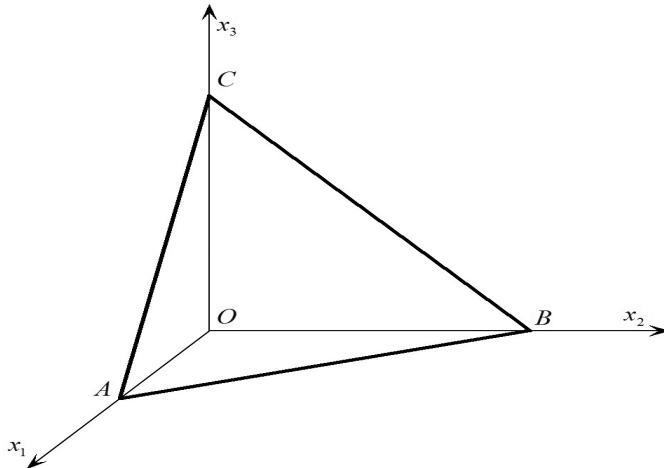


Рис. 6.10. Геометрическая интерпретация модели (6.3.6) – (6.3.7)

при ограничениях: $0.1 \leq u_1 \leq 2.5$ и $0.1 \leq u_2 \leq 2.5$.

Выполнение условия 2° может быть обеспечено выбором функции

$$r = \sqrt{\frac{36 - u_1^2 u_2^2}{u_1^2 + u_2^2}}$$

при ограничениях: $0.5 \leq u_1 \leq 4.0$ и $0.5 \leq u_2 \leq 4.0$, а условия 3° , соответственно, выбором $r = \frac{18}{u_1 u_2}$ при ограничениях: $1.0 \leq u_1 \leq 6.0$ и $0.5 \leq u_2 \leq 5.5$.

Минимальная величина рассогласованности критериев в данном примере зависит от формы множества Парето, которое является треугольником ABC либо его частью (см. рис. 6.10). Графическое представление для трех вариантов зависимости величины рассогласования от параметров u_1 и u_2 показано на рис. 6.11–6.16.

Рассмотрим подробнее свойства этой зависимости на примере варианта 1° , пояснив вид полученных зависимостей следующими рассуждениями.

Решения задач первого уровня (6.3.3) при фиксированных u_1 и u_2 очевидны:

$$f_1(x_u^*) = u_1, \quad f_2(x_u^*) = u_2, \quad f_3(x_u^*) = 3 - u_1 - u_2.$$

Следовательно, задача второго уровня (6.3.4) – минимизации рассогласованности критериев, будет иметь вид

минимизировать по $\{x_1, x_2, x_3, \rho\}$ величину ρ
при условиях: $\rho \geq 0$,

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ и } x_3 \geq 0,$$

$$u_2 r x_1 + u_1 r x_2 + u_1 u_2 x_3 \leq u_1 u_2 r,$$

$$\begin{aligned} x_1 &\geq u_1 - \rho, \\ x_2 &\geq u_2 - \rho, \\ x_3 &\geq r - \rho, \\ r &= 3 - u_1 - u_2. \end{aligned}$$

Ее решение будем по-прежнему обозначать $\rho^{**}(u_1, u_2)$.

Наконец, задача третьего уровня (6.3.5) для данного примера такова:

минимизировать по $\{u_1, u_2\}$ величину $\rho^{**}(u_1, u_2)$ при условиях:
 $0.1 \leq u_1 \leq 2.5$ и $0.1 \leq u_2 \leq 2.5$.

Из теории математического программирования известно, что свойства зависимости $\rho^{**}(u_1, u_2)$ в первую очередь определяются тем, как множество ограничений модели типа «неравенство» разделяется на *активные* и *неактивные*, первые из которых выполняются как равенства, а вторые – как строгие неравенства.

Это разделение зависит от значений параметров модели и его оптимальный вариант определяет решение оптимизационной задачи второго уровня.

Вначале предположим, что значения параметров модели инициируют конфликт всех трех критериев одновременно. Иначе говоря, улучшение значения какой-либо одной из целевых функций модели возможно лишь при ухудшении значений всех остальных.

В этом случае должны быть активны последние пять ограничений из задачи второго уровня, и мы получаем следующую систему уравнений, позволяющую найти аналитический вид зависимости $\rho^{**}(u_1, u_2)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 r x_1 + u_1 r x_2 + u_1 u_2 x_3 = u_1 u_2 r, \\ x_1 = u_1 - \rho, \\ x_2 = u_2 - \rho, \\ x_3 = r - \rho, \\ r = 3 - u_1 - u_2, \end{array} \right.$$

исключая из которой неизвестные x_1, x_2, x_3 и r , получаем искомую зависимость ρ от u_1 и u_2 в виде

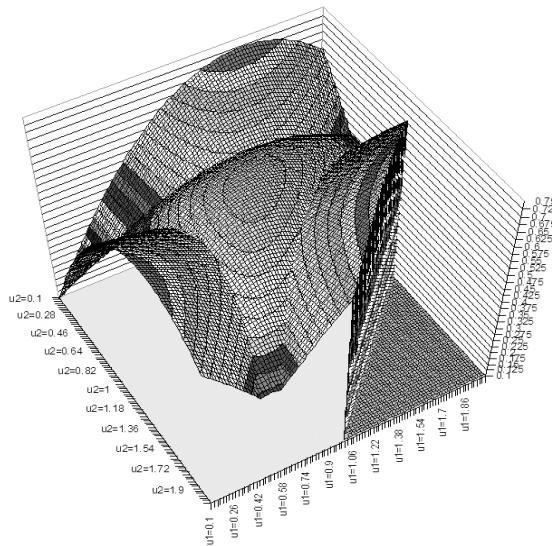


Рис. 6.11. Величина $|OA| + |OB| + |OC|$ постоянна (3D-график)

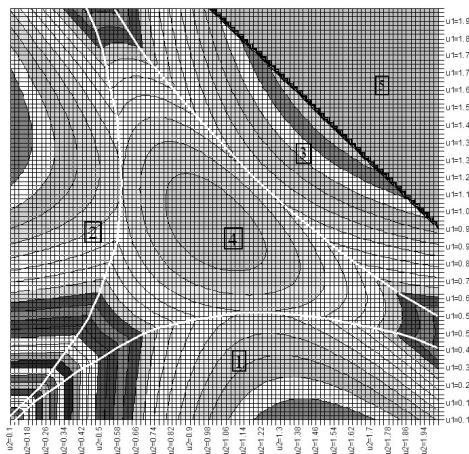


Рис. 6.12. Величина $|OA| + |OB| + |OC|$ постоянна (вид изолиний)

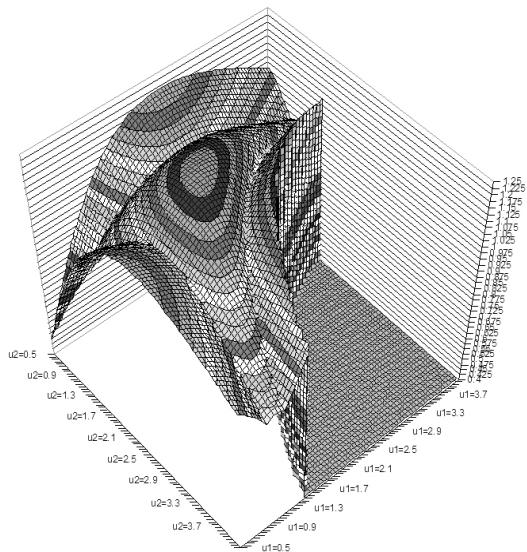


Рис. 6.13. Площадь треугольника ABC постоянна (3D-график)

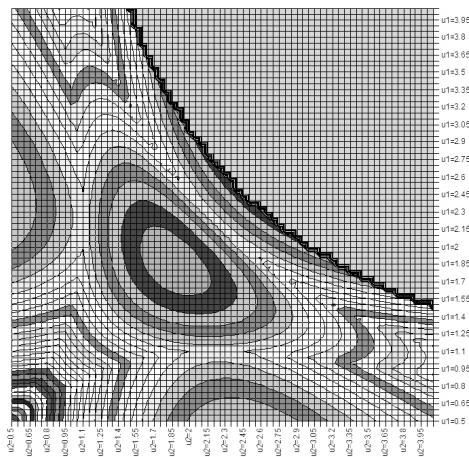


Рис. 6.14. Площадь треугольника ABC постоянна (вид изолиний)

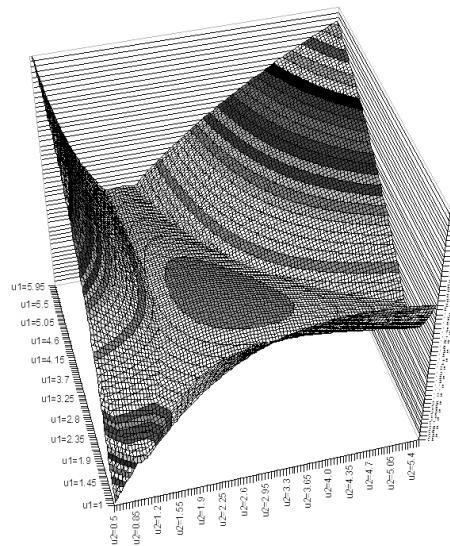


Рис. 6.15. Объем допустимой области ОАВС постоянен (3D-график)

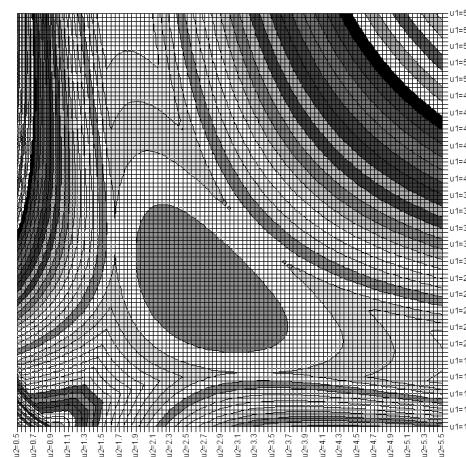


Рис. 6.16. Объем допустимой области ОАВС постоянен (вид изолиний)

$$\rho^{**}(u_1, u_2) = \frac{2}{\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{3 - u_1 - u_2}}.$$

Нетрудно проверить (сделайте это самостоятельно), что стационарными для $\rho^{**}(u_1, u_2)$ являются точки $\|1 \ 1\|^\top$, $\|-3 \ 3\|^\top$, $\|3 \ -3\|^\top$ и $\|3 \ 3\|^\top$, в первой из которых согласно критерию Сильвестра эта функция имеет локальный максимум со значением $\frac{2}{3}$, а остальные являются недопустимыми, поскольку для них нарушены условия неотрицательности переменных x_1, x_2, x_3 и r .

Полученная формула справедлива лишь в некоторой области, содержащейся в Θ . Анализ системы изолиний, изображенных на рис. 6.12, позволяет выделить пять областей с различными наборами активных ограничений. Границы между областями показаны светлыми линиями. Полученная выше формула справедлива только в области 4. В этой области множество Парето рассматриваемой модели состоит из внутренних точек треугольника ABC.

Вне области 4 формула для $\rho^{**}(u_1, u_2)$ другая. Например, для области 1 $\rho^{**}(u_1, u_2)$ находится из системы уравнений:

$$\begin{cases} u_2 r x_1 + u_1 r x_2 + u_1 u_2 x_3 = u_1 u_2 r, \\ x_1 = 0, \\ x_2 = u_2 - \rho, \\ x_3 = r - \rho, \\ r = 3 - u_1 - u_2, \end{cases}$$

поскольку множество *активных ограничений* в ней другое: оно содержит условие $x_1 = 0$, вместо $x_1 = u_1 - \rho$. Проверьте самостоятельно, что в области 1

$$\rho^{**}(u_1, u_2) = \frac{1}{\frac{1}{u_2} + \frac{1}{3 - u_1 - u_2}}.$$

Стационарных точек у этой зависимости нет.

Для областей 2 и 3 рассуждения и результаты аналогичные. Множествами Парето в областях 1, 2 и 3 являются стороны треугольника ABC: BC, AC и AB соответственно. Наконец, отметим, что в области 5 система условий (6.3.2) противоречива.

Результаты расчетов, использованные для построения графиков зависимостей $\rho^{**}(u)$ (рис. 6.11–6.16) для случаев 1° , 2° и 3° , приведены

в приложении 7.3 (см. табл. 7.3.1a-c, 7.3.2a-c и 7.3.1a-c). Заметим, что точные решения задач верхнего (третьего) уровня для этих случаев соответственно имеют вид

$$u_1^{**} = 1, \quad u_2^{**} = 1, \quad \rho^{**} = \frac{2}{3},$$

$$u_1^{**} = \sqrt[3]{18}, \quad u_2^{**} = \sqrt[3]{18}, \quad \rho^{**} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{18},$$

$$u_1^{**} = \sqrt[4]{12}, \quad u_2^{**} = \sqrt[4]{12}, \quad \rho^{**} = \frac{2}{3}\sqrt[4]{12}.$$

В рассматриваемом демонстрационном варианте многокритериальной модели мы имеем

целевые функции: максимизировать по $x = \|x_1 \ x_2 \ x_3\|^T \in E^3$

$$\begin{aligned} f_1(x, u) &= x_1, \\ f_2(x, u) &= x_2, \\ f_3(x, u) &= x_3 \end{aligned}$$

при условиях: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$,

$$a_1(u)x_1 + a_2(u)x_2 + a_3(u)x_3 \leq b(u),$$

где

$$\begin{aligned} a_1(u) &= u_2(3 - u_1 - u_2), \\ a_2(u) &= u_1(3 - u_1 - u_2), \\ a_3(u) &= u_1u_2, \\ b(u) &= u_1u_2(3 - u_1 - u_2). \end{aligned}$$

При этом

$$u = \|u_1 \ u_2\|^T \in \Theta = \left\{ u \mid \begin{array}{l} 0.1 \leq u_1 \leq 2.5 \\ 0.1 \leq u_2 \leq 2.5 \end{array} \right\}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} y_1 &= -x_1, \\ y_2 &= -x_2, \\ y_3 &= -x_1, \\ y_4 &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - b, \end{aligned}$$

а в качестве штрафной функции возьмем $P(\tau, s) = \tau \exp\left(\frac{s}{\tau}\right)$.

Тогда, вспомогательные функции однокритериальных задач (6.3.8) будут иметь вид

$$A_k(\tau, x, u) = x_k - \sum_{j=1}^4 \tau \exp \left(\frac{y_j}{\tau} \right) \quad \text{для } k = 1, 2, 3. \quad (6.3.15)$$

Условия стационарности этих функций по компонентам x задаются следующими системами уравнений (δ_{ij} – символ Кронекера):

$$\begin{cases} \frac{\partial A_k}{\partial x_1} = \delta_{1k} + \exp \left(\frac{y_1}{\tau} \right) - a_1 \exp \left(\frac{y_4}{\tau} \right) = 0, \\ \frac{\partial A_k}{\partial x_2} = \delta_{2k} + \exp \left(\frac{y_2}{\tau} \right) - a_2 \exp \left(\frac{y_4}{\tau} \right) = 0, \\ \frac{\partial A_k}{\partial x_3} = \delta_{3k} + \exp \left(\frac{y_3}{\tau} \right) - a_3 \exp \left(\frac{y_4}{\tau} \right) = 0 \quad \forall k = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Наконец, производные от сглаженных аппроксимирующих функций $\bar{F}_k(u)$ по компонентам вектора параметров u находятся из соотношений (6.3.10):

$$\begin{aligned} (\bar{F}_k)'_{u_p} &= \frac{\partial A_k}{\partial u_p}(\tau, \bar{x}_k(u), u) = \\ &= - \left(\bar{x}_{k1} \frac{\partial a_1}{\partial u_p} + \bar{x}_{k2} \frac{\partial a_2}{\partial u_p} + \bar{x}_{k3} \frac{\partial a_3}{\partial u_p} - \frac{\partial b}{\partial u_p} \right) \exp \left(\frac{y_4}{\tau} \right) \\ &\quad \forall k = 1, 2, 3, \quad \forall p = 1, 2. \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

Теперь рассмотрим задачу (6.3.11) – оптимизации рассогласования критериев модели. Для исследуемой многокритериальной модели эта задача имеет вид

$$\begin{aligned} &\text{минимизировать } \rho \text{ по совокупности переменных } \{x_1, x_2, x_3, \rho\} \\ &\text{при условиях: } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \rho \geq 0 \\ &\quad \text{и } a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \leq b. \end{aligned} \quad (6.3.17)$$

Кроме того, должны выполняться неравенства

$$x_k \geq \bar{F}_k - \rho \quad \forall k = 1, 2, 3.$$

Эту задачу будем также решать методом гладких штрафных функций с той же $P(\tau, s)$, для чего будет удобно ввести (помимо определенных ранее) обозначения $Y_k = \bar{F}_k - \rho - x_k \quad \forall k = 1, 2, 3$. В этом случае вспомогательная функция (6.3.12) будет

$$E(\tau, x, \rho, u) = -\rho - \tau \exp\left(\frac{-\rho}{\tau}\right) - \sum_{k=1}^3 \tau \exp\left(\frac{Y_k}{\tau}\right) - \sum_{j=1}^4 \tau \exp\left(\frac{y_j}{\tau}\right). \quad (6.3.18)$$

Условия стационарности вспомогательной функции (6.3.13) в случае (6.3.18) принимают вид системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial \rho} = -1 + \exp\left(\frac{-\rho}{\tau}\right) - \sum_{k=1}^3 \exp\left(\frac{Y_k}{\tau}\right) = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial x_k} = \exp\left(\frac{Y_k}{\tau}\right) + \exp\left(\frac{y_k}{\tau}\right) - a_k \exp\left(\frac{y_4}{\tau}\right) = 0 \quad \forall k = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (6.3.19)$$

Обозначим решения системы (6.3.19) как $\bar{\rho}(u)$ и $\bar{x}(u)$, и используем в качестве сглаженной аппроксимации зависимости $\rho^{**}(u)$ функцию

$$\bar{\bar{E}}(u) = -E(\tau, \bar{\rho}(u), \bar{x}(u), u). \quad (6.3.20)$$

Производные этой функции по компонентам вектора параметров u находятся по формулам (6.3.14) и для рассматриваемого примера имеют вид

$$\begin{aligned} (\bar{\bar{E}}(u))'_{u_p} &= \exp\left(\frac{y_4}{\tau}\right) \cdot \frac{\partial y_4}{\partial u_p} + \sum_{k=1}^3 \exp\left(\frac{Y_k}{\tau}\right) \cdot \frac{\partial Y_k}{\partial u_p} = \\ &= \exp\left(\frac{y_4}{\tau}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 x_j \frac{\partial a_j}{\partial u_p} - \frac{\partial b}{\partial u_p} \right) + \sum_{k=1}^3 \exp\left(\frac{Y_k}{\tau}\right) \cdot \frac{\partial \bar{F}_k}{\partial u_p} \quad \forall p = 1, 2. \end{aligned}$$

При этом значения производных от функций $\bar{F}_k(u)$ находятся по формулам (6.3.16).

Теперь для поиска стационарных точек функции $\bar{\bar{E}}(u)$ в пространстве параметров можно использовать такой-либо итеративный метод, улучшающие направления для которого находятся при помощи производных первого порядка. В качестве примера, для решения задачи (6.3.17) применим стандартную градиентную схему наискорейшего подъема.

Пусть $T = 0, 1, 2, \dots$ – номер итерации. Тогда эта схема будет описываться соотношениями

$$u_p^{T+1} = u_p^T + s^T w_p^T, \quad \text{где } w_p^T = \frac{1}{N_{grad}} \left(\bar{\bar{E}}(u^T) \right)'_{u_p}, \quad p = 1, 2.$$

Значение нормы градиента определяется обычной для ортонормированного базиса формулой

$$N_{grad} = \sqrt{\left(\left(\bar{\bar{E}}(u^T) \right)'_{u_1} \right)^2 + \left(\left(\bar{\bar{E}}(u^T) \right)'_{u_2} \right)^2},$$

а величина s^T – шага по улучшающему направлению, для каждой итерации оценивается методом дихотомии. Результаты вычислений приведены в табл. 6.3.1 и 6.3.2.

Таблица 6.3.1

T	u_1	u_2	$\bar{\bar{E}}$	$\bar{\bar{\rho}}$
0	0.700000000	1.600000000	0.580923855	0.545812501
1	0.700000000	1.200000000	0.633041421	0.596126653
2	0.900876900	1.159092100	0.654535635	0.621144210
3	0.941239800	1.000136600	0.660271356	0.626927551
4	0.981719000	1.018621200	0.661487390	0.628152833
5	1.000234400	1.000052500	0.661620557	0.628286990
6	1.000071000	0.999946090	0.661620583	0.628287016

Таблица 6.3.2

T	N_{grad}	w_1	w_2	s
0	0.231363725	-1.8973*10^-9	-1.000000000	0.400000000
1	0.131142557	0.979887531	-0.199550560	0.205000000
2	0.076755604	0.246115279	-0.969240563	0.164000000
3	0.050581430	0.909645878	0.415384614	0.044500000
4	0.010207109	0.706089900	-0.708122202	0.026222500
5	2.43444*10^-4	-0.837971176	-0.545714493	0.000195000
6	3.73575*10^-5	-0.922621240	0.385707203	0.000076500

В заключение рассмотрим метод нахождения для функции $\bar{\bar{E}}(u)$ элементов матрицы Гессе, знание которой позволяет использовать в процессе поиска стационарных точек методы второго порядка.

Применяя к функции (6.3.20) правила дифференцирования сложной функции, получаем

$$\left(\bar{\bar{E}}(u)\right)''_{u_p u_q} = \frac{\partial^2 \bar{\bar{E}}}{\partial u_p \partial u_q} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \bar{\bar{E}}}{\partial u_p \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_q} + \frac{\partial^2 \bar{\bar{E}}}{\partial u_p \partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial u_q}, \quad p, q = [1, r]. \quad (6.3.21)$$

Вторые частные производные вычисляются непосредственно в точке $\{\bar{x}, \bar{\rho}\}$, а первые производные, т. е. $\frac{\partial x_j}{\partial u_q}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial u_q}$, находятся согласно теореме о неявных функциях [13] из системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial u_q} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 E}{\partial \rho \partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_q} + \frac{\partial^2 E}{\partial \rho \partial u_q} = 0, \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x_j \partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial u_q} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 E}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_q} + \frac{\partial^2 E}{\partial x_j \partial u_q} = 0 \quad \forall j = [1, n], \end{cases}$$

которая, в свою очередь, получается при последовательном дифференцировании по переменным ρ и x_j $j = [1, n]$ условий стационарности (6.3.13).

Наконец отметим, что для вычисления производных (6.3.21) также необходимо знать значения вторых производных от функций $\bar{F}_k(u)$. Эти значения могут быть найдены (аналогичным использованному выше) методом из формул (6.3.10) и условий (6.3.9) – стационарности вспомогательных функций $A_k(\tau, x, u)$.

Соответствующие формулы получите в качестве упражнения самостоятельно.

Рассмотрим теперь задачу поиска экстремальных значений рассогласованности значений целевых функций в трехуровневой многокритериальной модели, используя двариант метода функций обратных связей из [30].

Для решения задачи отыскания в пространстве параметров стандартным (например, градиентным) методом поиска экстремума величины рассогласованности значений целевых функций многокритериальной модели (6.3.3) будем использовать функции обратных связей.

Отметим, что особенностью этого подхода является тот факт, что постановка задачи верхнего (*третьего*) уровня включает $\rho_{k u}^{**}$ – зависимость, являющуюся решением задачи *второго* уровня, условие которой, в свою очередь, содержит зависимости $F_{k u}^* = F_k(x_{k u}^*(u), u)$ $\forall k \in [1, N]$, определяемые решениями задач *нижнего* (*первого*) уровня.

При этом зависимости $\rho_{k u}^{**}$ и $F_{k u}^* \forall k \in [1, N]$ в общем случае (даже для гладких функций $F_k(x, u)$ и $f_i(x, u)$) не являются дифференцируемыми функциями, то есть непосредственное использование каких-либо численных методов, основанных на применении тейлоровских аппроксимаций, оказывается невозможным.

Для преодоления этого затруднения предлагается воспользоваться сглаживающим свойством метода функций обратных связей, чтобы получить гладкие аппроксимации зависимостей $\rho^{**}(u)$ и $F_k^*(u) \forall k \in [1, N]$, допускающие использование аппроксимаций по формуле Тейлора до второго порядка включительно.

При этом будем предполагать, что используемые в методе обратных связей функции удовлетворяют сформулированным ранее (см. гл.4) условиям:

Рассмотрим вначале схему решения задач первого уровня.

Будем использовать для однокритериальных задач (3) вспомогательную функцию вида

$$U_k(\tau, x, \Lambda, u) = F_k(x, u) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x, u) + RR(\tau, x, \Lambda) \quad \forall k \in [1, N], \quad (6.3.21)$$

в то время как функции $RR(\tau, s)$ в регуляризирующем слагаемом

$$RR(\tau, x, \Lambda) = - \sum_{j=1}^m R(\tau, \xi_j) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i)$$

по-прежнему выбираются согласно условиям (6)–(7).

В качестве сглаженной аппроксимации $x_{u k}^*$ – точного решения каждой из задач нижнего уровня (3), можно принять $\{\bar{x}^k(\tau, u), \bar{\Lambda}^k(\tau, u)\}$ – стационарную точку вспомогательной функции (6.3.21), определяемую, согласно теореме о неявных функциях [13] системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial U_k}{\partial \xi_{j(k)}} = 0 & \forall j \in [1, n], \\ \frac{\partial U_k}{\partial \lambda_{j(k)}} = 0 & \forall i \in [1, m]. \end{cases} \quad (6.3.22)$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} \frac{\partial L_k}{\partial \lambda_{i(k)}}(\bar{x}^{(k)}, \bar{\Lambda}^{(k)}) = -Q(\tau, \bar{\lambda}_{i(k)}) & \forall i = [1, m], \\ \frac{\partial L_k}{\partial \xi_{j(k)}}(\bar{x}^{(k)}, \bar{\Lambda}^{(k)}) = Q(\tau, \bar{\xi}_{j(k)}) & \forall j = [1, n], \end{cases} \quad (6.3.23)$$

где $L_k(x_{(k)}, \Lambda_{(k)})$ – стандартная функция Лагранжа для задачи (6.3.3), а $Q(\tau, s) = \frac{\partial R}{\partial s}$.

В рассматриваемой задаче в условие задачи второго уровня (6.3.4) входят зависимости $F_{u k}^* = F_k(x_{u k}^*, u) \quad \forall k \in [1, N]$, не являющиеся дифференцируемыми функциями своих аргументов, то для этих зависимостей необходимо построить сглаженную аппроксимацию.

В качестве такой аппроксимации используем вспомогательную функцию, вычисленную в стационарной точке, то есть функцию $\bar{F}_k(u) = U_k(\tau, \bar{x}_{(k)}(\tau, u), \bar{\Lambda}_{(k)}(\tau, u), u)$, так как (в силу свойств метода

штрафных функций) ее значение при малых положительных τ близко к оптимальному значению целевой функции k -й задачи (6.3.3).

Стандартные методы оптимизации используемые для задач нижнего уровня, основанные на использовании значений, градиентов или иных дифференциальных характеристик, предполагают, что помимо решения системы (6.3.22) можно находить и сами эти характеристики. Рассмотрим вначале процедуру вычисления производных функции $\bar{F}_k(u)$ по компонентам вектора параметров u , предполагая, что система (6.3.22) (или (6.3.23)) уже решена.

Поскольку $\bar{F}_k(u) = U_k(\tau, \bar{x}^k(\tau, u), \bar{\Lambda}^k(\tau, u), u)$, то по правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$(\bar{F}_k)'_{u_p} = \frac{\partial U_k}{\partial u_p} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial U_k}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial u_p} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial U_k}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_p} \quad \forall p \in [1, r].$$

Что в силу (6.3.22) дает

$$(\bar{F}_k)'_{u_p} = \frac{\partial U_k}{\partial u_p} \left(\tau, \bar{x}^k(\tau, u), \bar{\Lambda}^k(\tau, u), u \right) \quad \forall p \in [1, r]. \quad (6.3.24)$$

Отметим, что последнее упрощение было бы невозможным, если для $F_{u_k}^*$ вместо сглаживающей аппроксимации $U_k(\tau, \bar{x}^k(\tau, u), \bar{\Lambda}^k(\tau, u), u)$ использовать аппроксимацию $F_k(\bar{x}_k(\tau, u), u)$.

Рассмотрим теперь процедуру решения задачи второго уровня (6.3.4) методом функций обратных связей.

Построим для задачи (6.3.4) вспомогательную U -функцию, введя вектор $M \in E^N$, – множителей Лагранжа для второй группы ограничений в задаче (6.3.4), для которого $\|M\| = \|\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\|^\top$

$$\begin{aligned} U(\tau, \rho, x, \Lambda, M, u) = & -\rho - \sum_{k=1}^N \mu_k Y_k(\rho, x, u) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x, u) - \\ & - R(\tau, \rho) - \sum_{j=1}^n R(\tau, \xi_j) + \sum_{k=1}^N R(\tau, \mu_k) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i), \end{aligned} \quad (6.3.25)$$

заменив предварительно в $Y_k(\rho, x, u)$ зависимость $F_{u_k}^*$ на ее сглаженную аппроксимацию $\bar{F}_k(u)$.

Условия стационарности вспомогательной функции (6.3.25) по совокупности переменных

$$\left\{ \rho, x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N \right\}$$

будут

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial \rho} = -1 + \sum_{k=1}^N \mu_k - Q(\tau, \rho) = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \xi_j} = \sum_{k=1}^N \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial \xi_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} - Q(\tau, \xi_j) = 0 \quad \forall j \in [1, n], \\ \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} = -f_i(x, u) + Q(\tau, \xi_j) = 0 \quad \forall i \in [1, m], \\ \frac{\partial U}{\partial \mu_k} = -Y_k(x, u) + Q(\tau, \mu_k) = 0 \quad \forall k \in [1, N]. \end{array} \right. \quad (6.3.26)$$

Обозначим решения системы (6.3.26) как $\bar{\rho}(\tau, u)$, $\bar{x}(\tau, u)$, $\bar{\Lambda}(\tau, u)$, и $\bar{M}(\tau, u)$, тогда в качестве сглаженной аппроксимации зависимости ρ_u^{**} можно использовать функцию

$$\bar{U}(\tau, u) = U\left(\tau, \bar{\rho}(\tau, u), \bar{x}(\tau, u), \bar{\Lambda}(\tau, u), \bar{M}(\tau, u), u\right).$$

Найдем производные этой функции по компонентам вектора параметров u .

По правилу дифференцирования сложной функции многих переменных имеем

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial u_p} = \frac{\partial U}{\partial u_p} + \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial u_p} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial u_p} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_p} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial U}{\partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial u_p} \quad \forall p \in [1, r],$$

что, с учетом $\frac{\partial U}{\partial \rho} = 0$, $\frac{\partial U}{\partial \xi_j} = 0 \quad \forall j \in [1, n]$, $\frac{\partial U}{\partial \lambda_i} = 0 \quad \forall i \in [1, m]$ и

$\frac{\partial U}{\partial \mu_k} = 0 \quad \forall k \in [1, N]$ из (3.2.6), дает более простое выражение:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial u_p} = \frac{\partial U}{\partial u_p}\left(\tau, \bar{\rho}(\tau, u), \bar{x}(\tau, u), \bar{\Lambda}(\tau, u), \bar{M}(\tau, u), u\right) \quad \forall p \in [1, r]. \quad (6.3.27)$$

Наконец получим формулы для компонент градиента от $\bar{U}(\tau, u)$ в терминах функций, используемых в формулировке многокритериальной модели (6.3.3) и методе функций обратных связей.

Из (6.3.25) имеем

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial u_p} = - \sum_{k=1}^N \mu_k \frac{\partial Y_k}{\partial u_p} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_p},$$

причем для

$$\frac{\partial Y_k}{\partial u_p} = \frac{\partial \bar{F}_k}{\partial u_p} - \frac{\partial f_k}{\partial u_p},$$

значения $\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial u_p}$ определяются равенствами $Y_k(\rho, x, u) = \bar{F}_k(u) - \rho - F_k(x, u) \quad \forall k = [1, N].$

Формулы (6.3.27) позволяют решать задачу верхнего уровня, применяя какой-либо из методов первого порядка.

Рассмотрим теперь метод нахождения для функции $\bar{\bar{U}}(u)$ элементов матрицы Гессе, знание которой позволяет использовать в процессе поиска стационарных точек методы второго порядка.

Применяя к этой функции правила дифференцирования сложной функции, получаем

$$\begin{aligned} (\bar{\bar{U}}(u))''_{u_p u_q} &= \frac{\partial^2 \bar{\bar{U}}}{\partial u_p \partial u_q} + \frac{\partial^2 \bar{\bar{U}}}{\partial u_p \partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial u_q} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \bar{\bar{U}}}{\partial u_p \partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial u_q} + \\ &+ \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \bar{\bar{U}}}{\partial u_p \partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_q} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 \bar{\bar{U}}}{\partial u_p \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial u_q} \quad \forall p, q = [1, r]. \end{aligned}$$

Вторые частные производные вычисляются непосредственно в точке $\{\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{\rho}}, \bar{\bar{\Lambda}}, \bar{\bar{M}}\}$, а первые производные, т. е.

$$\frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial U}{\partial \xi_j} \quad \forall j \in [1, n], \quad \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} \quad \forall i \in [1, m] \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial \mu_k} \quad \forall k \in [1, N]$$

могут быть найдены по теореме о неявных функциях [13] из системы линейных уравнений (6.3.28), которая, в свою очередь, получается при последовательном дифференцировании по переменным ρ и x_j $j = [1, n]$ условий стационарности (6.3.26).

Заметим, что в формулах (6.3.28) мы используем $h = [1, n]$, $s = [1, m]$, $t = [1, N]$.

$$\left\{
\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial u_q} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial u_q} + \\
& \quad + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_q} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial u_q} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial u_q}, \\
& \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_h \partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial u_q} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_h \partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial u_q} + \\
& \quad + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_h \partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_q} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_h \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial u_q} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_h \partial u_q}, \\
& \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_s \partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial u_q} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_s \partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial u_q} + \\
& \quad + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_s \partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_q} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_s \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial u_q} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_s \partial u_q}, \\
& \frac{\partial^2 U}{\partial \mu_t \partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial u_q} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \mu_t \partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial u_q} + \\
& \quad + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \mu_t \partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_q} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 U}{\partial \mu_t \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial u_q} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \mu_t \partial u_q},
\end{aligned}
\right. \tag{6.3.28}$$

В этом случае приближенное решение задачи верхнего уровня сводится к поиску экстремума по u вспомогательной функции $\bar{U}(\tau, u) = U(\tau, \bar{x}(\tau, u), \bar{\lambda}(\tau, u), u)$, для реализации которого также можно использовать стандартные итерационные алгоритмы.

Например для методе Ньютона компоненты улучшающего вектора w находятся из системы линейных уравнений

$$\sum_{t=1}^n \bar{U}_{\nu_t \nu_p}'' w_t = -\bar{U}_{\nu_p}' \quad \forall p = [1, k].$$

Наконец заметим, что при необходимости и соответствующих предположениях о гладкости функций (6.3.1)–(6.3.2), из линейных систем с той же основной матрицей могут быть найдены значения производных более высокого порядка.

Рассмотрим в качестве примера использования функций обратных связей многокритериальную модель, в которой $x = \|\xi_1 \xi_2 \xi_3\|^T \in E^3$ – вектор независимых переменных, а вектор параметров

$$u = \|u_1 u_2\|^T \in \Theta : \left\{ 1 \leq u_1 \leq 5; \quad 1 \leq u_2 \leq 6; \quad u_1 + u_2 \leq 6 \right\} \subseteq E^2.$$

Требуется максимизировать по x при фиксированном векторе параметров $u \subseteq \Theta \in E^2$ функции

$$F_{(1)}(x, u) = \xi_1, \quad F_{(2)}(x, u) = u_1 \xi_2, \quad F_{(3)}(x, u) = 3 \xi_3 \quad (6.3.29)$$

при условиях: $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$ и $\xi_3 \geq 0$,

$$f_1(x, u) = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \leq u_2.$$

Наконец, пусть задача *верхнего уровня* заключается в отыскании в пространстве параметров на множестве Θ точек с *экстремальными значениями* минимальной рассогласованности критериев, определяемой условиями (6.3.4).

Используем функцию обратной связи вида $Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right)$.

Тогда система (6.3.9) для вспомогательных функций $U_{(k)}$ $k = 1, 2, 3$ будет

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -u_2 + \bar{\xi}_{1(k)} + \bar{\xi}_{2(k)} + \bar{\xi}_{3(k)} & = & \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_{(k)} - \frac{1}{\bar{\lambda}_{(k)}} \right), \\ \bar{\lambda}_{(k)} & = & -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_{1(k)} - \frac{1}{\bar{\xi}_{1(k)}} \right), \\ -u_1 \delta_{k2} + \bar{\lambda}_{(k)} & = & -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_{2(k)} - \frac{1}{\bar{\xi}_{2(k)}} \right), \\ \bar{\lambda}_{(k)} & = & -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\xi}_{3(k)} - \frac{1}{\bar{\xi}_{3(k)}} \right). \end{array} \right. \quad (6.3.30)$$

Здесь δ_{ij} – стандартный символ Кронекера.

Для определения значений сглаженной величины $\bar{\rho}(\tau, u)$ и ее дифференциальных характеристик первого порядка, решим вначале последовательно системы (6.3.30) в фиксированной точке в пространстве параметров $u_1 = 2$ и $u_2 = 5$.

Иначе говоря, мы решаем задачи нижнего уровня, то есть системы (6.3.23), которые в приводимом примере имеют вид (6.3.30), и находим $\bar{U}_{(1)}$, $\bar{U}_{(2)}$ и $\bar{U}_{(3)}$ – значения сглаженных оценок целевых функций одноэкстремальных задач $F_{(k)u}^* = F_{(k)}(x_{(k)u}^*, u)$ $\forall k \in [1, 3]$.

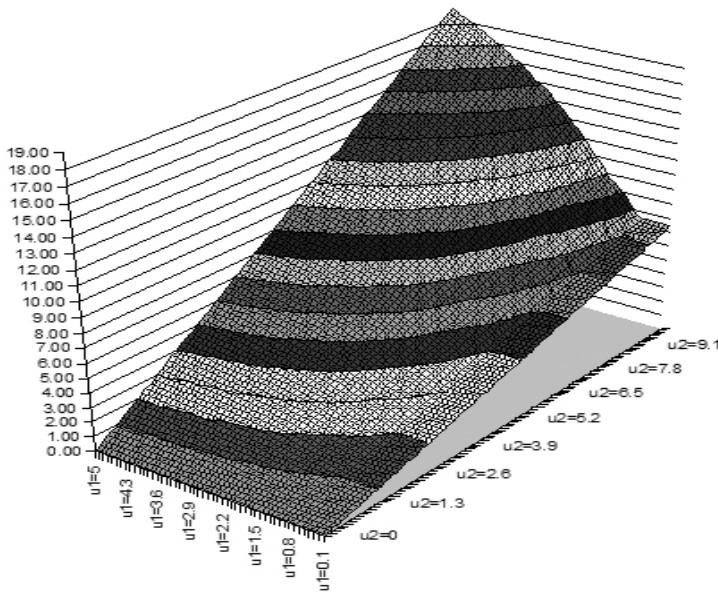


Рис. 6.17. Графическое представление функции $\bar{\rho}(\tau, u)$.

Таблица 6.3.3

k	$\bar{\xi}_{1(k)}$	$\bar{\xi}_{2(k)}$	$\bar{\xi}_{3(k)}$	$\bar{\lambda}_{(k)}$	$\bar{F}_{(k)}$
1	4.989512548	$5.1225 \cdot 10^{-3}$	$5.1225 \cdot 10^{-3}$	0.976054539	4.989512548
2	$2.5304 \cdot 10^{-3}$	5.002288834	$2.5304 \cdot 10^{-3}$	1.975988098	10.004577668
3	$1.6801 \cdot 10^{-3}$	$1.6801 \cdot 10^{-3}$	5.009839344	2.975948839	15.029518033

Решения систем (6.3.30) приведены в табл. 6.3.3.

Затем, используя оценки решений задач первого уровня, сформируем условие задачи второго уровня – системы (6.3.11), которая для данной

задачи имеет вид следующей системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -u_2 + \bar{\bar{\xi}}_1 + \bar{\bar{\xi}}_2 + \bar{\bar{\xi}}_3 & = & \frac{\tau}{2} \left(\bar{\bar{\lambda}} - \frac{1}{\bar{\bar{\lambda}}} \right), \\ \bar{F}_1 - \bar{\bar{\xi}}_1 - \bar{\bar{\rho}} & = & -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\bar{\mu}}_1 - \frac{1}{\bar{\bar{\mu}}_1} \right), \\ \bar{F}_2 - u_1 \bar{\bar{\xi}}_2 - \bar{\bar{\rho}} & = & -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\bar{\mu}}_2 - \frac{1}{\bar{\bar{\mu}}_2} \right), \\ \bar{F}_3 - 3\bar{\bar{\xi}}_3 - \bar{\bar{\rho}} & = & -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\bar{\mu}}_3 - \frac{1}{\bar{\bar{\mu}}_3} \right), \\ \bar{\bar{\lambda}}_1 - \bar{\bar{\mu}}_1 & = & -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\bar{\xi}}_1 - \frac{1}{\bar{\bar{\xi}}_1} \right), \\ \bar{\bar{\lambda}}_1 - u_1 \bar{\bar{\mu}}_2 & = & -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\bar{\xi}}_2 - \frac{1}{\bar{\bar{\xi}}_2} \right), \\ \bar{\bar{\lambda}}_1 - 3\bar{\bar{\mu}}_3 & = & -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\bar{\xi}}_3 - \frac{1}{\bar{\bar{\xi}}_3} \right), \\ 1 - \bar{\bar{\mu}}_1 - \bar{\bar{\mu}}_2 - \bar{\bar{\mu}}_3 & = & -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\bar{\rho}} - \frac{1}{\bar{\bar{\rho}}} \right). \end{array} \right. \quad (6.3.24)$$

Решение системы (6.3.24) для фиксированной точки в пространстве параметров с $u_1 = 2$ и $u_2 = 5$ при различных значениях τ приведено в табл. 6.3.4.

Графическое представление зависимости $\bar{\bar{\rho}}(\tau, u)$ для значений параметров $\{0 \leq u_1 \leq 5; 0 \leq u_2 \leq 10\}$. показано на рис. 6.17.

Завершая описание процедуры решения задачи второго уровня, получим значения первых производных сглаженной зависимости $\bar{\bar{\rho}}(\tau, u)$ для выбранной точки в пространстве параметров. Так, используя соотношения для производных функции $\bar{\bar{U}}$ в рассматриваемой задаче верхнего уровня получаем формулы

$$(\bar{\bar{U}}'_{u_1}) = \bar{\bar{\mu}}_2 \left(\bar{\bar{\xi}}_{(2)2} - \bar{\bar{\xi}}_2 \right) = 1.220454449,$$

$$(\bar{\bar{U}}'_{u_2}) = \bar{\mu}_1 \bar{\lambda}_{(1)} - \bar{\mu}_2 \bar{\lambda}_{(2)} - \bar{\mu}_3 \bar{\lambda}_{(3)} = 1.846376781,$$

при вычислении значений которых использовались данные из табл. 6.3.3 и табл. 6.3.4 (для $\tau = 0.01$).

τ	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	$\bar{\xi}_3$	$\bar{\rho}$	$\bar{\lambda}$	$\bar{\mu}_1$	$\bar{\mu}_2$	$\bar{\mu}_3$
10^{-1}	0.03618348	1.94260527	3.05679185	6.15035924	1.41721923	0.03718232	0.74430543	0.51790060
10^{-2}	$4.12 \cdot 10^{-3}$	1.99273526	3.00514664	6.02418952	1.21955585	$4.81 \cdot 10^{-3}$	0.61350520	0.41097259
10^{-3}	$4.16 \cdot 10^{-4}$	1.99925834	3.00051045	6.00250993	1.20192073	$4.98 \cdot 10^{-4}$	0.60133513	0.40108478
10^{-4}	$4.17 \cdot 10^{-5}$	1.99992568	3.00005100	6.00025190	1.20019171	$5.00 \cdot 10^{-5}$	0.60013335	0.40010835
10^{-5}	$4.17 \cdot 10^{-6}$	1.99999257	3.00000510	6.00002520	1.20001917	$5.00 \cdot 10^{-6}$	0.60001333	0.40001083
10^{-6}	$4.17 \cdot 10^{-7}$	1.99999926	3.00000051	6.00000252	1.20000192	$5.00 \cdot 10^{-7}$	0.60000133	0.40000108
10^{-7}	$4.17 \cdot 10^{-8}$	1.99999993	3.00000005	6.00000025	1.20000019	$5.00 \cdot 10^{-8}$	0.60000013	0.40000011
10^{-8}	$4.17 \cdot 10^{-9}$	1.99999999	3.00000001	6.00000003	1.20000002	$5.00 \cdot 10^{-9}$	0.60000001	0.40000001

Таблица 6.3.4

Продемонстрируем, наконец, процедуру решения задачи верхнего (третьего) уровня.

Для решения демонстрационной задачи третьего уровня в рассматриваем примере используем одну из стандартных градиентных схем, описанных например в [9].

Рассмотрим вначале решение задачи отыскания *максимума* функции $\bar{\rho}(\tau, u)$. В качестве начальной точки для поиска в пространстве параметров возьмем $u_1 = 2$ и $u_2 = 3$.

Значения для производных $\bar{\rho}(\tau, u)$ будем, как и ранее, получать, используя соотношения (3.8), но уже для *различных* пробных точек в пространстве параметров

$$(\bar{\bar{U}}'_{u_1}) = \bar{\mu}_2 \left(\bar{\xi}_{(2)2} - \bar{\xi}_2 \right),$$

$$(\bar{\bar{U}}'_{u_2}) = \bar{\mu}_1 \bar{\lambda}_{(1)} - \bar{\mu}_2 \bar{\lambda}_{(2)} - \bar{\mu}_3 \bar{\lambda}_{(3)},$$

при вычислении значений которых использовались данные для $\tau = 0.01$ из табл. 6.3.5(a, b, c) и табл.4а.

Номера итераций обозначим как $t = 0, 1, 2, \dots$. Для вычисления значений параметров используем следующие формулы:

$$\begin{cases} u_{1(t+1)} = u_{1(t)} + s_{(t)} w_{1(t)}, \\ u_{2(t+1)} = u_{2(t)} + s_{(t)} w_{2(t)}. \end{cases}$$

k	$\bar{\xi}_{1(k)}$	$\bar{\xi}_{2(k)}$	$\bar{\xi}_{3(k)}$	$\bar{\lambda}_{(k)}$	$\bar{F}_{(k)}$
1	1.989850690	$5.0373 \cdot 10^{-3}$	$5.0373 \cdot 10^{-3}$	0.992563498	1.989850690
2	$1.6709 \cdot 10^{-3}$	2.009949563	$1.6709 \cdot 10^{-3}$	2.992437877	6.029848690
3	$1.6709 \cdot 10^{-3}$	$1.6709 \cdot 10^{-3}$	2.009949563	2.992437877	6.029848690

Табл. 6.3.5а. Решения задач первого уровня в пространстве параметров на итерации $t = 0$.

k	$\bar{\xi}_{1(k)}$	$\bar{\xi}_{2(k)}$	$\bar{\xi}_{3(k)}$	$\bar{\lambda}_{(k)}$	$\bar{F}_{(k)}$
1	2.737627466	$5.0600 \cdot 10^{-3}$	$5.0600 \cdot 10^{-3}$	0.988138262	2.737627466
2	$1.5431 \cdot 10^{-3}$	2.759437908	$1.5431 \cdot 10^{-3}$	3.240148197	8.974060250
3	$1.6733 \cdot 10^{-3}$	$1.6733 \cdot 10^{-3}$	2.757786667	2.988024115	8.273360002

Табл. 6.3.5b. Решения задач первого уровня в пространстве параметров на итерации $t = 1$.

k	$\bar{\xi}_{1(k)}$	$\bar{\xi}_{2(k)}$	$\bar{\xi}_{3(k)}$	$\bar{\lambda}_{(k)}$	$\bar{F}_{(k)}$
1	3.784658132	$5.0895 \cdot 10^{-3}$	$5.8955 \cdot 10^{-3}$	0.982397833	3.784658132
2	$2.2859 \cdot 10^{-3}$	3.799093445	$2.2859 \cdot 10^{-3}$	2.187305995	8.376945423
3	$1.6766 \cdot 10^{-3}$	$1.6766 \cdot 10^{-3}$	3.804896407	2.982289614	11.414689221

Табл. 6.3.5с. Решения задач первого уровня в пространстве параметров на итерации $t = 2$.

Значения параметров $u = \|u_1 \ u_2\|^\top$, вспомогательных переменных задач второго уровня, векторов направления движения в пространстве параметров $w = \|w_1 \ w_2\|^\top$, а также величины шага по направлению s для выполненных итераций, приведены в табл. 6.3.6(а,б).

t	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	$\bar{\xi}_3$	$\bar{\lambda}$	$\bar{\mu}_1$	$\bar{\mu}_2$	$\bar{\mu}_3$
0	$3.31 \cdot 10^{-3}$	1.00047330	1.00047330	1.51314585	$4.77 \cdot 10^{-3}$	0.50438353	0.50438353
1	$3.16 \cdot 10^{-3}$	1.43152786	1.31794231	1.58432971	$3.14 \cdot 10^{-3}$	0.48829318	0.52904188
2	$3.90 \cdot 10^{-4}$	1.60220876	2.19146734	1.28795684	$4.68 \cdot 10^{-4}$	0.58632915	0.43221087

Табл. 6.3.6а. Решения задач второго уровня (1-я часть таблицы).

t	$\bar{\bar{u}}_1$	$\bar{\bar{u}}_2$	\bar{U}	$\bar{\rho}$	$\Delta \bar{\bar{u}}_1$	$\Delta \bar{\bar{u}}_2$	S
0	3.00000000	2.00000000	-3.04234558	3.03582000	-0.50916320	-1.51025650	0.78922473
1	3.25213342	2.74786658	-4.36517036	4.32633892	-0.64840942	-1.57549879	1.48089100
2	2.20498536	3.79501464	-4.89353217	4.84969456	-1.28809754	-1.28809754	0.00000000

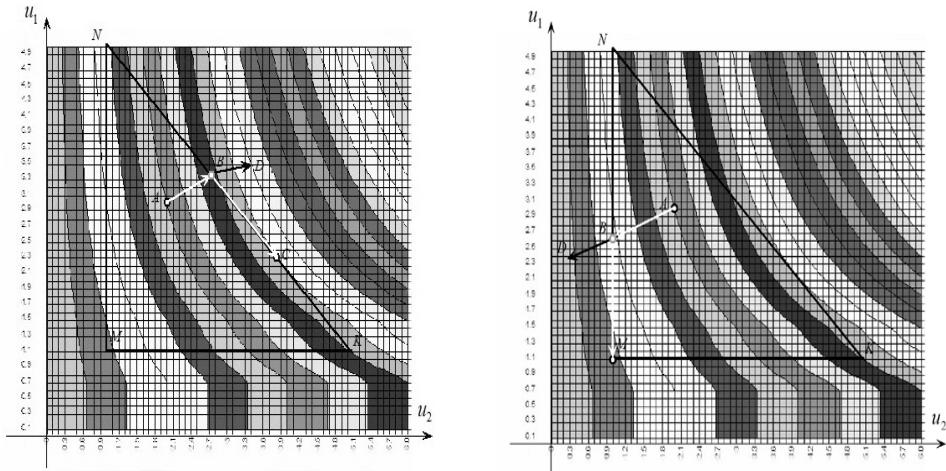


Рис. 6.18. Максимизация и минимизация функции $\bar{\rho}(\tau, u)$ для $u \in \Theta$.

Табл. 6.3.6b. Решение задач второго уровня (2-я часть таблицы).

К данным, приведенным в табл. 6.3.6(a,b), дадим следующие пояснения. На рис. 6.18 множество Θ является треугольником MNK . Белые стрелки изображают итерации процесса решения задачи 3-го уровня.

В начальной точке процедуры поиска максимума функции $\bar{\rho}(\tau, u)$ с $u_1 = 3$ и $u_2 = 2$ за улучшающее направление примем нормированный вектор ее градиента. На рис. 6.3.6 этот вектор коллинеарен вектору \vec{AB} . Величина S по этому направлению определяется из условия $B \in NK$.

В точке B вектор градиента функции $\bar{\rho}(\tau, u)$ проецируется на NK и нормируется. В результате вектор улучшающего направления оказывается равным $w = \left\| -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2} \right\|^T$, величина шага по которому определяется условием ортогональности этого вектора вектору градиента функции $\bar{\rho}(\tau, u)$. Таким образом находится точка C , являющаяся решением (на максимум) задачи третьего уровня.

Решение задачи на минимум – точка M , находится при помощи аналогичной процедуры. Результаты вычислений приведены в табл. 6.3.7(a,b,c) и 6.3.7(a,b) .

k	$\bar{\xi}_{1(k)}$	$\bar{\xi}_{2(k)}$	$\bar{\xi}_{3(k)}$	$\bar{\lambda}_{(k)}$	$\bar{F}_{(k)}$
1	1.989850690	$5.0373 \cdot 10^{-3}$	$5.0373 \cdot 10^{-3}$	0.992563498	1.989850690
2	$1.6709 \cdot 10^{-3}$	2.009949563	$1.6709 \cdot 10^{-3}$	2.992437877	6.029848690
3	$1.6709 \cdot 10^{-3}$	$1.6709 \cdot 10^{-3}$	2.009949563	2.992437877	6.029848690

Табл. 6.3.7а. Решения задач первого уровня в пространстве параметров на итерации $t = 0$.

k	$\bar{\xi}_{1(k)}$	$\bar{\xi}_{2(k)}$	$\bar{\xi}_{3(k)}$	$\bar{\lambda}_{(k)}$	$\bar{F}_{(k)}$
1	0.990002257	$4.9994 \cdot 10^{-3}$	$4.9994 \cdot 10^{-3}$	1.000100482	0.990002257
2	$1.8777 \cdot 10^{-3}$	1.007680747	$1.8777 \cdot 10^{-3}$	2.662786579	2.683315872
3	$1.6667 \cdot 10^{-3}$	$1.6667 \cdot 10^{-3}$	1.009999344	2.999900502	3.029998031

Табл. 6.3.7б. Решения задач первого уровня в пространстве параметров на итерации $t = 1$.

k	$\bar{\xi}_{1(k)}$	$\bar{\xi}_{2(k)}$	$\bar{\xi}_{3(k)}$	$\bar{\lambda}_{(k)}$	$\bar{F}_{(k)}$
1	0.990002257	$4.9994 \cdot 10^{-3}$	$4.9994 \cdot 10^{-3}$	1.000100482	0.990002257
2	$4.9994 \cdot 10^{-3}$	0.990002257	$4.9994 \cdot 10^{-3}$	1.000100482	0.990002257
3	$1.6667 \cdot 10^{-3}$	$1.6667 \cdot 10^{-3}$	1.009999344	2.999900502	3.029998031

Табл. 6.3.7с. Решения задач первого уровня в пространстве параметров на итерации $t = 2$.

Значения параметров $u = \|u_1 \ u_2\|^T$, переменных в задачах второго уровня, шагов в пространстве параметров $w = \|w_1 \ w_2\|^T$, а также величины этих шагов s , приведены в табл. 6.3.8(а,б).

t	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	$\bar{\xi}_3$	$\bar{\lambda}$	$\bar{\mu}_1$	$\bar{\mu}_2$	$\bar{\mu}_3$
0	$3.31 \cdot 10^{-3}$	1.00047330	1.00047330	1.51314585	$4.77 \cdot 10^{-3}$	0.50438353	0.50438353
1	$3.58 \cdot 10^{-3}$	0.46823794	0.53167349	1.40814542	0.01094148	0.52567790	0.46713317
2	0.13029226	0.13029226	0.73086764	0.46075970	0.42303589	0.42303589	0.15252428

Табл. 6.3.8а. Решения задач второго уровня (1-я часть таблицы).

t	\bar{u}_1	\bar{u}_2	;	\bar{U}	$\bar{\rho}$	$\Delta \bar{u}_1$	$\Delta \bar{u}_2$	s
0	3.00000000	2.00000000		-3.04234558	3.03582000	-0.50916320	-1.51025650	0.78922473
1	2.66286309	1.00000000		-1.45139719	1.44334549	-0.28357316	-1.38203309	1.66286309
2	1.00000000	1.00000000		-0.85497537	0.86941415	-0.36368819	-0.84295478	0.00000000

Табл. 6.3.8б. Решение задач второго уровня (2-я часть таблицы).

§ 6.4. Методы сглаживания в минимаксных задачах

Гладкие асимптотические оценки зависимостей решения задач математического программирования от экзогенных параметров могут оказаться полезными для исследования свойств экстремальных операторов (например, функций максимума, минимума или их суперпозиций).

Рассмотрим вначале следующую минимаксную задачу: найти минимум $u(x)$:

при условии $x \in \Omega$, где $\Omega \subseteq E^n$ – компакт, а

$$u(x) = \max_{k \in [1, N]} \{f_k(x)\}, \quad (6.4.1)$$

причем функции $f_k(x) \forall k \in [1, N]$, непрерывно дифференцируемые на множестве Ω .

В случае, когда множество Ω задается системой неравенств вида $y_i(x) \leq 0, i = [1, m]$, задача (6.4.1) очевидно равносильна задаче математического программирования:

максимизировать по $\{x, u\} - u$
при условиях

$$f_k(x) - u \leq 0 \quad \forall k = [1, N] \quad (6.4.2)$$

и

$$y_i(x) \leq 0 \quad \forall i = [1, m].$$

Здесь мы также предполагаем, что функции $y_i(x) \forall i \in [1, m]$, непрерывно дифференцируемые на множестве Ω .

Функция $u(x)$ в сделанных предположениях непрерывна, но не является дифференцируемой. Поэтому для решения задачи (6.4.2) применим метод гладких штрафных функций с вспомогательной функцией

$$A(\tau, x, u) = -u - \sum_{k=1}^N P\left(\tau, f_k(x) - u\right) - \sum_{i=1}^m P\left(\tau, y_i(x)\right). \quad (6.4.3)$$

Условия стационарности для функции (6.4.3) можно записать в виде системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^N \frac{\partial P}{\partial s}\left(\tau, f_k(x) - u\right) \cdot \text{grad}_x f_k(x) + \\ \quad + \sum_{i=1}^m \frac{\partial P}{\partial s}\left(\tau, y_i(x)\right) \cdot \text{grad}_x y_i(x) = o, \\ -1 + \sum_{k=1}^N \frac{\partial P}{\partial s}\left(\tau, f_k(x) - u\right) = 0. \end{array} \right. \quad (6.4.4)$$

Здесь следует отметить, что решениями системы (6.4.4) будут оценки не только минимаксных точек задачи (6.4.1), но и оценки *всех* других стационарных точек функции максимума $u(x)$. Это может потребовать дополнительного исследования при решении именно минимаксной задачи.

С другой стороны, для конкретной штрафной функции $P(\tau, s)$ вид системы (6.4.4) может упроститься. Покажем это на примере штрафной функции $P(\tau, s) = \tau \exp\left(\frac{s}{\tau}\right)$. В этом случае

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \exp\left(\frac{s}{\tau}\right) = \exp\left(\frac{f_k(x) - u}{\tau}\right) = \exp\left(\frac{f_k(x)}{\tau}\right) \cdot \exp\left(-\frac{u}{\tau}\right).$$

Поэтому система (6.4.4) принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \exp\left(-\frac{u}{\tau}\right) \cdot \sum_{k=1}^N \exp\left(\frac{f_k(x)}{\tau}\right) \cdot \operatorname{grad}_x f_k(x) + \\ \quad + \sum_{i=1}^m \exp\left(\frac{y_i(x)}{\tau}\right) \cdot \operatorname{grad}_x y_i(x) = o, \\ \exp\left(\frac{u}{\tau}\right) = \sum_{k=1}^N \exp\left(\frac{f_k(x)}{\tau}\right), \end{array} \right. \quad (6.4.5)$$

где из первого (векторного) равенства можно исключить u , получив

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \exp\left(\frac{f_k(x)}{\tau}\right) \cdot \operatorname{grad}_x f_k(x) + \\ & + \left(\sum_{k=1}^N \exp\left(\frac{f_k(x)}{\tau}\right) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^m \exp\left(\frac{y_i(x)}{\tau}\right) \cdot \operatorname{grad}_x y_i(x) \right) = o, \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

а последнее (скалярное) равенство упрощается до

$$u = \tau \ln \left(\sum_{k=1}^N \exp\left(\frac{f_k(x)}{\tau}\right) \right).$$

В качестве иллюстративных примеров рассмотрим две задачи.

Задача Найти минимальные значения функции максимума $u(x)$:

6.4.1

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) \geq x^2, \\ u(x) \geq \sin 4x \end{array} \right.$$

на отрезке $[-\frac{1}{2}, 1]$.

Решение. Задача (6.4.2) в данном случае имеет вид
максимизировать по $\{x, u\}$ — u
при условиях:

$$x^2 - u \leq 0 ,$$

$$\sin 4x - u \leq 0 ,$$

$$-\frac{1}{2} - x \leq 0 ,$$

$$-1 + x \leq 0 .$$

Вспомогательная функция (6.4.3) будет

$$\begin{aligned} A(\tau, x, u) = \\ = -u - \tau \exp \left(\frac{x^2 - u}{\tau} \right) - \tau \exp \left(\frac{\sin 4x - u}{\tau} \right) - \\ - \tau \exp \left(\frac{-\frac{1}{2} - x}{\tau} \right) - \tau \exp \left(\frac{-1 + x}{\tau} \right) . \end{aligned}$$

Наконец, уравнение (6.4.6) будет

$$\begin{aligned} - \exp \left(\frac{x^2}{\tau} \right) \cdot 2x - \exp \left(\frac{\sin 4x}{\tau} \right) \cdot 4 \cos 4x - \\ - \left(\tau \exp \left(\frac{-\frac{1}{2} - x}{\tau} \right) + \tau \exp \left(\frac{-1 + x}{\tau} \right) \right) \times \\ \times \left(\exp \left(\frac{x^2}{\tau} \right) + \exp \left(\frac{\sin 4x}{\tau} \right) \right) = 0 , \quad (6.4.7) \end{aligned}$$

в то время как сглаженная аппроксимация функции максимума определяется формулой

$$u = \tau \ln \left(\exp \left(\frac{x^2}{\tau} \right) + \exp \left(\frac{\sin 4x}{\tau} \right) \right).$$

Уравнение (6.4.7) на промежутке $[-\frac{1}{2}, 1]$ имеет три корня, являющихся приближением к точкам

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{8} = 0.392699082 \quad \text{и} \quad x_3 = 0.669283188,$$

последняя из которых есть корень уравнения $x^2 = \sin 4x$.

Решение Результаты решения уравнения (6.4.7) для разных значений параметра τ приведены в табл. 6.4.1, а графическая интерпретация задачи 6.4.1 показана на рис. 6.19.

Таблица 6.4.1

τ	$\bar{x}_1(\tau)$	$\bar{x}_2(\tau)$	$\bar{x}_3(\tau)$
0.50	-0.166596357	0.413732397	0.723794952
0.25	-0.124388280	0.398475953	0.704617207
0.10	-0.077449382	0.392845484	0.688202392
0.05	-0.046509302	0.392699415	0.679216477
<i>Точное решение</i>	0	0.392699082	0.669283188

Задача 6.4.2 Найти минимальное значение функции максимума $u(x, y)$:

$$\begin{cases} u(x) \geq x^2 + y^2, \\ u(x) \geq 10 - (x + 1)^2 - (y - 2)^2, \end{cases}$$

зависящей от двух переменных.

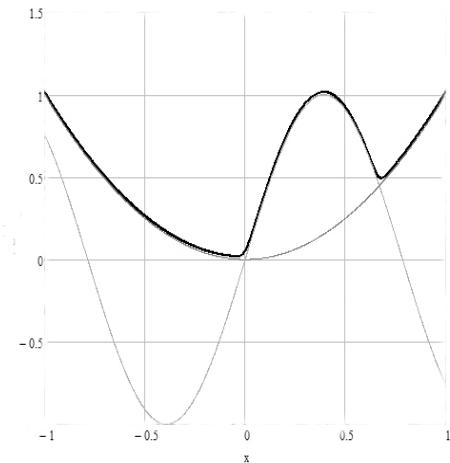


Рис. 6.19. Графическая интерпретация задачи 6.4.1

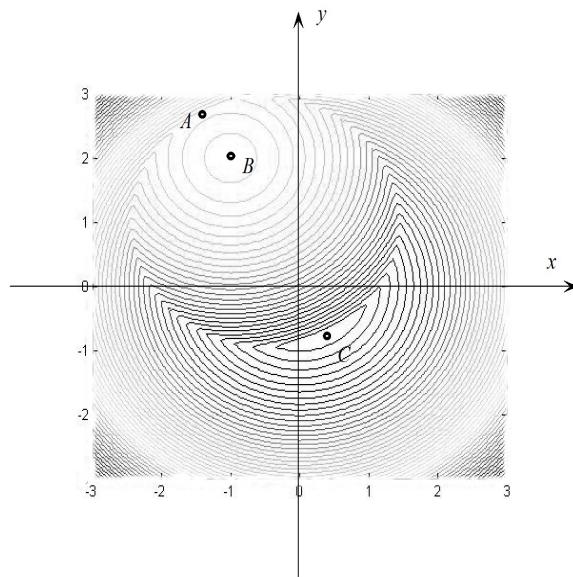


Рис. 6.20. Система изолиний задачи 6.4.2

Решение. В данной задаче на независимые переменные явных ограничений нет, поэтому постановка задачи (6.4.2) в данном случае имеет вид и алгоритм ее решения упрощаются:

максимизировать по $\{x, y, u\}$ — u
при условиях:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - u &\leq 0, \\ 10 - (x + 1)^2 - (y - 2)^2 - u &\leq 0. \end{aligned}$$

Вспомогательная функция (6.4.3) будет иметь вид

$$\begin{aligned} A(\tau, x, y, u) = -u - \tau \exp \left(\frac{x^2 + y^2 - u}{\tau} \right) - \\ - \tau \exp \left(\frac{10 - (x + 1)^2 - (y - 2)^2 - u}{\tau} \right). \end{aligned} \quad (6.4.8)$$

Исключение переменной u из системы уравнений (6.4.5) выполняется тривиально и дает

$$\left\{ \begin{aligned} -x \exp \left(\frac{x^2 + y^2}{\tau} \right) + \\ + (x + 1) \exp \left(\frac{10 - (x + 1)^2 - (y - 2)^2}{\tau} \right) &= 0, \\ -y \exp \left(\frac{x^2 + y^2}{\tau} \right) + \\ + (y - 2) \exp \left(\frac{10 - (x + 1)^2 - (y - 2)^2}{\tau} \right) &= 0, \\ \exp \left(\frac{u}{\tau} \right) = \exp \left(\frac{x^2 + y^2}{\tau} \right) + \\ + \exp \left(\frac{10 - (x + 1)^2 - (y - 2)^2}{\tau} \right). \end{aligned} \right. \quad (6.4.9)$$

Качественный анализ (см. рис. 6.20) показывает, что система (6.4.9) имеет три решения — точки А, В и С.

Точка В – очевидный максимум, имеет координаты $x = -1$ и $y = 2$. Точки А и С являются стационарными точками задачи на условный экстремум вида

максимизировать по $\{x, y\}$ $x^2 + y^2$

при условии: $10 - (x + 1)^2 - (y - 2)^2 = x^2 + y^2$,

которая имеет два решения: $A \left\{ -\frac{\sqrt{3} + 1}{2} : \sqrt{3} + 1 \right\}$ и

$C \left\{ \frac{\sqrt{3} - 1}{2} : 1 - \sqrt{3} \right\}$, при этом точка А является сед-

ловой для сглаженной функции максимума, а точка С является приближением точки минимума функции максимума – решения задачи 6.4.2.

В табл. 6.4.2 приведено численное решение задачи Решение (6.4.8) – (6.4.9), дающее оценки минимакса для различных получено. значений параметра τ .

Т а б л и ц а 6.4.2

τ	$\bar{x}(\tau)$	$\bar{y}(\tau)$	$\bar{u}(\tau)$
0.50	0.401395490	-0.802790980	0.931525443
0.25	0.384328458	-0.768656917	0.799793144
0.10	0.373511177	-0.747022355	0.721607245
0.05	0.369797284	-0.739594568	0.695699622
<i>Точное решение</i>	0.366025404	-0.732050806	0.669872981

Рассмотрим теперь процедуру построения сглаженной аппроксимации функции максимума (или минимума), которая может быть выполнена по схеме, альтернативной методу штрафных функций, а именно путем использования функций обратных связей.

Конкретно в случае минимаксной задачи (6.4.2) функция Лагранжа будет

$$L(x, u, \Omega, \Lambda) = -u - \sum_{k=1}^N \omega_k (f_k(x) - u) - \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i(x),$$

а условия стационарности (6.4.4) соответственно имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial L}{\partial \xi_j}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\Omega}, \bar{\Lambda}) & = & Q(\tau, \bar{\xi}_j) \quad \forall j = [1, n], \\ \frac{\partial L}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\Omega}, \bar{\Lambda}) & = & Q(\tau, \bar{u}), \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\Omega}, \bar{\Lambda}) & = & -Q(\tau, \bar{\lambda}_i) \quad \forall i = [1, m], \\ \frac{\partial L}{\partial \omega_k}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\Omega}, \bar{\Lambda}) & = & -Q(\tau, \bar{\omega}_k) \quad \forall k = [1, N]. \end{array} \right. \quad (6.4.10)$$

Совместно вектор-функция $\bar{x}(\tau)$ и скалярная функция $\bar{u}(\tau)$ образуют непрерывно дифференцируемую по τ аппроксимацию решения минимаксной задачи (6.4.2). Непосредственное использование системы условий (6.4.10) продемонстрируем на примере следующих задач, для решения которых возьмем (как предложено в [23]) $P(\tau, s)$ такую, что

$$Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right).$$

Задача 6.4.3. Найти минимальное значение функции $u(x) = \max_x \{ 2 - 2x; x \}$ при условиях: $x \geq 0; x \leq \rho$ для $\rho = \frac{1}{2}$ и $\rho = 1$.

Решение. Запишем условие задачи в виде

максимизировать $0 \cdot x + (-1) \cdot u$

при условиях: $x \geq 0, u \geq 0$,

$$\begin{array}{rcl} -2x - u & \leq & -2, \\ x - u & \leq & 0, \\ x & \leq & \rho. \end{array}$$

Нетрудно убедиться, что решением этой минимаксной задачи при $\rho = \frac{1}{2}$ будет $u^* = x^* = 1$, а при $\rho = 1 - u^* = x^* = \frac{2}{3}$.

Система уравнений (6.4.10) в этом случае имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_3 & = & \frac{\tau}{2} \left(\bar{x} - \frac{1}{\bar{x}} \right), \\ -1 + \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 & = & \frac{\tau}{2} \left(\bar{u} - \frac{1}{\bar{u}} \right), \\ -2 + 2\bar{x} + \bar{u} & = & -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right), \\ -\bar{x} + \bar{u} & = & -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right), \\ \rho - \bar{x} & = & -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_3 - \frac{1}{\bar{\lambda}_3} \right). \end{array} \right.$$

Результаты расчетов приведены в табл. 6.4.3.

Т а б л и ц а 6.4.3

τ	$\rho = \frac{1}{2}$	$\rho = 1$
0.1	0.912994245	0.741263714
0.01	0.985411722	0.673919921
0.001	0.998503843	0.667389209
0.0001	0.999850038	0.666738892
0.00001	0.999985000	0.666673889
0.000001	0.999998500	0.666667389
0.0000001	0.999999850	0.666666739
0.00000001	0.999999985	0.666666674
<i>Точное решение</i>	1	$\frac{2}{3}$

Решение получено.

Применим метод функций обратных связей в нелинейной задаче, имеющей решение, совпадающее с одним из решений задачи 6.4.1.

Задача
6.4.4.

Найти на промежутке $[\frac{1}{2}; 1]$
минимум функции максимума $u(x)$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u(x) & \geq & x^2, \\ u(x) & \geq & \sin 4x. \end{array} \right.$$

Решение

Запишем условия задачи в виде

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать по } \{x, u\} - u \\ & \text{при условиях: } x^2 - u \leq 0, \quad \sin 4x - u \leq 0. \end{aligned}$$

В данной задаче функция Лагранжа будет

$$L(x, u, \lambda_1, \lambda_2) = -u - \lambda_1(x^2 - u) - \lambda_2(\sin 4x - u).$$

Соответствующая ей система уравнений (6.4.10):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -2\bar{\lambda}_1 x - 4\bar{\lambda}_2 \cos 4x & = & \frac{\tau}{2} \left(\bar{x} - \frac{1}{\bar{x}} \right), \\ -1 + \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 & = & \frac{\tau}{2} \left(\bar{u} - \frac{1}{\bar{u}} \right), \\ u - x^2 & = & -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right), \\ u - \sin 4x & = & -\frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right). \end{array} \right. \quad (6.4.11)$$

Эта система на промежутке $[\frac{1}{2}, 1]$ имеет решение $\bar{x}(\tau)$ – приближение к $x = 0.669283188$, являющееся корнем уравнения $x^2 = \sin 4x$. Решения системы уравнений (6.4.11) для разных значений τ приведены в табл. 6.4.4.

Т а б л и ц а 6.4.4

τ	$\bar{x}(\tau)$	$\bar{u}(\tau)$	$\bar{\lambda}_1(\tau)$	$\bar{\lambda}_2(\tau)$
0.1	0.644421822	0.391810461	0.792480392	0.315541808
0.01	0.666512412	0.441084537	0.733141487	0.275988786
0.001	0.669003439	0.447243056	0.728185244	0.272709094
0.0001	0.669255187	0.447870180	0.727700682	0.272388564
0.00001	0.669280387	0.447933004	0.727652337	0.272356586
0.000001	0.669282908	0.447939287	0.727647504	0.272353388
0.0000001	0.669283160	0.447939916	0.727647021	0.272353069
0.00000001	0.669283185	0.447939978	0.727646972	0.272353037
<i>Точное решение</i>	0.669283188	0.447939985	0.727646967	0.272353033

Решение получено.

Рассмотрим теперь более общий случай задачи поиска максимина следующего вида:

на произведении компактов $X \subseteq E^n$ и $Y \subseteq E^m$ для непрерывной функции $F(x, y)$ найти $F^* = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y)$.

Эта задача может быть сформулирована в виде задачи математического программирования с бесконечным числом ограничений:

найти $F^* = \max_{\{x, u\}} u$ при условиях:

$$\begin{cases} x \in X, \\ F(x, y) \geq u \quad \forall y \in Y. \end{cases} \quad (6.4.12)$$

В монографии [27] (гл. 1, § 5) показывается, что метод штрафных функций допускает распространение на подобные классы задач, причем в качестве штрафующего слагаемого в формуле (2.1.2), используя интегрирование по Лебегу, можно взять

$$S(\tau, x) = \int_Y P(\tau, u - F(x, y)) dy,$$

а вспомогательная функция при этом будет

$$A(\tau, x, u) = -u - \int_Y P(\tau, u - F(x, y)) dy. \quad (6.4.13)$$

Кроме того, если $F(x, y)$ выпукла вверх по x , то и $A(\tau, x, u)$ будет выпукла вверх по x , а если $F(x, y)$ дифференцируема по x , то и $A(\tau, x, u)$ будет дифференцируемой, и в этом случае условие стационарности функции (6.4.13) есть система равенств:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial u} = -1 - \int_Y \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, u - F(x, y)) \frac{\partial F(x, y)}{\partial u} dy = 0, \\ \frac{\partial A}{\partial x_j} = - \int_Y \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, u - F(x, y)) \frac{\partial F(x, y)}{\partial x_j} dy = 0 \quad \forall j = [1, n]. \end{cases} \quad (6.4.14)$$

Вывод формул (6.4.13) и (6.4.14) приведен в [27] для штрафных функций внешнего типа, однако эта схема оказывается применимой и для гладких штрафных функций, удовлетворяющих условиям (2.1.1). Строгое доказательство этого факта выходит за рамки данного курса, однако его можно проиллюстрировать следующим примером.

Рассмотрим задачу отыскания глобального экстремума непрерывной на некотором отрезке $[a, b]$ функции $\Phi(x)$. При поиске максимума эта задача сводится к задаче математического программирования:

минимизировать $F(x, u) = u$
при условиях: $\Phi(x) \leq u \quad \forall x \in [a, b]$.

Если взять $P(\tau, s) = \tau \exp\left(\frac{s}{\tau}\right)$, то подлежащая максимизации вспомогательная функция будет

$$A(\tau, u) = -u - \tau \int_a^b \exp\left(\frac{\Phi(x) - u}{\tau}\right) dx,$$

а ее условие стационарности по переменной u :

$$-1 + \int_a^b \exp\left(\frac{\Phi(x) - u}{\tau}\right) dx = 0.$$

Откуда получаем равенство $\exp\left(\frac{u}{\tau}\right) = \int_a^b \exp\left(\frac{\Phi(x)}{\tau}\right) dx$, т. е.

$$\bar{u}(\tau) = \tau \ln \int_a^b \exp\left(\frac{\Phi(x)}{\tau}\right) dx. \quad (6.4.15)$$

Нетрудно убедиться, что оценка для глобального минимума такова:

$$\underline{u}(\tau) = -\tau \ln \int_a^b \exp\left(-\frac{\Phi(x)}{\tau}\right) dx. \quad (6.4.16)$$

Применение этих формул проиллюстрируем на примере следующих задач.

Задача Найти максимальное и минимальное значения функции
6.4.5 $F(x) = 2 - |x|$ на отрезке $[-1, 3]$.

Решение. Для использования формулы (6.4.15) предварительно необходимо вычислить

$$\int_{-1}^3 \exp \frac{2 - |x|}{\tau} dx = 2\tau \left(\exp \frac{2}{\tau} - \operatorname{ch} \frac{1}{\tau} \right).$$

Понятно, что формула $\tau \ln \left[2\tau \left(\exp \frac{2}{\tau} - \operatorname{ch} \frac{1}{\tau} \right) \right]$ представляет максимальное значение исследуемой функции на отрезке $[-1, 3]$ не очень наглядно. Поэтому найдем также и

$$\bar{u}^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{u}(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \left[2\tau \left(\exp \frac{2}{\tau} - \operatorname{ch} \frac{1}{\tau} \right) \right] = 2.$$

Аналогично для оценки величины глобального минимума получаем

$$\int_{-1}^3 \exp \left(-\frac{2-|x|}{\tau} \right) dx = 2\tau \left(\operatorname{ch} \frac{1}{\tau} - 2 \exp \left(-\frac{2}{\tau} \right) \right),$$

что дает

$$\begin{aligned} \underline{u}^* &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \underline{u}(\tau) = \\ &= - \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \left[2\tau \left(\operatorname{ch} \frac{1}{\tau} - 2 \exp \left(-\frac{2}{\tau} \right) \right) \right] = -1. \end{aligned}$$

Решение Нетрудно проверить, что глобальный максимум достигнут в точке $x = 0$, а глобальный минимум в точке $x = 3$.

Использование рассматриваемого подхода возможно также и в задачах большей размерности.

Задача Найти $\min_y \max_x F(x, y)$, если

6.4.6 $F(x, y) = 3|y - 2| + x + y - 2|x + 1|.$

Решение. Найдем вначале $\bar{\Phi}(\tau, y)$ – оценку $\max_x F(x, y)$ по (6.4.15).

В нашем случае $\bar{\Phi}(\tau, y) = \max_x F(x, y) =$

$$= \tau \ln \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{3|y - 2| + y + x - 2|x + 1|}{\tau} dx =$$

$$= \tau \ln \left(\frac{4\tau}{3} \exp \frac{3|y-2| + y - 1}{\tau} \right),$$

ибо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{x - 2|x+1|}{\tau} dx = \frac{4\tau}{3} \exp \left(-\frac{1}{\tau} \right).$$

И после очевидных упрощений получаем

$$\bar{\Phi}(\tau, y) = 3|y-2| + y - 1 + \tau \ln \frac{4\tau}{3}.$$

Теперь найдем $\bar{\Phi}$ оценку $\min_y \bar{\Phi}(\tau, y)$, используя соотношение (6.4.16) и равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{3|y-2| + y}{\tau} \right) dy = \frac{3\tau}{4} \exp \left(-\frac{2}{\tau} \right).$$

В итоге имеем оценку для $\min_y \max_x F(x, y)$ вида

$$2 - \tau \ln \frac{3\tau}{4} - 1 + \tau \ln \frac{4\tau}{3} = 1 + \tau \ln \frac{16}{9} \rightarrow 1 \text{ при } \tau \rightarrow +0.$$

Нетрудно также убедиться, что и $\max_x \min_y F(x, y) = 1$,

Решение а точка $x = -1$ и $y = 2$ является седловой для $F(x, y)$.
получено. Проверьте это самостоятельно.

В заключение покажем, что сглаживание в минимаксных задачах можно выполнять и на основе метода функций обратных связей.

Допустим, что требуется найти максимальное число в наборе неотрицательных чисел $\{\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_N\}$. Как мы уже видели, поиск максимального числа из данного набора равносителен решению задачи линейного программирования вида

максимизировать $-x$

при условиях: $x \geq 0, \alpha_k - x \leq 0 \quad \forall k = [1, N]$.

Для использования метода функций обратных связей необходимо записать и двойственную к ней задачу:

$$\begin{aligned} & \text{минимизировать } \sum_{k=1}^N (-\alpha_k) \lambda_k \\ & \text{при условиях: } \lambda_k \geq 0 \quad \forall k = [1, N], \\ & \quad \sum_{k=1}^N (-\lambda_k) \geq -1. \end{aligned}$$

Тогда условия стационарности соответствующей U -функции суть система уравнений вида

$$\begin{cases} \alpha_k - \bar{x} &= Q(\tau, \bar{\lambda}_k) \quad \forall k = [1, N], \\ -1 + \sum_{k=1}^N \bar{\lambda}_k &= -Q(\tau, \bar{x}). \end{cases} \quad (6.4.17)$$

Проиллюстрируем использование этой системы на примере следующей задачи, использовав в качестве функции обратных связей

$$Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right).$$

Задача Найти максимальное из чисел $\{3, -2, 1, 7, -4\}$.

6.4.7

Решение. Данная задача сводится к задаче линейного программирования:

$$\text{максимизировать } -x \quad \text{при условиях: } x \geq 0,$$

$$\begin{cases} 3 - x \leq 0, \\ -2 - x \leq 0, \\ 1 - x \leq 0, \\ 7 - x \leq 0, \\ -4 - x \leq 0. \end{cases}$$

В то время как двойственная к ней задача имеет вид

$$\text{минимизировать } -3\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 - 7\lambda_4 + 4\lambda_5$$

$$\text{при условиях: } \lambda_k \geq 0 \quad \forall k = [1, 5],$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 \leq 1.$$

Условия стационарности соответствующей U -функции записываются как система уравнений вида (6.4.17):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3 - \bar{x} & = & \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right), \\ -2 - \bar{x} & = & \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right), \\ 1 - \bar{x} & = & \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_3 - \frac{1}{\bar{\lambda}_3} \right), \\ 7 - \bar{x} & = & \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_4 - \frac{1}{\bar{\lambda}_4} \right), \\ -4 - \bar{x} & = & \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_5 - \frac{1}{\bar{\lambda}_5} \right), \\ -1 + \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4 + \bar{\lambda}_5 & = & -\frac{\tau}{2} \left(\bar{x} - \frac{1}{\bar{x}} \right). \end{array} \right.$$

Решение получено.

Решение задачи 6.4.7 для различных значений параметра τ приведено в табл. 6.4.5.

Т а б л и ц а 6.4.5

τ	$\bar{x}(\tau)$	$\bar{\lambda}_1(\tau)$	$\bar{\lambda}_2(\tau)$	$\bar{\lambda}_3(\tau)$	$\bar{\lambda}_4(\tau)$	$\bar{\lambda}_5(\tau)$
10^{-1}	7.048931109	0.012347056	$5.5253 \cdot 10^{-3}$	$8.2654 \cdot 10^{-3}$	0.623983727	$4.5252 \cdot 10^{-3}$
10^{-2}	7.000381067	$1.2499 \cdot 10^{-3}$	$5.5553 \cdot 10^{-4}$	$8.3328 \cdot 10^{-4}$	0.962619121	$4.5453 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	7.000003745	$1.2500 \cdot 10^{-4}$	$5.5556 \cdot 10^{-5}$	$8.3333 \cdot 10^{-5}$	0.996262083	$4.5455 \cdot 10^{-5}$
10^{-4}	7.000000037	$1.2500 \cdot 10^{-5}$	$5.5556 \cdot 10^{-6}$	$8.3333 \cdot 10^{-6}$	0.999626209	$4.5455 \cdot 10^{-6}$
10^{-5}	7	$1.2500 \cdot 10^{-6}$	$5.5556 \cdot 10^{-7}$	$8.3333 \cdot 10^{-7}$	0.999996262	$4.5455 \cdot 10^{-7}$
10^{-6}	7	$1.2500 \cdot 10^{-7}$	$5.5556 \cdot 10^{-9}$	$8.3333 \cdot 10^{-9}$	0.999999626	$4.5455 \cdot 10^{-8}$
10^{-7}	7	$1.2500 \cdot 10^{-8}$	$5.5556 \cdot 10^{-9}$	$8.3333 \cdot 10^{-9}$	0.999999626	$4.5455 \cdot 10^{-9}$
10^{-8}	7	$1.2500 \cdot 10^{-9}$	$0.5556 \cdot 10^{-9}$	$0.8333 \cdot 10^{-9}$	0.999999963	$0.5454 \cdot 10^{-9}$
<i>Точн. решен.</i>	7	0	0	0	1	0

Как и метод штрафных функций, схема функций обратных связей может быть использована для решения непрерывных минимаксных задач. Без теоретического обоснования здесь приведем лишь несложный пример, демонстрирующий эту возможность.

Пусть требуется найти максимум функции $\Phi(t)$ для $t \in [a, b]$.

Вначале определим непрерывный аналог двойственных переменных – функцию $\bar{\lambda}(\tau, t) \forall t \in [a, b]$ – и запишем для нее систему (6.4.17) с $Q(\tau, s) = \tau \ln s$, заменив операцию суммирования интегрированием. Получим

$$\begin{cases} \Phi(t) - \bar{x}(\tau) = \tau \ln \bar{\lambda}(\tau, t) & \forall t \in [a, b], \\ -1 + \int_a^b \bar{\lambda}(\tau, t) dt = -\tau \ln \bar{x}(\tau). \end{cases}$$

Поскольку $\tau \ln s$ есть функция обратная к $\exp\left(\frac{s}{\tau}\right)$, то из первого уравнения следует равенство

$$\bar{\lambda}(\tau, t) = \exp\left(\frac{\Phi(t) - \bar{x}(\tau)}{\tau}\right),$$

подстановка которого во второе уравнение дает

$$-1 + \exp\left(-\frac{\bar{x}(\tau)}{\tau}\right) \int_a^b \exp\left(\frac{\Phi(t)}{\tau}\right) dt = -\tau \ln \bar{x}(\tau).$$

Последнее уравнение с неизвестным $\bar{x}(\tau)$ можно путем почленного логарифмирования записать в виде

$$\bar{x}(\tau) = \tau \ln \int_a^b \exp\left(\frac{\Phi(t)}{\tau}\right) dt - \ln(1 - \tau \ln \bar{x}(\tau)),$$

из которого в силу равенства (6.4.15) следует, что $\bar{x}(\tau)$ при малых положительных τ является сглаженной оценкой максимума функции $\Phi(t)$ для $t \in [a, b]$.

Глава 7. Приложения

§ 7.1. Численное решение задачи 1.1.2

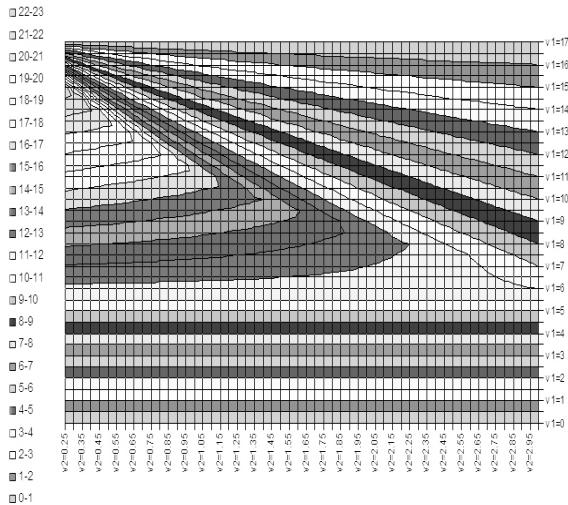


Рис. 7.1. Система изолиний для зависимости $\Phi(\nu_1, \nu_2)$

На рис. 7.1 показана система изолиний для кусочно-линейной аппроксимации зависимости $\Phi(\nu_1, \nu_2)$ для задачи 1.1.2, изометрический вариант которой приведен на рис. 1.1. Рисунок 7.1 в сочетании с данными, приведенными в табл. 7.1.1а–с, позволяет сделать заключение о характере необходимых условий решения задачи 1.1.2, которые были использованы в § 1.1.

Таблица 7.1.1а

Решение задачи 1.1.2

Таблица 7.1.1b

Решение задачи 1.1.2

$\nu_1 \rightarrow$	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10	10.5	11	11.5
$\nu_2 \downarrow$											
0.25	12.33	12.93	13.53	14.13	14.73	15.33	15.93	16.53	17.13	17.73	18.33
0.30	12.32	12.92	13.51	14.11	14.70	15.30	15.89	16.49	17.08	17.68	18.27
0.35	12.32	12.90	13.49	14.08	14.67	15.26	15.85	16.44	17.03	17.62	18.21
0.40	12.31	12.89	13.47	14.06	14.64	15.22	15.81	16.39	16.97	17.56	18.14
0.45	12.30	12.87	13.45	14.03	14.61	15.18	15.76	16.34	16.92	17.49	18.07
0.50	12.29	12.86	13.43	14.00	14.57	15.14	15.71	16.29	16.86	17.43	18.00
0.55	12.28	12.84	13.41	13.97	14.54	15.10	15.67	16.23	16.80	17.36	17.93
0.60	12.26	12.82	13.38	13.94	14.50	15.06	15.62	16.18	16.74	17.29	17.85
0.65	12.25	12.81	13.36	13.91	14.46	15.01	15.57	16.12	16.67	17.22	17.78
0.70	12.24	12.79	13.33	13.88	14.42	14.97	15.52	16.06	16.61	17.15	17.70
0.75	12.23	12.77	13.31	13.85	14.38	14.92	15.46	16.00	16.54	17.08	17.62
0.80	12.22	12.75	13.28	13.81	14.34	14.88	15.41	15.94	16.47	17.00	17.53
0.85	12.21	12.73	13.25	13.78	14.30	14.83	15.35	15.87	16.40	16.92	17.44
0.90	12.19	12.71	13.23	13.74	14.26	14.77	15.29	15.81	16.32	16.84	17.35
0.95	12.18	12.69	13.20	13.70	14.21	14.72	15.23	15.74	16.25	16.75	17.26
1.00	12.17	12.67	13.17	13.67	14.17	14.67	15.17	15.67	16.17	16.67	16.50
1.05	12.15	12.64	13.14	13.63	14.12	14.61	15.10	15.59	16.08	16.58	15.71
1.10	12.14	12.62	13.10	13.59	14.07	14.55	15.03	15.52	16.00	16.36	15.00
1.15	12.12	12.60	13.07	13.54	14.02	14.49	14.96	15.44	15.91	15.65	14.35
1.20	12.11	12.57	13.04	13.50	13.96	14.43	14.89	15.36	15.82	15.00	13.75
1.25	12.09	12.55	13.00	13.45	13.91	14.36	14.82	15.27	15.60	14.40	13.20
1.30	12.07	12.52	12.96	13.41	13.85	14.30	14.74	15.19	15.00	13.85	12.69
1.35	12.06	12.49	12.92	13.36	13.79	14.23	14.66	15.09	14.44	13.33	12.22
1.40	12.04	12.46	12.88	13.31	13.73	14.15	14.58	15.00	13.93	12.86	11.79
1.45	12.02	12.43	12.84	13.25	13.67	14.08	14.49	14.48	13.45	12.41	11.38
1.50	12.00	12.40	12.80	13.20	13.60	14.00	14.40	14.00	13.00	12.00	11.00
1.55	11.98	12.37	12.76	13.14	13.53	13.92	14.31	13.55	12.58	11.61	10.65
1.60	11.96	12.33	12.71	13.08	13.46	13.83	14.06	13.13	12.19	11.25	10.31
1.65	11.94	12.30	12.68	13.02	13.38	13.74	13.64	12.73	11.82	10.91	10.00
1.70	11.91	12.26	12.61	12.96	13.30	13.65	13.24	12.35	11.47	10.59	9.71
1.75	11.89	12.22	12.56	12.89	13.22	13.56	12.86	12.00	11.14	10.29	9.43
1.80	11.86	12.18	12.50	12.82	13.14	13.33	12.50	11.67	10.83	10.00	9.17
1.85	11.84	12.14	12.44	12.74	13.05	12.97	12.16	11.35	10.54	9.73	8.92
1.90	11.81	12.10	12.38	12.67	12.95	12.63	11.84	11.05	10.26	9.47	8.68
1.95	11.78	12.05	12.32	12.59	12.85	12.31	11.54	10.77	10.00	9.23	8.46
2.00	11.75	12.00	12.25	12.50	12.75	12.00	11.25	10.50	9.75	9.00	8.25
2.05	11.72	11.95	12.18	12.41	12.44	11.71	10.98	10.24	9.51	8.78	8.0
2.10	11.68	11.89	12.11	12.32	12.14	11.43	10.71	10.00	9.29	8.57	7.86
2.15	11.65	11.84	12.03	12.22	11.86	11.16	10.47	9.77	9.07	8.37	7.67
2.20	11.61	11.78	11.94	12.11	11.59	10.91	10.23	9.55	8.86	8.18	7.50
2.25	11.57	11.71	11.86	12.00	11.33	10.67	10.00	9.33	8.67	8.00	7.33
2.30	11.53	11.65	11.76	11.74	11.09	10.43	9.78	9.13	8.48	7.83	7.17
2.35	11.48	11.58	11.67	11.49	10.85	10.21	9.57	8.94	8.30	7.66	7.02
2.40	11.44	11.50	11.56	11.25	10.63	10.00	9.38	8.75	8.13	7.50	6.88
2.45	11.39	11.42	11.45	11.02	10.41	9.80	9.18	8.57	7.96	7.35	6.73
2.50	11.33	11.33	11.33	10.80	10.20	9.60	9.00	8.40	7.80	7.20	6.60
2.55	11.28	11.24	11.18	10.59	10.00	9.41	8.82	8.24	7.65	7.06	6.47
2.60	11.21	11.14	10.96	10.38	9.81	9.23	8.65	8.08	7.50	6.92	6.35
2.65	11.15	11.04	10.75	10.19	9.62	9.06	8.49	7.92	7.36	6.79	6.23
2.70	11.08	10.92	10.56	10.00	9.44	8.89	8.33	7.78	7.22	6.67	6.11
2.75	11.00	10.80	10.36	9.82	9.27	8.73	8.18	7.64	7.09	6.55	6.00
2.80	10.92	10.67	10.18	9.64	9.11	8.57	8.04	7.50	6.96	6.43	5.89
2.85	10.83	10.52	10.00	9.47	8.95	8.42	7.89	7.37	6.84	6.32	5.79
2.90	10.73	10.34	9.83	9.31	8.79	8.28	7.76	7.24	6.72	6.21	5.69
2.95	10.62	10.17	9.66	9.15	8.64	8.14	7.63	7.12	6.61	6.10	5.59
3.00	10.50	10.00	9.50	9.00	8.50	8.00	7.50	7.00	6.50	6.00	5.50

Таблица 7.1.1c

Решение задачи 1.1.2

$\nu_1 \rightarrow$	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15	15.5	16	16.5	17
$\nu_2 \downarrow$											
0.25	18.93	19.53	20.13	20.73	21.33	21.93	22.53	18.00	12.00	6.00	0.00
0.30	18.86	19.46	20.05	20.65	21.24	21.84	20.00	15.00	10.00	5.00	0.00
0.35	18.79	19.38	19.97	20.56	21.15	21.43	17.14	12.86	8.57	4.29	0.00
0.40	18.72	19.31	19.89	20.47	21.06	18.75	15.00	11.25	7.50	3.75	0.00
0.45	18.65	19.23	19.80	20.38	20.00	16.67	13.33	10.00	6.67	3.33	0.00
0.50	18.57	19.14	19.71	20.29	18.00	15.00	12.00	9.00	6.00	3.00	0.00
0.55	18.49	19.06	19.62	19.09	16.36	13.64	10.91	8.18	5.45	2.73	0.00
0.60	18.41	18.97	19.53	17.50	15.00	12.50	10.00	7.50	5.00	2.50	0.00
0.65	18.33	18.88	18.46	16.15	13.85	11.54	9.23	6.92	4.62	2.31	0.00
0.70	18.24	18.79	17.14	15.00	12.86	10.71	8.57	6.43	4.29	2.14	0.00
0.75	18.15	18.00	16.00	14.00	12.00	10.00	8.00	6.00	4.00	2.00	0.00
0.80	18.06	16.88	15.00	13.13	11.25	9.38	7.50	5.63	3.75	1.88	0.00
0.85	17.65	15.88	14.12	12.35	10.59	8.82	7.06	5.29	3.53	1.76	0.00
0.90	16.67	15.00	13.33	11.67	10.00	8.33	6.67	5.00	3.33	1.67	0.00
0.95	15.79	14.21	12.63	11.05	9.47	7.89	6.32	4.74	3.16	1.58	0.00
1.00	15.00	13.50	12.00	10.50	9.00	7.50	6.00	4.50	3.00	1.50	0.00
1.05	14.29	12.86	11.43	10.00	8.57	7.14	5.71	4.29	2.86	1.43	0.00
1.10	13.64	12.27	10.91	9.55	8.18	6.82	5.45	4.09	2.73	1.36	0.00
1.15	13.04	11.74	10.43	9.13	7.83	6.52	5.22	3.91	2.61	1.30	0.00
1.20	12.50	11.25	10.00	8.75	7.50	6.25	5.00	3.75	2.50	1.25	0.00
1.25	12.00	10.80	9.60	8.40	7.20	6.00	4.80	3.60	2.40	1.20	0.00
1.30	11.54	10.38	9.23	8.08	6.92	5.77	4.62	3.46	2.31	1.15	0.00
1.35	11.11	10.00	8.89	7.78	6.67	5.56	4.44	3.33	2.22	1.11	0.00
1.40	10.71	9.64	8.57	7.50	6.43	5.36	4.29	3.21	2.14	1.07	0.00
1.45	10.34	9.31	8.28	7.24	6.21	5.17	4.14	3.10	2.07	1.03	0.00
1.50	10.00	9.00	8.00	7.00	6.00	5.00	4.00	3.00	2.00	1.00	0.00
1.55	9.68	8.71	7.74	6.77	5.81	4.84	3.87	2.90	1.94	0.97	0.00
1.60	9.38	8.44	7.50	6.56	5.63	4.69	3.75	2.81	1.88	0.94	0.00
1.65	9.09	8.18	7.27	6.36	5.45	4.55	3.64	2.73	1.82	0.91	0.00
1.70	8.82	7.94	7.06	6.18	5.29	4.41	3.53	2.65	1.76	0.88	0.00
1.75	8.57	7.71	6.86	6.00	5.14	4.29	3.43	2.57	1.71	0.86	0.00
1.80	8.33	7.50	6.67	5.83	5.00	4.17	3.33	2.50	1.67	0.83	0.00
1.85	8.11	7.30	6.49	5.68	4.86	4.05	3.24	2.43	1.62	0.81	0.00
1.90	7.89	7.11	6.32	5.53	4.74	3.95	3.16	2.37	1.58	0.79	0.00
1.95	7.69	6.92	6.15	5.38	4.62	3.85	3.08	2.31	1.54	0.77	0.00
2.00	7.50	6.75	6.00	5.25	4.50	3.75	3.00	2.25	1.50	0.75	0.00
2.05	7.32	6.59	5.85	5.12	4.39	3.66	2.93	2.20	1.46	0.73	0.00
2.10	7.14	6.43	5.71	5.00	4.29	3.57	2.86	2.14	1.43	0.71	0.00
2.15	6.98	6.28	5.58	4.88	4.19	3.49	2.79	2.09	1.40	0.70	0.00
2.20	6.82	6.14	5.45	4.77	4.09	3.41	2.73	2.05	1.36	0.68	0.00
2.25	6.67	6.00	5.33	4.67	4.00	3.33	2.67	2.00	1.33	0.67	0.00
2.30	6.52	5.87	5.22	4.57	3.91	3.26	2.61	1.96	1.30	0.65	0.00
2.35	6.38	5.74	5.11	4.47	3.83	3.19	2.55	1.91	1.28	0.64	0.00
2.40	6.25	5.63	5.00	4.38	3.75	3.13	2.50	1.88	1.25	0.63	0.00
2.45	6.12	5.51	4.90	4.29	3.67	3.06	2.45	1.84	1.22	0.61	0.00
2.50	6.00	5.40	4.80	4.20	3.60	3.00	2.40	1.80	1.20	0.60	0.00
2.55	5.88	5.29	4.71	4.12	3.53	2.94	2.35	1.76	1.18	0.59	0.00
2.60	5.77	5.19	4.62	4.04	3.46	2.88	2.31	1.73	1.15	0.58	0.00
2.65	5.66	5.09	4.53	3.96	3.40	2.83	2.26	1.70	1.13	0.57	0.00
2.70	5.56	5.00	4.44	3.89	3.33	2.78	2.22	1.67	1.11	0.56	0.00
2.75	5.45	4.91	4.36	3.82	3.27	2.73	2.18	1.64	1.09	0.55	0.00
2.80	5.36	4.82	4.29	3.75	3.21	2.68	2.14	1.61	1.07	0.54	0.00
2.85	5.26	4.74	4.21	3.68	3.16	2.63	2.11	1.58	1.05	0.53	0.00
2.90	5.17	4.66	4.14	3.62	3.10	2.59	2.07	1.55	1.03	0.52	0.00
2.95	5.08	4.58	4.07	3.56	3.05	2.54	2.03	1.53	1.02	0.51	0.00
3.00	5.00	4.50	4.00	3.50	3.00	2.50	2.00	1.50	1.00	0.50	0.00

§ 7.2. Численное решение задач 6.2.1 и 6.2.2

На рис. 6.10 и 6.11 показаны системы изолиний для целевой функции $F(\nu_1, \nu_3)$ для системы задач 6.2.1 и 6.2.2, изометрический вариант представления которой приведен на рис. 6.8 и 6.9.

Таблица 7.2.1а

Решение задачи 6.2.1. Значение суммарной целевой функции $F(\nu_1, \nu_3)$

$\nu_3 \rightarrow$ $\downarrow \nu_1$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0.0	0.00	1.50	3.00	4.50	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	11.00	12.00
0.5	2.00	3.50	5.00	6.50	8.00	9.00	10.00	11.00	12.00	13.00	14.00
1.0	4.00	5.50	7.00	8.50	10.00	11.00	12.00	13.00	14.00	15.00	16.00
1.5	6.00	7.50	9.00	10.50	12.00	13.00	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00
2.0	8.00	9.50	11.00	12.50	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00	19.00	20.00
2.5	10.00	11.50	13.00	14.50	16.00	17.00	18.00	19.00	20.00	21.00	22.00
3.0	12.00	13.50	15.00	16.50	18.00	19.00	20.00	21.00	22.00	23.00	24.00
3.5	14.00	15.50	17.00	18.50	20.00	21.00	22.00	23.00	24.00	25.00	26.00
4.0	16.00	17.50	19.00	20.50	22.00	23.00	24.00	25.00	26.00	27.00	28.00
4.5	17.00	18.50	20.00	21.50	23.00	24.00	25.00	26.00	27.00	28.00	29.00
5.0	18.00	19.50	21.00	22.50	24.00	25.00	26.00	27.00	28.00	29.00	30.00
5.5	19.00	20.50	22.00	23.50	25.00	26.00	27.00	28.00	29.00	30.00	31.00
6.0	20.00	21.50	23.00	24.50	26.00	27.00	28.00	29.00	30.00	31.00	32.00
6.5	21.00	22.50	24.00	25.50	27.00	28.00	29.00	30.00	31.00	32.00	33.00
7.0	21.33	22.83	24.33	25.83	27.33	28.33	29.33	30.33	31.33	32.33	33.33
7.5	21.00	22.50	24.00	25.50	27.00	28.00	29.00	30.00	31.00	32.00	33.00
8.0	20.00	21.50	23.00	24.50	26.00	27.00	28.00	29.00	30.00	31.00	32.00
8.5	19.00	20.50	22.00	23.50	25.00	26.00	27.00	28.00	29.00	30.00	31.00
9.0	18.00	19.50	21.00	22.50	24.00	25.00	26.00	27.00	28.00	29.00	30.00
9.5	17.00	18.50	20.00	21.50	23.00	24.00	25.00	26.00	27.00	28.00	29.00
10.0	16.00	17.50	19.00	20.50	22.00	23.00	24.00	25.00	26.00	27.00	28.00
10.5	15.00	16.50	18.00	19.50	21.00	22.00	23.00	24.00	25.00	26.00	27.00
11.0	14.00	15.50	17.00	18.50	20.00	21.00	22.00	23.00	24.00	25.00	26.00
11.5	13.00	14.50	16.00	17.50	19.00	20.00	21.00	22.00	23.00	24.00	25.00
12.0	12.00	13.50	15.00	16.50	18.00	19.00	20.00	21.00	22.00	23.00	24.00
12.5	11.00	12.50	14.00	15.50	17.00	18.00	19.00	20.00	21.00	22.00	23.00
13.0	10.00	11.50	13.00	14.50	16.00	17.00	18.00	19.00	20.00	21.00	22.00
13.5	9.00	10.50	12.00	13.50	15.00	16.00	17.00	18.00	19.00	20.00	21.00
14.0	8.00	9.50	11.00	12.50	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00	19.00	20.00
14.5	6.00	7.50	9.00	10.50	12.00	13.00	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00
15.0	4.00	5.50	7.00	8.50	10.00	11.00	12.00	13.00	14.00	15.00	16.00
15.5	2.00	3.50	5.00	6.50	8.00	9.00	10.00	11.00	12.00	13.00	14.00
16.0	0.00	1.50	3.00	4.50	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	11.00	12.00

Таблица 7.2.1b

Решение задачи 6.2.1.
Значение суммарной целевой функции $F(\nu_1, \nu_3)$

$V_3 \rightarrow$ $\downarrow V_1$	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
0.0	13.00	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00	18.50	19.00	18.25	17.50
0.5	15.00	16.00	17.00	18.00	19.00	20.00	20.50	21.00	20.25	19.50
1.0	17.00	18.00	19.00	20.00	21.00	22.00	22.50	23.00	22.25	21.50
1.5	19.00	20.00	21.00	22.00	23.00	24.00	24.50	25.00	24.25	23.50
2.0	21.00	22.00	23.00	24.00	25.00	26.00	26.50	27.00	26.25	25.50
2.5	23.00	24.00	25.00	26.00	27.00	28.00	28.50	29.00	28.25	27.50
3.0	25.00	26.00	27.00	28.00	29.00	30.00	30.50	31.00	30.25	29.50
3.5	27.00	28.00	29.00	30.00	31.00	32.00	32.50	33.00	32.25	31.50
4.0	29.00	30.00	31.00	32.00	33.00	34.00	34.50	35.00	34.25	33.50
4.5	30.00	31.00	32.00	33.00	34.00	35.00	35.50	36.00	35.25	34.50
5.0	31.00	32.00	33.00	34.00	35.00	36.00	36.50	37.00	36.25	35.50
5.5	32.00	33.00	34.00	35.00	36.00	37.00	37.50	38.00	37.25	36.50
6.0	33.00	34.00	35.00	36.00	37.00	38.00	38.50	39.00	38.25	37.50
6.5	34.00	35.00	36.00	37.00	38.00	39.00	39.50	40.00	39.25	38.50
7.0	34.33	35.33	36.33	37.33	38.33	39.33	39.83	40.33	39.58	38.83
7.5	34.00	35.00	36.00	37.00	38.00	39.00	39.50	40.00	39.25	38.50
8.0	33.00	34.00	35.00	36.00	37.00	38.00	38.50	39.00	38.25	37.50
8.5	32.00	33.00	34.00	35.00	36.00	37.00	37.50	38.00	37.25	36.50
9.0	31.00	32.00	33.00	34.00	35.00	36.00	36.50	37.00	36.25	35.50
9.5	30.00	31.00	32.00	33.00	34.00	35.00	35.50	36.00	35.25	34.50
10.0	29.00	30.00	31.00	32.00	33.00	34.00	34.50	35.00	34.25	33.50
10.5	28.00	29.00	30.00	31.00	32.00	33.00	33.50	34.00	33.25	32.50
11.0	27.00	28.00	29.00	30.00	31.00	32.00	32.50	33.00	32.25	31.50
11.5	26.00	27.00	28.00	29.00	30.00	31.00	31.50	32.00	31.25	30.50
12.0	25.00	26.00	27.00	28.00	29.00	30.00	30.50	31.00	30.25	29.50
12.5	24.00	25.00	26.00	27.00	28.00	29.00	29.50	30.00	29.25	28.50
13.0	23.00	24.00	25.00	26.00	27.00	28.00	28.50	29.00	28.25	27.50
13.5	22.00	23.00	24.00	25.00	26.00	27.00	27.50	28.00	27.25	26.50
14.0	21.00	22.00	23.00	24.00	25.00	26.00	26.50	27.00	26.25	25.50
14.5	19.00	20.00	21.00	22.00	23.00	24.00	24.50	25.00	24.25	23.50
15.0	17.00	18.00	19.00	20.00	21.00	22.00	22.50	23.00	22.25	21.50
15.5	15.00	16.00	17.00	18.00	19.00	20.00	20.50	21.00	20.25	19.50
16.0	13.00	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00	18.50	19.00	18.25	17.50

Таблица 7.2.1с

Решение задачи 6.2.1.
Значение суммарной целевой функции $F(\nu_1, \nu_3)$

$V_3 \rightarrow$ $\downarrow V_1$	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0
0.0	16.75	16.00	14.00	12.00	10.00	8.00	6.00	4.00	2.00	0.00
0.5	18.75	18.00	16.00	14.00	12.00	10.00	8.00	6.00	4.00	2.00
1.0	20.75	20.00	18.00	16.00	14.00	12.00	10.00	8.00	6.00	4.00
1.5	22.75	22.00	20.00	18.00	16.00	14.00	12.00	10.00	8.00	6.00
2.0	24.75	24.00	22.00	20.00	18.00	16.00	14.00	12.00	10.00	8.00
2.5	26.75	26.00	24.00	22.00	20.00	18.00	16.00	14.00	12.00	10.00
3.0	28.75	28.00	26.00	24.00	22.00	20.00	18.00	16.00	14.00	12.00
3.5	30.75	30.00	28.00	26.00	24.00	22.00	20.00	18.00	16.00	14.00
4.0	32.75	32.00	30.00	28.00	26.00	24.00	22.00	20.00	18.00	16.00
4.5	33.75	33.00	31.00	29.00	27.00	25.00	23.00	21.00	19.00	17.00
5.0	34.75	34.00	32.00	30.00	28.00	26.00	24.00	22.00	20.00	18.00
5.5	35.75	35.00	33.00	31.00	29.00	27.00	25.00	23.00	21.00	19.00
6.0	36.75	36.00	34.00	32.00	30.00	28.00	26.00	24.00	22.00	20.00
6.5	37.75	37.00	35.00	33.00	31.00	29.00	27.00	25.00	23.00	21.00
7.0	38.08	37.33	35.33	33.33	31.33	29.33	27.33	25.33	23.33	21.33
7.5	37.75	37.00	35.00	33.00	31.00	29.00	27.00	25.00	23.00	21.00
8.0	36.75	36.00	34.00	32.00	30.00	28.00	26.00	24.00	22.00	20.00
8.5	35.75	35.00	33.00	31.00	29.00	27.00	25.00	23.00	21.00	19.00
9.0	34.75	34.00	32.00	30.00	28.00	26.00	24.00	22.00	20.00	18.00
9.5	33.75	33.00	31.00	29.00	27.00	25.00	23.00	21.00	19.00	17.00
10.0	32.75	32.00	30.00	28.00	26.00	24.00	22.00	20.00	18.00	16.00
10.5	31.75	31.00	29.00	27.00	25.00	23.00	21.00	19.00	17.00	15.00
11.0	30.75	30.00	28.00	26.00	24.00	22.00	20.00	18.00	16.00	14.00
11.5	29.75	29.00	27.00	25.00	23.00	21.00	19.00	17.00	15.00	13.00
12.0	28.75	28.00	26.00	24.00	22.00	20.00	18.00	16.00	14.00	12.00
12.5	27.75	27.00	25.00	23.00	21.00	19.00	17.00	15.00	13.00	11.00
13.0	26.75	26.00	24.00	22.00	20.00	18.00	16.00	14.00	12.00	10.00
13.5	25.75	25.00	23.00	21.00	19.00	17.00	15.00	13.00	11.00	9.00
14.0	24.75	24.00	22.00	20.00	18.00	16.00	14.00	12.00	10.00	8.00
14.5	22.75	22.00	20.00	18.00	16.00	14.00	12.00	10.00	8.00	6.00
15.0	20.75	20.00	18.00	16.00	14.00	12.00	10.00	8.00	6.00	4.00
15.5	18.75	18.00	16.00	14.00	12.00	10.00	8.00	6.00	4.00	2.00
16.0	16.75	16.00	14.00	12.00	10.00	8.00	6.00	4.00	2.00	0.00

Таблица 7.2.2а

Решение задачи 6.2.2.
Значение суммарной целевой функции $F(\nu_1, \nu_3)$

$V_3 \rightarrow$ $\downarrow V_1$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0.25	2.50	4.00	7.00	10.00	13.00	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00	19.00
0.5	3.50	5.00	8.00	11.00	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00	19.00	20.00
1.0	5.50	7.00	10.00	13.00	16.00	17.00	18.00	19.00	20.00	21.00	22.00
1.5	7.50	9.00	12.00	15.00	18.00	19.00	20.00	21.00	22.00	23.00	24.00
2.0	9.50	11.00	14.00	17.00	20.00	21.00	22.00	23.00	24.00	25.00	26.00
2.5	11.50	13.00	16.00	19.00	22.00	23.00	24.00	25.00	26.00	27.00	28.00
3.0	13.50	15.00	18.00	21.00	24.00	25.00	26.00	27.00	28.00	29.00	30.00
3.5	15.50	17.00	20.00	23.00	26.00	27.00	28.00	29.00	30.00	31.00	32.00
4.0	17.50	19.00	22.00	25.00	28.00	29.00	30.00	31.00	32.00	33.00	34.00
4.5	19.50	21.00	24.00	27.00	30.00	31.00	32.00	33.00	34.00	35.00	36.00
5.0	21.50	23.00	26.00	29.00	32.00	33.00	34.00	35.00	36.00	37.00	38.00
5.5	23.50	25.00	28.00	31.00	34.00	35.00	36.00	37.00	38.00	39.00	40.00
6.0	25.50	27.00	30.00	33.00	36.00	37.00	38.00	39.00	40.00	41.00	42.00
6.5	27.50	29.00	32.00	35.00	38.00	39.00	40.00	41.00	42.00	43.00	44.00
7.0	29.50	31.00	34.00	37.00	40.00	41.00	42.00	43.00	44.00	45.00	46.00
7.5	30.50	32.00	35.00	38.00	41.00	42.00	43.00	44.00	45.00	46.00	47.00
8.0	29.50	31.00	34.00	37.00	40.00	41.00	42.00	43.00	44.00	45.00	46.00
8.5	28.50	30.00	33.00	36.00	39.00	40.00	41.00	42.00	43.00	44.00	45.00
9.0	27.50	29.00	32.00	35.00	38.00	39.00	40.00	41.00	42.00	43.00	44.00
9.5	26.50	28.00	31.00	34.00	37.00	38.00	39.00	40.00	41.00	42.00	43.00
10.0	25.50	27.00	30.00	33.00	36.00	37.00	38.00	39.00	40.00	41.00	42.00
10.5	24.50	26.00	29.00	32.00	35.00	36.00	37.00	38.00	39.00	40.00	41.00
11.0	23.50	25.00	28.00	31.00	34.00	35.00	36.00	37.00	38.00	39.00	40.00
11.5	22.50	24.00	27.00	30.00	33.00	34.00	35.00	36.00	37.00	38.00	39.00
12.0	21.50	23.00	26.00	29.00	32.00	33.00	34.00	35.00	36.00	37.00	38.00
12.5	20.50	22.00	25.00	28.00	31.00	32.00	33.00	34.00	35.00	36.00	37.00
13.0	19.50	21.00	24.00	27.00	30.00	31.00	32.00	33.00	34.00	35.00	36.00
13.5	18.50	20.00	23.00	26.00	29.00	30.00	31.00	32.00	33.00	34.00	35.00
14.0	17.50	19.00	22.00	25.00	28.00	29.00	30.00	31.00	32.00	33.00	34.00
14.5	13.50	15.00	18.00	21.00	24.00	25.00	26.00	27.00	28.00	29.00	30.00
15.0	9.50	11.00	14.00	17.00	20.00	21.00	22.00	23.00	24.00	25.00	26.00
15.5	5.50	7.00	10.00	13.00	16.00	17.00	18.00	19.00	20.00	21.00	22.00
16.0	1.50	3.00	6.00	9.00	12.00	13.00	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00

Таблица 7.2.2b

Решение задачи 6.2.2.
Значение суммарной целевой функции $F(\nu_1, \nu_3)$

$\nu_3 \rightarrow$ $\downarrow \nu_1$	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
0.25	20.00	21.00	22.00	23.00	24.00	25.00	24.00	23.00	21.50	20.00
0.5	21.00	22.00	23.00	24.00	25.00	26.00	25.00	24.00	22.50	21.00
1.0	23.00	24.00	25.00	26.00	27.00	28.00	27.00	26.00	24.50	23.00
1.5	25.00	26.00	27.00	28.00	29.00	30.00	29.00	28.00	26.50	25.00
2.0	27.00	28.00	29.00	30.00	31.00	32.00	31.00	30.00	28.50	27.00
2.5	29.00	30.00	31.00	32.00	33.00	34.00	33.00	32.00	30.50	29.000
3.0	31.00	32.00	33.00	34.00	35.00	36.00	35.00	34.00	32.50	31.00
3.5	33.00	34.00	35.00	36.00	37.00	38.00	37.00	36.00	34.50	33.00
4.0	35.00	36.00	37.00	38.00	39.00	40.00	39.00	38.00	36.50	35.00
4.5	37.00	38.00	39.00	40.00	41.00	42.00	41.00	40.00	38.50	37.00
5.0	39.00	40.00	41.00	42.00	43.00	44.00	43.00	42.00	40.50	39.00
5.5	41.00	42.00	43.00	44.00	45.00	46.00	45.00	44.00	42.50	41.00
6.0	43.00	44.00	45.00	46.00	47.00	48.00	47.00	46.00	44.50	43.00
6.5	45.00	46.00	47.00	48.00	49.00	50.00	49.00	48.00	46.50	45.00
7.0	47.00	48.00	49.00	50.00	51.00	52.00	51.00	50.00	48.50	47.00
7.5	48.00	49.00	50.00	51.00	52.00	53.00	52.00	51.00	49.50	48.00
8.0	47.00	48.00	49.00	50.00	51.00	52.00	51.00	50.00	48.50	47.00
8.5	46.00	47.00	48.00	49.00	50.00	51.00	50.00	49.00	47.50	46.00
9.0	45.00	46.00	47.00	48.00	49.00	50.00	49.00	48.00	46.50	45.00
9.5	44.00	45.00	46.00	47.00	48.00	49.00	48.00	47.00	45.50	44.00
10.0	43.00	44.00	45.00	46.00	47.00	48.00	47.00	46.00	44.50	43.00
10.5	42.00	43.00	44.00	45.00	46.00	47.00	46.00	45.00	43.50	42.00
11.0	41.00	42.00	43.00	44.00	45.00	46.00	45.00	44.00	42.50	41.00
11.5	40.00	41.00	42.00	43.00	44.00	45.00	44.00	43.00	41.50	40.00
12.0	39.00	40.00	41.00	42.00	43.00	44.00	43.00	42.00	40.50	39.00
12.5	38.00	39.00	40.00	41.00	42.00	43.00	42.00	41.00	39.50	38.00
13.0	37.00	38.00	39.00	40.00	41.00	42.00	41.00	40.00	38.50	37.00
13.5	36.00	37.00	38.00	39.00	40.00	41.00	40.00	39.00	37.50	36.00
14.0	35.00	36.00	37.00	38.00	39.00	40.00	39.00	38.00	36.50	35.00
14.5	31.00	32.00	33.00	34.00	35.00	36.00	35.00	34.00	32.50	31.00
15.0	27.00	28.00	29.00	30.00	31.00	32.00	31.00	30.00	28.50	27.00
15.5	23.00	24.00	25.00	26.00	27.00	28.00	27.00	26.00	24.50	23.00
16.0	19.00	20.00	21.00	22.00	23.00	24.00	23.00	22.00	20.50	19.00

Таблица 7.2.2c

Решение задачи 6.2.2.
Значение суммарной целевой функции $F(\nu_1, \nu_3)$

$V_3 \rightarrow$ $\downarrow V_1$	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0
0.25	18.50	17.00	15.00	13.00	11.00	9.00	7.00	5.00	3.00	1.00
0.5	19.50	18.00	16.00	14.00	12.00	10.00	8.00	6.00	4.00	2.00
1.0	21.50	20.00	18.00	16.00	14.00	12.00	10.00	8.00	6.00	4.00
1.5	23.50	22.00	20.00	18.00	16.00	14.00	12.00	10.00	8.00	6.00
2.0	25.50	24.00	22.00	20.00	18.00	16.00	14.00	12.00	10.00	8.00
2.5	27.50	26.00	24.00	22.00	20.00	18.00	16.00	14.00	12.00	10.00
3.0	29.50	28.00	26.00	24.00	22.00	20.00	18.00	16.00	14.00	12.00
3.5	31.50	30.00	28.00	26.00	24.00	22.00	20.00	18.00	16.00	14.00
4.0	33.50	32.00	30.00	28.00	26.00	24.00	22.00	20.00	18.00	16.00
4.5	35.50	34.00	32.00	30.00	28.00	26.00	24.00	22.00	20.00	18.00
5.0	37.50	36.00	34.00	32.00	30.00	28.00	26.00	24.00	22.00	20.00
5.5	39.50	38.00	36.00	34.00	32.00	30.00	28.00	26.00	24.00	22.00
6.0	41.50	40.00	38.00	36.00	34.00	32.00	30.00	28.00	26.00	24.00
6.5	43.50	42.00	40.00	38.00	36.00	34.00	32.00	30.00	28.00	26.00
7.0	45.50	44.00	42.00	40.00	38.00	36.00	34.00	32.00	30.00	28.00
7.5	46.50	45.00	43.00	41.00	39.00	37.00	35.00	33.00	31.00	29.00
8.0	45.50	44.00	42.00	40.00	38.00	36.00	34.00	32.00	30.00	28.00
8.5	44.50	43.00	41.00	39.00	37.00	35.00	33.00	31.00	29.00	27.00
9.0	43.50	42.00	40.00	38.00	36.00	34.00	32.00	30.00	28.00	26.00
9.5	42.50	41.00	39.00	37.00	35.00	33.00	31.00	29.00	27.00	25.00
10.0	42.00	40.50	38.50	36.50	34.50	32.50	30.50	28.50	26.50	24.50
10.5	41.50	40.00	38.00	36.00	34.00	32.00	30.00	28.00	26.00	24.00
11.0	40.50	39.00	37.00	35.00	33.00	31.00	29.00	27.00	25.00	23.00
11.5	39.50	38.00	36.00	34.00	32.00	30.00	28.00	26.00	24.00	22.00
12.0	38.50	37.00	35.00	33.00	31.00	29.00	27.00	25.00	23.00	21.00
12.5	37.50	36.00	34.00	32.00	30.00	28.00	26.00	24.00	22.00	20.00
13.0	36.50	35.00	33.00	31.00	29.00	27.00	25.00	23.00	21.00	19.00
13.5	35.50	34.00	32.00	30.00	28.00	26.00	24.00	22.00	20.00	18.00
14.0	34.50	33.00	31.00	29.00	27.00	25.00	23.00	21.00	19.00	17.00
14.5	33.50	32.00	30.00	28.00	26.00	24.00	22.00	20.00	18.00	16.00
15.0	29.50	28.00	26.00	24.00	22.00	20.00	18.00	16.00	14.00	12.00
15.5	21.50	20.00	18.00	16.00	14.00	12.00	10.00	8.00	6.00	4.00
16.0	17.50	16.00	14.00	12.00	10.00	8.00	6.00	4.00	2.00	0.00

§ 7.3. Численное решение задачи 6.3.6

Таблица 7.3.1а

Решение задачи 6.3.6 (случай 1°а).
Зависимость рассогласования критериев $\rho(u_1, u_2)$

$u_2 \rightarrow$ $\downarrow u_1$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	0.098	0.186	0.269	0.345	0.414	0.476	0.531	0.579	0.621
0.2	0.186	0.193	0.268	0.343	0.411	0.471	0.525	0.571	0.611
0.3	0.269	0.268	0.282	0.341	0.407	0.467	0.519	0.563	0.600
0.4	0.345	0.343	0.341	0.367	0.404	0.462	0.512	0.554	0.588
0.5	0.414	0.411	0.407	0.404	0.444	0.477	0.504	0.544	0.576
0.6	0.476	0.471	0.467	0.462	0.477	0.514	0.543	0.565	0.581
0.7	0.531	0.525	0.519	0.512	0.504	0.543	0.574	0.598	0.615
0.8	0.579	0.571	0.563	0.554	0.544	0.565	0.598	0.622	0.639
0.9	0.621	0.611	0.600	0.588	0.576	0.581	0.615	0.639	0.655
1.0	0.655	0.643	0.630	0.615	0.600	0.592	0.625	0.649	0.662
1.1	0.683	0.668	0.652	0.635	0.616	0.598	0.631	0.652	0.662
1.2	0.703	0.686	0.667	0.646	0.624	0.600	0.631	0.649	0.655
1.3	0.717	0.696	0.674	0.650	0.624	0.598	0.625	0.639	0.639
1.4	0.724	0.700	0.674	0.646	0.616	0.592	0.615	0.622	0.615
1.5	0.724	0.696	0.667	0.635	0.600	0.581	0.598	0.598	0.581
1.6	0.717	0.686	0.652	0.615	0.576	0.565	0.574	0.565	0.576
1.7	0.703	0.668	0.630	0.588	0.544	0.543	0.543	0.544	0.588
1.8	0.683	0.643	0.600	0.554	0.504	0.514	0.504	0.554	0.600
1.9	0.655	0.611	0.563	0.512	0.477	0.477	0.512	0.563	0.611
2.0	0.621	0.571	0.519	0.462	0.444	0.462	0.519	0.571	0.621
2.1	0.579	0.525	0.467	0.404	0.404	0.467	0.525	0.579	0.000
2.2	0.531	0.471	0.407	0.367	0.407	0.471	0.531	0.000	0.000
2.3	0.476	0.411	0.341	0.341	0.411	0.476	0.000	0.000	0.000
2.4	0.414	0.343	0.282	0.343	0.414	0.000	0.000	0.000	0.000
2.5	0.345	0.268	0.268	0.345	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 7.3.1b

Решение задачи 6.3.6 (случай 1°b).
Зависимость рассогласования критериев $\rho(u_1, u_2)$

$u_2 \rightarrow$ $\downarrow u_1$	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
0.1	0.655	0.683	0.703	0.717	0.724	0.724	0.717	0.703
0.2	0.643	0.668	0.686	0.696	0.700	0.696	0.686	0.668
0.3	0.630	0.652	0.667	0.674	0.674	0.667	0.652	0.630
0.4	0.615	0.635	0.646	0.650	0.646	0.635	0.615	0.588
0.5	0.600	0.616	0.624	0.624	0.616	0.600	0.576	0.544
0.6	0.592	0.598	0.600	0.598	0.592	0.581	0.565	0.543
0.7	0.625	0.631	0.631	0.625	0.615	0.598	0.574	0.543
0.8	0.649	0.652	0.649	0.639	0.622	0.598	0.565	0.544
0.9	0.662	0.662	0.655	0.639	0.615	0.581	0.576	0.588
1.0	0.667	0.662	0.649	0.625	0.592	0.600	0.615	0.630
1.1	0.662	0.652	0.631	0.598	0.616	0.635	0.652	0.668
1.2	0.649	0.631	0.600	0.624	0.646	0.667	0.686	0.703
1.3	0.625	0.598	0.624	0.650	0.674	0.696	0.717	0.000
1.4	0.592	0.616	0.646	0.674	0.700	0.724	0.000	0.000
1.5	0.600	0.635	0.667	0.696	0.724	0.000	0.000	0.000
1.6	0.615	0.652	0.686	0.717	0.000	0.000	0.000	0.000
1.7	0.630	0.668	0.703	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.8	0.643	0.683	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.9	0.655	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 7.3.1с

Решение задачи 6.3.6 (случай 1°с).
Зависимость рассогласования критериев $\rho(u_1, u_2)$

$u_2 \rightarrow$ $\downarrow u_1$	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
0.1	0.683	0.655	0.621	0.579	0.531	0.476	0.414	0.345
0.2	0.643	0.611	0.571	0.525	0.471	0.411	0.343	0.268
0.3	0.600	0.563	0.519	0.467	0.407	0.341	0.282	0.268
0.4	0.554	0.512	0.462	0.404	0.367	0.341	0.343	0.345
0.5	0.504	0.477	0.444	0.404	0.407	0.411	0.414	0.000
0.6	0.514	0.477	0.462	0.467	0.471	0.476	0.000	0.000
0.7	0.504	0.512	0.519	0.525	0.531	0.000	0.000	0.000
0.8	0.554	0.563	0.571	0.579	0.000	0.000	0.000	0.000
0.9	0.600	0.611	0.621	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.0	0.643	0.655	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.1	0.683	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 7.3.2а

Решение задачи 6.3.6 (случай 2°а).
Зависимость рассогласования критериев $\rho(u_1, u_2)$

$u_2 \rightarrow$ $\downarrow u_1$	0.50	0.62	0.74	0.86	0.98	1.10	1.22	1.34	1.46	1.58
0.50	0.486	0.573	0.666	0.752	0.830	0.900	0.961	1.014	1.059	1.097
0.62	0.573	0.593	0.661	0.746	0.823	0.892	0.953	1.005	1.050	1.087
0.74	0.666	0.661	0.695	0.740	0.815	0.883	0.943	0.995	1.039	1.076
0.86	0.752	0.746	0.740	0.791	0.832	0.874	0.933	0.984	1.027	1.063
0.98	0.830	0.823	0.815	0.832	0.879	0.918	0.950	0.975	1.013	1.049
1.10	0.900	0.892	0.883	0.874	0.918	0.960	0.995	1.024	1.047	1.065
1.22	0.961	0.953	0.943	0.933	0.950	0.995	1.033	1.064	1.089	1.109
1.34	1.014	1.005	0.995	0.984	0.975	1.024	1.064	1.097	1.123	1.144
1.46	1.059	1.050	1.039	1.027	1.013	1.047	1.089	1.123	1.151	1.172
1.58	1.097	1.087	1.076	1.063	1.049	1.065	1.109	1.144	1.172	1.194
1.70	1.128	1.118	1.106	1.092	1.077	1.080	1.124	1.160	1.188	1.209
1.82	1.152	1.142	1.129	1.115	1.099	1.090	1.135	1.171	1.199	1.219
1.94	1.171	1.160	1.147	1.132	1.114	1.098	1.142	1.178	1.205	1.224
2.06	1.185	1.173	1.159	1.143	1.125	1.104	1.146	1.181	1.207	1.224
2.18	1.194	1.181	1.167	1.150	1.130	1.108	1.148	1.181	1.205	1.220
2.30	1.198	1.186	1.170	1.152	1.131	1.107	1.146	1.178	1.199	1.211
2.42	1.199	1.186	1.169	1.150	1.127	1.102	1.142	1.171	1.190	1.197
2.54	1.197	1.183	1.165	1.145	1.121	1.096	1.135	1.162	1.177	1.178
2.66	1.193	1.177	1.159	1.136	1.110	1.090	1.126	1.150	1.160	1.155
2.78	1.185	1.169	1.149	1.125	1.098	1.082	1.116	1.135	1.139	1.127
2.90	1.176	1.159	1.138	1.112	1.082	1.073	1.103	1.117	1.115	1.093
3.02	1.165	1.147	1.124	1.097	1.064	1.062	1.088	1.097	1.087	1.052
3.14	1.153	1.133	1.109	1.080	1.045	1.049	1.071	1.074	1.054	1.051
3.26	1.139	1.118	1.093	1.061	1.024	1.036	1.052	1.047	1.016	1.064
3.38	1.124	1.102	1.075	1.041	1.001	1.021	1.031	1.017	1.020	1.077
3.50	1.109	1.086	1.056	1.020	0.978	1.004	1.008	0.984	1.030	1.089
3.62	1.093	1.068	1.037	0.998	0.965	0.986	0.982	0.978	1.040	1.100
3.74	1.076	1.050	1.017	0.976	0.952	0.967	0.954	0.987	1.050	1.111
3.86	1.059	1.031	0.996	0.952	0.937	0.946	0.927	0.995	1.059	0.000
3.98	1.042	1.012	0.975	0.928	0.921	0.923	0.934	1.002	1.068	0.000

Таблица 7.3.2b

Решение задачи 6.3.6 (случай 2°b).
Зависимость рассогласования критериев $\rho(u_1, u_2)$

$u_2 \rightarrow$ $\downarrow u_1$	1.70	1.82	1.94	2.06	2.18	2.30	2.42	2.54	2.66	2.78
0.50	1.128	1.152	1.171	1.185	1.194	1.198	1.199	1.197	1.193	1.185
0.62	1.118	1.142	1.160	1.173	1.181	1.186	1.186	1.183	1.177	1.169
0.74	1.106	1.129	1.147	1.159	1.167	1.170	1.169	1.165	1.159	1.149
0.86	1.092	1.115	1.132	1.143	1.150	1.152	1.150	1.145	1.136	1.125
0.98	1.077	1.099	1.114	1.125	1.130	1.131	1.127	1.121	1.110	1.098
1.10	1.080	1.090	1.098	1.104	1.108	1.107	1.102	1.096	1.090	1.082
1.22	1.124	1.135	1.142	1.146	1.148	1.146	1.142	1.135	1.126	1.116
1.34	1.160	1.171	1.178	1.181	1.181	1.178	1.171	1.162	1.150	1.135
1.46	1.188	1.199	1.205	1.207	1.205	1.199	1.190	1.177	1.160	1.139
1.58	1.209	1.219	1.224	1.224	1.220	1.211	1.197	1.178	1.155	1.127
1.70	1.224	1.233	1.236	1.233	1.225	1.211	1.191	1.166	1.133	1.093
1.82	1.233	1.240	1.240	1.233	1.220	1.200	1.172	1.136	1.090	1.100
1.94	1.236	1.240	1.236	1.225	1.205	1.176	1.137	1.100	1.122	1.143
2.06	1.233	1.233	1.225	1.206	1.178	1.137	1.113	1.137	1.161	1.183
2.18	1.225	1.220	1.205	1.178	1.137	1.119	1.147	1.173	1.198	0.000
2.30	1.211	1.200	1.176	1.137	1.119	1.150	1.179	1.207	0.000	0.000
2.42	1.191	1.172	1.137	1.113	1.147	1.179	1.210	0.000	0.000	0.000
2.54	1.166	1.136	1.100	1.137	1.173	1.207	0.000	0.000	0.000	0.000
2.66	1.133	1.090	1.122	1.161	1.198	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.78	1.093	1.100	1.143	1.183	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.90	1.072	1.118	1.162	1.204	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.02	1.088	1.136	1.181	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.14	1.103	1.152	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.26	1.117	1.168	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.38	1.131	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.50	1.144	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.62	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.74	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.86	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.98	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 7.3.2c

Решение задачи 6.3.6 (случай 2°с).
Зависимость рассогласования критериев $\rho(u_1, u_2)$

$u_2 \rightarrow$ $\downarrow u_1$	2.90	3.02	3.14	3.26	3.38	3.50	3.62	3.74	3.86	3.98
0.50	1.176	1.165	1.153	1.139	1.124	1.109	1.093	1.076	1.059	1.042
0.62	1.159	1.147	1.133	1.118	1.102	1.086	1.068	1.050	1.031	1.012
0.74	1.138	1.124	1.109	1.093	1.075	1.056	1.037	1.017	0.996	0.975
0.86	1.112	1.097	1.080	1.061	1.041	1.020	0.998	0.976	0.952	0.928
0.98	1.082	1.064	1.045	1.024	1.001	0.978	0.965	0.952	0.937	0.921
1.10	1.073	1.062	1.049	1.036	1.021	1.004	0.986	0.967	0.946	0.923
1.22	1.103	1.088	1.071	1.052	1.031	1.008	0.982	0.954	0.927	0.934
1.34	1.117	1.097	1.074	1.047	1.017	0.984	0.978	0.987	0.995	1.002
1.46	1.115	1.087	1.054	1.016	1.020	1.030	1.040	1.050	1.059	1.068
1.58	1.093	1.052	1.051	1.064	1.077	1.089	1.100	1.111	0.000	0.000
1.70	1.072	1.088	1.103	1.117	1.131	1.144	0.000	0.000	0.000	0.000
1.82	1.118	1.136	1.152	1.168	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.94	1.162	1.181	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.06	1.204	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.18	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.30	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.42	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.54	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.66	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.78	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.90	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.02	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.14	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.26	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.38	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.50	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.62	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.74	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.86	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.98	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 7.3.3а

Решение задачи 6.3.6 (случай 3°а).
Зависимость рассогласования критериев $\rho(u_1, u_2)$

$u_2 \rightarrow$ $\downarrow u_1$	0.50	0.67	0.84	1.01	1.18	1.35	1.52	1.69	1.86	2.03
1.00	0.541	0.718	0.892	0.977	1.095	1.226	1.347	1.459	1.560	1.652
1.17	0.733	0.970	1.100	1.087	1.124	1.207	1.322	1.425	1.519	1.601
1.34	0.950	1.253	1.236	1.217	1.199	1.260	1.318	1.394	1.479	1.553
1.51	1.191	1.392	1.365	1.339	1.314	1.319	1.382	1.433	1.475	1.509
1.68	1.454	1.520	1.484	1.450	1.418	1.387	1.434	1.487	1.531	1.566
1.85	1.689	1.641	1.595	1.552	1.511	1.472	1.476	1.531	1.576	1.611
2.02	1.814	1.754	1.697	1.644	1.594	1.547	1.511	1.567	1.611	1.645
2.19	1.933	1.858	1.789	1.726	1.666	1.611	1.559	1.595	1.639	1.672
2.36	2.044	1.955	1.873	1.798	1.729	1.665	1.605	1.617	1.659	1.691
2.53	2.148	2.043	1.948	1.861	1.782	1.709	1.642	1.633	1.675	1.705
2.70	2.245	2.124	2.015	1.916	1.827	1.746	1.671	1.645	1.685	1.713
2.87	2.336	2.197	2.073	1.963	1.864	1.774	1.693	1.653	1.691	1.717
3.04	2.419	2.262	2.124	2.002	1.893	1.796	1.707	1.658	1.694	1.718
3.21	2.496	2.320	2.168	2.034	1.916	1.811	1.716	1.660	1.694	1.715
3.38	2.566	2.372	2.205	2.060	1.933	1.820	1.720	1.660	1.691	1.710
3.55	2.629	2.416	2.235	2.080	1.944	1.825	1.720	1.657	1.686	1.703
3.72	2.687	2.455	2.260	2.094	1.951	1.825	1.715	1.653	1.679	1.694
3.89	2.739	2.488	2.280	2.104	1.953	1.822	1.708	1.647	1.671	1.683
4.06	2.785	2.516	2.295	2.109	1.951	1.816	1.697	1.640	1.662	1.671
4.23	2.826	2.539	2.305	2.111	1.947	1.806	1.685	1.632	1.651	1.658
4.40	2.861	2.557	2.312	2.109	1.939	1.794	1.670	1.623	1.640	1.645
4.57	2.892	2.571	2.314	2.104	1.929	1.781	1.654	1.613	1.628	1.630
4.74	2.919	2.581	2.314	2.097	1.917	1.765	1.636	1.603	1.615	1.615
4.91	2.941	2.588	2.311	2.087	1.903	1.749	1.617	1.592	1.602	1.600
5.08	2.959	2.591	2.305	2.075	1.887	1.731	1.598	1.580	1.588	1.584
5.25	2.973	2.591	2.296	2.062	1.870	1.712	1.578	1.568	1.574	1.568
5.42	2.985	2.589	2.286	2.047	1.852	1.692	1.557	1.556	1.560	1.552
5.59	2.993	2.584	2.274	2.030	1.834	1.672	1.536	1.544	1.545	1.536
5.76	2.998	2.577	2.260	2.013	1.814	1.651	1.518	1.531	1.531	1.520
5.93	3.000	2.568	2.245	1.995	1.794	1.630	1.507	1.518	1.516	1.512

Таблица 7.3.3b

Решение задачи 6.3.6 (случай 3°b).
Зависимость рассогласования критериев $\rho(u_1, u_2)$

$u_2 \rightarrow$ $\downarrow u_1$	2.2	2.37	2.54	2.71	2.88	3.05	3.22	3.39	3.56	3.73
1.00	1.734	1.806	1.870	1.925	1.972	2.011	2.043	2.069	2.089	2.104
1.17	1.674	1.736	1.790	1.834	1.871	1.901	1.924	1.940	1.952	1.959
1.34	1.617	1.671	1.716	1.752	1.781	1.802	1.817	1.827	1.832	1.832
1.51	1.565	1.611	1.648	1.677	1.698	1.713	1.722	1.726	1.725	1.721
1.68	1.593	1.615	1.631	1.643	1.651	1.656	1.658	1.658	1.655	1.651
1.85	1.638	1.658	1.673	1.683	1.690	1.692	1.692	1.689	1.684	1.678
2.02	1.672	1.691	1.704	1.712	1.716	1.716	1.714	1.709	1.701	1.692
2.19	1.697	1.714	1.725	1.731	1.733	1.731	1.726	1.718	1.708	1.697
2.36	1.714	1.730	1.738	1.742	1.741	1.737	1.729	1.719	1.707	1.694
2.53	1.726	1.739	1.745	1.746	1.743	1.736	1.727	1.714	1.700	1.684
2.70	1.732	1.742	1.747	1.745	1.740	1.730	1.718	1.704	1.687	1.669
2.87	1.733	1.742	1.743	1.740	1.732	1.720	1.706	1.689	1.671	1.651
3.04	1.732	1.737	1.737	1.731	1.720	1.707	1.690	1.672	1.651	1.675
3.21	1.727	1.730	1.727	1.718	1.706	1.690	1.672	1.651	1.688	1.725
3.38	1.719	1.720	1.715	1.704	1.689	1.672	1.651	1.692	1.734	1.773
3.55	1.709	1.708	1.700	1.688	1.671	1.651	1.688	1.734	1.777	1.819
3.72	1.698	1.694	1.684	1.670	1.651	1.676	1.726	1.774	1.819	1.862
3.89	1.685	1.679	1.667	1.651	1.655	1.710	1.762	1.811	1.859	1.904
4.06	1.671	1.663	1.649	1.631	1.685	1.742	1.796	1.847	1.897	1.944
4.23	1.656	1.646	1.630	1.652	1.713	1.772	1.828	1.882	1.933	1.982
4.40	1.640	1.628	1.610	1.677	1.741	1.801	1.859	1.915	1.968	2.019
4.57	1.623	1.610	1.633	1.701	1.767	1.829	1.889	1.946	2.001	2.054
4.74	1.607	1.591	1.654	1.724	1.791	1.856	1.917	1.976	2.033	2.087
4.91	1.589	1.598	1.674	1.746	1.815	1.881	1.945	2.005	2.064	2.120
5.08	1.572	1.616	1.693	1.767	1.838	1.906	1.971	2.033	2.093	2.151
5.25	1.554	1.633	1.712	1.787	1.860	1.929	1.996	2.060	2.121	2.181
5.42	1.565	1.649	1.729	1.807	1.881	1.952	2.020	2.086	2.149	2.209
5.59	1.579	1.664	1.746	1.825	1.901	1.973	2.043	2.110	2.175	2.237
5.76	1.592	1.679	1.763	1.843	1.920	1.994	2.065	2.134	2.200	2.264
5.93	1.605	1.693	1.778	1.860	1.939	2.014	2.087	2.157	2.225	2.290

Таблица 7.3.3с

Решение задачи 6.3.6 (случай 3°с).
Зависимость рассогласования критериев $\rho(u_1, u_2)$

$u_2 \rightarrow$ $\downarrow u_1$	3.90	4.07	4.24	4.41	4.58	4.75	4.92	5.09	5.26	5.43
1.00	2.114	2.119	2.121	2.120	2.115	2.108	2.098	2.087	2.073	2.058
1.17	1.961	1.960	1.955	1.948	1.938	1.926	1.912	1.896	1.880	1.862
1.34	1.829	1.823	1.813	1.802	1.788	1.773	1.756	1.738	1.719	1.700
1.51	1.714	1.703	1.691	1.676	1.660	1.642	1.623	1.604	1.584	1.563
1.68	1.645	1.638	1.630	1.621	1.612	1.601	1.590	1.579	1.567	1.555
1.85	1.670	1.660	1.650	1.639	1.627	1.614	1.601	1.587	1.573	1.559
2.02	1.682	1.670	1.657	1.644	1.630	1.615	1.599	1.584	1.568	1.552
2.19	1.684	1.670	1.655	1.639	1.623	1.606	1.589	1.572	1.554	1.561
2.36	1.679	1.662	1.645	1.628	1.610	1.591	1.595	1.612	1.629	1.645
2.53	1.667	1.649	1.630	1.610	1.630	1.651	1.671	1.690	1.708	1.726
2.70	1.650	1.631	1.650	1.675	1.699	1.721	1.743	1.764	1.784	1.803
2.87	1.653	1.683	1.712	1.739	1.764	1.789	1.813	1.835	1.857	1.878
3.04	1.708	1.740	1.771	1.800	1.827	1.854	1.879	1.903	1.927	1.949
3.21	1.761	1.795	1.827	1.858	1.887	1.916	1.943	1.969	1.993	2.017
3.38	1.811	1.847	1.881	1.913	1.945	1.975	2.004	2.031	2.058	2.083
3.55	1.858	1.896	1.932	1.967	2.000	2.032	2.062	2.091	2.120	2.147
3.72	1.904	1.944	1.982	2.018	2.053	2.086	2.118	2.149	2.179	2.208
3.89	1.947	1.989	2.029	2.067	2.103	2.139	2.172	2.205	2.236	2.266
4.06	1.989	2.032	2.074	2.114	2.152	2.189	2.224	2.259	2.291	2.323
4.23	2.029	2.074	2.117	2.159	2.199	2.237	2.274	2.310	2.345	2.378
4.40	2.067	2.114	2.159	2.202	2.244	2.284	2.323	2.360	2.396	2.431
4.57	2.104	2.153	2.199	2.244	2.287	2.329	2.369	2.408	2.445	2.482
4.74	2.140	2.190	2.238	2.285	2.329	2.372	2.414	2.454	2.493	2.531
4.91	2.174	2.225	2.275	2.323	2.370	2.414	2.457	2.499	2.539	2.578
5.08	2.206	2.260	2.311	2.361	2.409	2.455	2.499	2.542	2.584	2.625
5.25	2.238	2.293	2.346	2.397	2.446	2.494	2.540	2.584	2.627	2.669
5.42	2.268	2.324	2.379	2.432	2.482	2.531	2.579	2.625	2.669	2.712
5.59	2.297	2.355	2.411	2.465	2.517	2.568	2.617	2.664	2.710	2.754
5.76	2.325	2.385	2.442	2.498	2.551	2.603	2.653	2.702	2.749	2.795
5.93	2.353	2.414	2.472	2.529	2.584	2.637	2.689	2.739	2.787	2.834

§ 7.4. Численное решение задачи 6.1.19

На рис. 6.6 показано графическое представление решения задачи 6.1.19(1°). Аналогичное графическое представление решения задачи 6.1.19(2°) представлено на рис. 6.7.

Ниже в данном приложении в табл. 7.4.1а–с и 7.4.2а–с приводятся численные решения этих задач.

Таблица 7.4.1а

Решение задачи 6.1.19(1°). Значение оптимального остатка средств $S(N)$ как функция от K_0 и K

$K_0 \rightarrow$ $\downarrow K$	20	30	40	50	60	70	80
30	5576.883	5524.828	5483.437	5449.935	5423.276	5402.779	5398.687
40	5641.751	5588.331	5547.888	5517.373	5493.784	5476.343	5474.784
50	5700.569	5645.624	5603.440	5573.747	5553.292	5539.004	5540.206
60	5754.680	5697.751	5653.628	5621.880	5602.177	5591.085	5595.314
70	5805.006	5745.926	5699.475	5665.367	5643.277	5632.880	5640.017
80	5842.262	5781.248	5731.966	5695.056	5670.132	5656.912	5664.133
90	5857.770	5796.317	5744.992	5704.976	5676.922	5660.631	5665.382
100	5853.375	5791.506	5739.665	5697.347	5665.984	5646.486	5648.457
110	5830.734	5768.178	5715.898	5673.109	5639.114	5616.267	5615.580
120	5790.863	5726.979	5673.176	5628.899	5593.734	5569.313	5568.233
130	5745.478	5681.254	5627.084	5582.552	5547.268	5522.650	5520.203
140	5702.838	5638.573	5584.432	5539.889	5504.468	5479.851	5477.404
150	5660.628	5596.464	5542.416	5497.876	5462.539	5437.923	5435.477
160	5617.991	5554.007	5500.067	5455.596	5420.393	5395.810	5393.364
170	5574.144	5510.328	5456.477	5412.252	5377.052	5352.686	5350.260
180	5528.352	5464.570	5411.036	5366.953	5331.924	5307.560	5305.319
190	5479.726	5416.248	5362.868	5319.017	5284.174	5259.994	5257.828
200	5428.791	5365.332	5312.071	5268.343	5233.572	5209.448	5207.515
210	5377.791	5314.332	5261.071	5217.343	5182.572	5158.448	5156.515
220	5326.791	5263.332	5210.071	5166.343	5131.572	5107.448	5105.515

Таблица 7.4.1b

**Решение задачи 6.1.19(1°). Значение оптимального остатка
средств $S(N)$ как функция от K_0 и K**

$K_0 \rightarrow$ $\downarrow K$	90	100	110	120	130	140	150
30	5415.119	5450.339	5501.067	5563.628	5623.135	5675.493	5721.100
40	5492.302	5526.701	5576.553	5638.155	5697.031	5748.809	5793.864
50	5560.379	5595.895	5644.908	5705.762	5764.085	5815.323	5859.862
60	5618.276	5656.549	5706.725	5766.759	5824.558	5875.397	5919.506
70	5665.922	5706.993	5759.790	5820.899	5878.355	5928.889	5972.571
80	5692.531	5735.949	5790.952	5854.209	5912.975	5963.526	6006.779
90	5694.034	5740.098	5797.643	5863.407	5924.429	5976.235	6019.119
100	5674.807	5721.388	5781.888	5850.373	5913.912	5967.757	6011.347
110	5639.473	5684.060	5745.388	5817.026	5883.326	5939.366	5984.406
120	5589.971	5632.507	5692.224	5765.018	5834.272	5892.705	5939.481
130	5539.889	5580.749	5639.241	5711.246	5781.453	5842.376	5891.355
140	5496.033	5535.355	5592.679	5663.853	5733.249	5794.875	5845.870
150	5454.372	5493.115	5549.412	5619.681	5687.976	5748.831	5800.672
160	5412.601	5451.792	5507.710	5576.985	5644.067	5703.912	5755.647
170	5369.888	5409.552	5465.863	5534.663	5600.435	5659.192	5710.618
180	5325.492	5365.580	5422.260	5491.277	5556.184	5613.758	5664.644
190	5278.573	5319.122	5376.122	5445.192	5509.820	5566.719	5616.860
200	5228.529	5269.461	5326.892	5395.989	5460.180	5516.731	5566.433
210	5177.529	5218.461	5275.847	5344.957	5409.180	5465.731	5515.433
220	5126.529	5167.461	5224.847	5293.957	5358.180	5414.731	5464.433

Таблица 7.4.1c

**Решение задачи 6.1.19(1°). Значение оптимального остатка
средств $S(N)$ как функция от K_0 и K**

$K_0 \rightarrow$ $\downarrow K$	160	170	180	190	200	210	220	230
30	5759.024	5790.496	5817.039	5839.624	5860.101	5880.501	5900.899	5919.386
40	5831.323	5862.533	5888.697	5911.208	5931.670	5952.070	5972.381	5990.279
50	5896.892	5927.733	5953.774	5976.038	5996.463	6016.863	6037.055	6054.525
60	5956.184	5986.715	6012.520	6034.704	6055.129	6075.529	6095.567	6112.508
70	6008.823	6038.991	6064.562	6086.475	6106.875	6127.275	6147.308	6164.328
80	6042.524	6072.210	6097.267	6118.701	6139.101	6159.501	6179.890	6198.172
90	6054.406	6083.703	6108.319	6129.364	6149.764	6170.164	6190.564	6210.007
100	6046.379	6075.338	6099.413	6120.276	6140.676	6161.076	6181.476	6201.713
110	6019.984	6048.545	6072.287	6092.910	6113.310	6133.710	6154.110	6174.510
120	5976.386	6005.497	6029.073	6049.634	6070.034	6090.434	6110.834	6131.234
130	5930.094	5960.711	5985.052	6005.665	6026.065	6046.465	6066.865	6087.265
140	5886.220	5918.235	5943.610	5964.647	5985.047	6005.447	6025.847	6046.247
150	5842.532	5875.819	5902.255	5923.834	5944.234	5964.634	5985.034	6005.434
160	5798.188	5832.658	5860.090	5882.382	5902.782	5923.182	5943.582	5963.982
170	5753.050	5787.991	5816.345	5839.447	5859.879	5880.279	5900.679	5921.079
180	5706.828	5741.612	5770.349	5794.248	5814.773	5835.173	5855.573	5875.973
190	5658.730	5693.255	5721.940	5745.933	5766.704	5787.104	5807.504	5827.904
200	5608.164	5642.604	5671.172	5695.092	5715.935	5736.335	5756.735	5777.135
210	5557.164	5591.604	5620.172	5644.092	5664.935	5685.335	5705.735	5726.135
220	5506.164	5540.604	5569.172	5593.092	5613.935	5634.335	5654.735	5675.135

Таблица 7.4.2а

**Решение задачи 6.1.19(2°). Значение оптимального остатка
средств $S(N)$ как функция от K_0 и K**

$K_0 \rightarrow$ $\downarrow K$	20	30	40	50	60	70	80
30	6301.553	6345.351	6379.959	6407.948	6430.167	6447.357	6456.531
40	6373.044	6417.783	6451.449	6476.777	6496.386	6511.013	6518.022
50	6437.814	6483.969	6518.951	6543.269	6560.000	6571.849	6576.506
60	6495.743	6543.449	6580.005	6605.996	6621.879	6630.813	6632.842
70	6546.458	6596.085	6634.667	6662.604	6680.367	6688.449	6687.650
80	6586.890	6638.279	6679.245	6709.470	6729.502	6739.777	6738.712
90	6607.775	6659.498	6702.454	6735.502	6758.163	6770.951	6772.066
100	6609.973	6662.159	6705.445	6740.526	6766.187	6781.803	6785.357
110	6594.758	6647.533	6691.336	6726.852	6754.659	6773.367	6779.597
120	6563.670	6617.072	6661.330	6697.224	6725.381	6746.342	6755.412
130	6522.109	6575.706	6620.231	6656.400	6684.762	6705.903	6716.318
140	6480.797	6534.481	6579.082	6615.269	6643.678	6664.861	6675.015
150	6439.331	6493.038	6537.699	6573.926	6602.354	6623.553	6633.315
160	6396.835	6450.572	6495.252	6531.505	6559.902	6581.059	6590.467
170	6352.549	6406.335	6450.995	6487.174	6515.513	6536.633	6545.592
180	6305.836	6359.572	6404.093	6440.177	6468.507	6489.638	6498.140
190	6256.017	6309.540	6354.033	6390.153	6418.449	6439.534	6447.656
200	6205.017	6258.540	6303.033	6339.153	6367.449	6388.534	6396.656
210	6154.017	6207.540	6252.033	6288.153	6316.449	6337.534	6345.656
220	6103.017	6156.540	6201.033	6237.153	6265.449	6286.534	6294.656

Таблица 7.4.2б

**Решение задачи 6.1.19(2°). Значение оптимального остатка
средств $S(N)$ как функция от K_0 и K**

$K_0 \rightarrow$ $\downarrow K$	90	100	110	120	130	140	150
30	6449.670	6427.582	6392.573	6346.765	6293.637	6245.539	6204.915
40	6510.274	6488.833	6454.588	6409.579	6357.115	6309.504	6269.311
50	6566.627	6544.278	6510.752	6466.549	6414.733	6367.547	6327.743
60	6620.595	6596.034	6561.532	6518.053	6466.816	6420.028	6380.501
70	6672.902	6645.836	6608.923	6564.396	6513.700	6467.275	6428.077
80	6721.630	6692.250	6653.002	6606.126	6554.322	6508.331	6469.520
90	6754.852	6723.276	6681.763	6632.558	6578.640	6532.036	6493.736
100	6770.021	6738.063	6694.114	6642.272	6586.132	6538.161	6499.285
110	6766.361	6736.067	6691.321	6636.629	6578.285	6528.830	6488.743
120	6744.442	6715.908	6672.597	6616.940	6556.074	6504.933	6463.501
130	6707.069	6679.893	6637.642	6582.915	6521.222	6468.477	6425.689
140	6666.341	6640.380	6599.174	6545.343	6484.094	6430.697	6386.361
150	6624.262	6598.818	6558.629	6505.662	6445.167	6392.022	6347.147
160	6580.962	6555.160	6515.415	6463.252	6403.758	6350.957	6306.290
170	6535.671	6509.508	6469.495	6417.644	6359.192	6306.745	6262.469
180	6487.788	6461.196	6420.839	6368.850	6310.953	6259.110	6215.282
190	6437.085	6410.383	6369.894	6317.818	6260.049	6208.375	6164.643
200	6386.085	6359.383	6318.894	6266.818	6209.049	6157.375	6113.643
210	6335.085	6308.383	6267.894	6215.818	6158.049	6106.375	6062.643
220	6284.085	6257.383	6216.894	6164.818	6107.049	6055.375	6011.643

Таблица 7.4.2с

**Решение задачи 6.1.19(2°). Значение оптимального остатка
средств $S(N)$ как функция от K_0 и K**

$K_0 \rightarrow$ $\downarrow K$	160	170	180	190	200	210	220	230
30	6170.748	6142.021	6117.668	6096.756	6076.356	6055.956	6035.556	6015.156
40	6235.508	6206.961	6182.882	6161.976	6141.576	6121.176	6100.776	6080.376
50	6294.170	6265.878	6241.998	6221.154	6200.754	6180.354	6159.954	6139.554
60	6347.210	6319.174	6295.331	6274.602	6254.202	6233.802	6213.402	6193.002
70	6395.041	6367.194	6343.498	6322.772	6302.372	6281.972	6261.572	6241.172
80	6436.799	6409.298	6385.853	6365.257	6344.857	6324.457	6304.057	6283.657
90	6461.518	6434.433	6411.624	6391.186	6370.786	6350.386	6329.986	6309.586
100	6467.601	6441.024	6418.633	6398.233	6377.833	6357.433	6337.033	6316.633
110	6456.503	6430.330	6408.499	6388.099	6367.699	6347.299	6326.899	6306.499
120	6430.251	6403.778	6382.230	6361.830	6341.430	6321.030	6300.630	6280.230
130	6391.288	6363.795	6341.920	6321.520	6301.120	6280.720	6260.320	6239.920
140	6350.585	6321.876	6299.101	6278.701	6258.301	6237.901	6217.501	6197.101
150	6309.984	6280.197	6256.378	6235.930	6215.530	6195.130	6174.730	6154.330
160	6268.698	6237.919	6213.050	6192.363	6171.963	6151.563	6131.163	6110.763
170	6225.257	6194.043	6168.347	6147.230	6126.830	6106.430	6086.030	6065.630
180	6178.372	6147.326	6121.456	6099.837	6079.437	6059.037	6038.637	6018.237
190	6127.915	6097.077	6071.263	6049.506	6029.106	6008.706	5988.306	5967.906
200	6076.915	6046.077	6020.263	5998.506	5978.106	5957.706	5937.306	5916.906
210	6025.915	5995.077	5969.263	5947.506	5927.106	5906.706	5886.306	5865.906
220	5974.915	5944.077	5918.263	5896.506	5876.106	5855.706	5835.306	5814.906

Литература

1. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972. 240 с.
2. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971. – 384 С.
3. Демьянёв В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1971. 368 с.
4. Дикусар В.В., Ерешко А.Ф. Модели и методы решения многошаговых задач управления портфелем ценных бумаг // Динамика неоднородных систем. 9(2). С. 6–13. М.: Изд. ИСА РАН, 2005.
5. Дикусар В.В., Умнов Е.А. Анализ эффективности метода параметрической линеаризации для решения задач оптимального управления со смешанными ограничениями // Динамика неоднородных систем. 9(2). С. 14–31. М., Изд. ИСА РАН, 2005.
6. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
7. Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
8. Жадан В.Г. Методы оптимизации. Ч. 1. Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации. М.: МФТИ, 2014. 280 с.
9. Жадан В.Г. Методы оптимизации. Ч. 2. Численные алгоритмы. М.: МФТИ, 2015. 320 с.
10. Измайлов А.Ф., Солодов М.В. Численные методы оптимизации. М.: Физматлит, 2005. 320 с.
11. Измайлов А.Ф. Чувствительность в оптимизации. М.: Физматлит, 2006. 248 с.
12. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 2-х томах. Т. 1. М.: Высшая школа, 1981. 687 с.
13. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 2-х томах. Т. 2. М.: Высшая школа, 1981. 584 с.

14. *Марковцев Д.А.* Условия сходимости итерационного процесса решения задач параметрического программирования методом гладких штрафных функций // Труды МФТИ. 2012. Т. 4, №4(16). С. 120–124.
15. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
16. *Скарин В.Д.* Об одном общем подходе к оптимальной коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Т. 16, № 3. Екатеринбург, 2010.
17. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. М.: Физматлит, 2005.
18. *Умнов А.Е.* Многошаговая линейная экстраполяция в методе штрафных функций // ЖВМ-МФ. 1974. Т. 14, № 6. С. 1451–1463.
19. *Умнов А.Е.* Метод штрафных функций в задачах большой размерности // ЖВМ-МФ. 1975. Т. 15, № 6. С. 1399–1411.
20. *Умнов Е.А.* Метод параметрической линеаризации в задачах дискретного оптимального управления // Тр. ИСА РАН. 2005. Т. 17(1). С. 56–66.
21. *Умнов Е.А.* Исследование простейшей модели рынка ценных бумаг // Динамика неоднородных систем. 9(2). С. 200–205. М.: Изд. ИСА РАН, 2005.
22. *Умнов Е.А., Умнов А.Е.* Метод параметрической линеаризации, использующий штрафные функции со всюду обратимой производной для решения пар двойственных задач // Труды МФТИ. 2011. Т. 3, № 1(9). С. 146–152.
23. *Умнов Е.А., Умнов А.Е.* Об одном методе исследования зависимости решения задачи линейного программирования от параметров // Труды МФТИ. 2014. Т. 6, №1(21). С. 180–192.
24. *Умнов Е.А., Умнов А.Е.* Параметрический анализ в задачах математического программирования // Труды МФТИ. 2014. Т. 6, №3(23). С. 73–83.
25. *Умнов А.Е., Умнов Е.А.* Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МФТИ, 2016. 293 с.
26. *Умнов Е.А., Умнов А.Е.* Задача параметрического программирования для комплекса математических моделей // Труды МФТИ. 2017. Т. 9, № 4(35). С. 149–160.
27. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979. 280 с.
28. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1985.
29. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. С. 448.
30. *Була А.К.* Гладкие методы в многокритериальных задачах // Труды МФТИ. 2018. Т. 10, №4(40). С. 24–33.
31. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984. 416 с.

Учебное издание

Умнов Егор Александрович
Умнов Александр Евгеньевич

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ
ЗАДАЧИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ
ПРОГРАММИРОВАНИИ

Редактор *Н. Е. Кобзева*. Корректор *И. А. Волжова*
Компьютерная верстка *Н. Е. Кобзева*
Дизайн обложки *Н. Е. Кобзева*

Подписано в печать xx.xx.2025. Формат 60×84 $1/16$.
Усл. печ. л. 18,6. Уч.-изд. л. 17,1. Тираж 200 экз. Заказ №.

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Московский
физико-технический институт (национальный исследовательский университе-
тет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru