

Е.С. ПОЛОВИНКИН

# ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

УЧЕБНИК

Москва, ИНФРА-М, 2024

# СОДЕРЖАНИЕ

Основные обозначения . . . . .	6
Предисловие . . . . .	8
§1. Комплексные числа . . . . .	11
§2. Пределы. Ряды. Расширенная комплексная плоскость. Функции . . . . .	16
§3. Дифференцирование функции комплексного переменного . . . . .	24
§4. Регулярные функции. Гармонические функции . . .	30
§5. Теорема об обратной функции . . . . .	36
§6. Интегрирование функции комплексного переменного	44
§7. Интегральная теорема Коши . . . . .	57
§8. Интегральная формула Коши . . . . .	66
§9. Ряд Тейлора. Теоремы Вейерштрасса . . . . .	70
§10. Некоторые свойства регулярных функций . . . . .	79
§11. Ряд Лорана . . . . .	84
§12. Изолированные особые точки . . . . .	91
§13. Теория вычетов . . . . .	101
13.1. Вычисление интегралов вида $J = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{n,m}(x) dx$ . . . . .	107
13.2. Вычисление интегралов вида $J = \int_0^{2\pi} F(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$	109
13.3. Вычисление интегралов вида $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} F_{n,m}(x) dx$ . .	110
§14. Приращение аргумента $z$ вдоль кривой . . . . .	113
§15. Регулярные ветви многозначных функций корня и $\text{Ln } z$ . . . . .	119
§16. Регулярные ветви многозначных функций $\text{Ln } f(z)$ и $\sqrt[n]{f(z)}$ . . . . .	125
16.1. Многозначные функции $\text{Ln } f(z)$ и $\sqrt[n]{f(z)}$ . . . . .	125
16.2. Понятие комплексной степени. . . . .	131

---

§17. Примеры нахождения регулярных ветвей . . . . .	134
§18. Примеры вычисления интегралов от регулярных ветвей многозначных функций . . . . .	141
§19. Целые и мероморфные функции . . . . .	149
§20. Принцип аргумента. Теорема Руше . . . . .	159
§21. Геометрические принципы . . . . .	164
§22. Конформные отображения в $\overline{\mathbb{C}}$ . . . . .	170
22.1. Геометрический смысл модуля и аргумента про- изводной функции. . . . .	170
22.2. Конформные отображения в $\mathbb{C}$ . . . . .	172
22.3. Конформные отображения в $\overline{\mathbb{C}}$ . . . . .	173
§23. Дробно-линейные отображения . . . . .	176
§24. Конформные отображения элементарными функ- циями. Теорема Римана . . . . .	187
24.1. Степенная функция. . . . .	187
24.2. Экспоненциальная функция. . . . .	189
24.3. Функция Жуковского. . . . .	190
24.4. Теорема Римана. . . . .	196
§25. Принцип симметрии . . . . .	201
§26. Задача Дирихле на плоскости . . . . .	211
§27. Аналитическое продолжение . . . . .	226
§28. Полные аналитические функции логарифма и корня и их римановы поверхности . . . . .	235
28.1. Полные аналитические функции. . . . .	235
28.2. Римановы поверхности. . . . .	238
§29. Особые точки аналитических функций . . . . .	243
Список литературы . . . . .	250
Предметный указатель . . . . .	251

## Основные обозначения

$:=$  — знак равенства по определению;

$\mathbb{N}$  — множество всех натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$  — множество всех целых чисел;

$\overline{n, m}$  — множество целых чисел вида  $n, n + 1, n + 2, \dots, m$ ;

$\mathbb{R}$  — множество всех действительных чисел;

$\mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерное действительное евклидово пространство;

$\mathbb{C}$  — множество всех комплексных чисел, комплексная плоскость;

$\overline{\mathbb{C}}$  — расширенная комплексная плоскость;

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  — модуль комплексного числа  $z = x + iy$ ;

$\bar{z} = x - iy$  — число, комплексно-сопряженное числу  $z = x + iy$ ;

$\operatorname{Re} z = x$  — действительная часть числа  $z = x + iy$ ;

$\operatorname{Im} z = y$  — мнимая часть числа  $z = x + iy$ ;

$B_r(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < r\}$  — открытый круг радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $z_0$ ;

$\overline{B_r(z_0)} = \{z \mid |z - z_0| \leq r\}$  — замкнутый круг радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $z_0$ ;

$\mathring{B}_r(z_0) = \{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}$  — проколота окрестность точки  $z_0$ ;

$\mathring{B}_r(\infty) = \{z \mid |z| > r\}$  — проколота окрестность бесконечности;

$B_r(\infty) = \mathring{B}_r(\infty) \cup \infty$  — окрестность бесконечности;

$\arg z$  — произвольное значение аргумента числа  $z \neq 0$ ;

$\arg_{\text{гл}} z$  — главное значение аргумента числа  $z \neq 0$ , т.е. из интервала  $(-\pi, \pi]$ ;

$\operatorname{Arg} z = \{\arg_{\text{гл}} z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  — множество значений аргумента числа  $z \neq 0$ ;

$\lambda_{\psi_0} := \{z \mid \arg z = \psi_0\} \cup \{0\}$  — луч, выходящий из точки 0, состоящий из точек с аргументом  $\psi_0 \in [0, 2\pi)$ ;

$\gamma_{ab}$  — ориентированная кривая с началом в точке  $a$  и с концом в точке  $b$ ;

$\gamma^{-1}$  — ориентированная кривая, обход которой производится в обратном направлении по сравнению с направлением кривой  $\gamma$ ;

$\hat{\gamma}$  — простая замкнутая ориентированная кривая;

$f : G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  — функция  $f$  задана на множестве  $G$  со значениями в расширенной комплексной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$ ;

$f(G) = \{f(z) \mid z \in G\}$  — множество значений функции  $f$ , заданной на множестве  $G$ ;

$u_x(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ ,  $u_y(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$  — частные производные первого порядка функции  $u(x, y)$ ;

$\{\sqrt[n]{z}\}$  — многозначная функция корня  $n$ -й степени  $z$ ;

$\text{Ln } z$  — многозначная функция логарифма  $z$ , аналитическая функция логарифма  $z$ ;

$\{z_n\}$ ,  $\{f_n(z)\}$  — числовая и функциональная последовательности;

$C[0, 1]$ ,  $(C^1[0, 1])$  — пространство действительных непрерывных (непрерывно дифференцируемых) функций, заданных на отрезке  $[0, 1]$ ;

$C^2(G)$  — пространство действительных дважды непрерывно дифференцируемых функций, заданных на области  $G \subset \mathbb{R}^2$ ;

$\text{res}_a f$  — вычет функции  $f$  в точке  $a$ ;

$\text{dist}(z, \gamma) = \inf\{|z - \zeta| \mid \zeta \in \gamma\}$  — расстояние от точки  $z$  до кривой  $\gamma$ ;

$\text{diam } G = \sup\{|z - \zeta| \mid z, \zeta \in G\}$  — диаметр множества  $G \subset \mathbb{C}$ .

## Предисловие

Настоящая книга является достаточно полным конспектом курса лекций по теории функций комплексного переменного, читаемого автором студентам Московского физико-технического института. Это — полторасеместровый курс в объеме 45 академических часов лекционных занятий.

Эта книга является учебным пособием для студентов высших учебных заведений с углубленным изучением курса математики.

В настоящей книге мы будем изучать свойства функций комплексного переменного. Такие функции нашли многочисленные применения как в различных разделах чистой математики, таких как: алгебра, аналитическая теория чисел, дифференциальные уравнения, так и в различных прикладных математических дисциплинах, таких как: теоретическая физика, небесная механика, гидродинамика, теория упругости и др.

Чтобы понять важность теории функций комплексного переменного, отметим лишь некоторые примеры использования этой теории, которые встречаются студентам младших курсов при изучении ими алгебры, математического анализа и дифференциальных уравнений. Так, утверждение о том, что всякое алгебраическое уравнение имеет по крайней мере один комплексный корень, является основным в алгебре. В интегральном исчислении большое значение имеет тот факт, что рациональная функция представима в виде элементарных дробей с комплексными коэффициентами. Понятие комплексного числа и экспоненциальной функции комплексного переменного имеет важное значение при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Только изучив теорию функций комплексного переменного, можно понять, почему такая хорошая на всей числовой оси функция  $f(x) = 1/(1 + x^2)$  может быть представлена в виде степенного ряда  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$  лишь при значениях  $x$ , удовлетворяющих условию  $-1 < x < 1$ .

Несколько слов о плане настоящего курса. В первых параграфах мы будем заниматься развитием в комплексной области известных из действительного анализа основных понятий и операций: предела, производной, интеграла. Опираясь на указанный аналитический аппарат, в основной части курса мы будем изучать свойства регулярных (= голоморфных) функций, т. е. функций комплексного переменного, определенных и непрерывно дифференцируемых в некоторой области на комплексной плоскости. В §§9–11 и §19 будут изучены условия представления таких функций в виде степенных рядов, в виде рядов Лорана, а также рядов из элементарных дробей.

В книге изложены свойства обратных многозначных функций. В §§14–17 приведено подробное исследование условий существования и вид однозначных функций, называемых «регулярными ветвями» многозначного корня или многозначного логарифма от регулярной функции. В §§27–29 рассмотрены понятия аналитических продолжений и аналитической функции.

В курсе также изложены геометрические принципы регулярных функций, такие как: принцип аргумента, принцип сохранения области, принцип максимума модуля и другие. На их основе построена геометрическая теория конформных отображений, осуществляемых регулярными функциями.

В книге приведены некоторые прикладные аспекты теории функций комплексного переменного. В §13 и §18 с помощью теории вычетов показаны эффективные методы вычисления интегралов, в том числе несобственных интегралов от действительных функций. В §26 на примере задачи Дирихле продемонстрированы возможности комплексного анализа при решении уравнений математической физики.

В книге имеются некоторые упражнения, призванные закрепить теоретический материал. Эти упражнения имеют разный уровень сложности, и поэтому студентам не стоит огорчаться, если они не сразу смогут найти решение некоторых из них.

Для данного курса написан и опубликован в 2006 году «Сборник задач по теории функций комплексного перемен-

ного» в издательстве «БИНОМ. Лаборатория знаний», авторы М.И.Шабунин, Е.С. Половинкин и М.И.Карлов [11]. Этот сборник задач содержит не только большое количество задач по курсу ТФКП, но также формулировки основных теорем курса и решения многих наиболее типичных задач.

Первое издание книги вышло в 1999 году. Во втором издании (2003 год) и в третьем издании (2015 год) устранены опечатки и сделаны небольшие изменения в доказательствах некоторых теорем. В настоящем четвертом издании в определении регулярной функции убрано условие непрерывности производной, добавлены лемма Гурса и частный случай теоремы Жордана для многогранника, изменены доказательства интегральной теоремы Коши и леммы об открытости. Материал, связанный с понятиями аналитического продолжения и аналитической функции, перенесен в конец курса.

Считаю своим долгом выразить признательность своим коллегам — профессорам А. А. Болибруху, В. В. Горяйнову, В. К. Захарову, В. Б. Лидскому, Б. В. Пальцеву, Ю. В. Сидорову, М. И. Шабунину и Г. Н. Яковлеву за полезные обсуждения первого и второго издания книги, а также выражаю большую благодарность А. В. Полозову за помощь в подготовке рукописи к печати. Особую признательность выражаю моим слушателям — студентам физтеха, которые помогли исправить опечатки в первом издании и сделали ряд интересных замечаний по данному курсу лекций.



## § 1. Комплексные числа

Рассмотрим двумерное линейное евклидово пространство  $\mathbb{R}^2$ , состоящее из векторов  $z = (x, y)$  с двумя действительными компонентами  $x, y$ , в котором как обычно заданы

0) равенство векторов (покомпонентное), т.е.

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$$

1) операция сложения векторов

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

где  $z_k = (x_k, y_k)$ ,  $k \in \overline{1, 2}$ ;

2) операция умножения вектора  $z$  на действительное число  $\lambda$ :

$$\lambda z = (\lambda x, \lambda y);$$

3) расстояние и норма:

$$\rho(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Общие свойства приведенных выше операций Вам должны быть хорошо известны из курса математического анализа.

Обозначим базисные векторы из  $\mathbb{R}^2$  следующим образом:

$$\mathbf{i} := (1, 0), \quad \mathbf{j} := (0, 1). \quad (1.1)$$

В силу (1.1) всякий вектор  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  можно записать в виде  $z = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}$ , или проще:  $z = x + iy$ .

Теперь определим в  $\mathbb{R}^2$  операцию *произведения* следующим образом

$$z_1 z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \quad (1.2)$$

где  $z_k = x_k + iy_k$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.** Евклидово пространство  $\mathbb{R}^2$ , в котором определено произведение по формуле (1.2), называется *множеством (или пространством) комплексных чисел*  $\mathbb{C}$ . Элементы множества  $\mathbb{C}$  называются *комплексными числами*.

Комплексное число  $i$  называется *мнимой единицей*. В силу определения произведения (1.2) получаем, что  $i^2 = -1$ .

Множество комплексных чисел вида  $x + i0$  изоморфно множеству действительных чисел, так как взаимно однозначное соответствие  $x + i0 \rightarrow x$  сохраняется при выполнении операций сложения и умножения. Поэтому мы не будем различать ком-

плексное число  $x + i0$  и действительное число  $x$ . Соответственно,  $x = \operatorname{Re} z$  называется *действительной* (или: *вещественной*) *частью*, а  $y = \operatorname{Im} z$  — *мнимой частью* числа  $z = x + iy$ .

Величина  $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$  называется *модулем* комплексного числа  $z = x + iy$ .

Число  $\bar{z} := x - iy$  называется *комплексно-сопряженным числом* к числу  $z = x + iy$ .

Очевидно, что  $z\bar{z} = |z|^2$ .

Легко проверить справедливость следующих свойств:

- 1)  $z_1 z_2 = z_2 z_1$  (коммутативность умножения),
- 2)  $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$  (ассоциативность умножения),
- 3)  $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$  (дистрибутивность),
- 4) обратимость операции умножения (1.2), т. е. для любых  $z_1 \neq 0$  и  $z_2$  уравнение

$$z_1 z = z_2 \quad (1.3)$$

имеет, и притом единственное, решение, которое будем обозначать  $z := z_2 / z_1$  и называть *результатом деления числа  $z_2$  на число  $z_1$* .

Докажем последнее свойство. Уравнение (1.3) эквивалентно в силу определения произведения (1.2) системе линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 x - y_1 y = x_2, \\ y_1 x + x_1 y = y_2. \end{cases} \quad (1.4)$$

Определитель этой системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1^2 + y_1^2 = |z_1|^2 \neq 0,$$

т. е. по правилу Крамера решение системы (1.4) (т. е. уравнения (1.3)) существует и единственно.

Решение уравнения (1.3) можно получить иначе, домножая это уравнение на  $\bar{z}_1$ . Тогда получаем

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 z_1 z &= \bar{z}_1 z_2, \quad |z_1|^2 z = \bar{z}_1 z_2, \\ z &= \frac{\bar{z}_1 z_2}{|z_1|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{-y_1 x_2 + x_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} i. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Решение уравнения  $z_1 z = 1$ ,  $z_1 \neq 0$  называют обратным числом к  $z_1$  и обозначают  $z_1^{-1} = \frac{1}{z_1}$ .

Множество комплексных чисел  $\mathbb{C}$  удобно рассматривать как множество точек, принадлежащих евклидовой плоскости, выбрав базисные векторы  $\mathbf{1}$  и  $\mathbf{i}$  из (1.1) (см. рис. 1.1). Эту плоскость будем называть *комплексной плоскостью*.

Перейдем в этой плоскости к полярной системе координат

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (1.6)$$

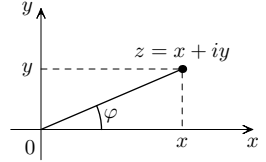


Рис. 1.1

В новых обозначениях получаем, что  $r = |z|$ , т.е.  $r$  есть модуль числа  $z$ , а  $\varphi$  называется *аргументом комплексного числа*  $z \neq 0$  и обозначается  $\arg z$ . В силу периодичности тригонометрических функций аргумент числа  $z \neq 0$  нельзя определить однозначно, лишь с точностью до  $2\pi k$ . Поэтому введем специальные обозначения. Аргумент числа  $z$ , выбираемый в интервале  $(-\pi, \pi]$ , назовем *главным значением аргумента*  $z$  и обозначим

$$\arg_{\text{гл}} z \in (-\pi, \pi]. \quad (1.7)$$

Тогда множество всех значений аргумента числа  $z$  выражается формулой

$$\text{Arg } z := \{\arg_{\text{гл}} z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad (1.8)$$

где через  $\mathbb{Z}$  обозначено множество всех целых чисел. Через  $\mathbb{N}$  будем обозначать множество всех натуральных чисел.

Отметим, что для числа  $z = 0$  аргумент не определен.

Для всякого числа  $z = x + iy \neq 0$ , используя переменные  $(r, \varphi)$  (1.6), получаем его представление в виде

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \text{где } \varphi \in \text{Arg } z, \quad (1.9)$$

которое называется *тригонометрической (или полярной) формой задания* комплексного числа.

Отметим, что два комплексных числа, записанные в тригонометрической форме, равны между собой тогда и только тогда, когда равны их модули и множества значений аргумента.

Произведение чисел, заданных в форме (1.9), в силу формулы (1.2) принимает вид

$$z_1 z_2 = |z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) |z_2| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$$

$$= |z_1||z_2|((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \\ + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)),$$

откуда в силу известных формул тригонометрии получаем

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (1.10)$$

Таким образом, показали, что при перемножении комплексных чисел модули этих чисел перемножаются, а аргументы складываются, т. е.

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad (1.11)$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2. \quad (1.12)$$

В формуле (1.12) записано равенство множеств, причем под суммой множеств  $A$  и  $B$  понимается сумма Минковского, т. е. множество вида  $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ .

Аналогично тому, как это делалось для действительных чисел, для комплексных чисел определяется понятие натуральной степени  $n$  числа  $z$ , а из формулы (1.10) получаем так называемую *формулу Муавра* вида

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1.13)$$

Введем обозначение

$$e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (1.14)$$

называемое *формулой Эйлера*. В силу (1.14) тригонометрическая форма комплексного числа принимает вид

$$z = |z|e^{i\varphi}. \quad (1.15)$$

В силу формулы (1.10) получаем равенство  $e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ , а формула Муавра (1.13) принимает вид

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi}. \quad (1.16)$$

Также легко проверить, что при  $z_1 \neq 0$  справедлива следующая формула деления комплексных чисел

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{|z_2|}{|z_1|} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad \varphi_k \in \text{Arg } z_k. \quad (1.17)$$

Для нахождения операции, обратной к операции возведения в натуральную степень, рассмотрим уравнение относительно  $z$  вида

$$z^n = a, \quad (1.18)$$

где число  $a \in \mathbb{C}$  и натуральное число  $n \geq 2$  заданы, причем  $a \neq 0$ .

Для решения уравнения (1.18) представим числа  $z$  и  $a$  в форме (1.15), т. е.  $a = |a|e^{i\alpha}$  и  $z = |z|e^{i\varphi}$ , где  $\alpha \in \text{Arg } a$ . Тогда, учитывая (1.16) и неоднозначность выбора аргумента комплексного числа, получаем

$$(1.18) \iff |z|^n e^{in\varphi} = |a|e^{i\alpha} \iff \begin{cases} |z|^n = |a| \\ n\varphi = \alpha + 2\pi k, \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff$$

$$\iff |z| = \sqrt[n]{|a|}; \quad \varphi_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.19)$$

Множества решений (1.19) уравнения (1.18) будем обозначать  $\{\sqrt[n]{a}\}$  и называть *корнем  $n$ -й степени комплексного числа  $a$* . Итак, мы получили формулу

$$\{\sqrt[n]{a}\} = \left\{ \sqrt[n]{|a|} \left( \cos \left( \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right) \mid k \in \overline{0, n-1} \right\}. \quad (1.20)$$

В формуле (1.20) мы учли, что множество решений (1.19) состоит ровно из  $n$  различных комплексных значений. Так, например, при  $k = n$  в (1.19) получается то же комплексное число, что и при  $k = 0$ , и т. д.

**ПРИМЕР 1.1.** Найти  $\{\sqrt[4]{i}\}$ .

По формуле (1.20) получаем

$$\{\sqrt[4]{i}\} = \left\{ \left( \cos \left( \frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4} \right) \right) \mid k \in \overline{0, 3} \right\}.$$

Изобразим эти значения в виде точек на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  (см. рис. 1.2). Видно, что все значения корня лежат на единичной окружности, так как их модули равны 1 и являются вершинами квадрата. В общем случае множество (1.20) образует вершины правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $\sqrt[n]{|a|}$ .

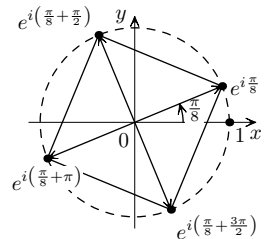


Рис. 1.2

**УПРАЖНЕНИЕ 1.1.** Подумайте, чем определение произведения комплексных чисел по формуле (1.2) на ваш взгляд лучше, чем, например, следующее определение произведения:  $z_1 z_2 = x_1 x_2 + i y_1 y_2$ ?

## § 2. Пределы. Ряды. асширенная комплексная плоскость. Функции

Чтобы определить сходимость последовательности точек на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , нужно уточнить понятие окрестности точки. Так как  $\mathbb{C}$  является евклидовым пространством  $\mathbb{R}^2$ , то в качестве простейшей окрестности произвольной точки  $z_0 \in \mathbb{C}$  выбираем круг с центром  $z_0$  произвольного радиуса  $r > 0$ , который обозначаем:

$$B_r(z_0) := \{z \mid |z - z_0| < r\}. \quad (2.1)$$

При этом проколотой окрестностью точки  $z_0 \in \mathbb{C}$  называем множество вида

$$\mathring{B}_r(z_0) := \{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}. \quad (2.2)$$

Будем обозначать

$$\overline{B_r(z_0)} := \{z \mid |z - z_0| \leq r\}$$

замкнутый круг с центром в точке  $z_0$  радиуса  $r > 0$ .

Остаются в силе основные понятия математического анализа, связанные со сходимостью в  $\mathbb{R}^2$ . Напомним их.

Пусть  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  — последовательность комплексных чисел, где  $z_n := x_n + iy_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , которую кратко записываем как  $\{z_n\}$  или  $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.** Число  $A = a + ib \in \mathbb{C}$  называется *пределом последовательности*  $\{z_n\}$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  такое, что  $\forall n > N(\varepsilon)$  справедливо включение  $z_n \in B_\varepsilon(A)$ . Обозначаем  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  или  $z_n \rightarrow A$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.**

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b. \end{cases} \quad (2.3)$$

Доказательство следует из очевидных неравенств:

$$\begin{aligned} |z_n - A| &\leq |x_n - a| + |y_n - b|; \\ |x_n - a| &\leq |z_n - A|; \quad |y_n - b| \leq |z_n - A|. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.1. Докажите, что если  $z_n \rightarrow A$ , то  $|z_n| \rightarrow |A|$ , и что обратное верно при  $A = 0$ , однако при  $A \neq 0$  из  $|z_n| \rightarrow |A|$ , в общем случае не следует сходимости  $z_n \rightarrow A$ .

В силу предложения 2.1 для последовательностей комплексных чисел сохраняются известные свойства последовательностей действительных чисел и их пределов (о сумме, произведении, частном, критерий Коши).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Скажем, что последовательность  $\{z_n\}$  *сходится (стремится) к бесконечности* (обозначаем:  $z_n \rightarrow \infty$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ ), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad |z_n| > \varepsilon.$$

Это определение будет следовать из определения 2.1 при  $A = \infty$ , если окрестность бесконечности определить как дополнение круга  $\overline{B_\varepsilon(0)}$ , т. е. множество вида

$$\mathring{B}_\varepsilon(\infty) := \{z \mid |z| > \varepsilon\}. \quad (2.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Комплексная плоскость  $\mathbb{C}$ , пополненная присоединением к ней единственной бесконечно удаленной точки  $\infty$  и системой ее окрестностей (2.4) (т. е. сходимостью к  $\infty$  по определению 2.2), называется *расширенной комплексной плоскостью* и обозначается  $\overline{\mathbb{C}}$ .

При этом обозначим  $B_\varepsilon(\infty) := \mathring{B}_\varepsilon(\infty) \cup \{\infty\}$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В силу определений сходимости в  $\overline{\mathbb{C}}$  по определениям 2.1 и 2.2 следует, что  $\overline{\mathbb{C}}$  есть компактное пространство, т. е. из любой последовательности  $\{z_n\} \subset \overline{\mathbb{C}}$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

В самом деле, если  $\{z_n\}$  ограничена, то наличие сходящейся подпоследовательности — известное свойство ограниченной последовательности на плоскости  $\mathbb{R}^2$  (теорема Больцано–Вейерштрасса). Если  $\{z_n\}$  не ограничена, то для всякого числа  $k \in \mathbb{N}$  существует номер  $n_k$  такой, что  $|z_{n_k}| > k$ , т. е. мы выделили подпоследовательность  $\{z_{n_k}\}$  такую, что  $z_{n_k} \rightarrow \infty$ .

Расширенную комплексную плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  и ее компактность наглядно иллюстрирует так называемая *сфера Римана*. Дадим строгие определения.

Поместим комплексную плоскость  $\mathbb{C}$  в действительное трехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3 = \{(\xi, \eta, \zeta)\}$ , совместив ее с плоскостью  $\zeta = 0$  (т.е. для всякой точки  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  имеем  $\xi = x$ ,  $\eta = y$ ,  $\zeta = 0$ ). Рассмотрим в  $\mathbb{R}^3$  сферу  $S$ , касающуюся комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  в точке  $O = (0, 0, 0)$ , радиуса  $\frac{1}{2}$ . Уравнение такой сферы  $S$  имеет вид

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta. \quad (2.5)$$

Обозначим через  $P$  точку на сфере  $S$ , диаметрально противоположную точке  $O = (0, 0, 0)$ , т.е.  $P = (0, 0, 1)$ . Каждому числу  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  сопоставим некоторую точку  $Z \in S$ , а именно, точку пересечения сферы  $S$  с отрезком прямой с концами в точках  $P$  и  $(x, y, 0)$  (см. рис. 2.1).

Уравнение этого отрезка, очевидно, следующее:

$$\xi = tx, \quad \eta = ty, \quad \zeta = 1 - t, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.6)$$

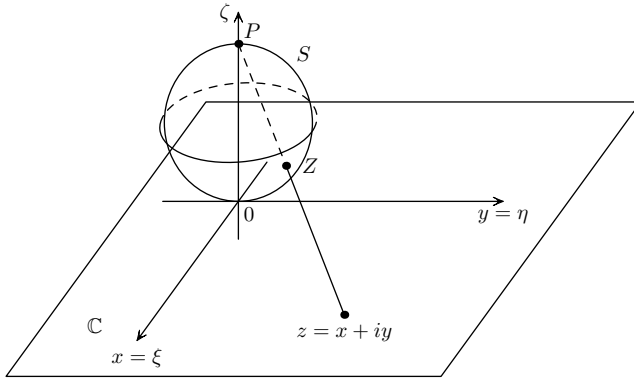


Рис. 2.1

Найдем точку  $Z$  пересечения отрезка со сферой как решение системы уравнений (2.5), (2.6):

$$t^2|z|^2 + 1 - 2t + t^2 = 1 - t,$$

т.е.

$$t = \frac{1}{1 + |z|^2},$$

откуда координаты точки  $Z = (\xi, \eta, \zeta)$  находим по формулам

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}, \quad (2.7)$$



и обратно по точке  $Z = (\xi, \eta, \zeta)$ , принадлежащей сфере  $S$ , можем вычислить точку  $z = x + iy$  на плоскости  $\mathbb{C}$  из выражений

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}. \quad (2.8)$$

В силу формул (2.7), (2.8) всякой точке  $z \in \mathbb{C}$  взаимно однозначно сопоставлена точка  $Z \in S \setminus P$ . Для любой последовательности  $\{z_n\}$ , стремящейся к бесконечности, на сфере Римана  $S$  получаем последовательность  $\{Z_n\}$ , стремящуюся к точке  $P$ . Поэтому условимся считать, что точке  $P \in S$  соответствует точка  $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ . В итоге мы получаем взаимно однозначное соответствие между расширенной комплексной плоскостью  $\overline{\mathbb{C}}$  и сферой  $S$ , которое называется *стереографической проекцией  $\overline{\mathbb{C}}$  на  $S$* . В дальнейшем мы будем отождествлять  $\overline{\mathbb{C}}$  со сферой  $S$ , которую и называют *сферой Римана*. Это вызвано еще и справедливостью следующих свойств стереографической проекции, которые мы приводим без доказательства.

1) Любая прямая или окружность на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  при стереографической проекции переходит в окружность на сфере  $S$ .

2) Углы между любыми двумя пересекающимися кусочно-гладкими кривыми на  $\mathbb{C}$  при стереографической проекции сохраняются, т.е. равны углам между их образами на  $S$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 2.2.** Докажите приведенные выше свойства 1) и 2).

Аналогично случаю действительных чисел определяется понятие числового ряда с комплексными членами.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.** Числовым рядом, образованным последовательностью комплексных чисел  $\{z_n\}$ , называется последовательность  $\{S_N\}$ , где  $S_N := \sum_{n=1}^N z_n$ . Говорят, что этот ряд сходится, если существует конечный предел последовательности  $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ , который называется *суммой числового ряда* и обозначается

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n. \quad (2.9)$$

Члены последовательности  $S_N$  называются *частичными суммами числового ряда*.

Для краткости символом (2.9) принято обозначать не только сумму числового ряда, но и сам числовой ряд, образованный последовательностью  $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ .

Из предложения 2.1, очевидно, следует

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2.** Числовой ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$  сходится тогда и только тогда, когда сходятся два действительных числовых ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  и  $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ , где  $z_n = x_n + iy_n$ .

В силу предложения 2.2 для таких рядов справедлив критерий Коши, а именно:

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{+\infty} z_n \text{ сходится тогда и только тогда, когда}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall p, m : p > m \geq N(\varepsilon) \left| \sum_{n=m}^p z_n \right| < \varepsilon. \quad (2.10)$$

Центральным понятием нашего курса является понятие функции комплексного переменного.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5.** Говорят, что определена *функция*  $f$  на множестве  $G \subset \mathbb{C}$ , если указан закон, по которому каждому  $z \in G$  ставится в соответствие определенное  $w \in D \subset \mathbb{C}$ . Функцию обозначают

$$f : G \rightarrow D \quad \text{или} \quad w = f(z). \quad (2.11)$$

Когда задана функция  $w = f(z)$ , говорят, что задано отображение множества  $G$  во множество  $D$ . Множество всех значений  $f(z)$  при  $z \in G$  обозначают  $f(G)$ .

Так как каждое значение функции  $w = f(z)$  имеет две компоненты  $w = u + iv \in \mathbb{C}$ , то задание функции  $f$  равносильно заданию двух действительных функций  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , т.е.

$$f(z) := u(x, y) + iv(x, y), \quad \text{где} \quad z = x + iy. \quad (2.12)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6.** Точка  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$  называется *внутренней точкой* множества  $G \subset \mathbb{C}$ , если существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что справедливо включение  $B_\varepsilon(z_0) \subset G$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7.** Точка  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$  называется *предельной точкой* множества  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  в проколотой окрестности  $\mathring{B}_\varepsilon(z_0)$  имеется по крайней мере одна точка (а потому и бесконечно много точек) из  $G$  (т. е.  $\mathring{B}_\varepsilon(z_0) \cap G \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0$ ).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8.** Пусть заданы функция  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  и точка  $z_0$ , предельная для множества  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ . Число  $A \in \overline{\mathbb{C}}$  называется *пределом функции  $f$  в точке  $z_0$  по множеству  $G$* , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что справедливо включение  $f(z) \in B_\varepsilon(A), \forall z \in \mathring{B}_\delta(z_0) \cap G$ .

Обозначается:

$$A := \lim_{z \xrightarrow{G} z_0} f(z). \quad (2.13)$$

В случае, когда точка  $z_0$  является внутренней точкой множества  $G$ , то множество  $G$  не влияет на значение предела и обозначение (2.13) может быть записано проще:  $A = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .

Из предложения 2.1 следует

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.** Пусть  $G \subset \mathbb{C}$  и  $A = a + ib \in \mathbb{C}$ . Тогда

$$A = \lim_{z \xrightarrow{G} z_0} f(z) \iff \begin{cases} a = \lim_{(x,y) \xrightarrow{G} (x_0,y_0)} u(x,y), \\ b = \lim_{(x,y) \xrightarrow{G} (x_0,y_0)} v(x,y). \end{cases}$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9.** Функция  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  называется *непрерывной в точке  $z_0 \in G$* , если точка  $z_0$  является предельной точкой множества  $G$  и  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $\forall z \in \mathring{B}_\delta(z_0) \cap G$  справедливо включение  $f(z) \in B_\varepsilon(f(z_0))$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10.** Функция  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  называется *непрерывной на множестве  $G$* , если она непрерывна в каждой точке множества  $G$ .

Из предложения 2.3 получаем

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.** Пусть заданы множество  $G \subset \mathbb{C}$  и функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , где  $f(z) := u(x,y) + iv(x,y)$ . Функция  $f$  непрерывна в точке  $z_0 \in G$  тогда и только тогда, когда функции  $u, v$  непрерывны в точке  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В силу предложения 2.4 в комплексном анализе сохраняются все свойства непрерывных функций из действительного анализа (о непрерывности суммы, произведения и т. д.).

ПРИМЕР 2.1. Функция  $w = z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , непрерывна в  $\mathbb{C}$ .

ПРИМЕР 2.2. Функция  $w = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ , где

$$\begin{aligned} P_n(z) &= z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0, \\ Q_m(z) &= z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_0, \end{aligned}$$

непрерывна в  $G = \{z \mid Q_m(z) \neq 0\}$ .

ПРИМЕР 2.3. Функция  $w = |z|$  непрерывна в  $\mathbb{C}$ .

ПРИМЕР 2.4. Функция  $w = \bar{z}$  непрерывна в  $\mathbb{C}$ .

Пусть на множестве  $G \subset \mathbb{C}$  задана последовательность функций  $\{f_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ , где  $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Аналогично определению 2.4 вводится понятие *функционального ряда*, порожденной этой последовательностью и понятия сходимости и суммы этого ряда. Сумма ряда обозначается как

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z). \quad (2.14)$$

Аналогично действительному анализу определяются понятия абсолютной и равномерной сходимости функционального ряда (2.14). Напомним последнее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.11. Пусть функции  $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , определены на множестве  $G$  и пусть  $S_n(z) := \sum_{k=1}^n f_k(z)$ . Функциональный ряд (2.14) называется равномерно сходящимся на множестве  $G$ , если он сходится в каждой точке  $z \in G$  к некоторому значению  $S(z)$ , и для любого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $N(\varepsilon)$  такой, что при любом  $n \geq N(\varepsilon)$  справедливо неравенство  $|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$  для всех точек  $z \in G$ .

В силу предложений 2.2 и 2.3 функциональные ряды обладают всеми свойствами, известными для действительных функциональных рядов. Например, справедлив критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда (2.14). Как

и в действительном анализе доказываются следующие утверждения.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5.** *Сумма равномерно сходящегося на  $G$  функционального ряда, порожденного последовательностью непрерывных функций комплексного переменного, есть непрерывная на  $G$  функция.*

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6 (ПРИЗНАК ВЕЙЕРШТРАССА).** *Пусть существует числовая последовательность  $\{a_n\} \subset \mathbb{R}_+$  такая, что  $|f_n(z)| \leq a_n$  для  $\forall n \in \mathbb{N}$  и  $\forall z \in G$  и пусть числовой ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится. Тогда функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$  сходится абсолютно и равномерно на  $G$ .*

### § 3. Дифференцирование функции омплексного переменного

Зафиксируем точку  $z_0 \in \mathbb{C}$  и ее окрестность  $B_r(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ , где  $r > 0$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Если функция  $f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  такова, что существует конечный предел отношения

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{при} \quad z \rightarrow z_0, \quad (3.1)$$

то этот предел называется *производной функции*  $f$  в точке  $z_0$  и обозначается  $f'(z_0)$ .

Пусть  $\Delta z := z - z_0$  и  $\Delta f := f(z) - f(z_0)$ . Определение 3.1 означает, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что для всех  $\Delta z$ :  $0 < |\Delta z| < \delta$  справедливо неравенство

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Отсюда следует, что

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z), \quad (3.3)$$

где функция  $\alpha(\Delta z)$ , определяемая из равенства (3.3), в силу (3.2) удовлетворяет условию:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} = 0. \quad (3.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Функция  $\alpha$ , удовлетворяющая условию (3.4), называется *o-малой функцией*, что обозначается как  $o(\Delta z)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Говорят, что функция  $f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируема в точке  $z_0 \in \mathbb{C}$ , если справедливо представление

$$\Delta f = A \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z), \quad \forall \Delta z : 0 < |\Delta z| < r, \quad (3.5)$$

где  $A$  не зависит от  $\Delta z$ , а функция  $\alpha(\Delta z)$  является  $o(\Delta z)$ .

В силу изложенного выше очевидно справедлива следующая

ЛЕММА 3.1. Функция  $f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируема в точке  $z_0$  тогда и только тогда, когда существует производная  $f'(z_0)$ , причем в формуле (3.5) число  $A = f'(z_0)$ .

Распишем определение 3.1 через действительные и мнимые компоненты чисел и функции  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ .

Пусть  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $z = x + iy$ ,  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ,  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = y - y_0$ ,  $\Delta u = u(x, y) - u(x_0, y_0)$ ,  $\Delta v = v(x, y) - v(x_0, y_0)$ ,  $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$ .

ТЕОРЕМА 3.1. Для того, чтобы функция  $f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  была дифференцируема в точке  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ , необходимо и достаточно, чтобы

- 1) функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  были дифференцируемы в точке  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  (как функции двух действительных переменных  $x$  и  $y$ );
- 2) в точке  $(x_0, y_0)$  были выполнены следующие условия (называемые условиями Коши–Римана):

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (3.6)$$

При этом

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Пусть существует производная  $f'(z_0)$ , т. е. справедливы выражения (3.4), (3.5), где  $A = f'(z_0)$ .

Обозначим  $A := a + ib$ ,  $\alpha(\Delta z) := \alpha_1(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_2(\Delta x, \Delta y)$  и получим из (3.5) равенства его действительных и мнимых частей, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y), \\ \Delta v &= b\Delta x + a\Delta y + \alpha_2(\Delta x, \Delta y). \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Из выражения (3.4) и того, что  $|\alpha_1| \leq |\alpha|$  и  $|\alpha_2| \leq |\alpha|$ , получаем

$$\begin{aligned} \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\alpha_1(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} &= \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\alpha_2(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

откуда равенства (3.8) означают дифференцируемость (по определению) функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , причем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= a, & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -b, \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) &= b, & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) &= a, \end{aligned} \right\}. \quad (3.10)$$

Используя равенства (3.10) убеждаемся, что выполнены условия Коши–Римана (3.6), причем

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= a + ib = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

2. Пусть функции  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  дифференцируемы в точке  $(x_0, y_0)$  и выполнены условия Коши–Римана (3.6). Тогда

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta u + i \Delta v = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y) + \\ &+ i \left( \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \alpha_2(\Delta x, \Delta y) \right) = \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (\Delta x + i \Delta y) + \alpha_1(\Delta x, \Delta y) + i \alpha_2(\Delta x, \Delta y) = \\ &= A \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z), \end{aligned}$$

где число  $A = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$ , функция  $\alpha = \alpha_1 + i \alpha_2$ , причем компоненты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  удовлетворяют условию (3.9). Тогда получаем, что

$$\left| \frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} \right| \leq \frac{|\alpha_1(\Delta x, \Delta y)|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + \frac{|\alpha_2(\Delta x, \Delta y)|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \rightarrow 0$$

при  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ , т. е. функция  $f$  дифференцируема в точке  $z_0$ , и верна формула (3.7).  $\square$

Аналогично действительному случаю доказываются следующие свойства дифференцируемости функций.



**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.** Если функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы в точке  $z_0$ , то в точке  $z_0$ :

а) функция  $f + g$  дифференцируема и  $(f + g)' = f' + g'$ ,

б) функция  $fg$  дифференцируема и  $(fg)' = f'g + fg'$ ,

в) функция  $\frac{f}{g}$  дифференцируема, если  $g(z_0) \neq 0$ , и

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Разберем простейшие примеры вычисления производных.

**ПРИМЕР 3.1.** Рассмотрим функцию  $w = z^2$ . Исходя из определения 3.1, для произвольной точки  $z_0 \in \mathbb{C}$  запишем  $\Delta f = (z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2 = 2z_0 \cdot \Delta z + (\Delta z)^2$ . Очевидно, что  $\Delta f / \Delta z = 2z_0 + \Delta z \rightarrow 2z_0$  при  $\Delta z \rightarrow 0$ , т. е. функция дифференцируема и  $f'(z_0) = 2z_0$ .

Проверим дифференцируемость этой же функции с помощью теоремы 3.1. Здесь  $u(x, y) = x^2 - y^2$  и  $v(x, y) = 2xy$ . Вычисляя частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

убеждаемся в том, что условия теоремы 3.1, в том числе условия Коши–Римана (3.6), выполнены всюду, т. е. функция  $w = z^2$  дифференцируема при каждом  $z \in \mathbb{C}$ , причем по формуле (3.7) получаем, что  $w' = 2x + i2y = 2z$ .

**ПРИМЕР 3.2.** Рассмотрим функцию  $w = |z|^2$ . У нее  $u(x, y) = x^2 + y^2$  и  $v(x, y) = 0$ . Вычисляя частные производные, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0.$$

Отсюда видим, что условия Коши–Римана (3.6) будут выполнены лишь при условии, что  $x = y = 0$ , т. е. функция  $w = |z|^2$  дифференцируема лишь в точке  $z_0 = 0$ , несмотря на то, что функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  являются бесконечно дифференцируемыми в  $\mathbb{R}^2$ .

ПРИМЕР 3.3. Рассмотрим функцию  $w = \bar{z} = x - iy$ . Для нее  $u(x, y) = x$  и  $v(x, y) = -y$ . Вычисляя частные производные, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Убеждаемся, что условия Коши–Римана (3.6) не выполнены ни в одной точке  $z \in \mathbb{C}$ , т. е. функция всюду не дифференцируема.

Более сложные примеры дифференцируемых функций разберем позже.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Условия Коши–Римана (3.6) очевидно эквивалентны следующим трем условиям на векторы  $\text{grad } u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$  и  $\text{grad } v = \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)$  из  $\mathbb{R}^2$ :*

1) *эти векторы имеют одинаковую длину, т. е.*

$$|\text{grad } u| = |\text{grad } v|;$$

2) *эти векторы ортогональны, т. е.  $(\text{grad } u, \text{grad } v) = 0$ ;*

3) *вектор  $\text{grad } v$  повернут на угол  $\frac{\pi}{2}$  против хода часовой стрелки по отношению к вектору  $\text{grad } u$ .*

Геометрические условия 1–3 позволяют найти другие формы представления условий Коши–Римана (3.6). Рассмотрим два взаимно перпендикулярных единичных вектора  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{l}$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с той же взаимной ориентацией, что и базисные векторы  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  и  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ , идущие по осям  $0x$  и  $0y$ .

Раскладывая векторы  $\text{grad } u$  и  $\text{grad } v$  по новому базису из векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{l}$ , получаем

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial u}{\partial l} \mathbf{l}, \quad \text{grad } v = \frac{\partial v}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial v}{\partial l} \mathbf{l}; \quad (3.11)$$

Условия 1)–3) в силу формул (3.11) эквивалентны общей форме условий Коши–Римана вида

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial l}, \quad \frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{\partial v}{\partial n}. \quad (3.12)$$

Для демонстрации формул (3.12) в плоскости  $\mathbb{R}^2$  зададим полярные координаты (см. формулы (1.6) в § 1), вследствие чего получаем функции  $\tilde{u}(r, \varphi) = u(x, y)$  и  $\tilde{v}(r, \varphi) = v(x, y)$ . Для

любой фиксированной точки  $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ , где  $r_0 > 0$ , определим нормальный вектор  $\mathbf{n} = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$  и касательный вектор  $\mathbf{l} = (-\sin \varphi_0, \cos \varphi_0)$  к окружности  $\{z \mid |z| = |z_0|\}$  в точке  $z_0$  и придем к выражениям:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial n} &= (\text{grad } u, \mathbf{n}) = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi_0 + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi_0 = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}, \\ \frac{\partial u}{\partial l} &= (\text{grad } u, \mathbf{l}) = \frac{\partial u}{\partial x} (-\sin \varphi_0) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \varphi_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi},\end{aligned}$$

откуда в силу (3.12) получаем условия Коши–Римана в полярных координатах вида

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}. \quad (3.13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В дальнейшем, как правило, будем употреблять сокращенную форму записи частных производных функций, например, будет писать  $u_x$  вместо  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , или  $u_y$  вместо  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

## § 4. Регулярные функции. Гармонические функции

Так как множество комплексных чисел  $\mathbb{C}$  есть евклидово пространство  $\mathbb{R}^2$  с дополнительной операцией умножения, то и основные понятия множеств в  $\mathbb{R}^2$  можно перенести на комплексную плоскость  $\mathbb{C}$ . Аналогично вводятся понятия окрестности точки  $z_0$  (что уже сделано в § 2), открытого множества (для каждой его точки найдется ее окрестность, принадлежащая этому множеству), замкнутого множества (оно содержит все свои предельные точки), области (т. е. открытого и связного множества), односвязной области (т. е. области, у которой любой простой замкнутый контур, целиком лежащий в ней, может быть непрерывной деформацией стянут в точку, оставаясь внутри области).

Приведем простейшие примеры областей.

Круг  $B_1(0) = \{z \mid |z| < 1\}$  есть односвязная область в  $\mathbb{C}$ .

Окрестность бесконечности  $\mathring{B}_1(\infty) = \{z \mid |z| > 1\}$ , проколота окрестность нуля  $\mathring{B}_1(0) = \{z \mid 0 < |z| < 1\}$  и кольцо  $\{z \mid 1 < |z| < 2\}$  суть примеры неодносвязных областей в  $\mathbb{C}$ .

В расширенной комплексной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  эти определения сохраняются, за исключением того, что здесь появляется дополнительная возможность непрерывной деформации через  $\infty$ , осуществляемой на сфере Римана, что приводит к расширению в  $\overline{\mathbb{C}}$  понятия односвязной области. Так, например, область  $B_1(\infty)$  в плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  является односвязной.

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.1.** Мы не приводим строгого определения односвязной области в  $\overline{\mathbb{C}}$ , которое при желании можно найти, например, в книге Б.В. Шабата [10].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.** Пусть  $G$  — область в  $\mathbb{C}$ . Функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  называется *регулярной* (или *голоморфной* или *аналитической*) в области  $G$ , если она дифференцируема в каждой точке области  $G$ . Говорят, что функция  $f$  *регулярна в точке*  $z_0$ , если она определена и регулярна в некоторой окрестности этой точки. Говорят, что функция  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  *регулярна на*

множестве  $D \subset \mathbb{C}$ , если функция  $f$  регулярна в каждой точке множества  $D$ .

Как показано в примере 3.1, функция  $w = z^2$  всюду дифференцируема, т.е.  $w = z^2$  регулярна во всей комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ .

Функция же  $w = |z|^2$  не регулярна ни в какой области и ни в какой точке.

Аналогично рассмотрим функцию  $w = z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . По определению производной получаем

$$\begin{aligned} w'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{n \cdot \Delta z \cdot z^{n-1} + (\Delta z)^2(\dots)}{\Delta z} = nz^{n-1}, \end{aligned}$$

т.е. производная всюду существует, поэтому  $w = z^n$  регулярна во всей плоскости  $\mathbb{C}$ .

Рассмотрим более сложные примеры регулярных функций.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.** Определим *экспоненциальную функцию комплексного переменного* по формуле

$$e^z := e^x(\cos y + i \sin y), \quad (4.1)$$

где  $z = x + iy$ .

В стандартных обозначениях компонент функции  $f = u + iv$  получаем следующие действительную и мнимую части экспоненциальной функции:  $u(x, y) = e^x \cos y$ ,  $v(x, y) = e^x \sin y$ , причем  $|e^z| = e^x$ ,  $y \in \text{Arg } e^z$ .

Очевидно, что функция (4.1) непрерывна и является периодической с периодом  $2\pi i$ .

Легко проверить равенства частных производных

$$u_x = e^x \cos y = v_y, \quad u_y = -e^x \sin y = -v_x,$$

т.е. эти частные производные непрерывны и выполнены условия Коши–Римана (3.6) всюду. По теореме 3.1 существует производная функции  $e^z$ , причем по формуле (3.7) она равна

$$(e^z)' = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z, \quad (4.2)$$

т.е.  $w = e^z$  регулярна во всем пространстве  $\mathbb{C}$ .

Аналогично, с помощью теоремы 3.1 легко показать справедливость равенства

$$(e^{iz})' = i e^{iz}. \quad (4.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Определим *тригонометрические функции*  $\sin z$  и  $\cos z$  *комплексного переменного* по формулам

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (4.4)$$

Заметим, что при  $z = x$  (т. е. когда  $z$  является действительным числом) равенства (4.4) непосредственно следуют из формулы Эйлера (1.14).

В силу определения 4.3 из регулярности экспоненты (4.1) очевидно следует регулярность функций  $\sin z$  и  $\cos z$  как суммы регулярных функций.

Из формул (4.1)–(4.4) легко получить формулы для производных

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z. \quad (4.5)$$

Более того, из определений 4.2 и 4.3 легко доказать справедливость основных элементарных свойств тригонометрических функций, известных в действительном анализе. Например,

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= 1, \\ \sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из периодичности экспоненты получаем, что функции  $\sin z$  и  $\cos z$  также являются периодическими с периодом  $2\pi$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.1. Проверьте равенства (4.3), (4.5) и (4.6).

Однако в отличие от действительного случая функции  $\sin z$  и  $\cos z$  не ограничены на  $\mathbb{C}$ . В самом деле, найдем, например, действительную и мнимую части функции  $\sin z$ :

$$\begin{aligned} \sin z = \sin(x + iy) &\stackrel{(4.6)}{=} \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \\ &= \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |\sin z| &= \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \\ &= \sqrt{(1 - \cos^2 x) \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x (\operatorname{ch}^2 y - 1)} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}, \end{aligned}$$

т. е.  $|\sin z| \sim |\operatorname{ch} y|$  при  $y \rightarrow \infty$ , а поэтому функция  $\sin z$  не ограничена.

**УПРАЖНЕНИЕ 4.2.** Рассмотрим функцию  $w = f(z) = e^{-1/z^4}$ , при  $z \neq 0$  и  $f(0) = 0$ . Покажите, что данная функция  $f$  удовлетворяет условиям Коши–Римана (3.6) в точке  $z_0 = 0$ , но тем не менее не дифференцируема в точке  $z_0 = 0$ . Не противоречит ли это теореме 3.1?

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4.** Функция  $u = u(x, y)$  действительных переменных  $x$  и  $y$ , определенная и дважды непрерывно дифференцируемая в области  $G \subset \mathbb{R}^2$  (т. е.  $u \in C^2(G)$ ), называется *гармонической* в области  $G$ , если  $\forall (x, y) \in G$  справедливо равенство  $\Delta u(x, y) = 0$ , где по определению оператор Лапласа  $\Delta u$  равен

$$\Delta u(x, y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (4.7)$$

**ТЕОРЕМА 4.1.** Пусть функция  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  регулярна в области  $G$  и функции  $u(x, y), v(x, y) \in C^2(G)$ . Тогда функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  суть гармонические функции в  $G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В самом деле, из условий Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (4.8)$$

получаем по определению оператора Лапласа (4.7):

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \stackrel{(4.8)}{=} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0. \quad (4.9)$$

Аналогично из условий Коши–Римана (4.8) следует, что  $\Delta v = 0$ , т. е.  $u, v$  суть гармонические функции.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.2.** В § 8 покажем, что всякая регулярная в области функция  $f$  дифференцируема в этой области любое число раз, и поэтому ее компоненты, т. е. функции  $u$  и  $v$ , являются бесконечно дифференцируемыми функциями. Поэтому

условие теоремы 4.1 о гладкости функций  $u$  и  $v$  можно было бы опустить, так как оно следует из условия регулярности функции  $f$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5.** Две гармонические функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , связанные соотношениями Коши–Римана (4.8), называются *сопряженными*.

Итак, мы показали, что из регулярности в области функции  $f = u + iv$  следует гармоничность ее действительной и мнимой частей  $u$  и  $v$ .

Обратное утверждение имеет место при дополнительном условии односвязности области определения функции. А именно

**ТЕОРЕМА 4.2.** Пусть в односвязной области  $G \subset \mathbb{C}$  задана гармоническая функция  $u(x, y)$ . Тогда существует регулярная в области  $G$  функция  $f$ , для которой  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для заданной функции  $u$  определим функции

$$P(x, y) := -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad Q(x, y) := \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (4.10)$$

Для нахождения функции  $f$  достаточно найти функцию  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ . Эта функция вместе с функцией  $u(x, y)$  обязана удовлетворять условиям Коши–Римана (4.8), т. е. ищем функцию  $v(x, y)$ , решая систему уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = Q(x, y).$$

Так как функция  $u$  является гармонической, то для определенных в формуле (4.10) функций  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  получаем

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall (x, y) \in G. \quad (4.11)$$

Равенство (4.11) и односвязность области  $G \subset \mathbb{R}^2$  являются достаточными условиями того, что непрерывно дифференцируемое векторное поле  $(P(x, y), Q(x, y))$  является потенциальным в области  $G$  (см., например, [1] §20.5, теорема 3, [6] том 2, глава 13), т. е. выражение

$$dv = P dx + Q dy$$



представляет собой полный дифференциал некоторой непрерывно дифференцируемой (потенциальной) функции  $v(x, y)$  в области  $G$ , которую можно описать формулой:

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy + C,$$

т. е. в нашем случае в силу (4.10) эта функция равна

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + C, \quad (4.12)$$

при этом интеграл в (4.12) является криволинейным интегралом второго рода вдоль некоторой ориентированной кривой, лежащей в области  $G$ , с началом в некоторой произвольно выбранной начальной точке  $(x_0, y_0) \in G$  и концом в точке  $(x, y) \in G$ . Очевидно, что полученная в (4.12) функция  $v(x, y)$  является гармонической в силу выполнения (4.8), (4.9), а в силу теоремы 3.1 функция  $f(z) := u(x, y) + iv(x, y)$  является регулярной в области  $G$ .  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.3.** Аналогично доказательству теоремы 4.2 доказывается утверждение о том, что для всякой гармонической функции  $v(x, y)$ , заданной в односвязной области  $G$ , существует регулярная функция  $f$  такая, что  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ .

**ПРИМЕР 4.1.** Пусть задана функция  $u(x, y) = xy$ . Очевидно, что она гармоническая, т. е.  $\Delta u = 0$ . Найдём функцию  $v$  из условий Коши–Римана (4.8).

Из первого условия получаем

$$v_y = u_x = y, \quad \text{откуда} \quad v(x, y) = \frac{y^2}{2} + \varphi(x) \quad \forall \varphi(\cdot). \quad (4.13)$$

Из второго условия и формулы (4.13) получаем

$$v_x = -u_y = -x, \quad \text{т. е.} \quad \varphi'(x) = -x, \quad \text{откуда} \quad \varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + C.$$

В итоге

$$v = \frac{y^2 - x^2}{2} + C; \quad f(z) = xy + i \left( \frac{y^2 - x^2}{2} + C \right) = -\frac{iz^2}{2} + iC.$$

## § 5. Теорема об обратной функции

Сначала отметим следующую теорему о сложной функции.

**ТЕОРЕМА 5.1.** Пусть заданы две области  $D$  и  $H$  в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , две регулярные функции  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  и  $g : H \rightarrow \mathbb{C}$ , причем выполнено условие, что  $f(z) \in H$  для всех  $z \in D$  (т. е.  $f(D) \subset H$ ). Тогда сложная функция  $\zeta = g(f(z))$  определена и регулярна в области  $D$  и справедлива формула дифференцирования

$$\zeta'(z) = g'(f(z))f'(z), \quad \forall z \in D. \quad (5.1)$$

Доказательство теоремы сводится к проверке формулы (5.1). Для этого возьмем произвольную точку  $z_0 \in D$  и пусть  $w_0 := f(z_0)$ . Приращения функций  $\Delta f$  и  $\Delta g$  по определению дифференцируемости функций принимают вид

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z); \quad \Delta g = g'(w_0)\Delta w + o(\Delta w).$$

Подставляя во второе равенство в качестве  $\Delta w$  значение  $\Delta f$  из первого равенства, переходя к пределу в выражении  $\frac{\Delta \zeta}{\Delta z} = g'(w_0) \frac{\Delta f}{\Delta z} + \frac{o(\Delta f)}{\Delta f} \frac{\Delta f}{\Delta z}$ , в итоге получаем формулу (5.1).

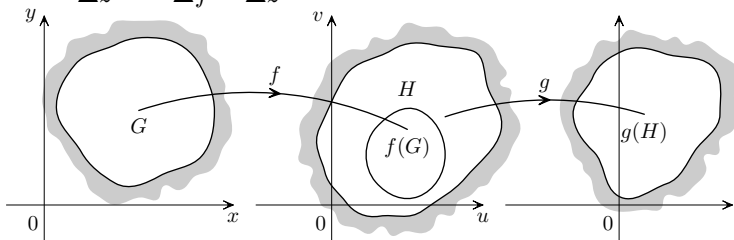


Рис. 5.1

**ТЕОРЕМА 5.2 (ОБ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ).** Пусть на области  $G$  заданы точка  $z_0 \in G$  и регулярная функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , производная которой  $f'(z)$  является непрерывной функцией на области  $G$ . Пусть точка  $w_0 := f(z_0)$  и пусть выполнено условие  $f'(z_0) \neq 0$ . Тогда существуют круги  $B_\delta(z_0) \subset G$  и  $B_\varepsilon(w_0)$  такие, что

а)  $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in B_\delta(z_0)$ ;

- б) для любой точки  $\hat{w} \in B_\varepsilon(w_0)$  уравнение  $f(z) = \hat{w}$  имеет единственное решение  $\hat{z}$  в круге  $B_\delta(z_0)$ , т. е. на круге  $B_\varepsilon(w_0)$  существует обратная к функции  $f$  функция  $g: B_\varepsilon(w_0) \rightarrow B_\delta(z_0)$  (т. е. функция, для которой  $f(g(w)) = w$  при любом  $w \in B_\varepsilon(w_0)$ );
- в) обратная функция  $g: B_\varepsilon(w_0) \rightarrow B_\delta(z_0)$  регулярна, причем ее производная вычисляется по формуле

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}, \quad \forall w \in B_\varepsilon(w_0). \quad (5.2)$$

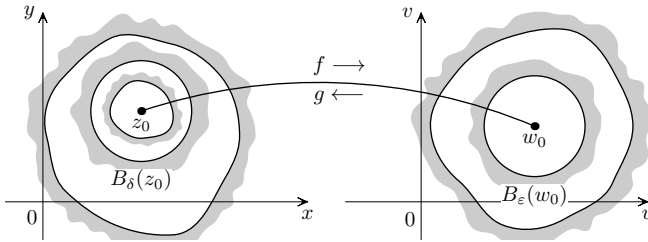


Рис. 5.2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $w_0 = u_0 + iv_0$ ,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Задание функции  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  эквивалентно заданию отображения

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} : G \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (5.3)$$

Якобиан отображения (5.3) в силу условий Коши–Римана равен

$$J(x, y) := \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2. \quad (5.4)$$

Отображение (5.3) по условию теоремы непрерывно дифференцируемо, и в силу формулы (5.4) получаем, что  $J(x_0, y_0) \neq 0$ , т. е. для отображения (5.3) выполнены условия теоремы об обратном отображении (см., например, [1], § 12.1, теорема 1, или [9], § 28, теоремы 2–3), в силу которой существуют круги  $B_\delta(z_0)$  и  $B_\varepsilon(w_0)$ ,  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ , такие, что  $J(x, y) \neq 0$ ,  $\forall (x, y) \in B_\delta(z_0)$ , и для каждой фиксированной точки  $(\hat{u}, \hat{v}) \in B_\varepsilon(w_0)$

система уравнений  $\begin{cases} \hat{u} = u(x, y), \\ \hat{v} = v(x, y) \end{cases}$  имеет в  $B_\delta(z_0)$  единственное решение  $(x(\hat{u}, \hat{v}), y(\hat{u}, \hat{v}))$ , т. е. существует отображение

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases} \quad \forall (u, v) \in B_\varepsilon(w_0), \quad (5.5)$$

обратное к отображению (5.3). Более того, по той же теореме функции  $x(u, v)$  и  $y(u, v)$  непрерывно дифференцируемы в круге  $B_\varepsilon(w_0)$ .

Отображению (5.5) на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  соответствует комплекснозначная функция  $g : B_\varepsilon(w_0) \rightarrow B_\delta(z_0)$  вида

$$z = g(w) := x(u, v) + iy(u, v), \quad (5.6)$$

которая в силу задания является обратной к функции  $f$ , т. е.

$$w \equiv f(g(w)), \quad \forall w \in B_\varepsilon(w_0). \quad (5.7)$$

Покажем, что функция (5.6) регулярна в  $B_\varepsilon(w_0)$ .

Проверим по определению ее дифференцируемость в круге  $B_\varepsilon(w_0)$ . Выберем произвольную точку  $\hat{w} \in B_\varepsilon(w_0)$ . Пусть  $\hat{z} \in B_\delta(z_0)$  такова, что  $f(\hat{z}) = \hat{w}$ , т. е.  $\hat{z} = g(\hat{w})$ . Выберем произвольную последовательности  $\{w_k\} \subset B_\varepsilon(w_0)$  такую, что  $w_k \neq \hat{w}$  и  $w_k \rightarrow \hat{w}$ , при  $k \rightarrow +\infty$ . Покажем, что существует предел

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{g(w_k) - g(\hat{w})}{w_k - \hat{w}},$$

не зависящий от выбора последовательности  $\{w_k\}$ . Определим  $z_k := g(w_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда  $z_k \in B_\delta(z_0)$ ,  $f(z_k) = w_k$  и  $z_k \neq \hat{z}$ . Из непрерывности функции  $g$  следует, что  $z_k \rightarrow \hat{z}$ , при  $k \rightarrow +\infty$ . Так как у функции  $f$  существует производная в точке  $\hat{z}$ , то

$$f'(\hat{z}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(z_k) - f(\hat{z})}{z_k - \hat{z}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{w_k - \hat{w}}{z_k - \hat{z}} \neq 0.$$

Поэтому существует предел

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{g(w_k) - g(\hat{w})}{w_k - \hat{w}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{z_k - \hat{z}}{w_k - \hat{w}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{w_k - \hat{w}}{z_k - \hat{z}}} = \frac{1}{f'(\hat{z})},$$

который не зависит от выбора последовательности  $\{w_k\}$ , т.е. существует производная  $g'(\hat{w})$  и справедлива формула (5.2).  $\square$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.** Функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  называется *однолистной* (или взаимно однозначной) на множестве  $G \subset \mathbb{C}$ , если для любых точек  $z_1, z_2$  из  $G$ ,  $z_1 \neq z_2$ , справедливо неравенство  $f(z_1) \neq f(z_2)$ .

Иными словами, функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  однолистка тогда и только тогда, когда на множестве  $G^* = f(G)$  существует обратная ей функция  $g: G^* \rightarrow \mathbb{C}$ . Из теоремы 5.2 получаем очевидное следствие.

**СЛЕДСТВИЕ 5.1.** Пусть функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна, имеет непрерывную производную и однолистка на области  $G \subset \mathbb{C}$ , причем  $f'(z) \neq 0$  при всех  $z \in G$ . Тогда множество  $G^* = f(G)$  есть область, и обратная функция  $g: G^* \rightarrow G$  регулярна на области  $G^*$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим произвольную точку  $\hat{w} \in G^*$ . Тогда существует точка  $\hat{z} \in G$  такая, что  $f(\hat{z}) = \hat{w}$ . Так как по условию  $f'(\hat{z}) \neq 0$ , то по теореме 5.2 существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что  $B_\varepsilon(\hat{w}) \subset f(G) = G^*$ , т.е. множество  $G^*$  открыто. Для любых точек  $w_1, w_2 \in G^*$  существуют точки  $z_1, z_2 \in G$  такие, что  $f(z_k) = w_k$  при  $k = 1, 2$ . Так как множество  $G$  является областью, то существует гладкая кривая  $\gamma_{z_1 z_2} \subset G$  с концевыми точками  $z_1, z_2$ . Тогда ее образ  $f(\gamma_{z_1 z_2}) \subset G^*$  является гладкой кривой, с концевыми точками  $w_1, w_2 \in G^*$ . Таким образом доказали, что множество  $G^*$  является областью. Так как по теореме 5.2 функция  $g: G^* \rightarrow G$  регулярна в каждой точке  $\hat{w} \in G^*$ , то функция  $g$  регулярна на  $G^*$ .  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.1.** В § 21 покажем, что в следствии 5.1 условие  $f'(z) \neq 0$  при всех  $z \in G$  можно специально не оговаривать, так как это условие будет следовать из условия однолистности заданной функции  $f$  на области  $G$ .

Рассмотрим некоторые примеры элементарных функций и областей их задания, на которых эти функции будут однолистными.

ПРИМЕР 5.1. Рассмотрим функцию  $w = z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . В § 1 мы показали, что функция  $w = z^n$  на всей плоскости  $\mathbb{C}$  не однолистна. А именно, показали, что для любого заданного числа  $w \neq 0$  уравнение  $w = z^n$  относительно величины  $z$  имеет ровно  $n$  различных решений:

$$z \in \{ \sqrt[n]{w} \} := \left\{ \sqrt[n]{|w|} e^{i \left( \frac{\arg w + 2\pi k}{n} \right)} \mid k \in \overline{0, n-1} \right\}. \quad (5.8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Пусть задано множество  $G \subset \mathbb{C}$ . Если каждой точке  $z \in G$  поставлено в соответствие некоторое непустое подмножество из  $\mathbb{C}$ , то говорят, что на  $G$  задана многозначная функция. Многозначные функции будем обозначать заглавными буквами, например,  $F: G \rightarrow 2^{\mathbb{C}}$ , где  $2^{\mathbb{C}}$  означает множество всех подмножеств из  $\mathbb{C}$ .

В частности, функция  $\zeta = F(w) := \{ \sqrt[n]{w} \}$  в силу (5.8) есть многозначная функция, определенная на всей плоскости  $\mathbb{C}$ .

Рассмотрим угловую область вида  $G_{\alpha, \beta} := \{ z \mid z \neq 0, \alpha < \arg z < \beta \}$  при условии, что  $0 < n(\beta - \alpha) \leq 2\pi$ .

Очевидно, что угловая область  $G_{\alpha, \beta}$  при отображении  $w = z^n$  отобразится на угловую область  $G_{n\alpha, n\beta}$ , так как число  $z = re^{i\varphi}$  отобразится в число  $w = r^n e^{in\varphi}$ . При этом луч  $l_{\varphi_0} := \{ z \mid z = re^{i\varphi_0}, r > 0 \}$ , где угол  $\varphi_0 \in (\alpha, \beta)$  зафиксирован, отобразится на луч  $l_{n\varphi_0} := \{ w \mid w = te^{in\varphi_0}, t > 0 \}$ . Дуга окружности  $\{ z \mid z = r_0 e^{i\varphi}, \varphi \in (\alpha, \beta) \}$ , где радиус  $r_0 > 0$  зафиксирован, отобразится на дугу  $\{ w \mid w = r_0^n e^{i\psi}, \psi \in (n\alpha, n\beta) \}$ . При этом  $w'(z) = nz^{n-1} \neq 0$  в угловой области  $G_{\alpha, \beta}$ .

Покажем, что при выбранных условиях на  $\alpha, \beta$  функция  $w = z^n$  однолистна на области  $G_{\alpha, \beta}$ . Это означает, что нет пары чисел  $z_1, z_2$  из  $G_{\alpha, \beta}$  таких, что  $z_1 \neq z_2$  и  $z_1^n = z_2^n$ . Последнее равенство означало бы, что  $r_1^n e^{in\varphi_1} = r_2^n e^{in\varphi_2}$ , т. е.  $r_1 = r_2$  и  $n\varphi_1 = n\varphi_2 + 2\pi k$  при некотором  $k \neq 0$ . Последнее невозможно, так как  $0 < n|\varphi_2 - \varphi_1| < n(\beta - \alpha) \leq 2\pi$ .

Таким образом, функция  $z^n$  однолистна на области  $G_{\alpha, \beta}$  при заданных условиях.

Выберем  $\alpha = -\frac{\pi}{n}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{n}$ . Как показано выше, функция  $w = z^n$  однолистно отображает область  $G_{-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}}$  на область  $G^* := \mathbb{C}/(-\infty, 0]$  (см. рис. 5.3).

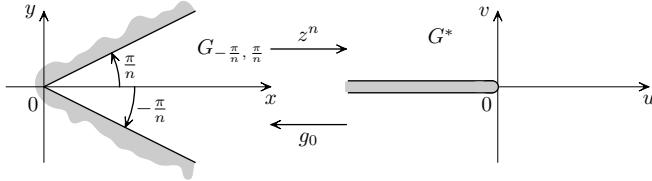


Рис. 5.3

Следовательно, существует обратная функция вида

$$z = g_0(w) := |w|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg_{\text{ГЛ}} w}{n}}, \quad \text{где} \quad -\pi < \arg_{\text{ГЛ}} w < \pi. \quad (5.9)$$

По следствию 5.1 функция  $g_0(w)$  (5.9) является регулярной функцией на области  $G^*$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3.** Пусть  $F: G \rightarrow 2^{\mathbb{C}}$  — многозначная функция и  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  — функция (которая по определению одноточечная) такая, что для любого  $z \in G$  значение  $f(z)$  содержится во множестве  $F(z)$ . Тогда говорят, что функция  $f$  есть *ветвь многозначной функции  $F$* . Если к тому же функция  $f$  непрерывна (или регулярна) на  $G$ , то говорят, что функция  $f$  есть *непрерывная (или регулярная) ветвь* многозначной функции  $F$ .

Таким образом, функция  $g_0(w)$ , определенная формулой (5.9), дает пример регулярной ветви многозначной функции  $\{\sqrt[n]{w}\}$  на области  $G^* = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . По теореме об обратной функции (по формуле (5.2)) можно вычислить производную этой регулярной ветви (5.9) многозначной функции  $\{\sqrt[n]{w}\}$  в каждой точке  $w \in G^*$ , а именно:

$$(g_0(w))' = \frac{1}{nz^{n-1}} \Big|_{z=g_0(w)} = \frac{1}{n(g_0(w))^{n-1}}. \quad (5.10)$$

Так как впоследствии будем изучать различные регулярные ветви многозначной функции  $\{\sqrt[n]{w}\}$ , то функцию (5.9) назовем *главной регулярной ветвью многозначной функции  $\{\sqrt[n]{w}\}$* .

ПРИМЕР 5.2. Рассмотрим функцию

$$w = w(z) = e^z := e^x(\cos y + i \sin y).$$

Как показано в § 4, эта функция  $w(z)$  регулярна на плоскости  $\mathbb{C}$ . Так как  $|e^z| = e^x > 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$  и  $w'(z) = w(z)$ , то  $w'(z) \neq 0$  в каждой точке  $z \in \mathbb{C}$ .

Решая уравнение  $w = e^z$  относительно  $z$  при фиксированном  $w \neq 0$ , из того, что  $w = |w|e^{i\alpha}$  и  $z = x + iy$ , получаем  $|w| = e^x$ ,  $y = \alpha + 2\pi k \in \text{Arg } w$ , т. е.

$$z \in \ln |w| + i \text{Arg } w.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4. Множество решений уравнения  $w = e^z$  относительно  $z$  называется логарифмом  $w$  и обозначается

$$\text{Ln } w := \ln |w| + i \text{Arg } w. \quad (5.11)$$

Итак, мы получили еще одну многозначную функцию  $\text{Ln } w$ .

Для однолиственности функции  $e^z$  в некоторой области  $G$  нужно, чтобы  $\forall z_1, z_2 \in G, z_1 \neq z_2$  следовало, что  $e^{z_1} \neq e^{z_2}$ . Из равенства  $e^{z_1} = e^{z_2}$  получаем  $e^{z_1 - z_2} = 1 = e^{2\pi ki}$ , т. е.  $z_1 = z_2 + 2\pi ki$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Отсюда для однолиственности в области  $G$  функции  $e^z$  необходимо и достаточно, чтобы  $\forall z \in G$  следовало, что  $z \pm 2\pi i \notin G$ .

Например, рассмотрим область  $G_0 := \{z \mid -\pi < \text{Im } z < \pi\}$ , в которой функция  $w = e^z$  по доказанному однолистна.

Определим образ  $G^*$  области  $G_0$  при отображении  $w = e^z$ . Для этого рассмотрим образы простейших кривых.

1) Всякая прямая  $\{z \mid z = x + iy_0, -\infty < x < +\infty\} \subset G_0$  функцией  $w = e^z$  отображается на луч  $l_{y_0} := \{w \mid w = e^x(\cos y_0 + i \sin y_0), -\infty < x < +\infty\}$ , причем граничные для области  $G_0$  прямые  $\{z \mid z = x \pm i\pi, -\infty < x < +\infty\}$ , отображаются в один луч  $(-\infty, 0)$ .

2) Всякий интервал  $\{z \mid z = x_0 + iy, -\pi < y < \pi\}$  отображается на дугу окружности  $\{w \mid w = e^{x_0}e^{iy}, -\pi < y < \pi\}$ .

В итоге получаем, что полоса  $G_0$  однолистно отображается функцией  $w = e^z$  на область  $G^* := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  (см. рис. 5.4).



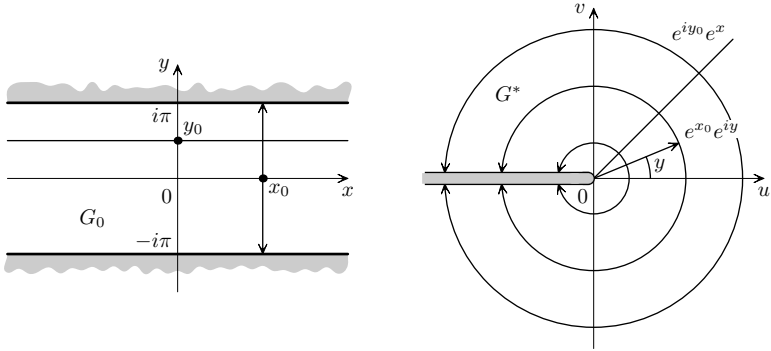


Рис. 5.4

Следовательно, ее обратная функция  $h_0$ , действующая из области  $G^*$  на полосу  $G_0$ , такова, что  $\operatorname{Im} h_0(w) \in (-\pi, \pi)$ ,  $\forall w \in G^*$ . Учитывая формулу (5.11), отсюда получаем, что

$$h_0(w) = \ln |w| + i \arg_{\text{гЛ}} w, \quad w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \quad (5.12)$$

где  $\arg_{\text{гЛ}} w \in (-\pi, \pi)$ .

По следствию 5.1 функция  $h_0(w)$  регулярна на  $G^*$ , т. е.  $h_0(w)$  есть регулярная ветвь многозначной функции  $\operatorname{Ln} w$ . Будем называть ее *главной регулярной ветвью* многозначной функции  $\operatorname{Ln} w$ . По теореме 5.2 вычислим ее производную

$$h'_0(w) = \frac{1}{e^z} \Big|_{z=h_0(w)} = \frac{1}{w}. \quad (5.13)$$

**УПРАЖНЕНИЕ 5.1.** С помощью теоремы об обратной функции и следствия 5.1 покажите, что функция

$$h_1(w) = \ln |w| + i \arg w, \quad \arg w \in (0, 2\pi),$$

также является регулярной ветвью многозначной функции логарифма  $\operatorname{Ln} w$  в области  $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ .

## § 6. Интегрирование функции омплексного переменного

Напомним некоторые определения из математического анализа на плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1.** Непрерывной кривой (или просто: кривой) обычно называют геометрическое место точек  $z$  комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , удовлетворяющих некоторому уравнению  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ , где  $x(t)$  и  $y(t)$  — непрерывные функции действительного параметра  $t$  на некотором отрезке  $[t_0, t_1]$ ,  $t_0 < t_1$ . Но при этом кривая определяется не только положением на плоскости  $\mathbb{C}$ , но и тем, что ее точки упорядочены возрастанием параметра  $t$ .

Таким образом, кривая состоит более чем из одной точек.

Одна и та же кривая может быть задана различными параметрами, поэтому замена одного параметра  $t \in [t_0, t_1]$  другим параметром  $\tau \in [\alpha, \beta]$  должна быть *эквивалентной*, т.е. должна существовать непрерывная и строго возрастающая функция  $g : [\alpha, \beta] \leftrightarrow [t_0, t_1]$ , при которой кривая  $\gamma = \{z(t) \mid t \in [t_0, t_1]\}$  будет задана в виде  $\gamma = \{\zeta(\tau) \mid \zeta(\tau) = z(g(\tau)), \tau \in [\alpha, \beta]\}$ .

Таким образом, отображение  $z = z(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , называют *параметризацией кривой*  $\gamma$ , а под самой кривой  $\gamma$  понимают *класс ее эквивалентных параметризаций*.

При изменении параметра  $t$  на отрезке  $[t_0, t_1]$  в одном направлении (от  $t_0$  к  $t_1$  или обратно) точка  $z(t)$  совершает обход кривой  $\gamma$ . Выбор направления обхода кривой  $\gamma$  называется *ориентацией* кривой  $\gamma$ .

Скажем, что на кривой  $\gamma$  выбрана *ориентация*, *индуцированная заданной параметризацией*  $z(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , если на кривой выбрано направление движения, соответствующее возрастанию параметра  $t$ . Точки  $z(t_0)$  и  $z(t_1)$  называются *концевыми точками* кривой, или, более точно, *начальной и конечной точками* кривой  $\gamma$  соответственно. Параметризация  $z = z(-t)$ ,  $-t_1 \leq t \leq -t_0$ , имеет тот же образ на плоскости  $\mathbb{C}$ , что и параметризация  $z = z(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , кривой  $\gamma$ , но не эквивалентна

ей. Соответствующую кривую будем обозначать  $\gamma^{-1}$  и говорить, что эта кривая получена из кривой  $\gamma$  сменой ориентации на противоположную.

Кривая  $\gamma$  называется *простой* (или *жордановой кривой*), если для любой ее параметризации  $z = z(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , различным значениям параметра  $t$  соответствуют различные значения  $z(t)$ . Кривая называется *замкнутой* или *контуром*, если  $z(t_0) = z(t_1)$ . Кривая называется *замкнутой жордановой кривой*, если  $z(t_0) = z(t_1)$ , но  $z(t') \neq z(t'')$  при  $t', t'' \in [t_0, t_1]$  и  $t' \neq t''$ .

По теореме Жордана *любая замкнутая жорданова кривая делит расширенную комплексную плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  на две односвязные области, ограниченную и неограниченную (содержащую точку  $z = \infty$ )*. Приведем доказательство теоремы Жордана для частного случая замкнутой жордановой кривой, являющейся замкнутой ломаной.

**ТЕОРЕМА 6.1 (ЖОРДАН).** *Пусть  $\gamma \subset \mathbb{C}$  — замкнутая ломаная, образующая жорданову кривую. Тогда кривая  $\gamma$  разбивает  $\overline{\mathbb{C}}$  на две области, одна из которых ограничена и односвязна, а другая неограничена и содержит бесконечность. Более того, ограниченную область можно разбить на конечное число непересекающихся треугольных подобластей с ориентированными границами (т.е. провести «триангуляцию») путем построения непересекающихся отрезков, соединяющих некоторые вершины ломаной. При этом ориентация (направление обхода) границы каждой из треугольных подобластей совпадает с ориентацией (направлением обхода) ломаной  $\gamma$  на отрезках их пересечения, а каждый внутренний отрезок, полученный при триангуляции, обходится дважды в противоположных направлениях.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем теорему методом математической индукции по числу вершин (концов отрезков) ломаной  $\gamma$ . Пусть число вершин ломаной равно трем, тогда эта ломаная ограничивает треугольную (односвязную) область и утверждение теоремы очевидно. Пусть задано натуральное число  $n \geq 3$  и допустим, что утверждение теоремы доказано для слу-

чая произвольной замкнутой жордановой ломаной, имеющей не более чем  $n$  вершин.

Рассмотрим произвольную замкнутую ориентированную жорданову ломаную  $\gamma_0$ , которая имеет  $n + 1$  вершин. Среди всех вершин ломаной  $\gamma_0$  выберем вершину, обозначаемую буквой  $A$ , значение которой имеет наибольшую действительную часть (или одну из таких вершин, если их несколько). Пусть  $B$  и  $C$  — соседние с  $A$  вершины ломаной  $\gamma_0$ . Прямая, проведенная через точку  $A$  и параллельная мнимой оси, разбивает плоскость  $\mathbb{C}$  на две полуплоскости, причем замкнутая полуплоскость  $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq \operatorname{Re} A\}$  содержит ломаную  $\gamma_0$ . Поэтому треугольник  $\triangle ABC$  также лежит в полуплоскости  $H$  и его внутренний угол  $\angle BAC < \pi$ . Так как ломаная  $\gamma_0$  является жордановой, то возможны два случая:

- 1) на замкнутом треугольнике  $\triangle ABC$  нет других (кроме  $A, B, C$ ) вершин ломаной  $\gamma_0$  (см. рис. 6.1а),
- 2) на интервале  $(B, C)$  или внутри треугольника  $\triangle ABC$  существует отличная от  $A, B, C$  вершина ломаной  $\gamma_0$  (см. рис. 6.1б).

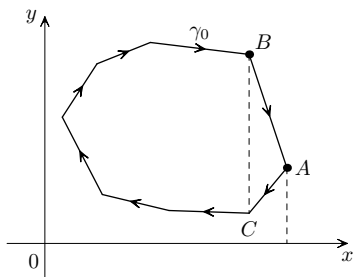


Рис. 6.1а

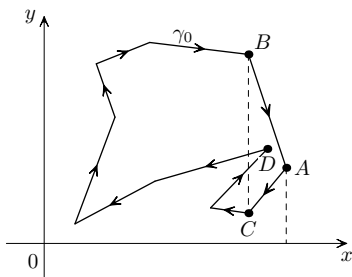


Рис. 6.1б

В первом случае интервал  $(B, C)$  не пересекается с ломаной  $\gamma_0$ , поэтому проводим отрезок  $[B, C]$ , который разбивает ориентированную ломаную  $\gamma_0$  на ориентированный треугольный контур  $\gamma_1 := \partial \triangle ABC$  и ориентированную ломаную  $\gamma_2$  с  $n$  вершинами, у которых ориентация по общим участкам с ломаной  $\gamma_0$  совпадает, а по общей части ломаных  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , т.е. по отрезку  $[B, C]$ , обход производится в противоположных направлениях.

Во втором случае выберем вершину  $D \in \gamma_0$  такую, что вер-

шина  $D$  имеет максимальную действительную часть среди всех вершин ломаной  $\gamma_0$ , находящихся на интервале  $(B, C)$  или внутри треугольника  $\triangle ABC$  (или одна из ближайших, если таких вершин несколько). Тогда интервал  $(A, D)$  не пересекается с ломаной  $\gamma_0$ , поэтому проводим отрезок  $[A, D]$ , который разбивает ориентированную ломаную  $\gamma_0$  на две ориентированные ломаные  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (причем  $B \in \gamma_1$ ,  $C \in \gamma_2$ ), у которых ориентация по общим участкам с ломаной  $\gamma_0$  совпадает, а по общей части ломаных  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , т.е. по отрезку  $[A, D]$ , обход производится в противоположных направлениях.

В обоих случаях каждая из полученных замкнутых жордановых ломаных  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  имеет число вершин  $\leq n$ , откуда по индуктивному предположению существуют соответствующие ограниченные односвязные области  $G_1$  и  $G_2$ , для которых ломаные  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  являются ориентированными границами. Более того, по предположению для каждой из указанных областей существует свое разбиение на непересекающиеся треугольные подобласти с ориентированными границами, ориентация которых совпадает с ориентацией ломаной  $\gamma_0$  на их общих отрезках. Так как по условию теоремы границы областей  $G_1$  и  $G_2$  (кроме отрезка  $[B, C]$  в первом случае и  $[A, D]$  во втором) не пересекаются, то либо области  $G_1$  и  $G_2$  не пересекаются, либо одна из областей содержится в другой.

Докажем, что области  $G_1$  и  $G_2$  не пересекаются.

Рассмотрим первый случай. По условию замкнутая треугольная область  $\triangle ABC$  не содержит других вершин ломаной  $\gamma_0$ , то есть она не содержит области  $G_2$ . Допустим, что область  $G_2$  содержит треугольную область  $G_1$ . Тогда точка  $A$  может быть либо граничной, либо внутренней для области  $G_2$ . Первое невозможно, так как ломаная  $\gamma_0$  без самопересечений, второе противоречит тому, что ломаная  $\gamma_2$ , являющаяся границей ограниченной области  $G_2$ , содержится в полуплоскости  $H$ , откуда следует, что и сама область  $G_2$  содержится в полуплоскости  $H$ . Итак, доказали, что в первом случае  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ .

Во втором случае внутренний для треугольника  $\triangle ABC$  угол  $\angle BAC$  по построению разделен на два непересекающихся внут-

ренных угла  $\angle BAD$  и  $\angle DAC$ . Так как ломаная  $[B, A] \cup [A, D]$  принадлежит границе  $\gamma_1$  области  $G_1$ , то найдется такое число  $\varepsilon > 0$ , при котором область  $G_1$  содержит либо пересечение  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$  с внутренностью угла  $\angle BAD$ , либо пересечение  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$  с внутренностью дополнения этого угла. Но в последнем случае получаем противоречие с тем, что ломаная  $\gamma_1$ , являющаяся границей ограниченной области  $G_1$ , содержится в полуплоскости  $H$ , откуда следует, что и сама область  $G_1$  содержится в полуплоскости  $H$ . Поэтому в области  $G_1$  содержится пересечение  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$  с внутренним углом  $\angle BAD$ . Аналогично доказывается, что в области  $G_2$  содержится пересечение некоторой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$  с внутренним углом  $\angle DAC$ . Так как эти углы не имеют общих внутренних точек, то получаем, что  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ .

Доказали, что области  $G_1$  и  $G_2$  не пересекаются и имеют общий участок границ — отрезок  $[B, C]$  в первом случае, или отрезок  $[A, D]$  во втором. В итоге получаем, что  $G_0 := G_1 \cup G_2 \cup [B, C]$  (или  $G_0 := G_1 \cup G_2 \cup [A, D]$ ) является ограниченной одностойной областью с границей  $\gamma_0$ , при этом триангуляции на  $G_1$  и на  $G_2$  вместе с отрезком  $[B, C]$  (или отрезком  $[A, D]$ ) задают триангуляцию на полученной области  $G_0$ .  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.1.** При доказательстве теоремы 6.1 мы дважды использовали то, что если замкнутая ломаная  $\gamma$  является границей ограниченной области  $G$  и эта кривая содержится в некотором замкнутой полуплоскости  $H$ , то и все точки области  $G$  также содержатся в этой полуплоскости.

Покажем это. Рассмотрим любую треугольную область  $\Delta A_1 A_2 A_3$  с вершинами в точках  $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{C}$ , которые содержатся в некоторой полуплоскости вида  $H_0 := \{z \mid \operatorname{Re} z \leq \alpha\}$ . Как следует из аналитической геометрии для любой точки  $z \in \Delta A_1 A_2 A_3$  найдутся действительные числа  $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$  такие, что  $\sum_{k=1}^3 \lambda_k = 1$  и справедливо равенство  $z = \sum_{k=1}^3 \lambda_k A_k$ . Отсюда следует, что  $\operatorname{Re} z = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \operatorname{Re} A_k \leq \alpha$ , т.е.

$z \in H_0$  и вся замкнутая треугольная область  $\Delta A_1 A_2 A_3$  также содержится в  $H_0$ .

Вернемся к доказательству теоремы 6.1, в котором для каждого  $k = 1, 2$  получили ломаную  $\gamma_k$ , которая содержится в полуплоскости  $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq \operatorname{Re} A\}$  и является границей некоторой ограниченной области  $G_k$ . При этом область  $G_k$  в силу триангуляции содержится в объединении треугольных замкнутых ограниченных подобластей, вершины которых лежат на кривой  $\gamma_k$ , т.е. содержатся в полуплоскости  $H$ . Отсюда и из приведенного выше утверждения для треугольника следует, что область  $G_k$  содержится в полуплоскости  $H$ .

Продолжим исследование кривых.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2.** Кривая  $\gamma$  называется гладкой, если существует ее параметризация  $z(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  такая, что функции  $x(t)$  и  $y(t)$  имеют непрерывные производные  $x'(t)$  и  $y'(t)$  и  $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$  всюду на отрезке  $[t_0, t_1]$ , причем если кривая замкнута, то справедливо равенство одностронних производных  $z'(t_0 + 0) = z'(t_1 - 0)$ .

При этом для гладкой кривой эквивалентной заменой параметра будем называть замену  $t = g(\tau)$ ,  $\tau \in [\alpha, \beta]$ ,  $t_0 = g(\alpha)$ ,  $t_1 = g(\beta)$ , при которой дополнительно потребуем, чтобы функция  $g$  была непрерывно дифференцируемой на  $[\alpha, \beta]$  и  $g'(\tau) > 0$  при всех  $\tau \in [\alpha, \beta]$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3.** Пусть задана кривая

$$\gamma = \{z(t) \mid t \in [t_0, t_1]\}.$$

Пусть существует конечное разбиение  $\{\theta_k\}_{k=0}^m$  отрезка  $[t_0, t_1]$ , т.е.  $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m = t_1$  такое, что дуги  $\gamma_k := \{z(t) \mid t \in [\theta_{k-1}, \theta_k]\}$ , являются различными гладкими кривыми с той же, что и у кривой  $\gamma$ , ориентацией. Тогда кривая  $\gamma$  называется *кусочно-гладкой кривой*, или *объединением гладких кривых*  $\{\gamma_k\}$ , т.е.  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_m$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.2.** Далее, если не оговорено противное, будем считать, что ориентация кривой  $\gamma$  совпадает с ориентацией, индуцированной ее параметризацией  $z(t)$ .

Пусть задана кусочно-гладкая кривая  $\gamma = \{z(t) \mid t \in [t_0, t_1]\}$ ,

где  $z(t_0)$  — начальная, а  $z(t_1)$  — конечная точки кривой  $\gamma$ . Пусть выбрано конечное разбиение отрезка  $[t_0, t_1]$  вида

$$\lambda := \{\tau_k \mid k \in \overline{0, m_\lambda}, \quad t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{m_\lambda} = t_1\}. \quad (6.1)$$

Мелкостью разбиения  $\lambda$  назовем величину

$$|\lambda| := \max \{\tau_k - \tau_{k-1} \mid k \in \overline{1, m_\lambda}\}.$$

Пусть при каждом  $k \in \overline{1, m_\lambda}$  произвольно выбрана точка

$$\zeta_k \in \gamma_k := \{z(t) \mid t \in [\tau_{k-1}, \tau_k]\}, \quad (6.2)$$

т.е. точка  $\zeta_k$  принадлежит дуге  $\gamma_k \subset \gamma$  (см. рис. 6.2).

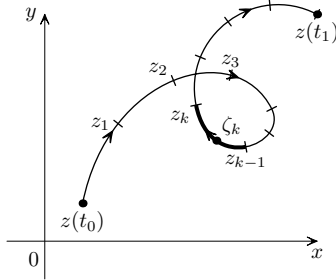


Рис. 6.2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4. Пусть на

кусочно-гладкой кривой  $\gamma$  задана непрерывная функция  $f: \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ . Определим выражение

$$\sigma(\lambda) := \sum_{k=1}^{m_\lambda} f(\zeta_k) \Delta z_k, \quad \text{где} \quad \Delta z_k := z(\tau_k) - z(\tau_{k-1}), \quad (6.3)$$

которое будем называть *интегральной суммой функции  $f$  вдоль кривой  $\gamma$ , соответствующей разбиению  $\lambda$* .

Если существует конечный предел интегральных сумм (6.3) при  $|\lambda| \rightarrow 0$ , не зависящий от выбора разбиения  $\lambda$  (6.1) и точек  $\{\zeta_k\}$  6.2, то этот предел называется *интегралом от функции  $f$  по кривой  $\gamma$* , который обозначается

$$\int_{\gamma} f(z) dz. \quad (6.4)$$

ТЕОРЕМА 6.2. При сделанных выше в определении 6.4 предположениях интеграл (6.4) существует и справедлива формула

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \\ &= \int_{\gamma} (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + i \int_{\gamma} (v(x, y) dx + u(x, y) dy), \end{aligned} \quad (6.5)$$

где  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , и стоящие справа в формуле (6.5) два интеграла являются криволинейными интегралами вто-



рого рода от действительных функций действительных переменных по кривой  $\gamma$  на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Записав интегральную сумму (6.3) через действительные и мнимые части, получаем

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda) &= \sum_{k=1}^{m_\lambda} (u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)) (\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{m_\lambda} (u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k) + \\ &+ i \sum_{k=1}^{m_\lambda} (u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k + v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k) := \sigma_1(\lambda) + i\sigma_2(\lambda). \quad (6.6)\end{aligned}$$

В итоге показали, что  $\sigma(\lambda)$  может быть представлена формулой (6.6) в виде двух интегральных сумм  $\sigma_1(\lambda)$  и  $\sigma_2(\lambda)$ , соответствующих криволинейным интегралам второго рода действительных функций от действительных переменных  $x, y$  по кривой  $\gamma$  на плоскости. Как показано в курсе математического анализа (см., например, § 20.2 [1] или § 50 [9]), условий теоремы 6.2 (т. е. функции  $u, v$  непрерывны на кусочно-гладкой кривой  $\gamma$ ) достаточно, чтобы существовали пределы этих интегральных сумм при  $|\lambda| \rightarrow 0$ , откуда и следует утверждение теоремы и формула (6.5).  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 6.1. В условиях теоремы 6.2 справедлива формула

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))z'(t) dt, \quad (6.7)$$

где в правой части равенства (6.7) стоит интеграл от комплекснозначной функции действительного переменного, который определяется по формуле

$$\int_{t_0}^{t_1} (u(t) + iv(t)) dt := \int_{t_0}^{t_1} u(t) dt + i \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt. \quad (6.8)$$

Доказательство непосредственно следует из формулы (6.5) и из формулы представления криволинейного интеграла второго рода через интеграл по параметру:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt.\end{aligned}$$

Из теоремы 6.2 и свойств криволинейного интеграла второго рода действительных функций от действительных переменных по кривой на плоскости следуют свойства интеграла (6.4):

1°. *Линейность*:

$$\int_{\gamma} (\lambda f(z) + \mu g(z)) dz = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz + \mu \int_{\gamma} g(z) dz, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

2°. Обозначим через  $\gamma^{-1}$  кривую, полученную из кривой  $\gamma$  заменой ориентации на противоположную. Тогда

$$\int_{\gamma^{-1}} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

3°. Пусть кривая  $\gamma$  является объединением двух кусочно-гладких кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (т.е.  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$  по определению 6.3). Тогда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

4°. Справедлива оценка интеграла

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{t_0}^{t_1} |f(x(t) + iy(t))| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt := \int_{\gamma} |f(z)| |dz|, \quad (6.9)$$

где справа в неравенстве стоит криволинейный интеграл первого рода от действительной функции  $|f(z)|$  действительных переменных  $x, y$  по кривой  $\gamma$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (6.3) получаем оценку

$$|\sigma(\lambda)| = \left| \sum_{k=1}^{m_{\lambda}} f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{m_{\lambda}} |f(\zeta_k)| |\Delta z_k|. \quad (6.10)$$

Справа в неравенстве (6.10) стоит интегральная сумма криволинейного интеграла первого рода, и так как функция  $|f(z)|$  непрерывна на кусочно-гладкой кривой  $\gamma$  по переменным  $x, y$ , то, как известно из курса математического анализа (см., например, § 50 [9]) криволинейный интеграл первого рода от действительной функции  $|f(z)|$  существует. Слева в (6.10), в силу

равенства  $\lim_{|\lambda| \rightarrow 0} |\sigma(\lambda)| = |\lim_{|\lambda| \rightarrow 0} \sigma(\lambda)|$ , в пределе получаем левую часть неравенства (6.9).  $\square$

5°. *Инвариантность.* Интеграл (6.3) не зависит от выбора параметризации  $z(t)$  кривой  $\gamma$  при условии, что все параметризации эквивалентны между собой.

Доказательство следует из аналогичного свойства для криволинейных интегралов второго рода от действительных функций, определенных на  $\mathbb{R}^2$ , и из формулы (6.5).

**ПРИМЕР 6.1.** Пусть  $a \in \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $r > 0$ . Пусть  $\gamma_r$  есть окружность  $\{z \mid |z - a| = r\}$ , ориентированная движением против хода часовой стрелки. Нужно вычислить интеграл

$$I_k = \int_{\gamma_r} (z - a)^k dz. \quad (6.11)$$

Выберем параметризацию окружности  $\gamma_r$  вида  $z(t) = a + re^{it}$ , где  $t \in [0, 2\pi]$ . Тогда по следствию 6.1 имеем

$$I_k = \int_0^{2\pi} r^k e^{ikt} r i e^{it} dt = i r^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t} dt.$$

В итоге

1) при  $k = -1$  получаем  $I_{-1} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$ ;

2) при  $k \neq -1$  получаем

$$I_k = i r^{k+1} \left( \int_0^{2\pi} \cos(k+1)t dt + i \int_0^{2\pi} \sin(k+1)t dt \right) = 0.$$

**ТЕОРЕМА 6.3.** Пусть в области  $G$  заданы непрерывные функции  $f_n: G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  и кусочно-гладкая кривая  $\gamma$ . Пусть функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$  сходится к своей сумме  $S(z)$  равномерно на кривой  $\gamma$ . Тогда этот ряд можно почленно интегрировать по кривой  $\gamma$ , т. е. справедливо равенство

$$\int_{\gamma} S(z) dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz. \quad (6.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим частичные суммы ряда через

$$S_N(z) := \sum_{n=1}^N f_n(z), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Они очевидно непрерывны на  $G$ , и в силу равномерной сходимости ряда на кривой  $\gamma$ , аналогично утверждению 2.5, получаем, что сумма  $S(z)$  данного ряда также непрерывна на кривой  $\gamma$ , т. е. интегрируема на кривой  $\gamma$ . Так как данный ряд сходится равномерно на  $\gamma$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N(\varepsilon)$  такой, что для всех номеров  $N \geq N(\varepsilon)$  справедливо неравенство

$$\sup_{z \in \gamma} |S(z) - S_N(z)| \leq \frac{\varepsilon}{l(\gamma)},$$

где  $l(\gamma) = \int_{\gamma} |dz|$  — длина кривой  $\gamma$ . Поэтому при всех  $N \geq N(\varepsilon)$

в силу оценки (6.8) получаем

$$\left| \int_{\gamma} S(z) dz - \sum_{n=1}^N \int_{\gamma} f_n(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |S(z) - S_N(z)| |dz| < \varepsilon,$$

что по определению суммы ряда означает равенство (6.12).  $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.5. Пусть функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  определена на области  $G$ . Функция  $g: G \rightarrow \mathbb{C}$  называется первообразной функции  $f$  на  $G$ , если функция  $g$  регулярна и  $g'(z) = f(z)$  при всех  $z \in G$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.6. Говорят, что выражение  $f(z) dz$  является полным дифференциалом в области  $G$ , если в этой области  $G$  существует первообразная  $g$  функции  $f$ , т. е. дифференциал функции  $g$  удовлетворяет равенству  $dg = f(z) dz$ .

ТЕОРЕМА 6.4. Пусть в области  $G$  задана непрерывная функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ .

1) Если  $f(z) dz$  является полным дифференциалом в области  $G$ , то для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой  $\gamma \subset G$  справедливо равенство

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (6.13)$$

2) Если равенство (6.13) выполняется для любой замкнутой жордановой ломаной  $\gamma \subset G$ , то  $f(z) dz$  является полным дифференциалом в области  $G$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть  $f(z) dz$  является полным дифференциалом в области  $G$ , т.е. существует регулярная функция  $g: G \rightarrow \mathbb{C}$  такая, что  $g'(z) = f(z)$  при всех  $z \in G$ . Тогда для произвольной кусочно-гладкой кривой  $\gamma = \{z(t) \mid t \in [t_0, t_1]\}$  по формуле (6.7) и по формуле Ньютона–Лейбница из действительного анализа получаем

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) z'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} g(z(t)) dt = g(z(t_1)) - g(z(t_0)).$$

Если кривая  $\gamma$  замкнута, то  $z(t_0) = z(t_1)$  и выполняется равенство (6.13).

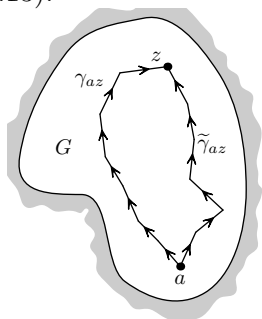


Рис. 6.3а

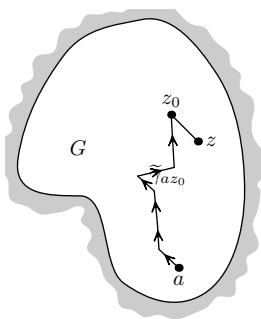


Рис. 6.3б

2) Зафиксируем произвольную точку  $a \in G$ . Для произвольной точки  $z \in G$  существует жорданова ломаная  $\gamma_{az} \subset G$  с началом в точке  $a$  и концом в точке  $z$  (так как  $G$  область). Определим выражение  $\varphi(z) := \int \gamma_{az} f(\zeta) d\zeta$  и покажем, что это функция концевой точки  $z$ , т.е.  $\gamma_{az}$  не зависит от вида ломаной  $\gamma_{az}$ . Рассмотрим две произвольные ломаные  $\gamma_{az} \subset G$  и  $\tilde{\gamma}_{az} \subset G$ , по которым построим замкнутую ломаную  $\gamma := \gamma_{az} \cup \tilde{\gamma}_{az}^{-1}$  (см. рис. 6.3а). В силу равенства (6.13) и свойств интеграла получаем равенство

$$0 = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_{az}} f(\zeta) d\zeta - \int_{\tilde{\gamma}_{az}} f(\zeta) d\zeta,$$

т.е.  $\varphi(z)$  не зависит от выбора ломаной и является функцией точки  $z$ . Покажем, что функция  $\varphi(z)$  является первообразной функции  $f(z)$  в области  $G$ . Выберем произвольную точку  $z_0 \in G$  и некоторую ломаную  $\tilde{\gamma}_{az_0} \subset G$  (см. рис. 6.3б). Так как функция  $f(z)$  непрерывна в точке  $z_0$ , то для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует число  $\delta > 0$  такое, что  $B_\delta(z_0) \subset G$  и для любого  $z \in B_\delta(z_0)$  имеем  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ .

Кроме того, для любой точки  $z \in B_\delta(z_0)$  в силу независимости значения  $\varphi(z)$  от выбора ломаной справедливо равенство  $\varphi(z) = \int_{\tilde{\gamma}_{az}} f(\zeta) d\zeta$ , где  $\tilde{\gamma}_{az} := \tilde{\gamma}_{az_0} \cup [z_0, z] \subset G$ . Отсюда следует, что  $\varphi(z) - \varphi(z_0) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta$  (т.е. интеграл берется по отрезку). Кроме того, очевидно равенство  $\int_{[z_0, z]} d\zeta = z - z_0$ . В итоге

$$\begin{aligned} \text{получаем} \quad \left| \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} (f(\zeta) - f(z_0)) d\zeta \right| < \\ &< \frac{\varepsilon}{|z - z_0|} \int_{[z_0, z]} |d\zeta| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Это значит, что существует  $\varphi'(z_0) = f(z_0)$  для произвольной точки  $z_0 \in G$ , т.е.  $f(z) dz$  — полный дифференциал в области  $G$ .  $\square$

В качестве иллюстрации теоремы 6.4 рассмотрим обобщение примера 6.1.

**ПРИМЕР 6.2.** Пусть  $a \in \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ ,  $f(z) := (z - a)^k$  и  $g(z) := (z - a)^{k+1}/(k+1)$ . Тогда функция  $g(z)$  будет первообразной функции  $f(z)$  во всей комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  при  $k \geq 0$ , или в области  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$  при  $k < -1$ . По теореме 6.4 справедливо равенство

$$\int_{\gamma} (z - a)^k dz = 0,$$

для любой замкнутой кривой  $\gamma \subset \mathbb{C}$ , причем при  $k < -1$  с дополнительным условием  $a \notin \gamma$ .

## § 7. Интегральная теорема Коши

В этом параграфе мы докажем интегральную теорему Коши — основную теорему теории регулярных функций, и ее обобщения. Сделаем это в три этапа.

**ЛЕММА 7.1 (ГУРСА).** Пусть функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна в области  $G \subset \mathbb{C}$  и замкнутая треугольная область (треугольник)  $\Delta$  содержится в  $G$ . Тогда

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0, \quad (7.1)$$

где  $\partial\Delta$  — положительно ориентированная граница треугольника  $\Delta$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Допустим противное, т.е. существует треугольник  $\Delta ABC \subset G$  такой, что  $J := \int_{\partial\Delta ABC} f(z) dz \neq 0$ .

Проведя средние линии в треугольнике  $\Delta ABC$ , разобьем этот треугольник на четыре треугольника  $\Delta_k$ ,  $k \in \overline{1, 4}$ . Тогда справедливо равенство

$$J = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Delta_k} f(z) dz,$$

так как справа в сумме при интегрировании обход каждой средней линии треугольника  $\Delta ABC$  будет совершаться дважды в противоположных направлениях. Отсюда следует, что существует номер  $k_0 \in \overline{1, 4}$  такой, что справедливо неравенство

$$\left| \int_{\partial\Delta_{k_0}} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4} |J|.$$

Введем обозначение  $\Delta^1 := \Delta_{k_0}$ .

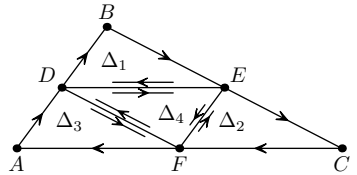


Рис. 7.1

Проведем аналогичные рассуждения для треугольника  $\Delta^1$  и получим, что, внутри него существует треугольник  $\Delta^2$  такой, что

$$\left| \int_{\partial \Delta^2} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4^2} |J|.$$

Продолжая рассуждения, получаем последовательность треугольников  $\{\Delta^n\}$ , для которых  $\Delta^n \supset \Delta^{n+1}$  и справедливо неравенство

$$\left| \int_{\partial \Delta^n} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4^n} |J|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что если периметр исходного треугольника  $\Delta ABC$  равен  $P_0$ , то периметр треугольника  $\Delta^n$  удовлетворяет равенству  $P_n = P_0/2^n$ . Так как треугольники вложены друг в друга и  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$ , то существует точка  $z_0 \in G$  такая, что для любой последовательности  $\{z_n\}$ , где  $z_n \in \Delta^n$ , имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ .

Так как функция  $f$  дифференцируема в точке  $z_0$ , то справедливо выражение

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0).$$

При этом для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $B_\delta(z_0) \subset G$  и при любом  $z \in B_\delta(z_0)$  справедливо неравенство  $|o(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|$ . Вычислим интеграл

$$\int_{\partial \Delta^n} f(z) dz = (f(z_0) - z_0 f'(z_0)) \int_{\partial \Delta^n} dz + f'(z_0) \int_{\partial \Delta^n} z dz + \int_{\partial \Delta^n} o(z - z_0) dz.$$

Так как справа первые два интеграла равны нулю (см. пример 6.2), то для всех  $n$ , для которых  $\Delta^n \subset B_\delta(z_0)$  получаем оценки

$$\left| \int_{\partial \Delta^n} f(z) dz \right| \leq \varepsilon \int_{\partial \Delta^n} |z - z_0| |dz| \leq \varepsilon P_n^2 = \varepsilon \frac{P_0^2}{4^n}.$$



Сравнивая две оценки интеграла, получаем неравенство  $\frac{1}{4\pi} |J| \leq \varepsilon \frac{P_0^2}{4\pi}$ , т.е.  $|J| \leq \varepsilon P_0^2$ . В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  получаем, что  $|J| = 0$ . Полученное равенство доказывает равенство (7.1).  $\square$

**ТЕОРЕМА 7.1 (КОШИ).** *Для всякой регулярной функции  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ , заданной в односвязной области  $G$ , справедливо равенство*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0, \quad (7.2)$$

где интеграл берется по любой простой замкнутой кусочно-гладкой кривой  $\gamma$ , принадлежащей области  $G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим произвольную замкнутую жорданову ломаную  $\tilde{\gamma} \subset G$ . По теореме Жордана (теорема 6.1) ломаная  $\tilde{\gamma}$  является границей ограниченной области  $D$ , принадлежащей односвязной области  $G$ . По теореме 6.1 область  $D$  может быть разбита на конечный набор треугольных областей  $\{\Delta_n\}$ ,  $n \in \overline{1, N}$ . Справедливо равенство

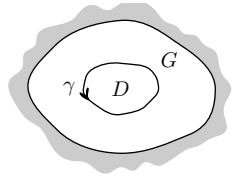


Рис. 7.2

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \sum_{n=1}^N \int_{\partial \Delta_n} f(z) dz,$$

так как при интегрировании по треугольным кривым  $\partial \Delta_n$  каждый полученный при триангуляции области  $D$  дополнительный отрезок обходится дважды в противоположных направлениях, т.е. интегралы по ним в правой сумме уничтожаются. По лемме 7.1 Гурса  $\int_{\partial \Delta_n} f(z) dz = 0$  при любом  $n \in \overline{1, N}$ . В итоге получаем, что  $\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = 0$ . Из второй части утверждения теоремы 6.4 следует, что выражение  $f(z)dz$  есть полный дифференциал в области  $G$ . Поэтому из первой части утверждения теоремы 6.4 для любой простой замкнутой кусочно-гладкой кривой  $\gamma \subset G$  следует равенство (7.2).  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Условие односвязности области  $G$  в теореме 7.1 существенно, что показывает пример функции  $f(z) = 1/z$ , заданной на неодносвязной области  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , интеграл от которой по единичной окружности равен  $2\pi i$  (см. пример 6.1).

Однако можно изменить формулировку теоремы, допускающую распространение теоремы 7.1 на случай интегрирования по границе неодносвязной области определенного ниже типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Областью с кусочно-гладкой границей будем называть область  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ , границу  $\Gamma$  которой можно представить в виде объединения конечного числа гладких ограниченных кривых  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$  (ненулевой длины), пересечение которых возможно лишь в концевых точках. Эти кривые  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$  будем называть гладкими компонентами границы  $\Gamma$  области  $G$ . Эти компоненты могут быть двух типов:

1) Кривая  $\Gamma_k$  такова, что в каждой окрестности каждой точки  $z_0 \in \Gamma_k$  находятся как точки из области  $G$ , так и из  $\mathbb{C} \setminus (G \cup \Gamma)$ . Такая кривая  $\Gamma_k$  называется правильной гладкой компонентой границы  $\Gamma$ .

2) Кривая  $\Gamma_k$  такова, что для каждой точки  $z_0 \in \Gamma_k^0$  (обозначение  $\Gamma_k^0$  означает кривую  $\Gamma_k$  без концевых точек) существует окрестность  $V_{\varepsilon_0}(z_0)$  такая, что  $V_{\varepsilon_0}(z_0) \setminus \Gamma_k \subset G$ . Такая компонента  $\Gamma_k$  называется разрезом, причем каждая точка  $z_0 \in \Gamma_k^0$  называется внутренней точкой разреза.

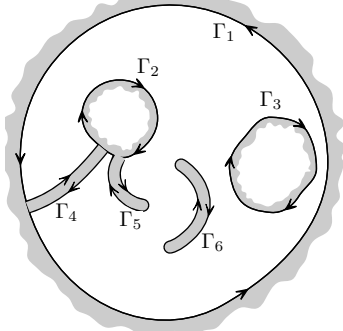


Рис. 7.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Пусть  $G$  — область с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$  (см. определение 7.1). Скажем, что граничная кривая  $\Gamma$  положительно ориентирована, если при движении по всем правильным гладким компонентам область  $G$  остается слева, а каждый разрез обходится дважды в противоположных направлениях. При этом

обходе разрез представляется в виде двух берегов, при движе-

нии по каждому из них область  $G$  должна оставаться слева (справа будет находиться другой берег разреза) (см. рис. 7.3).

В соответствии с этим уточним понятие *непрерывности функции*  $f : \bar{G} \rightarrow \mathbb{C}$  на замыкании области  $\bar{G} = G \cup \Gamma$ , а именно, в точках границы  $\Gamma$ .

Для всякой точки, принадлежащей лишь одной из правильных гладких компонент границы  $\Gamma$ , или являющейся концевой точкой лишь одного разреза, непрерывность функции в этой точке определяется через совпадение ее значения в этой точке с пределом функции в этой точке по области  $G$ .

Для любой внутренней точки  $z_0$  произвольного разреза  $\Gamma_k$ , не являющейся концевой точкой никакого другого разреза, в силу определения 7.1 найдется достаточно малая окрестность  $B_\varepsilon(z_0)$  такая, что множество  $B_\varepsilon(z_0) \setminus \Gamma_k \subset G$  делится разрезом  $\Gamma_k$  на две подобласти, которые обозначим  $B^+$  и  $B^-$ . При этом считаем, что точка  $z_0$  разбилась на две точки  $z_0^+$  и  $z_0^-$  такие, что точка  $z_0^+$  принадлежит одному берегу разреза, на границе области  $B^+$ , а точка  $z_0^-$  принадлежит другому берегу разреза, на границе области  $B^-$ . Тогда говорят, что функция  $f$  непрерывна в граничной точке  $z_0^+$  (или точке  $z_0^-$ ), если значение функции в этой точке  $z_0^+$  ( $z_0^-$ ) совпадает с пределом функции  $f$  в точке  $z_0$  по множеству  $B^+$  (по множеству  $B^-$ ).

Если же концевая точка одного из разрезов принадлежит и другим компонентам границы, то малая окрестность этой точки компонентами границы может быть разбита на три и более подобластей, в каждой из которых непрерывная функция в этой концевой точке определяется через предельное значение в соответствующей подобласти.

**ТЕОРЕМА 7.2.** Пусть задана ограниченная односвязная область  $G$  с положительно ориентированной кусочно-гладкой границей  $\Gamma$  (см. определения 7.1 и 7.2). Пусть функция  $f : \bar{G} \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна на области  $G$  и непрерывна на замыкании области  $\bar{G} = G \cup \Gamma$ . Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (7.3)$$

Доказательство теоремы 7.2 приведем лишь для специального класса областей  $G$ , когда добавлением к границе  $\Gamma$  такой области  $G$  конечного числа разрезов оставшиеся точки области  $G$  можно представить в виде объединения конечного числа, так называемых, *звездных областей*. При этом в силу того, что интегралы по дополнительным разрезам в сумме равны нулю, интеграл по  $\Gamma$  равен сумме интегралов по границам звездных областей. Отсюда следует, что в этом классе областей достаточно доказать теорему для одной звездной области.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3.** Ограниченная область  $G$  называется звездной областью, если граница  $\Gamma$  области  $G$  может быть задана в виде

$$\Gamma = \{z \mid z = z_0 + z_1(t), \alpha \leq t \leq \beta, z_1(\alpha) = z_1(\beta)\}, \quad (7.4)$$

где  $z_0 \in G$  называется центром звездной области,  $z_1: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  — кусочно-гладкая функция, причем для каждой кривой

$$\Gamma_\lambda := \{z \mid z = z_0 + \lambda z_1(t), \alpha \leq t \leq \beta\}, \quad \lambda \in (0, 1), \quad (7.5)$$

справедливо включение

$$\Gamma_\lambda \subset G, \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

Приведем примеры некоторых звездных областей.

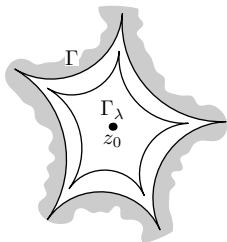


Рис. 7.4a

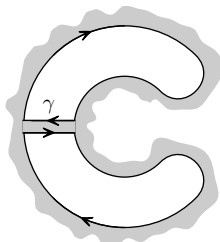


Рис. 7.4б

**ПРИМЕР 7.1.** Каждое ограниченное выпуклое открытое множество с кусочно - гладкой границей является звездной областью, причем ее центром может служить любая точка этого множества.

**ЗАМЕЧАНИЕ 7.2.** Примеры, приведенные на рисунках 7.4a и 7.4б, показывают, что класс областей, являющихся звездными

или представимых в виде объединения конечного числа звездных подобластей, достаточно большой.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Покажем, что без ограничения общности доказательство теоремы 7.2 достаточно провести для случая, когда область  $G$  является звездной с центром в точке  $z_0 = 0$ .

В самом деле, допустим, что ее центр  $z_0 \neq 0$ . Сделав замену  $\tilde{z} = z - z_0$ ,  $\tilde{\Gamma} = \Gamma - z_0$ ,  $\tilde{G} = G - z_0$ , получим звездную область  $\tilde{G}$  с центром в точке 0, причем

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\Gamma}} f(\tilde{z} + z_0) d\tilde{z} = \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{f}(\tilde{z}) d\tilde{z},$$

где  $\tilde{f}(\tilde{z}) := f(\tilde{z} + z_0)$  также является регулярной функцией, и если покажем, что последний интеграл равен нулю, то и исходный будет равен нулю.

Итак, считаем, что центр области  $G$  есть точка  $z_0 = 0$ . Тогда кривая  $\Gamma_\lambda$  из (7.5) принимает вид:

$$\Gamma_\lambda = \{z \mid z = \lambda z_1(t), \alpha \leq t \leq \beta\}, \quad \lambda \in (0, 1).$$

Так как по определению 7.3 звездной области справедливы включения  $\Gamma_\lambda \subset G$ , то по теореме 7.1 справедливо равенство

$$\int_{\Gamma_\lambda} f(\zeta) d\zeta = 0, \quad \forall \lambda \in (0, 1). \quad (7.6)$$

Выберем произвольное число  $\lambda \in (0, 1)$  и сделаем замену переменного  $\zeta$  на  $z$  из выражения  $\zeta = \lambda z$ . Тогда включение  $\zeta \in \Gamma_\lambda$  эквивалентно включению  $z \in \Gamma$ . В силу этого равенство (7.6) принимает вид

$$\int_{\Gamma} f(\lambda z) \lambda dz = 0, \quad \text{откуда} \quad \int_{\Gamma} f(\lambda z) dz = 0, \quad \forall \lambda \in (0, 1). \quad (7.7)$$

Так как функция  $f$  непрерывна на ограниченном замкнутом множестве  $\overline{G}$ , то по известному свойству непрерывной функции

на компакте она равномерно непрерывна на  $\overline{G}$ . Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall z', z'' \in \overline{G}, |z' - z''| < \delta \Rightarrow |f(z') - f(z'')| < \varepsilon.$$

Кроме того, для любого  $z \in \Gamma$  получаем  $|z - \lambda z| = (1 - \lambda)|z| \leq (1 - \lambda)C_0$ , где  $C_0 := \max \{|z| \mid z \in \Gamma\} < +\infty$ .

Выбрав  $\lambda_\varepsilon \in (0, 1)$ , удовлетворяющее неравенству  $(1 - \lambda_\varepsilon) < \delta(\varepsilon)/C_0$ , получаем, что  $|z - \lambda_\varepsilon z| < \delta(\varepsilon)$ ,  $\forall z \in \Gamma$ . Поэтому из (7.7) следует:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\Gamma} (f(z) - f(\lambda_\varepsilon z)) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z) - f(\lambda_\varepsilon z)| |dz| \leq \varepsilon \int_{\Gamma} |dz|.$$

В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  получаем равенство (7.3).  $\square$

**ТЕОРЕМА 7.3 (ОБОВЩЁННАЯ ТЕОРЕМА КОШИ).** Пусть задана ограниченная область  $G$  с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей  $\Gamma$ . Пусть функция  $f: \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна на области  $G$  и непрерывна на замыкании области  $\overline{G} = G \cup \Gamma$ . Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (7.8)$$

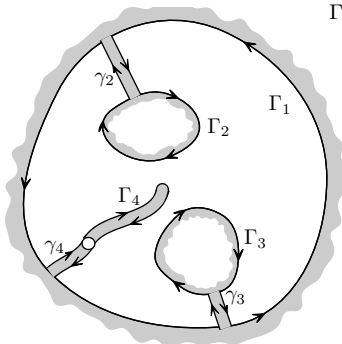


Рис. 7.5

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

В силу ограниченности области  $G$  одна группа компонент образует внешний кусочно-гладкий замкнутый контур, который отделяет точки области  $G$  от бесконечной точки и поэтому ориентирован против хода часовой стрелки (для простоты рассуждений будем считать, что это одна компонента  $\Gamma_1$ ). Все другие компоненты границы  $\Gamma$  бу-

дут внутренними, соответственно обход их (для разрезов — обход по их берегам) будет проводиться по направлению движения часовой стрелки.

Построим положительно ориентированную многокомпонентную кривую  $\tilde{\Gamma}$ , включающий в себя границу  $\Gamma$ , добавлением к каждой внутренней компоненте границы  $\Gamma_k$  дополнительного разреза  $\gamma_k \subset G$ , соединяющего  $\Gamma_k$  с внешней компонентой  $\Gamma_1$ , причем так, чтобы все дополнительные разрезы попарно не пересекались, и каждый обходился дважды в противоположных направлениях (см. рис. 7.5).

Так как дополнительные разрезы находятся в области регулярности функции  $f$ , то интеграл от функции  $f$  по каждому дополнительному разрезу (обойденному дважды в противоположных направлениях) равен нулю.

Поэтому интеграл по ориентированной кривой  $\tilde{\Gamma}$  совпадает с интегралом по границе  $\Gamma$ . Но построенная нами кривая  $\tilde{\Gamma}$  ограничивает некоторую односвязную область  $\tilde{G} \subset G$ , и по теореме 7.2 интеграл по ее границе  $\tilde{\Gamma}$  равен нулю, то есть справедливо равенство (7.8).  $\square$

## § 8. Интегральная формула Коши

Получим представление функций, регулярных в ограниченной области, при помощи интеграла по границе этой области. С помощью этого представления покажем, что всякая регулярная в области функция бесконечно дифференцируема.

**ТЕОРЕМА 8.1.** Пусть  $G$  — ограниченная область в  $\mathbb{C}$  с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей  $\Gamma$ . Пусть функция  $f: \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна на  $G$  и непрерывна на  $\overline{G} = G \cup \Gamma$ . Тогда для любой точки  $z \in G$  справедлива интегральная формула Коши вида

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (8.1)$$

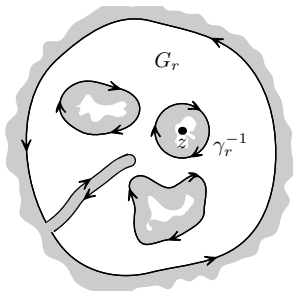


Рис. 8.1

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Зафиксируем произвольную точку  $z \in G$ . Функция  $\zeta \rightarrow \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  регулярна в области  $G \setminus \{z\}$ . Выберем число  $r_0 > 0$  такое, что выполнено включение  $\overline{B_{r_0}(z)} \subset G$ .

Для каждого  $r \in (0, r_0)$  обозначим через  $\gamma_r := \{\zeta \mid |\zeta - z| = r\}$  окружность с центром в точке  $z$  радиуса  $r$ , ориентированную против хода часовой стрелки. Также обозначим множества  $G_r := G \setminus \overline{B_r(z)}$  и  $\Gamma_r := \Gamma \cup \gamma_r^{-1}$ . По построению каждое множество  $G_r$  является областью с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей  $\Gamma_r$ .

По теореме 7.3 получаем

$$0 = \int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (8.2)$$

Итак,

$$J := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \stackrel{(8.2)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall r: 0 < r < r_0. \quad (8.3)$$



Как показано в примере 6.1, справедливо равенство  $1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$ , откуда

$$J - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall r \in (0, r_0).$$

Так как  $f(\zeta)$  непрерывна в точке  $z \in G$ , то для каждого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) \in (0, r_0)$  такое, что для  $\forall \zeta: |\zeta - z| < \delta(\varepsilon)$  следует  $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ . Поэтому, выбирая  $r \in (0, \delta(\varepsilon))$ , получаем

$$|J - f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi r} \int_{\gamma_r} |d\zeta| = \varepsilon. \quad (8.4)$$

Так как  $\varepsilon > 0$  произвольное число, то из (8.3), (8.4) следует  $J = f(z)$ , т. е. доказана формула (8.1).  $\square$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1.** Пусть  $\gamma$  — кусочно-гладкая кривая в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  и пусть  $w = q(z)$  — непрерывная на  $\gamma$  функция. Тогда интеграл вида

$$I(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{q(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma \quad (8.5)$$

называется интегралом Коши по кривой  $\gamma$  от функции  $q$ .

**ТЕОРЕМА 8.2.** При сформулированных в определении 8.1 условиях интеграл Коши (8.5) определен и дифференцируем бесконечное число раз на  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ , причем для производных справедлива формула

$$I^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{q(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8.6)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** 1. Докажем формулу (8.6) индукцией по  $n \in \mathbb{N}$ , опираясь на то, что при  $n = 0$  формула (8.6) верна в силу определения интеграла Коши (8.5). Фиксируем  $n \in \mathbb{N}$  и полагаем, что при  $n - 1$  формула (8.6) уже доказана. Так как функция  $q(\zeta)$  непре-

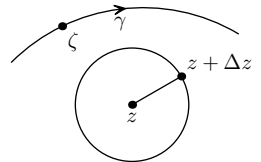


Рис. 8.2

рывна на контуре  $\gamma$ , то существует число  $M < +\infty$  такое, что  $|q(\zeta)| \leq M$  при  $\zeta \in \gamma$ .

Зафиксируем точку  $z \notin \gamma$ . Пусть  $d := \inf\{|z - \zeta| \mid \zeta \in \gamma\}$  — расстояние от точки  $z$  до кривой  $\gamma$ . Очевидно, что  $d > 0$ . Выберем произвольное число  $\Delta z \in \mathbb{C}$  так, чтобы  $0 < |\Delta z| < \frac{d}{2}$ . Тогда для  $\forall \zeta \in \gamma$  получаем

$$|\zeta - z| \geq d, \quad |\zeta - (z + \Delta z)| \geq |\zeta - z| - |\Delta z| > d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}. \quad (8.7)$$

Оценим выражение

$$\begin{aligned} & \frac{I^{(n-1)}(z + \Delta z) - I^{(n-1)}(z)}{\Delta z} - \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{q(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \\ & = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} q(\zeta) \left[ \left( \frac{1}{(\zeta - z - \Delta z)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n} \right) \frac{1}{\Delta z} - \frac{n}{(\zeta - z)^{n+1}} \right] d\zeta. \end{aligned}$$

Легко показать (например, методом математической индукции), что для любого  $n \in \mathbb{N}$  и фиксированного  $z$  справедливо равенство

$$(\zeta - z)^n - (\zeta - z - \Delta z)^n = \Delta z n(\zeta - z)^{n-1} + (\Delta z)^2 \varphi(\zeta, \Delta z),$$

где  $\varphi(\zeta, \Delta z)$  — многочлен переменных  $\zeta$  и  $\Delta z$ . Поэтому существует число  $C_1 > 0$  такое, что  $|\varphi(\zeta, \Delta z)| \leq C_1$  при всех  $\zeta \in \gamma$  и  $\Delta z$ :  $|\Delta z| < d/2$ . Упростим выражение в прямых скобках под интегралом, дважды применяя последнее равенство:

$$\begin{aligned} [\dots] &= \frac{(\zeta - z)^n - (\zeta - z - \Delta z)^n}{(\zeta - z)^n(\zeta - z - \Delta z)^n} \cdot \frac{1}{\Delta z} - \frac{n}{(\zeta - z)^{n+1}} = \\ &= \frac{n \psi(\zeta, \Delta z) \Delta z}{(\zeta - z)^{n+1}(\zeta - z - \Delta z)^n}, \end{aligned}$$

где  $\psi(\zeta, \Delta z) := n(\zeta - z)^{n-1} + \varphi(\zeta, \Delta z)((1/n)(\zeta - z) + \Delta z)$ , причем очевидно существует число  $C_2 > 0$  такое, что  $|\psi(\zeta, \Delta z)| \leq$

$\leq C_2$  при всех  $|\Delta z| < d/2$  и  $\zeta \in \gamma$ . В итоге получаем оценку

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta I^{(n-1)}}{\Delta z} - \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{q(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \right| &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|q(\zeta)| C_2 |\Delta z| |d\zeta|}{|\zeta - z|^{n+1} |\zeta - z - \Delta z|^n} \leq \\ &\leq |\Delta z| \frac{C_2 n!}{2\pi d^{n+1} (\frac{d}{2})^n} \int_{\gamma} |q(\zeta)| |d\zeta| \leq |\Delta z| \frac{C_2 M n! 2^{n-1}}{\pi d^{2n+1}} \int_{\gamma} |d\zeta| \rightarrow 0, \\ &\text{при } \Delta z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в пределе получаем равенство (8.6).  $\square$

**ТЕОРЕМА 8.3.** Пусть функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна в области  $G \subset \mathbb{C}$ . Тогда эта функция имеет в  $G$  производные всех порядков, т. е. является бесконечно дифференцируемой функцией в области  $G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Зафиксируем произвольную точку  $z_0 \in G$ , тогда существует число  $r_0 > 0$  такое, что  $\overline{B_{r_0}(z_0)} \subset G$ . Пусть окружность  $\gamma_{r_0} := \{z \mid |z - z_0| = r_0\}$  ориентирована положительно относительно внутренности круга (т. е. движением против хода часовой стрелки). Тогда по теореме 8.1 справедлива интегральная формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_0}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall z \in B_{r_0}(z_0). \quad (8.8)$$

Так как в формуле (8.8) функция  $\zeta \rightarrow f(\zeta)$  непрерывна на  $\gamma_{r_0}$ , то интеграл в (8.8) удовлетворяет определению интеграла Коши, и по теореме 8.2 он бесконечно дифференцируем в круге  $B_{r_0}(z_0)$ , т. е. в силу равенства (8.8) функция  $f$  бесконечно дифференцируема в этом круге  $B_{r_0}(z_0)$ , при этом из (8.6) следует формула:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad \forall z \in B_{r_0}(z_0). \quad (8.9)$$

Так как точка  $z_0 \in G$  была произвольной, то функция  $f$  бесконечно дифференцируема во всей области  $G$ .  $\square$

## § 9. Ряд Тейлора. Теоремы Вейерштрасса

Опираясь на интегральную формулу Коши, в этом параграфе покажем, что функция регулярна в окрестности некоторой точки тогда и только тогда, когда в этой окрестности она представима в виде суммы степенного ряда.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1.** Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \quad (9.1)$$

где точка  $a \in \mathbb{C}$  и коэффициенты  $c_n \in \mathbb{C}$  заданы.

**ТЕОРЕМА 9.1 (АБЕЛЬ).** Если степенной ряд (9.1) сходится в точке  $z_0 \neq a$ , то ряд (9.1) сходится абсолютно в любой точке из круга  $B_{|z_0-a|}(a)$ , а в любом замкнутом круге  $\overline{B}_r(a)$ , где  $0 < r < |z_0 - a|$ , этот ряд сходится равномерно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

Так как по условию числовой ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z_0 - a)^n$  сходится, то из критерия Коши следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n(z_0 - a)^n| = 0$ , поэтому существует число  $\alpha > 0$  такое, что  $|c_n(z_0 - a)^n| \leq \alpha$  для всех  $n$ .

1) Пусть точка  $z \in B_{|z_0-a|}(a)$ . Тогда

$$|c_n(z-a)^n| = |c_n(z_0-a)^n| \cdot \left| \frac{z-a}{z_0-a} \right|^n \leq \alpha q_z^n,$$

где  $q_z := \left| \frac{z-a}{z_0-a} \right| < 1$ . Так как числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} q_z^n$  очевидно сходится, то по признаку сравнения ряд (9.1) сходится и абсолютно в точке  $z$ .

2) Определим  $q_0 := \frac{r}{|z_0-a|}$ . Аналогично пункту 1 получаем оценку:  $|c_n(z-a)^n| \leq \alpha q_0^n$  для всех  $z \in \overline{B}_r(a)$ . Так как числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} q_0^n$  очевидно сходится, то по признаку Вейерштрасса (см. утверждение 2.6) ряд (9.1) сходится равномерно на круге  $\overline{B}_r(a)$ .  $\square$

Эта теорема 9.1 позволяет получить представление об области сходимости степенного ряда (9.1).

Определим для степенного ряда (9.1) понятие *радиуса сходимости*:

$$R := \sup \left\{ |z - a| \mid \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n \text{ сходится} \right\}. \quad (9.2)$$

Тогда, если  $0 < R < +\infty$ , то в силу теоремы 9.1 в каждой точке круга  $B_R(a)$  ряд (9.1) сходится, а в каждой точке  $z \notin \overline{B_R(a)}$  ряд (9.1) расходится. Круг  $B_R(a)$  называется *кругом сходимости ряда* (9.1).

Радиус сходимости  $R$  степенного ряда (9.1) может быть вычислен по известной *формуле Коши–Адамара*

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \quad (9.3)$$

Доказательство этой формулы можно найти, например, в книгах [12] или [10].

**ПРИМЕР 9.1.** Рассмотрим ряд вида  $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ , являющийся суммой бесконечной геометрической прогрессии. Этот ряд очевидно сходится при  $|z| < 1$  к функции  $\frac{1}{1-z}$ . В самом деле, преобразовав частичную сумму к виду:

$$S_N(z) := \sum_{n=0}^N z^n = \left( \sum_{n=0}^N z^n \right) \frac{1-z}{1-z} = \frac{1-z^{N+1}}{1-z},$$

убеждаемся, что  $S_N(z) \rightarrow \frac{1}{1-z}$  при  $N \rightarrow \infty$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.2.** Пусть у функции  $f: B_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$  существуют в точке  $a$  производные  $f^{(n)}(a)$  любого порядка  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n \quad (9.4)$$

называется рядом Тейлора функции  $f$  с центром в точке  $a$ .

**ТЕОРЕМА 9.2.** Если функция  $f$  регулярна в круге  $B_r(a)$ , где  $a \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ , то она представима в этом круге  $B_r(a)$  в виде

суммы сходящегося ряда Тейлора, т. е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad \forall z \in B_r(a), \quad (9.5)$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \quad (9.6)$$

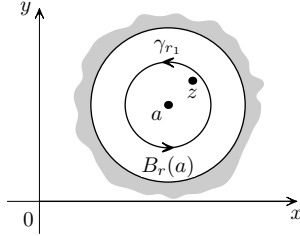


Рис. 9.1

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Зафиксируем произвольную точку  $z \in B_r(a)$ . Тогда существует число  $r_1 > 0$  такое, что  $|z-a| < r_1 < r$ .

Пусть  $\gamma_{r_1} := \{\zeta \mid |\zeta-a| = r_1\}$  — ориентированная движением против хода часовой стрелки окружность (см. рис. 9.1). Запишем интегральную формулу

Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta. \quad (9.7)$$

Преобразуем функцию  $\zeta \rightarrow \frac{1}{\zeta-z}$ , где  $\zeta \in \gamma_{r_1}$ , к виду

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-a) - (z-a)} = \frac{1}{(\zeta-a) \left(1 - \frac{z-a}{\zeta-a}\right)}.$$

Здесь  $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| = \frac{|z-a|}{r_1} := q, q < 1$ . Как и в примере 9.1, получаем разложение в сходящийся ряд

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-a} \left(1 + \frac{z-a}{\zeta-a} + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 + \dots\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}.$$

В итоге, подынтегральная функция в (9.7) представима сходящимся на  $\gamma_{r_1}$  рядом

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} f(\zeta), \quad \forall \zeta \in \gamma_{r_1}. \quad (9.8)$$

Так как для членов ряда (9.8) справедлива оценка

$$\left| \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} f(\zeta) \right| \leq \frac{M}{r_1} \cdot q^n, \quad \text{где } M := \sup_{\zeta \in \gamma_{r_1}} |f(\zeta)| < +\infty,$$

а ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  сходится, то по признаку Вейерштрасса функциональный ряд (9.8) сходится равномерно на окружности  $\gamma_{r_1}$ . Поэтому в силу теоремы 6.3 ряд (9.8) можно почленно интегрировать по окружности  $\gamma_{r_1}$ . В результате из формул (9.7), (9.8) получаем равенство

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \cdot (z - a)^n, \quad (9.9)$$

т. е. степенной ряд вида (9.1) с коэффициентами

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta. \quad (9.10)$$

Эти коэффициенты  $c_n$  не зависят от выбора точки  $z$  или окружности  $\gamma_{r_1}$ , так как, воспользовавшись формулой для производной (8.9), получаем для  $c_n$  формулу (9.6). Таким образом, ряд (9.9) есть ряд Тейлора функции  $f$ . В силу произвольности  $z \in B_r(a)$  ряд (9.9) сходится во всем круге  $B_r(a)$ , а поэтому его радиус сходимости  $R$  удовлетворяет неравенству  $R \geq r$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 9.1.** Пусть функция  $f$  регулярна в области  $G$  и пусть выбрана точка  $a \in G$ . Тогда функция  $f$  представима в виде ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n,$$

который сходится по крайней мере в круге  $B_R(a)$  максимального радиуса  $R > 0$ , при котором этот круг содержится в области  $G$  (см. рис. 9.2).

**ПРИМЕР 9.2.** Пусть  $w = e^z$ . По формуле (4.2) имеем  $w'(z) = \dots = w^{(n)}(z) = e^z$ . Так как функция  $e^z$  регулярна в круге

$B_R(0)$  при любом  $R > 0$ , то, вычисляя непосредственно коэффициенты ряда по формуле (9.6), получаем ряд

$$w = e^z = w(0) + \frac{1}{1!}w'(0)z + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (9.11)$$

При этом в силу следствия 9.1 ряд (9.11) сходится всюду в  $\mathbb{C}$ , т. е.  $R = +\infty$ .

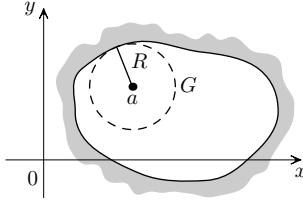


Рис. 9.2

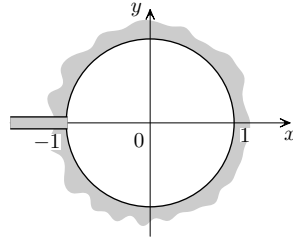


Рис. 9.3

**ПРИМЕР 9.3.** Функция  $w = \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  регулярна в  $\mathbb{C}$  (см. § 4). По теореме 9.1, вычисляя коэффициенты (9.6), получаем формулу

$$\sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k, \quad R = +\infty. \quad (9.12)$$

Аналогично для регулярной в  $\mathbb{C}$  функции  $w = \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$  получаем формулу

$$\cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} (-1)^k, \quad R = +\infty. \quad (9.13)$$

**ПРИМЕР 9.4.** Пусть  $w = h_0(z) := \ln |z| + i \arg_{\text{гл}} z$ , где  $\arg_{\text{гл}} z \in (-\pi, \pi)$ , т. е.  $h_0(z)$  — главная регулярная ветвь многозначной функции  $\text{Ln } z$  в области  $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ .

По теореме 5.2 об обратной функции (см. формулу (5.13)) имеем

$$w' = h'_0(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in G. \quad (9.14)$$

Сделаем замену  $z$  на  $z + 1$ . Получим, что функция  $w = h_0(z + 1)$  регулярна в области  $\tilde{G} = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ , т. е., в частности, функция  $h_0(z + 1)$  регулярна в круге  $B_1(0)$  (см. рис. 9.3).



Из формулы (9.14) получаем выражения для производных

$$(h_0(1+z))' = \frac{1}{1+z}; \quad (h_0(1+z))'' = -\frac{1}{(1+z)^2}; \quad \dots;$$

$$(h_0(1+z))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n}.$$

Вычисляя по формуле (9.6) коэффициенты  $c_n$ , в силу теоремы 9.2 получаем сходящийся в круге  $B_1(0)$  ряд Тейлора для регулярной ветви  $h_0(1+z)$ :

$$h_0(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots; \quad z \in B_1(0). \quad (9.15)$$

Определим в области  $\tilde{G} = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$  функцию  $f(z) = -z + (1+z)h_0(1+z)$ . Из формулы (9.15) получаем для нее сходящийся в круге  $B_1(0)$  ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} z^{n+1}. \quad (9.16)$$

Этот ряд (9.16) интересен тем, что он сходится абсолютно на границе своего круга сходимости, а именно, в каждой точке окружности  $|z|=1$ .

Перейдем к рассмотрению функциональных рядов

$$S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z), \quad z \in G, \quad (9.17)$$

членами которых являются регулярные функции  $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ , заданные в некоторой области  $G$ . Ослабим понятие равномерной сходимости ряда (9.17) на области  $G$  (ср. определение 2.11).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.3.** Говорят, что функциональный ряд (9.17) сходится локально равномерно на области  $G$ , если для каждой точки  $z \in G$  существует круг  $B_r(z)$ ,  $r > 0$ , содержащийся в области  $G$ , на котором ряд (9.17) сходится равномерно.

Отметим, что в силу свойства компактности любого замкнутого ограниченного множества на плоскости  $\mathbb{C}$ , из локально равномерной сходимости ряда (9.17) на области  $G$  следует, что

ряд (9.17) сходится равномерно на любом замкнутом ограниченном подмножестве области  $G$ .

**ТЕОРЕМА 9.3 (ВЕЙЕРШТРАСС).** Пусть функциональный ряд (9.17), составленный из регулярных функций  $f_n: G \rightarrow \mathbb{C}$ , сходится локально равномерно на области  $G$ . Тогда

- 1) сумма  $S(z)$  ряда (9.17) есть тоже регулярная функция на области  $G$  (Первая теорема Вейерштрасса);
- 2) ряд (9.17) можно почленно дифференцировать на  $G$  любое число раз, т. е. для  $\forall k \in \mathbb{N}$  имеет место формула

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(z), \quad z \in G, \quad (9.18)$$

причем каждый ряд (9.18) сходится локально равномерно на области  $G$  (Вторая теорема Вейерштрасса).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Зафиксируем произвольную точку  $z_0 \in G$  и возьмем произвольные  $r > 0$ ,  $r_1 > 0$  такие, что  $\overline{B_{r+r_1}(z_0)} \subset G$ . Пусть

$$\gamma_1 := \{\zeta \mid |\zeta - z_0| = r + r_1\} \quad (9.19)$$

окружность, ориентированная положительно (т.е. против хода часовой стрелки). Обозначим через  $S_N(z)$  частичную сумму ряда (9.17), т. е.

$$S_N(z) := \sum_{n=1}^N f_n(z). \quad (9.20)$$

Так как ряд (9.17) по условию теоремы сходится локально равномерно на области  $G$ , то он сходится равномерно на  $\overline{B_{r+r_1}(z_0)}$ . Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall N \geq N(\varepsilon) : \sup_{\zeta \in \gamma_1} |S_N(\zeta) - S(\zeta)| \leq \varepsilon. \quad (9.21)$$

1. Докажем регулярность суммы  $S(z)$  ряда на круге  $B_r(z_0)$ . Так как для всякого  $N \in \mathbb{N}$  функция  $S_N(z)$  регулярна в  $G$ , то согласно интегральной формуле Коши имеем

$$S_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{S_N(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall z \in B_r(z_0), \quad (9.22)$$

В силу локально равномерной сходимости функционального ряда (9.17) на  $G$  и непрерывности функций  $f_n(z)$  из утверждения 2.5 следует, что и сумма ряда  $S(z)$  также есть непрерывная функция на  $G$ .

Для любой точки  $z \in B_r(z_0)$  и натурального числа  $N \geq N(\varepsilon)$ , где  $N(\varepsilon)$  из (9.21), получаем

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{S_N(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} \frac{|S_N(\zeta) - S(\zeta)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi r_1} \cdot 2\pi(r + r_1) = \varepsilon \cdot \frac{r + r_1}{r_1}. \quad (9.23)$$

В силу произвольности числа  $\varepsilon > 0$  из (9.22) и (9.23) следует, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in B_r(z_0),$$

т. е.

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall z \in B_r(z_0). \quad (9.24)$$

Выражение справа в равенстве (9.24) является интегралом Коши (определение см. в § 8) от непрерывной функции  $S(\zeta)$ . По основному свойству интеграла Коши (теорема 8.2) этот интеграл как функция от параметра  $z$  является бесконечно дифференцируемой функцией, т. е. в силу равенства (9.24) сумма ряда  $S(z)$  есть регулярная функция в окрестности произвольной точки  $z_0$  из  $G$ , откуда следует, что сумма ряда  $S(z)$  регулярна во всей области  $G$ .

2. Опять зафиксируем произвольную точку  $z_0 \in G$  и произвольный круг  $B_r(z_0)$ ,  $r > 0$ , такой, что  $\overline{B_r(z_0)} \subset G$ . Это значит, что найдется число  $r_1 > 0$  такое, что  $\overline{B_{r+r_1}(z_0)} \subset G$ . По формуле (8.9) из теоремы 8.3 для любого  $k \in \mathbb{N}$  и регулярных функций  $S_N(z)$  и  $S(z)$  получаем равенства (где  $\gamma_1$  см. (9.19))

$$S_N^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{S_N(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, \quad z \in \overline{B_r(z_0)}, \quad (9.25)$$

$$S^{(k)}(z) \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{S(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, \quad z \in \overline{B_r(z_0)}. \quad (9.26)$$

Отсюда для всякого  $\varepsilon > 0$ , выбирая  $N(\varepsilon)$  в силу (9.21), при любом  $N \geq N(\varepsilon)$  получаем оценку

$$\begin{aligned} |S_N^{(k)}(z) - S^{(k)}(z)| &= \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{\gamma_1} \frac{S_N(\zeta) - S(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right| \leq \\ &\leq \frac{k!}{2\pi \cdot r_1^{k+1}} \cdot \sup_{\zeta \in \gamma_1} |S_N(\zeta) - S(\zeta)| \cdot 2\pi(r + r_1) < \\ &< \frac{k!(r + r_1)}{r_1^{k+1}} \varepsilon, \quad \forall z \in \overline{B_r(z_0)}. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность частичных сумм  $S_N^{(k)}(z)$  равномерно на  $\overline{B_r(z_0)}$  сходится к функции  $S^{(k)}(z)$ . В силу произвольности выбора  $z_0 \in G$  и круга  $B_r(z_0)$  последнее означает, что последовательность  $S_N^{(k)}(z)$  сходится к  $S^{(k)}(z)$  локально равномерно на области  $G$ .  $\square$

Из теоремы 9.1 Абеля и теоремы 9.3 Вейерштрасса получаем

**СЛЕДСТВИЕ 9.2.** *Сумма степенного ряда (9.1) в круге его сходимости  $B_R(a)$  представляет собой регулярную функцию, причем степенной ряд (9.1) в круге его сходимости можно почленно дифференцировать произвольное число раз.*

**СЛЕДСТВИЕ 9.3.** *Регулярность функции  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  в области  $G$  и возможность представления этой функции  $f$  на всяком круге  $B_r(a) \subset G$  в виде сходящегося степенного ряда (9.1) по степеням  $(z - a)$  эквивалентны.*

## § 10. Некоторые свойства регулярных функций

Продолжим изучение свойств регулярных функций.

**ТЕОРЕМА 10.1 (ЕДИНСТВЕННОСТИ).** Пусть функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна в области  $G \subset \mathbb{C}$ . Пусть существует последовательность различных точек  $\{z_n\} \subset G$ , сходящаяся к некоторой точке  $a \in G$  и такая, что  $f(z_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $f(z) = 0$  при всех  $z$  из области  $G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** 1) Пусть  $\Gamma$  — граница области  $G$  и число  $\rho_0 := \inf\{|a - z| \mid z \in \Gamma\}$  — расстояние от точки  $a$  до границы  $\Gamma$ . Тогда очевидно, что  $0 < \rho_0 \leq +\infty$ . Так как функция  $f$  регулярна на круге  $B_{\rho_0}(a) \subset G$ , то по теореме 9.2 функция  $f$  представима в этом круге в виде сходящегося ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n. \quad (10.1)$$

Покажем, что коэффициенты  $c_n = 0$  при всех  $n = 0, 1, \dots$ . Прежде всего в силу непрерывности  $f$  в точке  $a$  из условия теоремы следует, что  $c_0 = f(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = 0$ . Допустим, что найдется наименьший индекс  $m \geq 1$ , при котором  $c_m \neq 0$ . Тогда ряд (10.1) принимает вид

$$f(z) = (z - a)^m (c_m + c_{m+1}(z - a) + \dots), \quad (10.2)$$

т. е. функцию  $f$  можно представить в виде

$$f(z) = (z - a)^m h(z), \quad (10.3)$$

где функция  $h$  как сумма сходящегося степенного ряда (в силу следствия 9.2) регулярна в круге  $B_{\rho_0}(a)$ , причем  $h(a) = c_m \neq 0$ . В силу этого и в силу непрерывности  $h$  существует число  $r_0 \in (0, \rho_0)$  такое, что  $h(z) \neq 0 \ \forall z \in B_{r_0}(a)$ . Так как  $(z - a)^m \neq 0$  при любом  $z \in \mathring{B}_{r_0}(a)$ , то из равенства (10.3) получаем, что  $f(z) \neq 0$  при всех  $z \in \mathring{B}_{r_0}(a)$ . Но это противоречит условию, согласно которому  $f(z_n) = 0$ , причем  $z_n \in \mathring{B}_{r_0}(a)$  при достаточно больших  $n$ . Следовательно, все коэффициенты  $c_n = 0$  в ряде (10.1), а потому  $f(z) \equiv 0$  на круге  $B_{\rho_0}(a)$ .

2) Докажем, что  $f(b) = 0$  в произвольной точке  $b \in G \setminus B_{\rho_0}(a)$ . Соединим точки  $a$  и  $b$  произвольной кусочно-гладкой кривой  $\gamma \subset G$ .

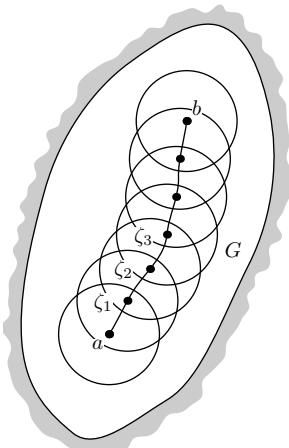


Рис. 10.1

Пусть  $\rho := \inf\{|z - \zeta| \mid z \in \gamma, \zeta \in \Gamma\}$ . Очевидно, что  $\rho > 0$ ,  $\rho \leq \rho_0$ . Рассмотрим конечное множество кругов  $B_0, B_1, \dots, B_K$  одинакового радиуса  $\rho > 0$ , т.е.  $B_k := B_\rho(\zeta_k) \subset G$  таких, что их центры  $\zeta_k$  принадлежат кривой  $\gamma$ ,  $\zeta_0 = a$ ,  $\zeta_K = b$ , и справедлива оценка  $|\zeta_k - \zeta_{k-1}| \leq \rho/2 \ \forall k \in \overline{1, K}$ . По построению очевидно включение  $\zeta_{k+1} \in \overline{B_k \cap B_{k+1}}$  для всех  $k \in \overline{0, K-1}$ .

Так как  $\rho_0 \geq \rho$ , то по доказанному в пункте 1 функция  $f(z) = 0$  на круге  $B_0 = B_\rho(a)$ .

Рассмотрим функцию  $f$  на круге  $B_1$ . Так как  $f(z) = 0$  при всех  $z \in B_0 \cap B_1$ , и так как очевидно существует нестационарная последовательность  $\{z_n^1\} \subset B_0 \cap B_1$  такая, что  $z_n^1 \rightarrow \zeta_1$  при  $n \rightarrow \infty$ , т.е.  $f(z_n^1) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ , то отсюда аналогично пункту 1) следует, что  $f(z) \equiv 0$  в круге  $B_1$ . Продолжая аналогичные рассуждения, из того, что при любом  $k \in \overline{1, K}$ :  $f(z) \equiv 0$  в круге  $B_{k-1}$ , и справедливо включение  $[\zeta_{k-1}, \zeta_k] \subset \overline{B_{k-1} \cap B_k}$ , получаем, что  $f(z) \equiv 0$  в круге  $B_k$ , что в итоге на последнем шаге дает равенство  $f(b) = 0$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 10.1.** Пусть заданы область  $G$  и множество  $E \subset G$ , содержащее последовательность различных точек, сходящуюся к некоторой точке из  $G$ . Пусть функции  $f$  и  $g: G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярны в области  $G$  и  $f(z) = g(z)$  при всех  $z \in E$ . Тогда  $f \equiv g$  в области  $G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Введем функцию  $h(z) := f(z) - g(z)$ , она регулярна в области  $G$  и по условию  $h(z) = 0 \ \forall z \in E$ . Тогда по теореме 10.1 функция  $h(z) \equiv 0$  на  $G$ , что и влечет требуемое равенство.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 10.1.** Утверждение теоремы 10.1 может оказаться несправедливым, если предельная для последовательности  $\{z_n\}$  точка  $a$  не принадлежит области  $G$ . Например, рассмотрим функцию  $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ , определенную на области

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Она регулярна, а при  $z_n = \frac{1}{2\pi n}$  функция  $f(z_n) = 0$ , но очевидно, что  $\sin \frac{1}{z} \neq 0$  в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

ПРИМЕР 10.1. Рассмотрим две функции

$$f(z) = \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{и} \quad g(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n.$$

Еще раз докажем их равенство, опираясь на теорему 10.1.

В самом деле, функции  $f$  и  $g$  регулярны в  $\mathbb{C}$ , причем, как было показано в математическом анализе,  $f(x) = g(x)$  при всех действительных  $x$ . Тогда по теореме единственности  $f \equiv g$  на плоскости  $\mathbb{C}$ .

ПРИМЕР 10.2. Докажем равенство  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$  при всех  $z \in \mathbb{C}$ . Определим функцию  $f(z) := \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ . Она, очевидно, регулярна, и так как  $f(x) \equiv 0$  для любого действительного значения  $x$ , то по теореме 10.1  $f(z) \equiv 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ .

ПРИМЕР 10.3. Докажем формулу

$$\cos(z + \zeta) = \cos z \cos \zeta - \sin z \sin \zeta \quad \forall z, \zeta \in \mathbb{C}.$$

1) Зафиксируем произвольное действительное значение  $\zeta$ . Функция  $f(z) := \cos(z + \zeta) - \cos z \cos \zeta + \sin z \sin \zeta$  такова, что она регулярна в  $\mathbb{C}$ , и  $f(x) = 0$  для любого действительного  $x$ . Следовательно, по теореме единственности  $f(z) \equiv 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ .

2) Зафиксируем далее произвольное комплексное значение  $z$ . Функция  $h(\zeta) := \cos(z + \zeta) - \cos z \cos \zeta + \sin z \sin \zeta$  регулярна в  $\mathbb{C}$  и при каждом действительном значении  $\zeta = y$  в силу доказанного в пункте 1)  $h(y) = 0$ . По теореме единственности получаем, что  $h(\zeta) \equiv 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}$ . Это и доказывает требуемое равенство.

Приведем еще один критерий регулярности функции, являющийся в определенной степени обратным утверждением к лемме 7.1 Гурса.

ТЕОРЕМА 10.2 (МОРЕРА). Пусть функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  непрерывна в области  $G$  и для любой замкнутой треугольной области (треугольника)  $\Delta$ , принадлежащей области  $G$ , удовлетворяет условию

$$\int_{\partial \Delta} f(\zeta) d\zeta = 0, \quad (10.4)$$

где  $\partial\Delta$  — положительно ориентированная граница треугольника  $\Delta$ . Тогда функция  $f$  регулярна в области  $G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Зафиксируем произвольные точку  $a \in G$  и круг  $B_r(a) \subset G$ . Из условия (10.4) для любой замкнутой жордановой ориентированной ломаной  $\gamma \subset B_r(a)$  следует равенство  $\int f(\zeta) d\zeta = 0$ . Отсюда и из теоремы 6.4 следует, что выражение  $\int f(z) dz$  есть полный дифференциал в области  $B_r(a)$ . Это значит, что существует первообразная  $g: B_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$  функции  $f$ , т.е. функция  $g$  регулярна и  $g'(z) = f(z)$  при всех  $z \in B_r(a)$ . В силу теоремы 8.3 регулярная функция  $g$  бесконечно дифференцируема. Поэтому функция  $f$  как производная бесконечно дифференцируемой функции  $g$  также является дифференцируемой (т.е. регулярной) на  $B_r(a)$ . В силу произвольности точки  $a \in G$  функция  $f$  регулярна на всей области  $G$ .  $\square$

**ТЕОРЕМА 10.3 (О СТИРАНИИ РАЗРЕЗА).** Пусть односвязная область  $G$  интервалом  $(A, B) \subset G$  (где точки  $A$  и  $B$  принадлежат границе области  $G$ ) разделена на две односвязные подобласти  $G_1$  и  $G_2$ , т.е.  $G = G_1 \cup G_2 \cup (A, B)$ ,  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ . Пусть для каждого  $k \in \overline{1, 2}$  задана функция  $f_k: G_k \cup (A, B) \rightarrow \mathbb{C}$ , регулярная в области  $G_k$  и непрерывная на множестве  $G_k \cup (A, B)$ . Пусть справедливо равенство  $f_1(z) = f_2(z)$  при всех  $z \in (A, B)$ . Тогда функция  $f$ , равная  $f_1(z)$  при  $z \in G_1 \cup (A, B)$  и равная  $f_2(z)$  при  $z \in G_2$ , регулярна на всей области  $G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как функция  $f$  очевидно непрерывна на области  $G$ , то для доказательства регулярности функции  $f$  воспользуемся теоремой 10.2 Морера, по которой достаточно проверить равенство

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0 \quad (10.5)$$

для любого треугольника  $\Delta \subset G$ .

Выберем произвольный треугольник  $\Delta DEC \subset G$ , границей которого является треугольный контур  $\partial\Delta DEC$ . Если контур  $\partial\Delta DEC$  целиком лежит в одном из множеств  $G_k \cup (A, B)$ , то



равенство (10.5) следует из интегральной теоремы Коши (теорема 7.2) для регулярной в односвязной области  $G_k$  функции  $f_k$ . Пусть  $\Delta DEC \cap G_k \neq \emptyset, \forall k \in \overline{1, 2}$ .

Пусть  $C \in G_1, [D, E] \subset G_2$ , и пусть отрезок  $[P, Q] := \Delta DEC \cap (A, B)$ . Тогда для многоугольников  $\Delta PCQ$  и  $PQED$  (см. рис. 10.2) выполнены условия теоремы 7.2, из которой следует, что

$$\int_{\partial \Delta PCQ} f(z) dz = 0, \quad \int_{\partial (PQED)} f(z) dz = 0.$$

Отсюда, складывая эти интегралы, в сумме получаем равенство (10.5).  $\square$

Отметим еще одно полезное свойство первообразной.

**ЛЕММА 10.1.** *Любые две первообразные регулярной функции  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  в области  $G$  отличаются друг от друга на постоянную.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $g_1$  и  $g_2$  — две первообразные функции  $f$  на области  $G$ . Тогда функция  $h(z) := g_1(z) - g_2(z)$  регулярна и  $h'(z) = f(z) - f(z) \equiv 0 \forall z \in G$ . Выберем произвольную точку  $a \in G$  и пусть число  $r > 0$  такое, что справедливо включение  $B_r(a) \subset G$ . По теореме 9.2 представим функцию  $h$  в круге  $B_r(a)$  в виде степенного ряда Тейлора. Так как  $h'(z) \equiv 0$ , то получаем, что все коэффициенты ряда Тейлора равны нулю, кроме  $c_0$ . Следовательно,  $h(z) = c_0, \forall z \in B_r(a)$ , откуда по теореме 10.1 получаем, что  $h(z) = c_0, \forall z \in G$ .  $\square$

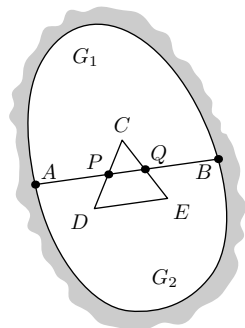


Рис. 10.2

## § 11. Ряд Лорана

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1.** Рядом Лорана с центром в точке  $a \in \mathbb{C}$  называется выражение вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \quad (11.1)$$

понимаемое как сумма двух рядов:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n \quad (11.2)$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n = \sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m}(z-a)^{-m}. \quad (11.3)$$

Ряд (11.2) является обычным степенным рядом и в силу теоремы 9.1 Абеля областью его сходимости является некоторый круг  $B_R(a)$ , где  $R$  — радиус сходимости ряда (11.2). Ряд (11.3)

заменой  $\frac{1}{z-a} = \zeta$  приводится к степенному ряду  $\sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m}\zeta^m$ , и по той же теореме Абеля его область сходимости — тоже некоторый круг  $|\zeta| < \alpha_0$ . Следовательно, ряд (11.3) сходится в области  $|z-a| > \frac{1}{\alpha_0} := \rho \geq 0$ . Если  $\rho > R$ , то суммарный ряд (11.1) не сходится ни в одной точке, если же  $\rho < R$ , то ряд (11.1) сходится в кольце:

$$K_{\rho,R}(a) := \{z \mid \rho < |z-a| < R\}. \quad (11.4)$$

В последнем случае кольцо  $K_{\rho,R}(a)$ , где  $R$  — радиус сходимости ряда (11.2), а  $\frac{1}{\rho}$  — радиус сходимости ряда  $\sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m}\zeta^m$ , называется *кольцом сходимости ряда Лорана* (11.1).

По теореме Абеля и по определению 9.3 ряд (11.2) сходится локально равномерно на круге сходимости  $B_R(a)$ , в частности, равномерно на  $\overline{B_{R_1}(a)}$  при любом  $R_1 \in (0, R)$ , а ряд (11.3) сходится локально равномерно в кольце  $|z-a| > \rho$ , в частности, равномерно на множестве  $|z-a| \geq \rho_1$  при любом  $\rho_1 > \rho$ . Следовательно, ряд Лорана (11.1) сходится локально равномерно в его кольце сходимости  $K_{\rho,R}(a)$  (см. (11.4)), в частности, равномерно в любом кольце вида

$$K_{\rho_1,R_1}(a) = \{z \mid \rho_1 \leq |z-a| \leq R_1\}, \quad \text{где} \quad \rho < \rho_1 < R_1 < R.$$

Так как к тому же каждый член ряда (11.1) в кольце сходимости является регулярной функцией, то по теореме 9.3 Вейерштрасса сумма ряда Лорана в кольце сходимости также является регулярной функцией, причем ряд Лорана в этом кольце можно почленно дифференцировать любое число раз.

Имеет место и обратное утверждение, а именно,

**ТЕОРЕМА 11.1 (ЛОРАН–ВЕЙЕРШТРАСС).** *Всякая функция  $f: K_{\rho,R}(a) \rightarrow \mathbb{C}$ , регулярная в кольце  $K_{\rho,R}(a) = \{z \mid \rho < |z-a| < R\}$ , где  $0 \leq \rho < R \leq +\infty$ , представима в этом кольце суммой сходящегося ряда Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

коэффициенты которого определяются формулой

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (11.5)$$

при любом  $r \in (\rho, R)$ , где  $\gamma_r := \{\zeta \mid |\zeta-a| = r\}$  — окружность с положительной ориентацией, т. е. ее обход производится против хода часовой стрелки.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** 1. Прежде всего покажем, что каждый коэффициент  $c_n$  в формуле (11.5) не зависит от выбора  $r \in (\rho, R)$ . Функция  $\zeta \rightarrow \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$  регулярна в кольце  $K_{\rho,R}(a)$ . Для любых чисел  $r_1, r_2$ :  $\rho < r_1 < r_2 < R$  определим окружности  $\gamma_k$  с центром в точке  $a$  и радиуса  $r_k$ ,  $k \in \overline{1,2}$ , ориентированные положительно. Множество  $\Gamma := \gamma_2 \cup \gamma_1^{-1}$  является положительно ориентированной границей кольца  $K_{r_1,r_2}(a)$  и по обобщенной теореме Коши (теорема 7.3) получаем, что

$$\int_{\gamma_2 \cup \gamma_1^{-1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta = 0,$$

откуда следует равенство

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta = \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta,$$

которое и требовалось для доказательства независимости интеграла (11.5) от выбора значения  $r \in (\rho, R)$  при каждом  $n \in \mathbb{Z}$ .

2. Зафиксируем произвольную точку  $z_0$  в кольце  $K_{\rho, R}(a)$ . Выберем числа  $r_1, r_2$  такие, что  $\rho < r_1 < |z_0 - a| < r_2 < R$ , и окружности  $\gamma_k := \{z \mid |z - a| = r_k\}$  при  $k \in \overline{1, 2}$ , ориентированные положительно. Тогда множество  $\Gamma := \gamma_2 \cup \gamma_1^{-1}$ , является положительно ориентированной границей кольца  $K_{r_1, r_2}(a) := \{z \mid r_1 < |z - a| < r_2\}$ , в котором содержится точка  $z_0$  и по интегральной формуле Коши (теорема 8.1) получаем

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta := I_2 + I_1. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Рассмотрим интеграл  $I_2$  из равенства (11.6). Повторяя рассуждения доказательства теоремы 9.2, для всех  $\zeta \in \gamma_2$  подынтегральную функцию представляем в виде суммы геометрической прогрессии (см. пример 9.1) вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) \left(1 - \frac{z_0 - a}{\zeta - a}\right)} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_0 - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} f(\zeta). \end{aligned} \quad (11.7)$$

Из справедливости оценки

$$\left| f(\zeta) \frac{(z_0 - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} \right| \leq \frac{M}{r_2} \cdot (q_2)^n, \quad \forall \zeta \in \gamma_2,$$

где  $q_2 := \frac{|z_0 - a|}{r_2} < 1$ ,  $M := \sup\{|f(z)| \mid r_1 \leq |z - a| \leq r_2\} < +\infty$ ,

и из того, что ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} (q_2)^n$  сходится, по признаку Вейерштрасса получаем, что ряд (11.7) сходится абсолютно и равномерно на  $\gamma_2$ . По теореме 6.3 ряд (11.7) можно почленно интегриро-

вать по  $\gamma_2$ , т. е. получим, что

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} dz \stackrel{(11.7)}{=}$$

$$\stackrel{(11.7)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \cdot (z_0 - a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z_0 - a)^n, \quad (11.8)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11.9)$$

3. Рассмотрим интеграл  $I_1$  из (11.6). Представим  $-\frac{1}{\zeta - z_0}$  в виде суммы ряда (см. пример 9.1)

$$-\frac{1}{\zeta - z_0} = \frac{1}{(z_0 - a) \left(1 - \frac{\zeta - a}{z_0 - a}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z_0 - a)^{n+1}}. \quad (11.10)$$

По признаку Вейерштрасса ряд (11.10) сходится равномерно по  $\zeta$  на  $\gamma_1$ , так как

$$\left| \frac{\zeta - a}{z_0 - a} \right| = \frac{r_1}{|z_0 - a|} := q_1 < 1, \quad \forall \zeta \in \gamma_1.$$

Так как  $|f(\zeta)| \leq M$  при  $\zeta \in \gamma_1$ , то в выражении

$$-\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)(\zeta - a)^n}{(z_0 - a)^{n+1}}, \quad \zeta \in \gamma_1, \quad (11.11)$$

ряд справа также сходится равномерно на  $\gamma_1$ , и аналогично случаю вычисления  $I_2$  по теореме 6.3 его можно почленно интегрировать по  $\gamma_1$ . После интегрирования из равенства (11.11) получаем

$$I_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta - a)^n d\zeta \right) \frac{1}{(z_0 - a)^{n+1}}. \quad (11.12)$$

Заменив в формуле (11.12) номер  $(n+1)$  на  $(-m)$ , получаем равенство

$$I_1 = \sum_{m=-\infty}^{-1} c_m (z_0 - a)^m, \quad (11.13)$$

где

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{m+1}} d\zeta, \quad m = -1, -2, \dots \quad (11.14)$$

В силу пункта 1) в формулах (11.9), (11.14) контуры  $\gamma_1, \gamma_2$  можно заменить на любую окружность  $\gamma_r = \{z \mid |z - a| = r\}$ , где  $\rho < r < R$ , т.е. верна общая формула коэффициентов (11.5). Так как точка  $z_0$  была выбрана в данном кольце  $K_{\rho,R}(a)$  произвольно, то, складывая ряды (11.8) и (11.13), получаем ряд Лорана с коэффициентами (11.5), сходящийся во всем кольце  $K_{\rho,R}(a)$  к функции  $f$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 11.1.** *Если функция  $f: B_R(a) \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна на  $B_R(a)$ , то ее ряд Лорана с центром в точке  $a$ , полученный в теореме 11.1, совпадает с ее рядом Тейлора с центром в точке  $a$ .*

В самом деле, при отрицательных  $m = -1, -2, \dots$  из регулярности функции  $f$  следует, что функция  $f(\zeta)(\zeta - a)^{-m-1}$  будет также регулярной в круге  $B_R(a)$ , и по теореме Коши интеграл от нее по замкнутому контуру равен нулю, т.е. по формуле (11.5)  $c_m = 0$  при  $\forall m = -1, -2, \dots$ . При  $m \in \mathbb{N}$  для коэффициентов  $c_m$  формулы (11.4) и (9.10) совпадают.

**ТЕОРЕМА 11.2** (О ЕДИНСТВЕННОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД ЛОРАНА). *Представление функции  $f$ , регулярной в кольце  $K_{\rho,R}(a) := \{z \mid \rho < |z - a| < R\}$ , в виде сходящегося ряда Лорана с центром в точке  $a$  единственно.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть регулярная в кольце  $K_{\rho,R}(a)$  функция  $f$  представлена в виде некоторого ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-a)^n, \quad \forall z \in K_{\rho,R}(a). \quad (11.15)$$

Выберем произвольное число  $r \in (\rho, R)$  и окружность  $\gamma_r := \{z \mid |z - a| = r\}$ , которая ориентирована положительно. Как показано в примере 6.1, справедлива формула

$$I_k := \int_{\gamma_r} \frac{dz}{(z-a)^{k+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & k = 0, \\ 0, & k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (11.16)$$

Как было отмечено в начале параграфа, ряд (11.15) сходится локально равномерно на  $K_{\rho,R}(a)$ , т.е. в частности на окружности  $\gamma_r$  он сходится равномерно. Зафиксируем любое число  $k \in \mathbb{Z}$ . Умножив ряд (11.15) на ограниченную по модулю на

окружности  $\gamma_r$  функцию  $\frac{1}{2\pi i(z-a)^{k+1}}$ , получаем равномерно сходящийся на окружности  $\gamma_r$  ряд

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} b_n \frac{(z-a)^n}{(z-a)^{k+1}}. \quad (11.17)$$

Следовательно, по теореме 6.3 его можно почленно интегрировать по окружности  $\gamma_r$ , и, учитывая формулу (11.5), получаем

$$c_k \stackrel{(11.5)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz \stackrel{(11.17)}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} b_n \int_{\gamma_r} \frac{dz}{(z-a)^{k-n+1}} \stackrel{(11.16)}{=} b_k,$$

т.е. ряд (11.15) совпадает с рядом Лорана (11.1), (11.5).  $\square$

Из следствия 11.1 и теоремы 11.2 получаем

**СЛЕДСТВИЕ 11.2.** *Представление регулярной функции  $f: B_R(a) \rightarrow \mathbb{C}$  в виде сходящегося степенного ряда по степеням  $(z-a)$  единственно. Оно совпадает с рядом Тейлора этой функции с центром в точке  $a$ .*

**ПРИМЕР 11.1.** Разложить функцию  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$  в ряд Лорана с центром в точке  $a = 2$  в кольце  $K_{1,2}(2) = \{z \mid 1 < |z-2| < 2\}$ .

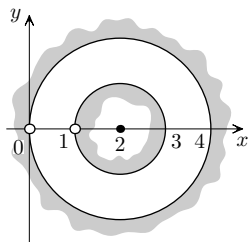


Рис. 11.1

**РЕШЕНИЕ.** Очевидно, что функция  $f$  регулярна в заданном кольце, т.е. требуемое разложение в ряд Лорана по теореме 11.1 существует. Формула (11.5) не совсем удобна для вычисления коэффициентов ряда Лорана. Поэтому поступим иначе. Представим функцию  $f$  в виде элементарных дробей

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}. \quad (11.18)$$

Преобразуем второе слагаемое в (11.18) к виду

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{(z-2)+2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{z-2}{2}\right)}.$$

Так как в заданном кольце выполнено неравенство  $\left| \frac{z-2}{2} \right| < 1$ , то, сделав замену  $\zeta = -\frac{z-2}{2}$  и воспользовавшись примером 9.1, получаем ряд

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{z-2}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{z-2}{2}\right)^n (-1)^n, \quad (11.19)$$

сходящийся в круге  $|z-2| < 2$ . Аналогично преобразуем первое слагаемое в (11.18) и при  $|z-2| > 1$  получим сходящийся ряд

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{(z-2)+1} = \frac{1}{(z-2)} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{z-2}\right)} = \\ &= \frac{1}{z-2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{z-2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(z-2)^n}. \end{aligned} \quad (11.20)$$

В итоге из рядов (11.19) и (11.20) получаем представление функции  $f$  в виде ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(z-2)^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{n+1}(z-2)^n, \quad \forall z \in K_{1,2}(2),$$

который в силу теоремы 11.2 (единственности ряда Лорана) является искомым рядом Лорана данной функции  $f$  в кольце  $K_{1,2}(2)$ .

**СЛЕДСТВИЕ 11.3** (НЕНАВЕНСТВО КОШИ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ЛОРАНА). Пусть функция  $f$  регулярна в кольце  $K_{\rho,R}(a) = \{z \mid \rho < |z-a| < R\}$  и на каждой окружности  $\gamma_r = \{z \mid |z-a| = r\}$ , где  $r \in (\rho, R)$ , справедлива оценка  $|f(z)| \leq A_r \quad \forall z \in \gamma_r$ . Тогда для коэффициентов (11.5) ряда Лорана (11.1) справедлива оценка

$$|c_n| \leq \frac{A_r}{r^n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (11.21)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из формулы (11.5) сразу следует

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{A_r}{2\pi r^{n+1}} \int_{\gamma_r} |d\zeta| = \frac{A_r}{r^n},$$

что и требовалось доказать. □



## § 12. Изолированные особые точки

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1.** Пусть функция  $f$  не регулярна в точке  $a \in \overline{\mathbb{C}}$ , но регулярна в некоторой проколотой окрестности этой точки  $a$  (т. е. на множестве  $\mathring{B}_\rho(a)$ ,  $\rho > 0$ ). Тогда точку  $a$  называют *изолированной особой точкой (однозначного характера) функции  $f$* .

В определении 12.1 точка  $a$  может быть как конечной точкой (тогда  $\mathring{B}_\rho(a) = \{z \mid 0 < |z - a| < \rho\}$ ), так и бесконечной (тогда  $\mathring{B}_\rho(\infty) = \{z \mid |z| > \rho\}$ ).

В зависимости от поведения функции  $f$  около особой точки будем различать три типа особых точек.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.2.** Изолированная особая точка  $a \in \overline{\mathbb{C}}$  функции  $f : \mathring{B}_\rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$  называется

- 1) *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$ ;
- 2) *полосом*, если существует  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ ;
- 3) *существенно особой точкой*, если не существует конечного или бесконечного предела  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ .

В случае, когда особая точка  $a$  конечна, регулярную в кольце  $\mathring{B}_\rho(a)$  функцию  $f$  по теореме 11.1 можно представить в виде суммы сходящегося ряда Лорана с центром в точке  $a$ , т. е.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \quad z \in \mathring{B}_\rho(a). \quad (12.1)$$

Тогда будем различать две части этого ряда Лорана

$$I_{\text{пр}}(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n \quad \text{и} \quad I_{\text{гл}}(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n,$$

которые называют соответственно *правильной и главной частями ряда Лорана* (12.1) с центром в особой точке  $a$ .

В случае, когда особая точка  $a = \infty$ , функцию  $f$  можно представить в виде суммы сходящегося в кольце  $\mathring{B}_\rho(\infty)$  ряда Лорана

на (с центром в точке  $\infty$ )

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad z \in \mathring{B}_\rho(\infty), \quad (12.2)$$

и теперь будем различать части ряда (12.2)

$$I_{\text{пр}}(z) := \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n \quad \text{и} \quad I_{\text{гл}}(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n,$$

которые называются соответственно *правильной* и *главной частями* ряда Лорана (12.2) с центром в  $\infty$ .

**ТЕОРЕМА 12.1.** Пусть точка  $a \in \overline{\mathbb{C}}$  есть изолированная особая точка функции  $f$ . Пусть функция  $f$  представлена своим рядом Лорана с центром в точке  $a$ .

1) Для того, чтобы точка  $a \in \overline{\mathbb{C}}$  была устранимой особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана отсутствовала (т. е.  $I_{\text{гл}}(z) \equiv 0$ ).

2) Чтобы точка  $a \in \overline{\mathbb{C}}$  была полюсом, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана  $I_{\text{гл}}(z)$  содержала конечное число ненулевых слагаемых.

3) Чтобы точка  $a \in \overline{\mathbb{C}}$  была существенно особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана  $I_{\text{гл}}(z)$  содержала бесконечное число ненулевых слагаемых.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** I. Пусть точка  $a \in \mathbb{C}$ , т.е. конечна.

1) *Необходимость.* Пусть  $a$  — устранимая особая точка функции  $f$ , т.е. существует конечный предел  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ . Тогда функция  $f$  ограничена в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ , т.е. существуют числа  $\rho_1 \in (0, \rho)$  и  $A > 0$  такие, что  $|f(z)| < A$  при  $\forall z \in \mathring{B}_{\rho_1}(a)$ .

Воспользуемся неравенством Коши для коэффициентов ряда Лорана функции  $f$  (см. следствие 11.3)

$$|c_n| \leq \frac{A}{r^n}, \quad \forall r \in (0, \rho_1).$$

Для каждого целого  $n < 0$  следует, что  $|c_n| \leq A \cdot r^{|n|} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ , т.е.  $c_n = 0$  для всех  $n < 0$ , т.е.  $I_{\text{гл}}(z) \equiv 0$ .

1) *Достаточность*. Пусть  $I_{\text{гл}}(z) \equiv 0$ , т. е.  $c_n = 0 \quad \forall n < 0$ . Тогда  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n := S(z)$ ,  $\forall z \in \mathring{B}_\rho(a)$ .

Так как по первой теореме Вейерштрасса (теорема 9.3) сумма сходящегося степенного ряда  $S(z)$  есть регулярная функция на круге  $B_\rho(a)$ , причем  $f(z) = S(z)$  при  $z \neq a$ , то существует предел

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} S(z) = S(a) = c_0.$$

2) *Необходимость*. Пусть точка  $a$  — полюс функции  $f$ , т. е. существует предел  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ . В силу этого можно выбрать  $\delta > 0$  такое, что при всех  $z \in \mathring{B}_\delta(a)$  справедливо неравенство  $|f(z)| > 1$ . Определим функцию  $g(z) := \frac{1}{f(z)}$  при  $z \in \mathring{B}_\delta(a)$ .

Очевидно, что функция  $g$  регулярна в проколотой окрестности  $\mathring{B}_\delta(a)$ , причем  $g(z) \neq 0$  и  $|g(z)| < 1$  при всех  $z \in \mathring{B}_\delta(a)$ . Так как точка  $a$  есть полюс функции  $f$ , то существует предел  $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0$ , т. е. получаем, что точка  $a$  есть устранимая особая точка функции  $g$ . Следовательно, доопределяя  $g(a) = 0$ , получаем в силу пункта 1), что функция  $g$  представима в виде сходящегося степенного ряда

$$g(z) = b_m(z-a)^m + b_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots, \quad \forall z \in B_\delta(a). \quad (12.3)$$

Так как функция  $g(z) \neq 0$ , в равенстве (12.3) существует наименьший номер  $m \geq 1$ , при котором  $b_m \neq 0$ . Таким образом, функцию  $g$  можем представить в виде  $g(z) = (z-a)^m h(z)$ , где  $h(z) := b_m + b_{m+1}(z-a) + \dots$ , причем функция  $h$  как сумма сходящегося степенного ряда регулярна в круге  $B_\delta(a)$  и  $h(a) \neq 0$ . Поэтому  $h(z) \neq 0$  при всех  $z$  из некоторой окрестности  $B_{\rho_1}(a)$ , где  $0 < \rho_1 \leq \delta$ . Следовательно, функция  $p(z) := \frac{1}{h(z)}$  тоже регулярна в  $B_{\rho_1}(a)$ , и по теореме 9.2 она также представима в виде суммы сходящегося степенного ряда, т. е.

$$p(z) = d_0 + d_1(z-a) + d_2(z-a)^2 + \dots, \quad z \in B_{\rho_1}(a),$$

причем здесь  $d_0 = \frac{1}{b_m} \neq 0$ . В итоге получаем в  $\mathring{B}_{\rho_1}(a)$

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{p(z)}{(z-a)^m} = \quad (12.4)$$

$$= \frac{d_0}{(z-a)^m} + \frac{d_1}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{d_{m-1}}{(z-a)} + d_m + d_{m+1}(z-a) + \dots \quad (12.5)$$

Таким образом, последняя часть в равенстве (12.4)–(12.5) есть ряд Лорана функции  $f$  с центром в точке  $a$ , причем его главная часть  $I_{\text{гл}}(z)$ , очевидно, содержит конечное число ненулевых слагаемых.

2) *Достаточность.* Пусть справедливо представление функции  $f$  в проколотой окрестности  $\mathring{B}_{\rho_1}(a)$  в виде суммы сходящегося ряда Лорана (12.4)–(12.5), причем  $d_0 \neq 0$ . Тогда, вынося за скобки общий множитель  $\frac{1}{(z-a)^m}$ , получаем

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} (d_0 + d_1(z-a) + \dots) := \frac{p(z)}{(z-a)^m}. \quad (12.6)$$

В формуле (12.6) функция  $p$  как сумма сходящегося степенного ряда регулярна в круге  $B_{\rho_1}(a)$  и  $\lim_{z \rightarrow a} p(z) = p(a) = d_0 \neq 0$ . С другой стороны  $\frac{1}{(z-a)^m} \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow a$ . Отсюда получаем, что  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ .

3) *Эквивалентность* последних условий покажем методом исключения. Предел может существовать в  $\overline{\mathbb{C}}$  или не существовать. У главной части  $I_{\text{гл}}(z)$  ряда может быть конечное число ненулевых слагаемых или бесконечное. Эквивалентность существования предела в  $\overline{\mathbb{C}}$  и конечности числа ненулевых слагаемых в  $I_{\text{гл}}(z)$  уже доказаны в пп. 1) и 2). Следовательно, отсутствие предела функции  $f$  эквивалентно бесконечному числу ненулевых слагаемых в  $I_{\text{гл}}(z)$ .

II. Пусть функция  $f$  имеет особую точку  $a = \infty$ . Заменой аргумента  $\zeta = \frac{1}{z}$  приходим к функции  $\tilde{f}(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ , у которой особой точкой является точка  $\zeta = 0$ , причем существование предела функции  $\tilde{f}(\zeta)$  в точке  $\zeta = 0$  эквивалентно существованию предела функции  $f(z)$  в  $\infty$ , т. е. тип особой точки

$a = \infty$  у функции  $f(z)$  и тип особой точки  $\zeta = 0$  у функции  $\tilde{f}(\zeta)$  одинаков. В свою очередь, главная часть ряда Лорана функции  $f(z)$  с центром в точке  $\infty$  при замене аргумента переходит в главную часть ряда Лорана функции  $\tilde{f}(\zeta)$  с центром в точке  $\zeta = 0$ . Так как необходимое соответствие в конечной точке  $\zeta = 0$  уже установлено в пункте I, то это влечет требуемое соответствие при  $a = \infty$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 12.1.** Точка  $a \in \mathbb{C}$  является полюсом функции  $f$  тогда и только тогда, когда существуют окрестность  $\mathring{B}_\rho(a)$ , натуральное число  $m \geq 1$  и регулярная в круге  $B_\rho(a)$  функция  $p$  такие, что  $p(a) \neq 0$  и справедливо равенство

$$f(z) = \frac{p(z)}{(z-a)^m}, \quad z \in \mathring{B}_\rho(a). \quad (12.7)$$

В свою очередь, точка  $a = \infty$  является полюсом функции  $f$  тогда и только тогда, когда существуют окрестность  $\mathring{B}_\rho(\infty)$ , число  $m \geq 1$ , регулярная в  $\mathring{B}_\rho(\infty)$  функция  $h$ , у которой существует конечный предел  $h(\infty) \neq 0$ , такие, что справедливо равенство

$$f(z) = z^m h(z), \quad z \in \mathring{B}_\rho(\infty). \quad (12.8)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Очевидно следует из формул (12.4) и (12.6) доказательства теоремы 12.1.  $\square$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.3.** Пусть  $a \in \overline{\mathbb{C}}$  — полюс функции  $f$ . Тогда число  $m$  в формулах (12.7) или (12.8) соответственно называется *порядком полюса  $a$  функции  $f$* .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.4.** Пусть  $a \in \mathbb{C}$ ,  $\rho > 0$ ,  $m \geq 1$ , пусть функция  $g: B_\rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна и

$$g(a) = g'(a) = \dots = g^{(m-1)}(a) = 0, \quad g^{(m)}(a) \neq 0.$$

Тогда говорят, что функция  $g$  имеет в точке  $a$  *нуль  $m$ -го порядка (или  $m$ -й кратности)*. Если же  $g(a) \neq 0$ , то говорят, что точка  $a$  не является нулем функции  $g$  (или для следствия 12.2: функция  $g$  имеет в точке  $a$  нуль нулевого порядка).

**СЛЕДСТВИЕ 12.2.** Пусть функции  $g, h: B_\rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$  регулярны, причем функция  $h$  имеет в точке  $a$  нуль  $k$ -го порядка ( $k \geq 0$ ), а функция  $g$  имеет в точке  $a$  нуль  $m$ -го порядка ( $m \geq 1$ ). Тогда, если  $m > k$ , то функция  $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$  имеет в точке  $a$  полюс  $(m - k)$ -го порядка, а если  $m \leq k$ , то функция  $f$  имеет в точке  $a$  устранимую особую точку.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу определения 12.4 имеем для функций  $h$  и  $g$  представление

$$h(z) = (z - a)^k h_1(z), \quad g(z) = (z - a)^m g_1(z),$$

где функции  $h_1, g_1: B_\rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$  регулярны и  $h_1(a) \neq 0, g_1(a) \neq 0$ . Определим функцию  $p(z) := \frac{h_1(z)}{g_1(z)}$ . Эта функция регулярна в некоторой окрестности точки  $a$  и  $p(a) \neq 0$ . В итоге для функции  $f$  получаем формулу (12.7) и из следствия 12.1 следует утверждение следствия 12.2.  $\square$

**ПРИМЕР 12.1.** Рассмотрим функцию  $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$  при  $z \neq 0$ . Точка  $z = 0$  есть устранимая особая точка функции  $f$ , так как справедливо представление функции  $f$  в виде ряда с центром в точке 0:

$$f(z) = \frac{(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots) - 1}{z} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots, \quad (12.9)$$

при всех  $0 < |z| < +\infty$ .

Точка  $z = \infty$  — существенно особая точка функции  $f$ , так как ряд (12.9) в свою очередь является рядом Лорана функции  $f$  с центром в  $\infty$ , и его главная часть содержит бесконечное число ненулевых слагаемых.

**ПРИМЕР 12.2.** Рассмотрим функцию  $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$  при  $|z| > 0$ . Для нее справедливо разложение в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \dots, \quad \forall z \neq 0,$$

т.е.  $0$  — полюс первого порядка, а  $\infty$  — существенно особая точка функции  $f$ .

ПРИМЕР 12.3. Рассмотрим функцию  $f(z) = e^{1/z}$  при  $|z| > 0$ . Очевидно, справедливо разложение в ряд Лорана

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots, \quad |z| > 0,$$

откуда из теоремы 12.1 следует, что точка 0 есть существенно особая точка, а точка  $\infty$  — устранимая особая точка функции  $f$ . То, что точка 0 является существенно особой точкой, можно было доказать иначе, по определению 12.2, показав наличие различных пределов функции  $f$  в нуле справа и слева по действительной оси.

ПРИМЕР 12.4. Пусть для регулярной функции  $f: \mathring{B}_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  установлена оценка

$$|f(z)| \leq \frac{A}{\sqrt{|z|}}, \quad \text{где } A = \text{const} > 0, \quad z \in \mathring{B}_1(0). \quad (12.10)$$

Какую особенность имеет функция  $f$  в точке 0?

РЕШЕНИЕ. *Первый способ решения.* При  $|z| \leq 1$  получаем, что  $\sqrt{|z|} \leq 1$  и  $|z| \leq \sqrt{|z|}$ , поэтому

$$|zf(z)| \leq \sqrt{|z|} \cdot |f(z)| \leq A, \quad z \in \mathring{B}_1(0),$$

т. е. у функции  $zf(z)$  точка  $z = 0$  есть устранимая особая точка. Поэтому в проколотой окрестности нуля  $\mathring{B}_1(0)$  справедливо ее представление в виде ряда

$$zf(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \quad \text{откуда} \quad f(z) = \frac{c_0}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1} z^n.$$

В случае, когда  $c_0 = 0$ , точка  $z = 0$  является устранимой особой точкой функции  $f$ .

Допустим, что  $c_0 \neq 0$ .

Тогда получаем выражение  $f(z) = \frac{h(z)}{z}$ , где функция  $h$  регулярна и  $h(0) \neq 0$ . Поэтому найдутся числа  $\alpha > 0$  и  $\beta \leq 1$  такие, что  $|h(z)| \geq \alpha$  при  $z \in B_\beta(0)$ . Отсюда  $|f(z)| \geq \frac{\alpha}{|z|}$  при  $0 < |z| < \beta$ . В силу условия (12.10) получаем, что  $\frac{\alpha}{|z|} \leq \frac{A}{\sqrt{|z|}}$  при всех  $z: 0 < |z| < \beta$ , т. е.  $\sqrt{|z|} \geq \frac{\alpha}{A} > 0$  при всех  $z: 0 < |z| < \beta$ , что

неверно. В итоге установлено, что функция  $f$  имеет в точке 0 устранимую особую точку.

*Второй способ решения.* Условия задачи (12.10) можно переписать в виде

$$A_r := \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{A}{r^{1/2}}, \quad \forall r \in (0, 1). \quad (12.11)$$

Рассмотрим ряд Лорана функции  $f$  с центром в точке 0. По неравенству Коши для коэффициентов этого ряда и из неравенства (12.11) получаем оценку

$$|c_n| \leq \frac{A_r}{r^n} \leq \frac{A}{r^{n+1/2}}.$$

Отсюда для каждого целого  $n < 0$  получаем, что  $|c_n| \leq A \times r^{|n| - \frac{1}{2}} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ , т. е.  $c_n = 0$  для всех  $n < 0$ , т. е.  $I_{\text{гл}}(z) \equiv 0$ . В итоге мы еще раз показали, что функция  $f$  имеет в точке 0 устранимую особую точку.

**ПРИМЕР 12.5.** Для какой регулярной функции  $f: \mathring{B}_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  можно указать функцию  $g: \mathring{B}_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g(z) \neq 0$ , такую, что

$$\lim_{z \rightarrow 0} (f(z)g(z)) = 0? \quad (12.12)$$

При этом рассмотреть две возможности:

- а) функция  $g$  регулярна в круге  $B_1(0)$ ;
- б) функция  $g$  регулярна в проколотой окрестности  $\mathring{B}_1(0)$ .

**РЕШЕНИЕ.** Отбросим тривиальный случай, когда  $f \equiv 0$ . Для случаев а) и б) приведем различные решения.

Случай а). Имеем три возможности для особой точки  $z = 0$  функции  $f$ .

1) Функция  $f$  имеет в точке 0 устранимую особую точку. Тогда очевидно, что функция вида  $g(z) = z$  удовлетворяет условию (12.12) задачи, т. е. ответ положительный.

2) Функция  $f$  имеет в точке 0 полюс  $m$ -го порядка. Тогда в силу следствия 12.1 справедливо представление функции  $f$  в виде  $f(z) = \frac{p(z)}{z^m}$ , где функция  $p$  регулярна в круге  $B_1(0)$  и  $p(0) \neq 0$ . Возьмем функцию вида  $g(z) = z^{m+1}$  и получим, что



$f(z)g(z) = zp(z)$ , т. е. для нее выполнено условие (12.12) и ответ положительный.

3) Допустим, что функция  $f$  имеет в точке 0 существенно особую точку. Тогда для всякой регулярной в круге  $B_1(0)$  функции  $g$  возможны два случая:

3.1)  $g(0) \neq 0$ . Тогда, так как функция  $f$  не имеет предела в нуле, то и функция  $fg$ , очевидно, не имеет предела в нуле, что противоречит условию (12.12).

3.2)  $g(0) = 0$ . Тогда имеет представление  $g(z) = z^k h(z)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , а функция  $h$  регулярна в круге  $B_1(0)$  и  $h(0) \neq 0$ . Но тогда функция  $p(z) := z^k f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^{n+k}$  также в главной части ряда Лорана имеет бесконечное число слагаемых, т. е. точка  $z = 0$  тоже является существенно особой точкой функции  $p$ . Следовательно, как и в случае 3.1), функция  $ph$  не имеет предела в 0, причем  $ph = fg$ , т. е. не выполнено условие (12.12).

Таким образом, в случае а) мы получили ответ, что условие (12.12) выполняется не для всякой функции  $f$ , а лишь для функции, у которой точка 0 является устранимой особой точкой или полюсом.

Случай б). По условию функция  $fg$  регулярна в окрестности  $\mathring{B}_1(0)$ , причем согласно (12.12) точка нуль для нее является устранимой особой точкой, более того, нулем функции  $fg$ . Поэтому существует число  $k \geq 1$  (порядок нуля) и регулярная функция  $h : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  такая, что  $h(0) \neq 0$ , для которых справедливо равенство

$$f(z)g(z) = z^k h(z), \quad \forall z \in \mathring{B}_1(0). \quad (12.13)$$

Из того, что  $h(0) \neq 0$ , следует, что существует число  $r > 0$  такое, что  $h(z) \neq 0, \forall z \in B_r(0)$ . Отсюда из выражения (12.13) получаем необходимое условие разрешимости задачи б):

$$\exists r \in (0, 1) \quad \text{такое, что} \quad f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathring{B}_r(0). \quad (12.14)$$

В случае, когда точка 0 является устранимой особой точкой функции  $f$ , условие (12.14), очевидно, выполнено. (Если бы существовала последовательность  $\{z_n\} \rightarrow 0$ , для которой  $f(z_n) =$

$= 0$ , то по теореме единственности получили бы, что  $f \equiv 0$ ). В этом случае достаточно выбрать  $g(z) = z$ .

В случае, когда точка  $0$  является полюсом  $m$ -го порядка функции  $f$ , условие (12.14) выполнено в силу следствия 12.1, и достаточно выбрать  $g(z) = z^{m+1}$ .

В случае, когда точка  $0$  является существенно особой точкой функции  $f$ , условие (12.14) может как выполняться, так и нарушаться. Покажем это.

Например, для функции  $f_1(z) = e^{1/z}$  условие (12.14) выполнено. В качестве функции  $g$  можно взять  $g(z) = ze^{-1/z}$ .

Для функции  $f_2(z) = \sin \frac{1}{z}$  условие (12.14) не выполнено (так как  $f_2(z_n) = 0$  при всех  $z_n = \frac{1}{\pi n}$ ), т. е. для такой функции не существует регулярной в  $\mathring{B}_1(0)$  функции  $g$ , для которой выполнено условие (12.12).

**ЗАМЕЧАНИЕ 12.1.** Заметим, что кроме функций с изолированными особыми точками существуют регулярные функции с неизоллированными особыми точками. Так, например, функция  $\frac{1}{\cos(\pi/z) - 1}$  имеет полюсы в точках  $z_n = \frac{1}{(2n)}$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Следовательно, точка  $z = 0$  является для нее неизоллированной особой точкой, а именно, это предельная точка последовательности полюсов  $\{z_n\}$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 12.1.** Пусть точка  $a$  есть полюс функции  $f$ . Какую особенность в точке  $a$  имеют функции  $f^2(z)$  и  $e^{f(z)}$ ?

**УПРАЖНЕНИЕ 12.2.** Пусть точка  $a$  является полюсом функции  $f$  и существенно особой точкой функции  $g$ . Какую особенность в точке  $a$  имеет функция  $fg$ ?

**УПРАЖНЕНИЕ 12.3.** Пусть точка  $a$  есть существенно особая точка функции  $f$ . Что можно сказать о поведении функции  $\frac{1}{f(z)}$  в окрестности точки  $a$ ?

## § 13. Теория вычетов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.1. Пусть  $a \in \mathbb{C}$  — изолированная особая точка регулярной функции  $f: \mathring{B}_\rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\rho > 0$ . Пусть  $\gamma_r := \{z \mid |z - a| = r\}$  — положительно ориентированная окружность, причем  $0 < r < \rho$ . Тогда *вычетом функции  $f$  в точке  $a$*  называется число

$$\operatorname{res}_a f := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z) dz. \quad (13.1)$$

Отметим, что в формуле (13.1) интеграл не зависит от величины  $r \in (0, \rho)$ .

Для получения более удобных выражений вычисления вычета функции, представим функцию  $f: \mathring{B}_\rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$  ее рядом Лорана с центром в точке  $a$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n. \quad (13.2)$$

Тогда по формуле (11.5) для коэффициентов  $c_n$  получаем, что интеграл (13.1) равен коэффициенту  $c_{-1}$ , т. е.

$$\operatorname{res}_a f = c_{-1}. \quad (13.3)$$

Приведем некоторые правила вычисления вычетов.

ЛЕММА 13.1. Пусть  $a$  — полюс функции  $f$  порядка  $m$ . Тогда для любого  $m_0 \geq m$  справедлива формула

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(m_0 - 1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m_0-1}}{dz^{m_0-1}} [(z - a)^{m_0} f(z)]. \quad (13.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим функцию  $f$  в виде ряда Лорана (13.2) с центром в полюсе  $a$  порядка  $m$ . Так как число  $m_0 \geq m$ , то в ряде (13.2) коэффициенты  $c_n = 0$  при всех  $n < -m_0$ . Итак,

$$\begin{aligned} f(z) = & \frac{c_{-m_0}}{(z - a)^{m_0}} + \frac{c_{-m_0+1}}{(z - a)^{m_0-1}} + \\ & + \dots + \frac{c_{-1}}{(z - a)} + c_0 + c_1(z - a) + \dots \end{aligned} \quad (13.5)$$

Умножая ряд (13.5) на  $(z - a)^{m_0}$ , получаем

$$(z - a)^{m_0} f(z) = c_{-m_0} + c_{-m_0+1}(z - a) + \dots + \\ + c_{-1}(z - a)^{m_0-1} + \dots, \quad z \in \mathring{B}_\rho(a). \quad (13.6)$$

Так как полученный в правой части равенства (13.6) степенной ряд сходится в  $B_\rho(a)$ , то по теореме 9.1 Абеля он сходится абсолютно и локально равномерно в области  $B_\rho(a)$ . Поэтому и по теореме 9.3 Вейерштрасса его можно почленно дифференцировать  $(m_0 - 1)$  раз, после чего получаем

$$\frac{d^{m_0-1}}{dz^{m_0-1}} [(z - a)^{m_0} f(z)] = \\ = (m_0 - 1)! c_{-1} + m_0! c_0 (z - a) + \dots, \quad z \in \mathring{B}_\rho(a). \quad (13.7)$$

Левая часть равенства (13.7), очевидно, имеет предел при  $z \rightarrow a$ . Поэтому, переходя к пределу, в силу формулы (13.3) получаем формулу (13.4).  $\square$

ЛЕММА 13.2. Пусть функция  $f: \mathring{B}_\rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$  представима в виде

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad z \in \mathring{B}_\rho(a),$$

где функции  $P$  и  $Q$  регулярны в круге  $B_\rho(a)$ , причем

$$P(a) \neq 0, \quad Q(a) = 0, \quad Q'(a) \neq 0. \quad (13.8)$$

Тогда справедлива формула

$$\operatorname{res}_a f = \frac{P(a)}{Q'(a)}. \quad (13.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, в силу условия (13.8) точка  $a$  — полюс 1-го порядка функции  $f$  и по формуле (13.4) (при  $m_0 = 1$ ) получаем

$$\operatorname{res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} \left[ \frac{P(z)(z - a)}{Q(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow a} \frac{P(z)}{\frac{Q(z) - Q(a)}{z - a}} = \frac{P(a)}{Q'(a)}. \quad \square$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.2. Пусть функция  $f: \mathring{B}_{R_0}(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна (число  $R_0 \geq 0$ ). Тогда вычетом функции  $f$  в бесконечности называется число

$$\operatorname{res}_\infty f := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^{-1}} f(z) dz, \quad (13.10)$$

где число  $R > R_0$ , а окружность  $\gamma_R^{-1} = \{z \mid |z| = R\}$  ориентирована движением по ходу часовой стрелки (т.е. отрицательно) (см. рис. 13.1).

Аналогично случаю конечной точки оценим  $\operatorname{res} f$  через ряд Лорана для функции  $f$  в окрестности  $\mathring{B}_{R_0}(\infty)$ , учитывая, что его коэффициенты имеют вид

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (13.11)$$

где окружность  $\gamma_R$  при  $R > R_0$  ориентирована движением против хода часовой стрелки. Сравнивая выражения (13.11) и (13.10), убеждаемся в справедливости формулы

$$\operatorname{res}_{\infty} f = -c_{-1}, \quad (13.12)$$

где  $c_{-1}$  — коэффициент разложения функции  $f$  в ряд Лорана с центром в бесконечности. Здесь появился знак минус за счет различной ориентации окружности  $\gamma_R$  в формулах (13.11) и (13.10).

**ЛЕММА 13.3.** Пусть  $\infty$  — устранимая особая точка функции  $f$ . Тогда  $\operatorname{res}_{\infty} f$  можно вычислить по формуле

$$\operatorname{res}_{\infty} f = \lim_{z \rightarrow \infty} [z(f(\infty) - f(z))]. \quad (13.13)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из условия леммы следует, что ряд Лорана в некоторой окрестности  $\mathring{B}_{R_0}(\infty)$  имеет вид

$$f(z) = f(\infty) + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots,$$

т.е.

$$z(f(\infty) - f(z)) = -c_{-1} - \frac{c_{-2}}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right),$$

что в пределе при  $z \rightarrow \infty$  дает формулу (13.13).  $\square$

**ТЕОРЕМА 13.1 (КОШИ О ВЫЧЕТАХ).** Пусть задана область  $G \subset \mathbb{C}$  с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей  $\Gamma$  (см. определения 7.1, 7.2), пусть  $\bar{G} := G \cup \Gamma$ . Пусть

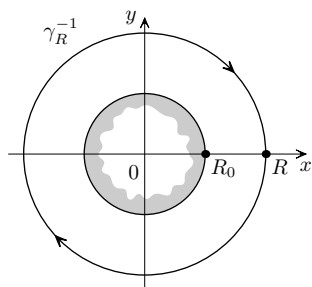


Рис. 13.1

функция  $f$  определена и регулярна на  $G$  всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек  $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$  (при этом имеется в виду, что все  $a_k$  различны и если  $\infty \in G$ , то  $\infty = a_n$ ) и пусть к тому же функция  $f$  определена и непрерывна на  $\overline{G} \setminus (\bigcup_{k=1}^n a_k)$ . Тогда справедлива формула

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} f. \quad (13.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Пусть область  $G$  ограничена. Так как число особых точек  $a_1, \dots, a_n \in G$  конечно, то существует число  $r > 0$  такое, что  $\overline{B_r(a_k)} \subset G \ \forall k \in \overline{1, n}$ , причем эти круги попарно не пересекаются. Определим множество  $\tilde{G} := G \setminus \left( \bigcup_{k=1}^n \overline{B_r(a_k)} \right)$ .

Множество  $\tilde{G}$  тоже является областью с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей  $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \left( \bigcup_{k=1}^n \gamma_k^{-1} \right)$ , где  $\gamma_k$  суть окружности  $\{z \mid |z - a_k| = r\}$ , ориентированные движением против хода часовой стрелки, а  $\gamma_k^{-1}$  — они же, но ориентированные по ходу часовой стрелки (см. рис. 13.2). По условиям теоремы функция  $f$  регулярна на  $\tilde{G}$  и непрерывна на ее замыкании  $\tilde{\tilde{G}} := \tilde{G} \cup \tilde{\Gamma}$ . Тогда из теоремы 7.3 и свойств интегралов получаем

$$0 = \int_{\tilde{\Gamma}} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz \stackrel{(13.1)}{=} \int_{\Gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^n 2\pi i \operatorname{res}_{a_k} f,$$

откуда и следует формула (13.14).

2. Пусть  $\infty \in G$ . Тогда особые точки  $a_1, \dots, a_{n-1} \in G$  — конечны, а  $a_n = \infty$ . Так как по определению 7.1 граница  $\Gamma$  состоит из ограниченных гладких компонент, то существует число  $R > 0$  такое, что для каждого  $z \in \Gamma \cup \left( \bigcup_{k=1}^{n-1} a_k \right)$  справедливо неравенство  $|z| < R$ .

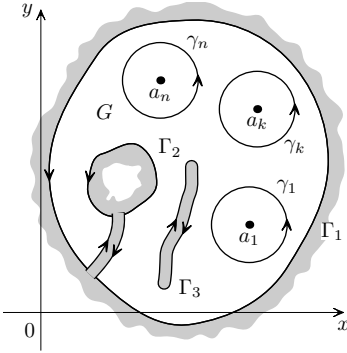


Рис. 13.2

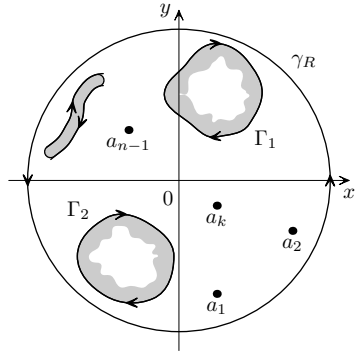


Рис. 13.3

Определим  $\tilde{G} = G \cap B_R(0)$ . Тогда  $\tilde{G}$  — ограниченная область с кусочно-гладкой границей  $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \gamma_R$ , где  $\gamma_R = \{z \mid |z| = R\}$  — окружность, ориентированная движением против хода часовой стрелки (см. рис. 13.3). Для регулярной в  $\mathbb{C} \setminus B_R(0)$  функции  $f$  по определению 13.2 справедлива формула

$$\operatorname{res}_{\infty} f = -\frac{1}{2\pi i} \int f(z) dz. \quad (13.15)$$

Так как область  $\tilde{G}$  ограничена, то, опираясь на результат пункта 1), получаем

$$\int_{\tilde{\Gamma}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{res}_{a_k} f. \quad (13.16)$$

С другой стороны,

$$\int_{\tilde{\Gamma}} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz \stackrel{(13.15)}{=} \int_{\Gamma} f(z) dz - 2\pi i \operatorname{res}_{\infty} f,$$

откуда и из (13.16) следует (13.14).  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 13.1.** Пусть функция  $f$  регулярна во всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} f = 0. \quad (13.17)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как  $\infty$ , очевидно, является особой точкой данной функции  $f$ , то без ограничения общности пола-

гаем, что  $a_n = \infty$ . Рассмотрим  $R > 0$  такое, что все  $a_k \in B_R(0) \forall k \in \overline{1, n-1}$ . Как обычно, обозначим через  $\gamma_R := \{z \mid |z| = R\}$  окружность, ориентированную движением против хода часовой стрелки. Тогда по теореме 13.1 для области  $B_R(0)$  получаем

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{res}_{a_k} f. \quad (13.18)$$

С другой стороны, по определению 13.2,

$$-\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{\infty} f,$$

что вместе с (13.18) дает равенство (13.17).  $\square$

Применим теорию вычетов для вычисления различных интегралов.

**ПРИМЕР 13.1.** Вычислим интеграл  $J = \int_{\gamma} \frac{z dz}{(z-1)(z-2)}$ . Здесь контур интегрирования  $\gamma$  есть окружность  $\gamma = \{z \mid |z| = 3\}$ , а функция  $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$ . Особыми точками этой функции  $f$  внутри контура  $\gamma$  являются точки 1 и 2, это полюсы 1-го порядка. Применяя теорему 13.1 и формулу (13.9), получаем

$$J = 2\pi i \left( \operatorname{res}_1 f + \operatorname{res}_2 f \right) = 2\pi i \left( \left. \frac{\frac{z-2}{z-1}}{1} \right|_{z=1} + \left. \frac{\frac{z-1}{z-2}}{1} \right|_{z=2} \right) = 2\pi i.$$

**ПРИМЕР 13.2.** Вычислим интеграл

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx.$$

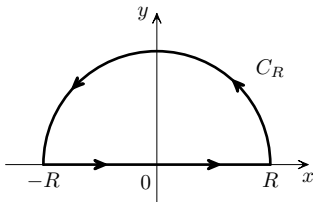


Рис. 13.4

Чтобы применить теорему о вычетах выбираем число  $R > 1$ , для которого определим ориентированную движением против хода часовой стрелки замкнутую кривую  $\gamma_R := [-R, R] \cup C_R$ , где  $[-R, R]$  — отрезок, а  $C_R := \{z \mid |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$  — полуокружность в верхней полуплоскости (см. рис. 13.4). Определим функцию  $f(z) := \frac{1+z^2}{1+z^4}$  и вначале вычислим интеграл  $J_R := \int_{\gamma_R} f(z) dz$ .



Функция  $f$  имеет полюсы 1-го порядка (нули знаменателя) в точках  $z_k = e^{i(\pi/4 + \pi k/2)}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , причем только точки  $z_0$  и  $z_1$  лежат внутри кривой  $\gamma_R$ .

По теореме 13.1 о вычетах и формуле (13.9) получаем

$$\begin{aligned} J_R &= 2\pi i \left( \operatorname{res}_{z_0} f + \operatorname{res}_{z_1} f \right) = 2\pi i \left[ \frac{1 + e^{i\frac{2\pi}{4}}}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1 + e^{2i\frac{3\pi}{4}}}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}} \right] = \\ &= 2\pi i \left[ \frac{1}{2i} \cdot \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} + \frac{1}{-2i} \cdot \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2} \right] = \\ &= \pi \left( \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} \right) = \pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$J_R = \int_{-R}^{+R} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz := I_R^1 + I_R^2.$$

Очевидно, что интеграл  $I_R^1 \rightarrow J$  при  $R \rightarrow +\infty$ . Позже (см. лемму 13.4) мы докажем, что интеграл  $I_R^2 \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow +\infty$ , откуда в итоге получим, что  $J = \pi\sqrt{2}$ .

Обобщая пример 13.2, изучим правила вычисления интегралов различных типов с помощью теории вычетов.

### 13.1. Вычисление интегралов вида

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{n,m}(x) dx. \quad (13.19)$$

Здесь  $F_{n,m}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  — рациональная функция, где

$$\begin{cases} P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0, \\ Q_m(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0, \end{cases} \quad (13.20)$$

причем полагаем, что  $Q_m(x) \neq 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}^1$ .

Из математического анализа известно, что интеграл  $J$  (13.19) сходится при условии  $m > n + 1$ . С помощью теории вычетов независимо и очень просто покажем, что это условие достаточно для сходимости интеграла (13.19) в смысле главного значения.

Пусть  $\{z_k^+\}_{k=1}^l$  — совокупность всех различных нулей много-

члена  $Q_m(z)$ , лежащих в верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z \geq 0$ . Как и в примере 13.2, для всякого числа  $R > R_0 := \max \{|z_k^+| \mid k \in \overline{1, l}\}$  определим кривую  $\gamma_R := [-R, R] \cup C_R$ , ориентированный движением против хода часовой стрелки, где  $[-R, R]$  — отрезок, а  $C_R := \{z \mid |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$  — полуокружность. Определим интеграл

$$J_R := \int_{\gamma_R} F_{n,m}(z) dz.$$

По теореме 13.1 о вычетах, при каждом  $R > R_0$  получаем

$$J_R = 2\pi i \left( \sum_{k=1}^l \operatorname{res}_{z_k^+} F_{n,m} \right),$$

т.е.  $J_R = \text{const}$  не зависит от  $R > R_0$ . С другой стороны, имеет место представление интеграла  $J_R$  в виде суммы  $J_R = J_R^1 + J_R^2$ , где

$$J_R^1 := \int_{-R}^{+R} F_{n,m}(x) dx, \quad J_R^2 := \int_{C_R} F_{n,m}(z) dz. \quad (13.21)$$

Если показать, что при условии  $m > n + 1$  существует  $\lim_{R \rightarrow +\infty} J_R^2 = 0$ , то получим, что существует  $\lim_{R \rightarrow +\infty} J_R^1 = J$  и справедлива формула:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{n,m}(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^l \operatorname{res}_{z_k^+} F_{n,m}. \quad (13.22)$$

Докажем необходимое утверждение, опираясь на следующую лемму.

**ЛЕММА 13.4.** Пусть  $\Phi(z)$  — непрерывная функция на замкнутом множестве  $\{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R_0 > 0\}$ . Пусть  $C_R := \{z \mid |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ ,  $R > R_0$ , — полуокружность в верхней полуплоскости. Обозначим

$$\varepsilon(R) := \max \{|\Phi(z)| \mid z \in C_R\} \quad \text{при } R > R_0.$$

Если

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \varepsilon(R) R = 0,$$

то

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \Phi(z) dz = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий леммы получаем оценки

$$\left| \int_{C_R} \Phi(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |\Phi(z)| |dz| \leq \varepsilon(R) \int_{C_R} |dz| = \varepsilon(R) \pi R \rightarrow 0. \quad \square$$

Применим лемму 13.4 для случая рациональной функции  $\Phi(z) := F_{n,m}(z)$  (т.е. к правому интегралу в (13.21)). При достаточно больших  $|z| > R_0$  получаем

$$|\Phi(z)| = \frac{|z^n|(1 + o_1(1))}{|z^m|(1 + o_2(1))} = |z|^{n-m}(1 + o_3(1)),$$

т.е. справедлива оценка  $|\Phi(z)| \leq 2|z|^{n-m}$ , т.е.  $\varepsilon(R)R \leq 2R^{n-m+1} \rightarrow 0$  при  $n - m + 1 < 0$ , откуда следует, что выполнены условия леммы 13.4, по которой получаем равенство

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} J_R^2 = 0.$$

Таким образом, сходимость интеграла (13.19) при  $m > n + 1$  в смысле главного значения и формула (13.22) обоснованы полностью.

### 13.2. Вычисление интегралов вида

$$J = \int_0^{2\pi} F(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi. \quad (13.23)$$

Здесь  $F(x, y) := \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ ; где  $P, Q$  — многочлены переменных  $x$  и  $y$ .

Сделаем замену  $z = z(\varphi) = e^{i\varphi}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

Тогда  $\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ ;  $\sin \varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$ ,  $dz = ie^{i\varphi} d\varphi$ , т.е.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} F\left(\frac{z(\varphi)}{2} + \frac{1}{2z(\varphi)}, \frac{z(\varphi)}{2i} - \frac{1}{2iz(\varphi)}\right) \cdot \frac{z'(\varphi)}{iz(\varphi)} d\varphi = \\ &= \int_{|z|=1} F\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} F_1(z) dz. \end{aligned}$$

В итоге интеграл (13.23) свелся к интегралу по окружности  $|z| = 1$  от рациональной функции  $F_1(z)$ , который может быть вычислен с помощью теоремы 13.1 о вычетах.

### 13.3. Вычисление интегралов вида

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} F_{n,m}(x) dx. \quad (13.24)$$

Здесь  $F_{n,m}(x) := \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  — рациональная функция (13.20),  $\alpha$  — действительное число,  $\alpha > 0$  и  $Q_m(x) \neq 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}^1$  (т.е. интеграл (13.24) есть преобразование Фурье рациональной функции  $F$ ). С помощью теории вычетов покажем, что интеграл (13.24) сходится в смысле главного значения при условии, что  $m - n > 0$ , и вычислим этот интеграл.

Пусть через  $\{z_k^+\}_{k=1}^l$  обозначены все различные нули многочлена  $Q_m(z)$  (знаменателя функции  $F_{n,m}(z)$ ), лежащие в верхней полуплоскости. Рассмотрим, как и в пункте I, при любом  $R > R_0 := \max\{|z_k^+| \mid k \in \overline{1, l}\}$  положительно ориентированный контур  $\gamma_R := [-R, R] \cup C_R$ , где, как и прежде,  $[-R, R]$  — отрезок, а  $C_R$  — полуокружность радиуса  $R$  в верхней полуплоскости. По теореме о вычетах получаем

$$J_R := \int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} F_{n,m}(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^l \operatorname{res}_{z_k^+} (e^{i\alpha z} F_{n,m}(z)), \quad (13.25)$$

т.е. интеграл  $J_R$  не зависит от  $R > R_0$ . С другой стороны, справедливо представление этого интеграла (13.25) в виде суммы двух интегралов

$$J_R = \int_{-R}^{+R} e^{i\alpha x} F_{n,m}(x) dx + \int_{C_R} e^{i\alpha z} F_{n,m}(z) dz. \quad (13.26)$$

Первое слагаемое справа в (13.26) будет иметь предел и сходиться к искомому значению  $J$  интеграла (13.24) при  $R \rightarrow +\infty$ , если второе слагаемое в (13.26) имеет предел при  $R \rightarrow +\infty$ , равный нулю. Чтобы показать последнее, докажем лемму.

**ЛЕММА 13.5 (ЖОРДАН).** Пусть  $\Phi(z)$  — непрерывная функция на замкнутом множестве  $\{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R_0 > 0\}$ . Пусть число  $\alpha > 0$  и  $C_R := \{z \mid |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ ,  $R > R_0$ , — семейство полуокружностей в верхней полуплоскости. Обо-

значим

$$\varepsilon(R) := \max \{ |\Phi(z)| \mid z \in C_R \} \quad \text{при} \quad R > R_0.$$

Если  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \varepsilon(R) = 0$ , то  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} \Phi(z) dz = 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $z \in C_R$ , тогда  $z = Re^{i\varphi} = R \cos \varphi + iR \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Поэтому при  $z \in C_R$

$$|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha(x+iy)}| = e^{-\alpha y} = e^{-\alpha R \sin \varphi}.$$

Воспользовавшись известным неравенством

$$\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi \quad \text{при} \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad (13.27)$$

получаем оценки

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} e^{i\alpha z} \Phi(z) dz \right| &\leq \int_{C_R} |\Phi(z)| e^{-\alpha R \sin \varphi} |dz| \leq \\ &\leq \varepsilon(R) R \int_0^{\pi} e^{-\alpha R \sin \varphi} d\varphi = 2\varepsilon(R) R \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \varphi} d\varphi \leq \\ &\leq 2\varepsilon(R) R \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R 2\varphi/\pi} d\varphi = \frac{\pi}{\alpha} \varepsilon(R) (1 - e^{-\alpha R}) \leq \frac{\pi}{\alpha} \varepsilon(R), \end{aligned}$$

т. е. справедливо утверждение леммы.  $\square$

Возвращаясь к формуле (13.26), покажем с помощью леммы Жордана, что при условии  $m > n$  второй интеграл в (13.26) стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . При достаточно больших  $R > R_0$  в силу условия  $m - n \geq 1$  получаем  $\varepsilon(R) \leq \frac{2}{R^{m-n}} \leq \frac{2}{R} \rightarrow 0$ . Отсюда по лемме 13.5 из (13.25) и (13.26) получаем равенство  $\lim_{R \rightarrow +\infty} J_R = J$  и формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} F_{n,m}(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^l \operatorname{res}_{z_k^+} (e^{i\alpha z} F_{n,m}(z)). \quad (13.28)$$

ПРИМЕР 13.3. Вычислим интеграл Лапласа вида

$$J(\alpha) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1.$$

Здесь  $F(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ; ее особые точки  $z_{1,2} = \pm i$ , т. е. в верхней полуплоскости лежит лишь точка  $z_1^+ = i$  — полюс 1-го порядка. При  $\alpha > 0$  по формуле (13.28) получаем

$$J(\alpha) = 2\pi i \operatorname{res}_i \left( \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2} \right) = 2\pi i \left( \frac{e^{i\alpha z}}{2z} \Big|_{z=i} \right) = \pi e^{-\alpha}.$$

При  $\alpha < 0$  делаем в интеграле замену  $x = -t$ :

$$J(\alpha) = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{-i\alpha t}}{1+t^2} (-dt) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i|\alpha|t}}{1+t^2} dt = \pi e^{-|\alpha|}.$$

В итоге,  $J(\alpha) = \pi e^{-|\alpha|}$ .

С другой стороны, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1+x^2} dx,$$

причем последний интеграл от нечетной функции, очевидно, равен нулю, то получаем еще одну формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \pi e^{-|\alpha|}.$$

СЛЕДСТВИЕ 13.2. *Интегралы вида*

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \alpha x \cdot F_{n,m}(x) dx \quad \text{и} \quad J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \alpha x \cdot F_{n,m}(x) dx, \quad (13.29)$$

где  $F_{n,m}(x)$  — рациональная функция, сводятся к интегралу вида (13.24), т. е.

$$J_1 = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} F_{n,m}(x) dx, \quad J_2 = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} F_{n,m}(x) dx.$$

## § 14. Приращение аргумента $z$ вдоль кривой

Пусть  $z = x + iy \neq 0$ . Напомним, что  $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ , если выполнены равенства

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{|z|}, \quad (14.1)$$

где  $\operatorname{Arg} z := \{\varphi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  — многозначная функция аргумента  $z$ , определенная на  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Нас будет интересовать вопрос выделения непрерывных ветвей многозначной функции  $\operatorname{Arg} z$ .

**ТЕОРЕМА 14.1.** Пусть  $z: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  — непрерывно дифференцируемая функция (т. е. класса  $C^1[0, 1]$ ), причем  $z(t) := x(t) + iy(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$ . Пусть задано значение  $\varphi_0 \in \operatorname{Arg} z(0)$ . Тогда существует действительная функция  $\varphi(\cdot) \in C^1[0, 1]$ , удовлетворяющая включению  $\varphi(t) \in \operatorname{Arg} z(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , т. е. уравнениям

$$\cos \varphi(t) = \frac{x(t)}{|z(t)|}, \quad \sin \varphi(t) = \frac{y(t)}{|z(t)|}, \quad t \in [0, 1], \quad (14.2)$$

и условию  $\varphi(0) = \varphi_0$ . Более того, эта функция единственна и задается явной формулой

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} d\tau. \quad (14.3)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим функцию  $\varphi(\cdot)$  из (14.3) и вычислим ее производную

$$\varphi'(t) = \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2}. \quad (14.4)$$

Определим функции  $u(t) := \cos \varphi(t)$ ,  $v(t) := \sin \varphi(t)$ . Тогда, вычисляя их производные, получаем

$$\begin{cases} u' = -\sin \varphi(t) \cdot \varphi'(t) = -v\varphi', \\ v' = \cos \varphi(t) \cdot \varphi'(t) = u\varphi'. \end{cases} \quad (14.5)$$

Определим функции  $\tilde{u}(t) := \frac{x(t)}{|z(t)|}$  и  $\tilde{v}(t) := \frac{y(t)}{|z(t)|}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{u}' &= \frac{d}{dt} \left( \frac{x}{|z|} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{x'}{|z|} - \frac{x(xx' + yy')}{|z|^3} = \\ &= \frac{x'y^2 - xyy'}{|z|^3} = -\frac{y}{|z|} \cdot \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} = -\tilde{v} \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2}, \end{aligned} \quad (14.6)$$

$$\tilde{v}' = \frac{d}{dt} \left( \frac{y}{|z|} \right) = \dots = \frac{x}{|z|} \cdot \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} = \tilde{u} \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2}. \quad (14.7)$$

В силу равенства (14.4) видим, что функции  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  удовлетворяют той же системе линейных дифференциальных уравнений (14.5), что и функции  $(u, v)$ , причем при  $t = 0$  имеем равенства  $u(0) = \tilde{u}(0)$ ,  $v(0) = \tilde{v}(0)$ . По теореме единственности решения задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений (14.5) получаем  $u(t) \equiv \tilde{u}(t)$ ,  $v(t) \equiv \tilde{v}(t)$  при  $t \in [0, 1]$ , т. е. справедливы равенства (14.2), и функция  $\varphi(t)$  из (14.3) есть искомая.

Допустим, что существует другая непрерывно дифференцируемая функция  $\varphi_1(t)$ , удовлетворяющая равенствам (14.2) и условию  $\varphi_1(0) = \varphi_0$ . Тогда, дифференцируя равенства (14.2), получаем, в силу (14.5) и (14.6), (14.7), что  $\varphi_1'(\tau) = \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2}$ , откуда, интегрируя эту производную по отрезку  $[0, t]$  (при каждом  $t \in [0, 1]$ ), получаем в силу формулы (14.3), что  $\varphi_1 \equiv \varphi$ .  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 14.1. Формулу (14.3) можно переписать в более компактном виде

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \operatorname{Im} \int_0^t \frac{z'(\tau)}{z(\tau)} d\tau. \quad (14.8)$$

В самом деле, преобразовав подынтегральную в (14.8) функцию

$$\frac{z'}{z} = \frac{(x' + iy')(x - iy)}{x^2 + y^2} = \frac{x'x + y'y}{x^2 + y^2} + i \frac{y'x - yx'}{x^2 + y^2},$$

получаем из формулы (14.3) формулу (14.8).

Итак, при выполнении условий теоремы 14.1 существует непрерывно дифференцируемая ветвь  $\varphi(t)$  многозначной функции  $\operatorname{Arg} z(t)$  вида (14.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.1. Приращением аргумента функции  $z(\cdot) \in C^1[0, 1]$  на отрезке  $[0, 1]$  назовем число

$$\begin{aligned} \Delta_{[0,1]} \arg z(t) &:= \varphi(1) - \varphi(0) = \\ &= \int_0^1 \frac{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t) + y^2(t)} dt = \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{z'(t)}{z(t)} dt. \end{aligned} \quad (14.9)$$



**ТЕОРЕМА 14.2** (ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО). Пусть функция  $z: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  имеет вид  $z(t) := z_1(t)z_2(t)$ , где функции  $z_1(\cdot), z_2(\cdot) \in C^1[0, 1]$ , причем  $z_1(t) \neq 0, z_2(t) \neq 0 \forall t \in [0, 1]$ . Тогда справедливо равенство

$$\Delta_{[0,1]} \arg z(t) = \Delta_{[0,1]} \arg z_1(t) + \Delta_{[0,1]} \arg z_2(t). \quad (14.10)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из определения 14.1 (формулы (14.9)) получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{[0,1]} \arg z(t) &= \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{(z_1(\tau)z_2(\tau))'}{z_1(\tau) \cdot z_2(\tau)} d\tau = \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{z_1' z_2 + z_2' z_1}{z_1 z_2} d\tau = \\ &= \operatorname{Im} \int_0^1 \left( \frac{z_1'}{z_1} + \frac{z_2'}{z_2} \right) d\tau = \Delta_{[0,1]} \arg z_1(t) + \Delta_{[0,1]} \arg z_2(t). \quad \square \end{aligned}$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.2.** Приращением аргумента  $z$  вдоль кривой  $\gamma$ , заданной параметрически с помощью функции  $z(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , назовем

$$\Delta_\gamma \arg z := \Delta_{[0,1]} \arg z(t). \quad (14.11)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 14.2.** В определении 14.2 приращение аргумента  $z$  вдоль гладкой кривой  $\gamma$  не зависит от выбора эквивалентной параметризации  $z(t)$ , с помощью которой задана эта кривая  $\gamma$ , т. е. справедлива формула

$$\Delta_\gamma \arg z = \operatorname{Im} \int_\gamma \frac{dz}{z}. \quad (14.12)$$

Это следует из формул (14.9) и (14.11), а также из свойства независимости криволинейного интеграла от выбора эквивалентной параметризации гладкой кривой (см. свойство 5° § 6).

**ЗАМЕЧАНИЕ 14.3.** Легко установить геометрический смысл приращения аргумента  $z$  вдоль гладкой кривой  $\gamma$ . Это приращение является углом поворота радиус-вектора  $0z$  при непрерывном проведении конца вектора  $z$  вдоль кривой  $\gamma$  от начальной ее точки  $z(0)$  до конечной ее точки  $z(1)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.3.** Пусть в области  $G$  задано семейство кривых  $\{\gamma_\alpha\} \subset G$ ,  $\alpha \in [a, b]$ , представленное функцией  $z(t, \alpha)$ ,  $t \in [0, 1]$ , у которой существует производная  $z_t'(t, \alpha)$ , причем функции  $z(t, \alpha)$ ,  $z_t'(t, \alpha)$  непрерывны по совокупности аргументов на  $[0, 1] \times [a, b]$ . Тогда говорят, что семейство  $\{\gamma_\alpha\}$  задает непрерывную деформацию гладкой кривой  $\gamma_a$  в гладкую кривую  $\gamma_b$  в области  $G$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 14.4. В частном случае, когда  $z(0, \alpha) \equiv z_0$ ,  $z(1, \alpha) = z_1$  (т. е. семейство  $\gamma_\alpha$  имеет неподвижные начальную и конечную точки), то получаем непрерывную деформацию кривой  $\gamma_a$  в кривую  $\gamma_b$  с неподвижными началом и концом (см. рис. 14.1). В этом случае также говорят, что кривые  $\gamma_a$  и  $\gamma_b$  *гомотопны* в области  $G$ .

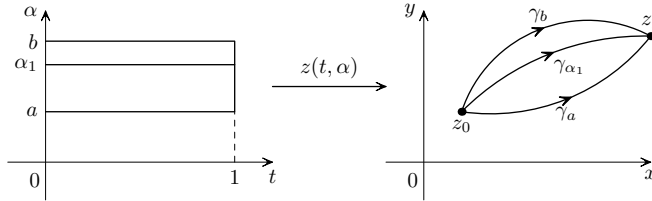


Рис. 14.1

ТЕОРЕМА 14.3 (УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ НЕПРЕРЫВНОЙ ДЕФОРМАЦИИ). Пусть семейство кривых  $\{\gamma_\alpha\}$  задает непрерывную деформацию гладкой кривой  $\gamma_a$  в гладкую кривую  $\gamma_b$  в области  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  (в силу определения 14.3). При этом  $z(t, \alpha) \neq 0$  при всех  $(t, \alpha) \in [0, 1] \times [a, b]$ . Пусть существует число  $A \in \mathbb{C}$ ,  $A \neq 0$ , такое, что справедливо равенство  $z(1, \alpha) = Az(0, \alpha) \forall \alpha \in [a, b]$ . Определим функцию  $I(\alpha) := \Delta_{\gamma_\alpha} \arg z$  от параметра  $\alpha \in [a, b]$  (т. е.  $I(\alpha) = \Delta_{[0,1]} \arg z(t, \alpha)$ ). Тогда  $I(\alpha) = \text{const}$ , откуда, в частности, следует равенство  $\Delta_{\gamma_a} \arg z = \Delta_{\gamma_b} \arg z$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При каждом значении  $\alpha \in [a, b]$  обозначим через  $\varphi(t, \alpha)$  непрерывную по  $t$  ветвь многозначной функции  $t \rightarrow \text{Arg } z(t, \alpha)$ , полученную в теореме 14.1 (см. формулу (14.3)). Так как

$$\varphi(1, \alpha) \in \text{Arg } z(1, \alpha), \quad \varphi(0, \alpha) \in \text{Arg } z(0, \alpha),$$

то

$$\varphi(1, \alpha) - \varphi(0, \alpha) \in \text{Arg } \frac{z(1, \alpha)}{z(0, \alpha)},$$

и так как по условию  $\frac{z(1, \alpha)}{z(0, \alpha)} \equiv A$ , т. е. не зависит от  $\alpha$ , то

$$\forall \psi_0 \in \text{Arg } A \quad \exists n(\alpha) \in \mathbb{Z},$$

$$\varphi(1, \alpha) - \varphi(0, \alpha) = \psi_0 + 2\pi n(\alpha), \quad \forall \alpha \in [a, b]. \quad (14.13)$$

По определению 14.1 из равенства (14.13) получаем

$$I(\alpha) := \Delta_{[0,1]} \arg z(t, \alpha) = \varphi(1, \alpha) - \varphi(0, \alpha) = \psi_0 + 2\pi n(\alpha), \quad (14.14)$$

т. е.  $I(\alpha)$  есть ступенчатая функция.

В свою очередь, из формулы (14.9) получаем равенство

$$I(\alpha) = \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{z'_t(t, \alpha)}{z(t, \alpha)} dt.$$

В этом равенстве подынтегральная функция в стоящем справа интеграле непрерывна по  $(t, \alpha)$  на  $[0, 1] \times [a, b]$ , откуда следует, что интеграл непрерывно зависит от параметра  $\alpha$ . В итоге непрерывная ступенчатая функция (14.14) может быть только константой.  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 14.1.** *В силу теоремы 14.3 можно определить понятия  $\Delta_{[0,1]} \arg z(t)$  ( $\Delta_\gamma \arg z$ ) не только для гладких, но и для непрерывных функций  $z(t)$  (кривых  $\gamma$ ).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть задана непрерывная функция  $z: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  (т. е.  $z(\cdot) \in C[0, 1]$ ) и пусть  $z(t) \neq 0$  при всех  $t \in [0, 1]$ . Определим число  $r := \min \{|z(t)| \mid t \in [0, 1]\}$ . Очевидно, что  $r > 0$ . Выберем положительное число  $\varepsilon \leq r/2$ . Обозначим через  $z_\varepsilon(\cdot)$  — произвольную функцию класса  $C^1[0, 1]$ , приближающую данную функцию  $z(\cdot)$  с точностью до  $\varepsilon$ , т. е.  $|z(t) - z_\varepsilon(t)| < \varepsilon \ \forall t \in [0, 1]$ , причем  $z_\varepsilon(0) = z(0)$ ,  $z_\varepsilon(1) = z(1)$ . Такую функцию  $z_\varepsilon(\cdot)$  будем называть *гладкой  $\varepsilon$ -аппроксимацией функции  $z(\cdot)$* . Легко показать, что гладкая  $\varepsilon$ -аппроксимация  $z_\varepsilon(\cdot)$  функции  $z(\cdot)$  существует. Так, по теореме Вейерштрасса (см., например, [1], § 24.3), для заданной функции  $z(\cdot)$  существует многочлен  $P_n(\cdot)$  такой, что  $|z(t) - P_n(t)| < \varepsilon/2, \ \forall t \in [0, 1]$ . Тогда функция

$$z_\varepsilon(t) := P_n(t) + (z(1) - P_n(1))t + (z(0) - P_n(0))(1 - t)$$

будет искомой функцией. В самом деле, она гладкая,  $z_\varepsilon(0) = z(0)$ ,  $z_\varepsilon(1) = z(1)$ , и

$$\begin{aligned} |z_\varepsilon(t) - z(t)| &\leq |z(t) - P_n(t)| + |z(1) - P_n(1)|t + \\ &+ |z(0) - P_n(0)|(1 - t) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}t + \frac{\varepsilon}{2}(1 - t) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Отметим, что  $z_\varepsilon(t) \neq 0$  при всех  $t \in [0, 1]$ . В самом деле,

$$\begin{aligned} |z_\varepsilon(t)| &= |(z_\varepsilon(t) - z(t)) + z(t)| \geq \\ &\geq |z(t)| - |z_\varepsilon(t) - z(t)| > r - \varepsilon \geq \frac{1}{2}r > 0. \quad \square \end{aligned}$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.4.** Приращением аргумента непрерывной функции  $z(\cdot) \in C[0, 1]$ ,  $z(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ , на отрезке  $[0, 1]$  назовем

$$\Delta_{[0,1]} \arg z(t) := \Delta_{[0,1]} \arg z_\varepsilon(t), \quad (14.15)$$

где  $z_\varepsilon(\cdot) \in C^1[0, 1]$  — любая гладкая  $\varepsilon$ -аппроксимация функции  $z(\cdot)$  при достаточно малом значении  $\varepsilon > 0$ .

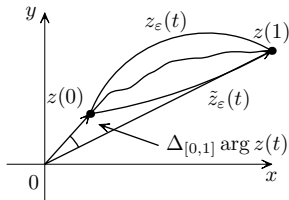


Рис. 14.2

**СЛЕДСТВИЕ 14.2.** Выражение (14.15) не зависит от выбора гладкой  $\varepsilon$ -аппроксимации  $z_\varepsilon(\cdot)$  для непрерывной функции  $z(\cdot)$ , т. е. определение 14.4 корректно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В самом деле пусть  $\tilde{z}_\varepsilon(\cdot)$  — другая гладкая  $\varepsilon$ -аппроксимация функции  $z(\cdot)$  при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  (см. рис. 14.2).

Определим функцию

$$z(t, \alpha) := \alpha \tilde{z}_\varepsilon(t) + (1 - \alpha) z_\varepsilon(t), \quad \forall \alpha \in [0, 1], \quad t \in [0, 1].$$

Очевидно, что эта функция задает непрерывную деформацию  $z_\varepsilon(\cdot)$  в  $\tilde{z}_\varepsilon(\cdot)$ . При этом

$$|z(t, \alpha) - z(t)| \leq \alpha |\tilde{z}_\varepsilon(t) - z(t)| + (1 - \alpha) |z_\varepsilon(t) - z(t)| < \varepsilon,$$

где

$$\varepsilon < r \leq |z(t)|, \quad \forall t \in [0, 1],$$

поэтому

$$|z(t, \alpha)| \geq |z(t)| - |z(t, \alpha) - z(t)| > r - \varepsilon > 0,$$

т. е.  $z(t, \alpha) \neq 0 \quad \forall (t, \alpha)$ . В итоге показали, что функция  $z(t, \alpha)$  удовлетворяет условиям теоремы 14.3, из которой получаем требуемое равенство  $\Delta_{[0,1]} \arg \tilde{z}_\varepsilon(t) = \Delta_{[0,1]} \arg z_\varepsilon(t)$ .  $\square$

Приведем еще одно очевидное следствие определений 14.1 и 14.4.

**СЛЕДСТВИЕ 14.3.** Для всякой замкнутой кривой  $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  существует число  $k_\gamma \in \mathbb{Z}$  такое, что

$$\Delta_\gamma \arg z = 2\pi k_\gamma. \quad (14.16)$$

## § 15. Регулярные ветви многозначных функций корня и логарифма $\text{Ln } z$

Напомним, что на множестве  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  в § 5 были определены многозначные функции вида

$$\{\sqrt[n]{z}\} := \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{i}{n} \text{Arg } z}, \quad (15.1)$$

$$\text{Ln } z := \ln |z| + i \text{Arg } z, \quad (15.2)$$

где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\text{Arg } z := \{\arg z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  — множество всех аргументов числа  $z \neq 0$ .

В § 5 по теореме 5.2 об обратной функции было показано, что эти многозначные функции  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\text{Ln } z$  в области  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  имеют регулярные ветви, которые были названы *главными регулярными ветвями*. Эти ветви имели вид

$$g_0(z) := \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{i}{n} \arg_{\text{гл}} z}, \quad (15.3)$$

$$h_0(z) := \ln |z| + i \arg_{\text{гл}} z, \quad (15.4)$$

где  $\arg_{\text{гл}} z \in (-\pi, \pi)$ .

Обобщим рассуждения из § 5.

**1. Простейший случай.** Зафиксируем числа  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , и  $\psi_0 \in [-\pi, \pi)$ . Рассмотрим угловую область вида  $G_1 := \{z \neq 0 \mid \arg z \in (\frac{\psi_0}{n}, \frac{\psi_0 + 2\pi}{n})\}$ .

Функция  $w = z^n$  однолистка на области  $G_1$  и отображает эту область на область  $\mathbb{C} \setminus \lambda_{\psi_0}$ , где  $\lambda_{\psi_0} := \{z \mid \arg z = \psi_0\} \cup \{0\}$  — луч, выходящий из точки 0, состоящий из точек с аргументом  $\psi_0$ . Следовательно, обратная к степенной функции функция существует и имеет вид

$$g_*(z) := \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{i}{n} \arg_* z}, \quad (15.5)$$

где  $\arg_* z \in (\psi_0, \psi_0 + 2\pi)$ . По теореме 5.2 об обратной функции (точнее, по следствию 5.1) функция  $g_*$ , определенная по формуле (15.5), будет регулярной функцией, т. е. регулярной ветвью многозначной функции  $\{\sqrt[n]{z}\}$ , определенной на области  $\mathbb{C} \setminus \lambda_{\psi_0}$  со значениями в области  $G_1$ .

Аналогично, пусть функция  $e^z$ , задана на области  $G_2 := \{z \mid \text{Im } z \in (\psi_0, \psi_0 + 2\pi)\}$ . Тогда она однолистка на ней и прини-

мает значения в области  $\mathbb{C} \setminus \lambda_{\psi_0}$ . Соответствующая обратная функция имеет вид

$$h_*(z) := \ln |z| + i \arg_* z, \quad (15.6)$$

где  $\arg_* z \in (\psi_0, \psi_0 + 2\pi)$ . По теореме 5.2 об обратной функции функция  $h_*$ , определенная по формуле (15.6), будет регулярной функцией, т. е. регулярной ветвью многозначной функции  $\operatorname{Ln} z$ , определенной на области  $\mathbb{C} \setminus \lambda_{\psi_0}$  со значениями в области  $G_2$ .

**ЛЕММА 15.1.** *Зафиксируем число  $\psi_0 \in [-\pi, \pi)$  и область  $G \subset \mathbb{C} \setminus \lambda_{\psi_0}$ . Все непрерывные ветви многозначных функций  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\operatorname{Ln} z$ , существующие на области  $G$ , являются регулярными ветвями и имеют соответственно вид:*

$$g_k(z) = g_*(z) e^{\frac{2\pi k i}{n}}, \quad k \in \overline{0, n-1}, \quad (15.7)$$

$$h_k(z) = h_*(z) + 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (15.8)$$

где функции  $g_*$  и  $h_*$  определены в (15.5), (15.6).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Очевидно, что функции  $g_k$  и  $h_k$  являются ветвями многозначных функций  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\operatorname{Ln} z$  соответственно, при этом они регулярны на области  $G$ , так как функции  $g_*$  и  $h_*$  регулярны. Допустим, что  $g$  — некоторая непрерывная ветвь многозначной функции  $\{\sqrt[n]{z}\}$ , определенная на области  $G$ . Тогда по определению корня справедливы тождества  $g^n(z) \equiv z$  и  $g_*^n(z) \equiv z$ . Поэтому  $\left(\frac{g(z)}{g_*(z)}\right)^n \equiv 1$ , откуда  $\frac{g(z)}{g_*(z)} \in \{\sqrt[n]{1}\}$ , т. е. существует  $k(z) \in \overline{0, n-1}$  такое, что

$$\frac{g(z)}{g_*(z)} = e^{i \frac{2\pi}{n} k(z)}, \quad z \in G. \quad (15.9)$$

В равенстве (15.9) слева стоит непрерывная функция, а справа — функция, принимающая дискретные значения, что возможно лишь при условии, что эта функция постоянна. Это значит, что существует число  $k_0 \in \overline{0, n-1}$  такое, что  $g(z) = g_{k_0}(z)$ , т. е. формула (15.7) описывает все непрерывные (и регулярные) ветви многозначной функции  $\{\sqrt[n]{z}\}$ .

Аналогично, пусть задана некоторая непрерывная ветвь  $h$  многозначной функции  $\operatorname{Ln} z$  на области  $G$ . Тогда по определению обратной функции получаем равенства  $e^{h(z)} \equiv z$ ,  $e^{h_*(z)} \equiv z$

$\equiv z, \forall z \in G$ , т.е.  $e^{h(z)-h_*(z)} \equiv 1$ , откуда существует  $k(z) \in \mathbb{Z}$  такое, что

$$h(z) - h_*(z) = 2\pi k(z)i. \quad (15.10)$$

Слева в равенстве (15.10) — непрерывная функция, справа — функция с дискретными значениями, следовательно,  $k(z) = k_0 = \text{const}$ , т.е. формула (15.8) описывает все непрерывные (и регулярные) ветви многозначной функции  $\text{Ln } z$ .  $\square$

**ЛЕММА 15.2.** *У многозначных функций  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\text{Ln } z$  не существует непрерывных ветвей, определенных в кольце  $K_{r,R}(0) := \{z \mid r < |z| < R\}$ , где  $0 \leq r < R \leq +\infty$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** От противного. Допустим, что в некотором кольце  $K_{r,R}(0)$  существует некоторая непрерывная ветвь  $g$  многозначной функции  $\{\sqrt[n]{z}\}$ . Тогда эта функция  $g$  непрерывна на области  $K_{r,R}(0) \setminus (-\infty, 0]$ . По лемме 15.1 (при  $\psi_0 = -\pi$ ) существует номер  $k_0 \in \mathbb{Z}$  такой, что

$$g(z) = g_0(z) e^{\frac{2\pi k_0 i}{n}}, \quad \forall z \in K_{r,R}(0) \setminus (-\infty, 0], \quad (15.11)$$

где  $g_0$  — главная регулярная ветвь (15.3). Пусть  $x \in (-R, -r)$ . Тогда из равенства (15.11) получаем в пределе

$$g(x + i0) = \sqrt[n]{|x|} e^{\frac{i\pi + 2\pi k_0 i}{n}}, \quad g(x - i0) = \sqrt[n]{|x|} e^{\frac{-i\pi + 2\pi k_0 i}{n}},$$

т.е.  $g(x + i0) \neq g(x - i0)$ , что противоречит тому, что функция  $g$  непрерывна в точке  $x \in K_{r,R}(0)$ .

Аналогично доказывается утверждение для  $\text{Ln } z$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 15.1.** *Не существует непрерывных ветвей многозначных функций  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\text{Ln } z$ , определенных в произвольной области  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ , содержащей проколотую окрестность точки 0 или содержащей проколотую окрестность бесконечности.*

**ЗАМЕЧАНИЕ 15.1.** Особая роль точек 0 и  $\infty$  для функций  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\text{Ln } z$  будет изучена в §§ 28–29.

**2. Общий случай.** Пусть выбрана односвязная область  $G$  в  $\mathbb{C}$ , причем  $0 \notin G$ . Кроме областей вида  $\mathbb{C} \setminus \lambda_{\psi_0}$  примером такой области может быть область в  $\mathbb{C}$ , граница которой является разрезом по некоторой кусочно-гладкой кривой, идущей из точки 0 в  $\infty$  (см. рис. 15.1).

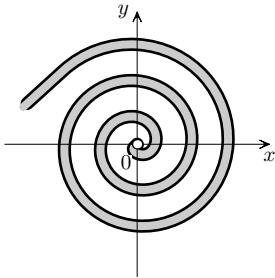


Рис. 15.1

Покажем, что в такой области  $G$  существуют регулярные ветви многозначной функции  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\operatorname{Ln} z$ . Опишем их вид.

**ЛЕММА 15.3.** *В односвязной области  $G \subset \mathbb{C}$  такой, что  $0 \notin G$ , существуют непрерывные ветви многозначной функции  $\operatorname{Arg} z$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Зафиксируем произвольные точку  $z_0 \in G$  и ее аргумент  $\psi_0 \in \operatorname{Arg} z_0$ . Из точки  $z_0$  (как начальной) в произвольную (конечную) точку  $z \in G$  проведем некоторую гладкую кривую  $\gamma_{z_0 z} \subset G$ .

Определим

$$\varphi_{\gamma_{z_0 z}} := \psi_0 + \Delta_{\gamma_{z_0 z}} \arg z, \quad (15.12)$$

где

$$\Delta_{\gamma_{z_0 z}} \arg z := \operatorname{Im} \int_{\gamma_{z_0 z}} \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (15.13)$$

Очевидно, что справедливо включение  $\varphi_{\gamma_{z_0 z}} \in \operatorname{Arg} z$ .

В односвязной области  $G$ , удовлетворяющей условию  $0 \notin G$ , функция  $\frac{1}{z}$  регулярна, и по интегральной теореме Коши для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой  $\gamma \subset G$  справедливо равенство  $\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = 0$ . В силу равенства (15.13) это значит, что

$\Delta_{\gamma} \arg z = 0$  для любой замкнутой кривой  $\gamma \subset G$ , т. е. выражение (15.12) не зависит от выбора кривой  $\gamma_{z_0 z}$ , а определяется лишь выбором конечной точки  $z$ , т. е. мы получим функцию от  $z$  вида

$$\varphi_0(z) := \psi_0 + \Delta_{\gamma_{z_0 z}} \arg z, \quad (15.14)$$

где

$$\Delta_{\gamma_{z_0 z}} \arg z = \operatorname{Im} \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (15.15)$$

В силу теоремы 6.4 функция  $g(z) := \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\zeta}$  является регулярной первообразной функции  $\frac{1}{z}$  в области  $G$ , поэтому  $\varphi_0(z)$  является гармонической функцией от  $(x, y)$ . Таким образом



показали, что функция  $\varphi_0(z)$  есть непрерывная ветвь  $\operatorname{Arg} z$  в области  $G$ .  $\square$

Определим функции

$$\tilde{g}_0(z) := \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{i}{n}\varphi_0(z)}, \quad z \in G, \quad (15.16)$$

$$\tilde{h}_0(z) := \ln |z| + i\varphi_0(z), \quad z \in G, \quad (15.17)$$

где функция  $\varphi_0$  взята из формул (15.14), (15.15).

Очевидно, что это ветви многозначных функций  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\operatorname{Ln} z$  соответственно, причем в силу леммы 15.3 эти ветви непрерывны в области  $G$ .

**ТЕОРЕМА 15.1.** *В односвязной области  $G$  такой, что  $0 \notin G$ , существуют непрерывные ветви многозначных функций  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\operatorname{Ln} z$ , при этом все они являются регулярными функциями вида*

$$g_k(z) = \tilde{g}_0(z) e^{\frac{2\pi k i}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (15.18)$$

$$h_k(z) = \tilde{h}_0(z) + 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (15.19)$$

где функции  $\tilde{g}_0$  и  $\tilde{h}_0$  взяты из выражений (15.16), (15.17).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Прежде всего покажем, что непрерывные функции  $\tilde{g}_0$  и  $\tilde{h}_0$  являются регулярными в данной области  $G$ .

Зафиксируем произвольную точку  $z_1 \in G$ , и пусть  $r > 0$  такое, что  $B_r(z_1) \subset G$ . Так как  $0 \notin B_r(z_1)$ , то существует луч  $\lambda_{\psi_0}$ , не пересекающий круг  $B_r(z_1)$ . Итак, в силу включения  $B_r(z_1) \subset (\mathbb{C} \setminus \lambda_{\psi_0}) \cap G$ , выполнены условия пункта 1 *Простейший случай* и по лемме 15.1, в которой описаны все непрерывные ветви многозначных функций  $\{\sqrt[n]{z}\}$  и  $\operatorname{Ln} z$  в круге  $B_r(z_1) \subset \mathbb{C} \setminus (\lambda_{\psi_0})$ , существуют номера  $k_*$ ,  $k_{**} \in \mathbb{Z}$  такие, что

$$\tilde{g}_0(z) = g_*(z) e^{\frac{2\pi k_* i}{n}}, \quad \forall z \in B_r(z_1),$$

и

$$\tilde{h}_0(z) = h_*(z) + 2\pi k_{**} i, \quad \forall z \in B_r(z_1),$$

т.е. функции  $\tilde{g}_0$ ,  $\tilde{h}_0$  регулярны в данной окрестности точки  $z_1$ . Так как точка  $z_1$  была выбрана произвольной из области  $G$ , то функции  $\tilde{g}_0$  и  $\tilde{h}_0$  регулярны в области  $G$ .

Далее, повторяя рассуждения доказательства леммы 15.1, легко показать, что все непрерывные ветви указанных функций являются регулярными функциями и имеют вид (15.18), (15.19).  $\square$

Приведем еще одну формулу представления регулярных ветвей многозначной функции  $\text{Ln } z$ .

**СЛЕДСТВИЕ 15.2.** *Всякая регулярная ветвь  $h_k$  (см. (15.19)) многозначной функции  $\text{Ln } z$  в односвязной области  $G$  такой, что  $0 \notin G$ , удовлетворяет равенству (формуле Ньютона–Лейбница):*

$$h_k(z) = h_k(z_0) + \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in G, \quad (15.20)$$

где интеграл берется по любой кривой, лежащей в области  $G$ , с началом в произвольной фиксированной точке  $z_0 \in G$  и концом в точке  $z \in G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Отметим, что справедливо равенство

$$\text{Re} \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln |z| - \ln |z_0|. \quad (15.21)$$

В самом деле,

$$\text{Re} \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_0^t \frac{xx' + yy'}{x^2 + y^2} d\tau = \int_0^t \frac{d\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \ln |z(t)| - \ln |z(0)|,$$

что и доказывает равенство (15.21). Отсюда и из формул (15.14), (15.15), (15.17) и (15.19) получаем

$$\begin{aligned} h_k(z) &= \ln |z| + i(\psi_0 + \Delta_\gamma \arg z + 2\pi k) = \\ &= \ln |z| - \ln |z_0| + (\ln |z_0| + i(\psi_0 + 2\pi k)) + i\Delta_\gamma \arg z = \\ &= \text{Re} \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\zeta} + h_k(z_0) + i \text{Im} \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\zeta} = h_k(z_0) + \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\zeta}. \end{aligned}$$

Следствие доказано.  $\square$

## § 16. Регулярные ветви многозначных функций $\operatorname{Ln} f(z)$ и $\sqrt[n]{f(z)}$

**16.1. Многозначные функции  $\operatorname{Ln} f(z)$  и  $\sqrt[n]{f(z)}$ .** В данном параграфе будем рассматривать функции  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ , удовлетворяющие следующему предположению.

**ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 16.1.** *Функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна в области  $G \subset \mathbb{C}$ , причем*

$$f(z) \neq 0, \quad \forall z \in G. \quad (16.1)$$

В этом случае определим в области  $G$  две многозначные функции:

$$\operatorname{Ln} f(z) := \ln |f(z)| + i \operatorname{Arg} f(z), \quad (16.2)$$

$$\{\sqrt[n]{f(z)}\} := \sqrt[n]{|f(z)|} e^{\frac{i}{n} \operatorname{Arg} f(z)}, \quad (16.3)$$

где  $\operatorname{Arg} f(z) := \{\arg f(z) + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

Исследуем при каких условиях, кроме предположения 16.1, у многозначных функций (16.2) и (16.3) существуют в области  $G$  регулярные ветви, а также какой вид эти регулярные ветви имеют.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16.1.** Пусть для жордановой кривой  $\gamma$ , принадлежащей области  $G$ , задана параметризация вида  $z = z(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $z(\cdot) \in C[0, 1]$ . Обозначим через  $\Gamma$  образ кривой  $\gamma$  при отображении регулярной функцией  $f$ , т. е.  $\Gamma := f(\gamma)$ . Очевидно, что кривая  $\Gamma$  может быть задана параметризацией вида  $w = w(t) := f(z(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ . В силу (16.1)  $0 \notin \Gamma$ . Приращением аргумента функции  $f$  вдоль кривой  $\gamma$  назовем действительное число

$$\Delta_\gamma \arg f(z) := \Delta_\Gamma \arg w = \Delta_{[0,1]} \arg w(t). \quad (16.4)$$

Из этого определения, из определения 14.1 и теорем 14.1–14.2, очевидно, следует

**ЛЕММА 16.1.** *Пусть функции  $f, f_1, f_2$  в области  $G$  удовлетворяют предположению 16.1, и пусть выбрана жорданова кривая  $\gamma \subset G$ . Тогда*

1) справедливо равенство

$$\Delta_\gamma \arg(f_1(z)f_2(z)) = \Delta_\gamma \arg f_1(z) + \Delta_\gamma \arg f_2(z); \quad (16.5)$$

2) если жорданова кривая  $\gamma$  разбита некоторой точкой  $A$  на две дуги  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , т. е.  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$  (см. рис. 16.1), то

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_{\gamma_1} \arg f(z) + \Delta_{\gamma_2} \arg f(z). \quad (16.6)$$

3) для любой кусочно-гладкой кривой  $\gamma$  справедлива интегральная формула

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \operatorname{Im} \int_\gamma \frac{dw}{w} = \operatorname{Im} \int_\gamma \frac{f'(z) dz}{f(z)}. \quad (16.7)$$

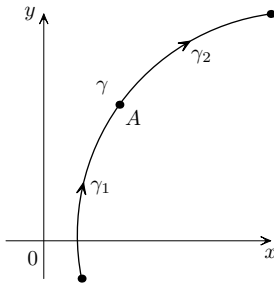


Рис. 16.1

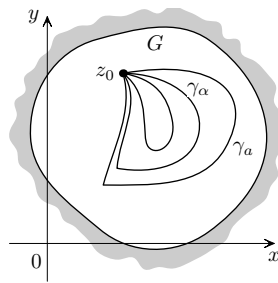


Рис. 16.2

**ЛЕММА 16.2.** Пусть функция  $f$  удовлетворяет в области  $G$  предположению 16.1. Если область  $G$  односвязна, то для любой жордановой замкнутой кривой  $\gamma \subset G$  справедливо равенство

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = 0. \quad (16.8)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу определения 14.4 лемму достаточно доказать для случая, когда кривая  $\gamma$  является гладкой. Тогда в силу предположения 16.1 функция  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  регулярна в односвязной области  $G$ , и по интегральной теореме Коши (см. §7) следует равенство  $\int_\gamma \frac{f'(z) dz}{f(z)} = 0$ , откуда в силу равенства (16.7) получаем равенство (16.8).  $\square$

**ЛЕММА 16.3.** Пусть в области  $G$  для функции  $f$ , удовлетворяющей предположению 16.1, существуют регулярные

ветви  $h$  или  $g$  многозначных функций  $\text{Ln } f(z)$  или  $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$  соответственно. Тогда производные этих ветвей вычисляются по формулам

$$h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad g'(z) = \frac{f'(z)}{n(g(z))^{n-1}} = \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{g(z)}{n}. \quad (16.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, данные функции регулярны и удовлетворяют тождествам

$$e^{h(z)} \equiv f(z), \quad g^n(z) \equiv f(z). \quad (16.10)$$

Дифференцируя эти тождества, получаем формулы (16.9).  $\square$

ЛЕММА 16.4. Пусть функция  $f$  в области  $G$  удовлетворяет предположению 16.1. Если в области  $G$  существуют регулярные ветви  $g_0$  или  $h_0$  многозначных функций  $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$  или  $\text{Ln } f(z)$  соответственно, то все регулярные ветви этих многозначных функций в области  $G$  могут быть представлены в виде

$$g_k(z) = g_0(z) e^{\frac{2\pi k i}{n}}, \quad k \in \overline{0, n-1}, \quad (16.11)$$

$$h_k(z) = h_0(z) + 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (16.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть имеется еще одна регулярная в области  $G$  ветвь  $h(z)$  многозначной функции  $\text{Ln } f(z)$ . Определим функцию  $\varphi(z) = h(z) - h_0(z)$ . Эта функция регулярна в области  $G$ . В силу леммы 16.3 получаем, что  $h'(z) = h'_0(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ , т.е. функция  $\varphi(z) = c_0$  - постоянна в области  $G$ . Из левого тождества в (16.10) следует равенство  $e^{\varphi(z)} = 1$ , т.е. существует  $k_0 \in \mathbb{Z}$  такое, что  $c_0 = 2\pi k_0 i$ , т.е.  $h(z) = h_{k_0}(z)$  из равенства (16.12).

2) Пусть  $g(z)$  - еще одна регулярная в области  $G$  ветвь многозначной функции  $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$ . Определим функцию  $\psi(z) = \frac{g(z)}{g_0(z)}$ . Эта функция регулярна в области  $G$  и в силу равенств (16.9), т.е.  $g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{g(z)}{n}$  и  $g'_0(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{g_0(z)}{n}$  получаем, что  $\psi'(z) = \frac{g'(z)g_0(z) - g'_0(z)g(z)}{g_0^2(z)} = 0$ , т.е. функция  $\psi(z) = c_0$  - по-

стоянна в области  $G$ . С другой стороны, в силу правого тождества в (16.10) получаем, что  $\psi^n(z) = 1$ , т.е.  $\psi(z) = c_0 \in \{\sqrt[n]{1}\}$ , т.е. существует число  $k_0 \in \overline{0, n-1}$  такое, что  $c_0 = e^{\frac{2\pi k_0 i}{n}}$ , т.е.  $g(z) = g_{k_0}(z)$  из равенства (16.11).  $\square$

**ТЕОРЕМА 16.1.** Пусть функция  $f$  в области  $G$  удовлетворяет предположению 16.1. Чтобы в области  $G$  существовали регулярные ветви многозначной функции  $\text{Ln } f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой  $\gamma \subset G$  выполнялось равенство (16.8).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость.** Пусть в области  $G$  существует регулярная ветвь  $h(z)$  многозначной функции  $\text{Ln } f(z)$ . По лемме 16.3 функция  $h(z)$  является первообразной функции  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  в области  $G$ , т.е.  $\frac{f'(z)}{f(z)} dz$  является полным дифференциалом в области  $G$ . По теореме 6.4 для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой  $\gamma \subset G$  справедливо равенство  $\int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = 0$ . Так как в силу леммы 16.1 для любой кусочно-гладкой кривой  $\gamma_{ab}$ , с началом и концом в точках  $a, b \in G$  соответственно, справедлива формула

$$\int_{\gamma_{ab}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \ln |f(b)| - \ln |f(a)| + i\Delta_{\gamma_{ab}} \arg f(z), \quad (16.13)$$

из которой в случае замкнутой кривой  $\gamma$  (т.е. при  $a = b$ ) получаем равенство (16.8).

**Достаточность.** Пусть для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой  $\gamma \subset G$  выполнено условие (16.8). В силу формулы (16.13) это значит, что  $\int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = 0$ . По теореме 6.4 это

равенство означает, что  $\frac{f'(z)}{f(z)} dz$  является полным дифференциалом в области  $G$  и существует первообразная  $h(z)$  (т.е.  $h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ ) вида

$$h(z) = h(a) + \int_{\gamma_{az}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta, \quad (16.14)$$

где  $a \in G$  - некоторая фиксированная точка,  $z \in G$  - произвольная точка,  $\gamma_{az}$  - произвольная кусочно-гладкая кривая в области  $G$  с началом в точке  $a$  и концом в точке  $z$ . Выберем значение  $h(a)$  из условия  $h(a) \in \operatorname{Ln} f(a)$ , т.е. существует  $\psi_0 \in \operatorname{Arg} f(a)$  такой, что  $h(a) = \ln |f(a)| + i\psi_0$ .

Покажем, что полученная регулярная функция  $h(z)$  (16.14) при условии  $h(a) \in \operatorname{Ln} f(a)$  является ветвью многозначной функции  $\operatorname{Ln} f(z)$ . Выражая интеграл (16.14) по формуле (16.13), получаем

$$h(z) = \ln |f(a)| + i\psi_0 + \ln |f(z)| - \ln |f(a)| + i\Delta_{\gamma_{az}} \arg f(z).$$

Так как  $\psi_0 \in \operatorname{Arg} f(a)$  и по определению 16.1 справедливо включение  $\psi_0 + \Delta_{\gamma_{az}} \arg f(z) \in \operatorname{Arg} f(z)$ , откуда следует, что  $h(z) \in \operatorname{Ln} f(z)$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 16.1.** В условиях теоремы 16.1 всякая регулярная в области  $G$  ветвь  $h$  многозначной функции  $\operatorname{Ln} f(z)$  для любых  $a, z \in G$  описывается формулами

$$h(z) = h(a) + \int_{\gamma_{az}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta, \quad h(a) = \ln |f(a)| + i\psi_0, \quad (16.15)$$

$$h(z) = h(a) + \ln \left| \frac{f(z)}{f(a)} \right| + i\Delta_{\gamma_{az}} \arg f(z), \quad (16.16)$$

$$h(z) = \ln |f(z)| + i(\psi_0 + \Delta_{\gamma_{az}} \arg f(z)), \quad (16.17)$$

где  $\psi_0 \in \operatorname{Arg} f(a)$ ,  $\gamma_{az}$  — произвольная кусочно-гладкая кривая в  $G$  с началом в точке  $a$  и концом в точке  $z$ .

**ТЕОРЕМА 16.2.** Пусть функция  $f$  в области  $G$  удовлетворяет предположению 16.1. Чтобы в области  $G$  существовали регулярные ветви многозначной функции  $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$ , необходимо и достаточно, чтобы для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой  $\gamma \subset G$  нашлось целое число  $k_\gamma$  такое, что

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = (2\pi n)k_\gamma. \quad (16.18)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** *Необходимость.* Пусть в области  $G$  существует регулярная ветвь  $g(z)$  многозначной функции  $\sqrt[n]{f(z)}$ . В силу правого равенства (16.9) из леммы 16.3 имеем  $\frac{f'(z)}{f(z)} = n \frac{g'(z)}{g(z)}$ . Поэтому для любой замкнутой кусочно-

гладкой кривой  $\gamma$  получаем

$$\Delta_{\gamma} \arg f(z) = \operatorname{Im} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n \operatorname{Im} \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = n \Delta_{\gamma} \arg g(z)$$

По следствию 14.3 существует такое  $k_{\gamma} \in \mathbb{Z}$ , что верно равенство  $\Delta_{\gamma} \arg g(z) = 2\pi k_{\gamma}$ , из которого в итоге получаем равенство (16.18).

*Достаточность.* Из условия (16.18) и равенства (16.13) следует, что для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой  $\gamma$  справедливо равенство

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = i(2\pi n)k_{\gamma}. \quad (16.19)$$

Зафиксируем точку  $a \in G$  и значение  $g(a) \in \{\sqrt[n]{f(a)}\}$ , т.е.  $g(a) = \sqrt[n]{|f(a)|} e^{\frac{i}{n}\psi_0}$ , где  $\psi_0 \in \operatorname{Arg} f(a)$ .

Определим для произвольной точки  $z \in G$  и для двух произвольных кусочно-гладких кривых  $\gamma_1, \gamma_2 \subset G$  (с общим началом в точке  $a$  и общим концом в точке  $z$ ) выражения

$$g_k(z) = g(a) e^{\frac{1}{n} \int_{\gamma_k} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta}, \quad k = 1, 2.$$

Определим замкнутую кривую  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^{-1}$ , для которой справедливо равенство (16.19) при некотором  $k_{\gamma}$ . Тогда

$$\frac{g_1(z)}{g_2(z)} = e^{\frac{1}{n} \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta} = e^{\frac{1}{n} i 2\pi n k_{\gamma}} = 1.$$

Таким образом показали, что выражение

$$g(z) = g(a) e^{\frac{1}{n} \int_{\gamma_{az}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta} \quad (16.20)$$

не зависит от выбора кривой  $\gamma_{az} \subset G$  (с началом в точке  $a$  и концом в точке  $z$ ), т.е. является функцией от  $z$  в области  $G$ . Очевидно также, что подставляя в формулу (16.20) выражение для интеграла (16.13), получаем включение

$$g(z) \in \{\sqrt[n]{f(z)}\}, \quad \forall z \in G.$$

Покажем, что функция  $g$ , определенная в (16.20), регулярна в  $G$ . Зафиксируем произвольную точку  $z_0 \in G$ , и пусть число



$r > 0$  таково, что  $B_r(z_0) \subset G$ . Тогда из формулы (16.20) следует выражение

$$g(z) = g(z_0) \cdot e^{\frac{1}{n} \int_{\gamma_{z_0 z}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta}, \quad \forall z \in B_r(z_0), \quad (16.21)$$

где кривая  $\gamma_{z_0 z} \subset G$  начинается в точке  $z_0$  и кончается в точке  $z$ .

Так как для любой замкнутой кривой  $\gamma \subset B_r(z_0)$  в силу леммы 16.2 справедливо равенство (16.8), то по теореме 16.1 в области  $B_r(z_0)$  существует регулярная ветвь  $h$  многозначной функции  $\text{Ln } f(z)$ , задаваемая формулой (16.15). Формулу (16.21) можно переписать в виде  $g(z) = g(z_0) e^{\frac{1}{n}(h(z) - h(z_0))}$ , и поэтому функция  $g$  как суперпозиция двух регулярных есть регулярная ветвь функции  $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$  в круге  $B_r(z_0)$ . В силу произвольности точки  $z_0 \in G$  отсюда следует утверждение теоремы.  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 16.2.** В условиях теоремы 16.2 всякая регулярная в области  $G$  ветвь  $g$  многозначной функции  $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$  для любых  $a, z \in G$  описывается формулами

$$g(z) = g(a) e^{\frac{1}{n} \int_{\gamma_{az}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta}, \quad g(a) = \sqrt[n]{|f(a)|} e^{\frac{i}{n} \psi_0}, \quad (16.22)$$

$$g(z) = g(a) \sqrt[n]{\left| \frac{f(z)}{f(a)} \right|} e^{\frac{i}{n} \Delta_{\gamma_{az}} \arg f(z)}, \quad (16.23)$$

$$g(z) = \sqrt[n]{|f(z)|} e^{\frac{i}{n} (\psi_0 + \Delta_{\gamma_{az}} \arg f(z))}, \quad (16.24)$$

где  $\psi_0 \in \text{Arg } f(a)$ ,  $\gamma_{az}$  — произвольная кусочно-гладкая кривая в  $G$  с началом в точке  $a$  и концом в точке  $z$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 16.1.** Из следствий 16.1 и 16.2 следует, что каждая регулярная ветвь многозначных функций  $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$  и  $\text{Ln } f(z)$  в заданной области  $G$  однозначно определяется заданием своего значения в одной произвольной точке  $a \in G$ .

**16.2. Понятие комплексной степени.** Распространим формулу степени, известную для действительных чисел, на комплексные числа, используя многозначную функцию  $\text{Ln } z$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16.2. Пусть  $a, b \in \mathbb{C}$ , причем  $b \neq 0$ . Тогда определим множество комплексных чисел  $\{b^a\}$  по формуле

$$\{b^a\} = e^{a \operatorname{Ln} b}. \quad (16.25)$$

УПРАЖНЕНИЕ 16.1. Покажите, что в случаях, когда  $a = n$  и когда  $a = \frac{1}{n}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , множества  $\{b^a\}$  в (16.25) совпадают с определенными ранее степенью  $b^n$  и корнем  $\{\sqrt[n]{b}\}$ , причем множество  $\{b^n\}$  состоит из одной точки.

ТЕОРЕМА 16.3. Пусть задано число  $a \in \mathbb{C}$ , причем  $a \notin \mathbb{Z}$ ,  $a \neq \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Пусть функция  $f$  в области  $G$  удовлетворяет предположению 16.1. Пусть для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой  $\gamma \subset G$  справедливо равенство (16.8). Тогда в области  $G$  существуют регулярные ветви многозначной функции  $\{(f(z))^a\}$ , причем любая из них имеет вид

$$w(z) = e^{ah(z)}, \quad (16.26)$$

где  $h(z)$  - некоторая регулярная ветвь многозначной функции  $\operatorname{Ln} f(z)$  в области  $G$ .

Для доказательства теоремы нам потребуется лемма.

ЛЕММА 16.5. Пусть в области  $G$  задана непрерывная функция  $g(z)$ , принимающая значения из множества  $D = \{w_j \in \mathbb{C} \mid j \in \mathbb{Z}^*, |w_j - w_k| \geq d, \forall j, k \in \mathbb{Z}^*\}$ , где  $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$ ,  $d > 0$ . Тогда функция  $g(z) \equiv \operatorname{Const}$  на области  $G$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольную точку  $a \in G$  и значение  $w_{j_0} = g(a) \in D$ . Определим непустое множество  $G_1$  тех точек  $z \in G$ , для которых  $g(z) = w_{j_0}$ . В силу непрерывности функции  $g(z)$  на области  $G$  для любой точки  $z_0 \in G_1$  при  $\varepsilon = d/2$  найдется  $\delta > 0$  такое, что справедливо неравенство  $|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon$  при всех  $z \in B_\delta(z_0) \subset G$ . Так как  $\varepsilon < d$ , то  $g(z) = g(z_0) = w_{j_0}$ , т.е.  $B_\delta(z_0) \subset G_1$ , множество  $G_1$  открыто. Определим множество  $G_2 = G \setminus G_1$ . Аналогично доказывается, что и множество  $G_2$  открыто. В итоге получили, что множества  $G_1$  и  $G_2$  открыты,  $G = G_1 \cup G_2$ ,  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ , что противоречит связности множества (области)  $G$ , при условии непустоты множества  $G_2$ . Следовательно  $G_2 = \emptyset$ , а  $g(z) = w_{j_0}$  на множестве  $G$ .  $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 16.3. Так как по теореме 16.1 в области  $G$  существуют регулярные ветви многозначной функции  $\operatorname{Ln} f(z)$ , то очевидно, что функция  $w(z)$ , задаваемая формулой (16.26), является регулярной ветвью многозначной функции  $\{(f(z))^a\}$ . Обозначим через  $h_0(z)$  - одну из регулярных ветвей функции  $\operatorname{Ln} f(z)$  в области  $G$ . Докажем, что формула (16.26) описывает все регулярные в области  $G$  ветви многозначной функции  $\{(f(z))^a\}$ .

Пусть  $g(z)$  - некоторая регулярная ветвь функции  $\{(f(z))^a\}$  в области  $G$ . По определению 16.2  $g(z) \neq 0$  при всех  $z \in G$ . Фиксируем точку  $z_0 \in G$  и круг  $B_r(z_0) \subset G$ , где  $r > 0$ . Для любой замкнутой кривой  $\gamma \subset B_r(z_0)$  по лемме 16.2 справедливо равенство  $\Delta_\gamma \arg g(z) = 0$ , в силу которого из теоремы 16.1 следует существование регулярной ветви многозначной функции  $\operatorname{Ln} g(z)$  в круге  $B_r(z_0)$ . Обозначим ее  $\varphi(z) \in \operatorname{Ln} g(z)$ , при этом  $e^{\varphi(z)} = g(z)$  в круге  $B_r(z_0)$ .

С другой стороны, так как по определению 16.2 имеем  $g(z) \in e^{a \operatorname{Ln} f(z)}$ , то при всех  $z \in B_r(z_0)$  существуют  $k(z) \in \mathbb{Z}$  такие, что  $g(z) = e^{a(h_0(z) + 2\pi i k(z))}$ . В силу равенства экспонент  $e^{a(h_0(z) + 2\pi i k(z))} = e^{\varphi(z)}$  существуют  $n(z) \in \mathbb{Z}$  такие, что  $\varphi(z) - ah_0(z) = 2\pi i k(z) + 2\pi i n(z)$  в круге  $B_r(z_0)$ . В этом равенстве слева - непрерывная функция, а справа - ступенчатая. По лемме 16.5 получаем, что это постоянная функция, т.е.  $k(z) = k_0$  и  $n(z) = n_0$ . В итоге  $g(z) = e^{a(h_{k_0}(z))}$ , где  $h_{k_0}(z) = h_0(z) + 2\pi i k_0$  - регулярная ветвь  $\operatorname{Ln} f(z)$  в круге  $B_r(z_0)$ . В силу теоремы 10.1 (единственности регулярной функции) равенство  $g(z) = e^{a(h_{k_0}(z))}$  сохраняется при всех  $z \in G$ .

## § 17. Примеры нахождения регулярных ветвей

Проиллюстрируем результаты предыдущего параграфа на примерах.

**ПРИМЕР 17.1.** Исследовать существование регулярных ветвей многозначной функции  $\{\sqrt[4]{z^3(z+1)}\}$  в области  $G := \mathbb{C} \setminus [-1, 0]$ . Для регулярной ветви  $g_1$  этой функции такой, что  $g_1(2) = \sqrt[4]{24}i$ , вычислить значения  $g_1(i)$  и  $g_1'(i)$ .

**РЕШЕНИЕ.** Проверим выполнение условий теоремы 16.2 о существовании регулярных ветвей данной многозначной функции в заданной области  $G$ .

Функция  $f(z) := z^3(z+1)$  регулярна и  $f(z) \neq 0$  в области  $G$ . Пусть  $\gamma$  — замкнутая кусочно-гладкая кривая, принадлежащая области  $G$ , заданная с помощью кусочно-гладкой параметризации  $z = z(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $z(0) = z(1) = z_0 \in G$ . Так как  $z(t) \in G$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ , то  $z(t) \neq \alpha$  для каждого  $\alpha \in [-1, 0]$ .

Определим функцию  $z(t, \alpha) := z(t) - \alpha$ , где  $t \in [0, 1]$ ,  $\alpha \in [-1, 0]$ . Это непрерывная деформация (см. определение 14.3) в области  $G$ , причем  $z(t, \alpha) \neq 0 \forall t, \alpha$  и  $\frac{z(1, \alpha)}{z(0, \alpha)} = \frac{z_0 - \alpha}{z_0 - \alpha} \equiv 1$  при всех  $\alpha \in [-1, 0]$ . По свойству устойчивости к деформации (теорема 14.3) получаем, что

$$I(\alpha) := \Delta_{[0,1]} \arg z(t, \alpha) = \text{const} \quad \forall \alpha \in [-1, 0].$$

Таким образом,  $I(0) = I(-1)$ , т. е.

$$\Delta_{\gamma} \arg z = \Delta_{\gamma} \arg(z+1). \quad (17.1)$$

Отсюда и по логарифмическому свойству (теорема 14.2) получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{\gamma} \arg z^3(z+1) &= 3\Delta_{\gamma} \arg z + \Delta_{\gamma} \arg(z+1) \stackrel{(17.1)}{=} \\ &\stackrel{(17.1)}{=} 4\Delta_{\gamma} \arg z = 4(2\pi k_{\gamma}) = (2\pi \cdot 4)k_{\gamma}, \end{aligned}$$

т. е. выполнены все условия теоремы 16.2, откуда следует, что в области  $G$  существуют регулярные ветви многозначной функции  $\{\sqrt[4]{z^3(z+1)}\}$ .

По формуле (16.19) регулярная ветвь  $g$  имеет вид

$$g_1(z) = (24)^{1/4} \cdot i \cdot \sqrt[4]{\left| \frac{z^3(z+1)}{24} \right|} e^{\frac{i}{4}(3\Delta_\gamma \arg z + \Delta_\gamma \arg(z+1))}, \quad (17.2)$$

где  $\gamma$  — кривая с началом в точке  $a = 2$  и концом в точке  $z$ .

Таким образом, для вычисления значения  $g_1(i)$  возьмем отрезок  $\gamma = [2, i]$  и вычислим вдоль него приращения аргументов  $z$  и  $z + 1$ . Так как приращение аргумента  $z$  вдоль кривой  $\gamma$  есть угол поворота радиус-вектора  $\overrightarrow{0z}$  при непрерывном движении  $z$  по кривой  $\gamma$  от начальной точки к конечной, то (см. рис. 17.1) получаем, что  $\Delta_\gamma \arg z = \frac{\pi}{2}$ . В свою очередь, приращение аргумента  $z + 1$  вдоль кривой  $\gamma$  есть угол поворота радиус-вектора  $\overrightarrow{(-1)z}$  при непрерывном движении  $z$  по кривой  $\gamma$  от начальной точки к конечной, то (см. рис. 17.1) получаем, что  $\Delta_\gamma \arg(z + 1) = \frac{\pi}{4}$ . В итоге, в силу (17.2) получаем

$$g_1(i) = 2^{\frac{1}{8}} \cdot e^{\frac{15}{16}\pi i}.$$

Так как из формулы (16.22) следует, что

$$g'_1(z) = \frac{4z^3 + 3z^2}{4(g_1(z))^3}, \text{ то}$$

$$g'_1(i) = \frac{-3 - 4i}{4} \cdot 2^{-\frac{3}{8}} \cdot e^{-\frac{13}{16}\pi i}.$$

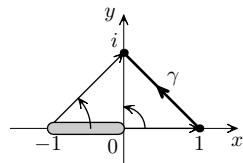


Рис. 17.1

**ПРИМЕР 17.2.** Исследовать существование регулярных ветвей у многозначной функции  $\text{Ln} \frac{z}{z+1}$  в области  $G := \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [0, +\infty))$ . Описать значения регулярной ветви  $h$  этой функции с начальным условием  $h\left(-\frac{1}{2}\right) = i\pi$ . Вычислить  $h(i)$ ,  $h'(i)$ .

**РЕШЕНИЕ.** Здесь функция  $f(z) := \frac{z}{z+1}$  регулярна и  $f(z) \neq 0$  в области  $G$ . Так как данная область  $G$  является односвязной, то по лемме 16.2 справедливо равенство (16.8). Следовательно, выполнены условия теоремы 16.1 о существовании регулярных ветвей данной многозначной функции. Более того, регулярная ветвь, удовлетворяющая заданным условиям, имеет вид (см. формулу (16.15))

$$h(z) = i\pi + \ln \frac{\left| \frac{z}{z+1} \right|}{\left| \frac{-1/2}{1-1/2} \right|} + i(\Delta_\gamma \arg z - \Delta_\gamma \arg(z+1)), \quad (17.3)$$

где  $\gamma$  — кусочно-гладкая кривая в области  $G$  с началом в точке  $a = -1/2$  и концом в точке  $z$ . В частности, вычисляя соответствующие приращение аргумента  $z$  и приращение аргумента  $z + 1$ , получаем из формулы (17.3)

$$h(i) = i\pi + \ln \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left( -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = -\ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4}.$$

Используя формулу (16.22) о дифференцировании регулярных ветвей логарифма, получаем

$$h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z(z+1)}, \quad \text{т. е.} \quad h'(i) = -\frac{1+i}{2}.$$

**ПРИМЕР 17.3.** Пусть задана регулярная ветвь  $h$  многозначной функции  $\text{Ln}(1 - z^2)$  в комплексной плоскости с разрезом по лучу действительной оси  $(-\infty, 1]$  такая, что  $\text{Im } h\left(\frac{i}{5}\right) = 0$ . Разложить функцию  $h$  в ряд Тейлора с центром в точке  $a = -i$ . Найти радиус сходимости полученного степенного ряда. Вычислить сумму ряда и его производную в точке  $z = \frac{i}{5}$ .

**РЕШЕНИЕ.** Так как заданная область  $G := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$  односвязна, а функция  $f(z) := 1 - z^2$  регулярна и  $f(z) \neq 0$  в этой области, то в силу леммы 16.2 и теоремы 16.1 регулярные ветви функции  $\text{Ln}(1 - z^2)$  существуют в данной области  $G$ . Так как  $h\left(\frac{i}{5}\right) = \ln \left| 1 - \left(\frac{i}{5}\right)^2 \right| + i \text{Im } h\left(\frac{i}{5}\right)$ , то  $h\left(\frac{i}{5}\right) = \ln \frac{26}{25}$ . По формуле (16.15) вычислим значение  $h(-i)$ :

$$\begin{aligned} h(-i) &= \ln \frac{26}{25} + \ln \left| \frac{1 - i^2}{26/25} \right| + i(\Delta_\gamma \arg(z - 1) + \\ &\quad + \Delta_\gamma \arg(z + 1) + \Delta_\gamma \arg(-1)) = \\ &= \ln 2 + i \left( - \left( 2\pi - \frac{\pi}{4} - \arctg \frac{1}{5} \right) + \left( -\arctg \frac{1}{5} - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \\ &= \ln 2 - 2\pi i. \end{aligned} \quad (17.4)$$

Здесь  $\gamma$  есть кусочно-гладкая кривая с началом в точке  $\frac{i}{5}$  и концом в точке  $-i$ .

Для разложения функции  $h$  в ряд Тейлора с центром в точке  $-i$  сделаем замену переменного. Пусть  $\zeta = z + i$ . Тогда  $h(z) = h(\zeta - i) = \hat{h}(\zeta)$ , причем  $\hat{h}(0) = h(-i) = \ln 2 - 2\pi i$ . По опреде-

лению ветви логарифма получаем

$$\begin{aligned}\tilde{h}(\zeta) \in \operatorname{Ln} (1 - (\zeta - i)^2) &= \operatorname{Ln} \left( 2 \left( 1 - \frac{\zeta}{1+i} \right) \left( 1 - \frac{\zeta}{i-1} \right) \right) = \\ &= \operatorname{Ln} 2 + \operatorname{Ln} \left( 1 - \frac{\zeta}{1+i} \right) + \operatorname{Ln} \left( 1 - \frac{\zeta}{i-1} \right). \quad (17.5)\end{aligned}$$

Как показано нами ранее (см. пример 9.4), многозначная функция  $\operatorname{Ln}(1+z)$  в круге  $B_1(0)$  имеет регулярные ветви, для которых были выписаны ряды Тейлора. Поэтому в круге  $|\zeta| < \sqrt{2}$  многозначные функции  $\operatorname{Ln} \left( 1 - \frac{\zeta}{1+i} \right)$  и  $\operatorname{Ln} \left( 1 - \frac{\zeta}{i-1} \right)$  также имеют регулярные ветви. В частности, возьмем их регулярные ветви  $h_+(\zeta)$  и  $h_-(\zeta)$ , соответственно, такие, чтобы  $h_+(0) = h_-(0) = 0$ . Тогда по формуле (9.15) их ряды Тейлора в круге  $|\zeta| < \sqrt{2}$  имеют вид

$$h_+(\zeta) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta^k}{k(1+i)^k}, \quad h_-(\zeta) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta^k}{k(i-1)^k}, \quad (17.6)$$

причем радиус сходимости этих рядов равен  $R = \sqrt{2}$ .

Из включения (17.5) в силу (17.6) получаем включение  $\tilde{h}(\zeta) - h_+(\zeta) - h_-(\zeta) \in \operatorname{Ln} 2$ , т. е.

$$\tilde{h}(\zeta) - h_+(\zeta) - h_-(\zeta) = \ln 2 + 2\pi k(\zeta)i. \quad (17.7)$$

Так как слева в равенстве (17.7) стоит непрерывная функция, а справа — ступенчатая, то заключаем, что  $k(\zeta) = \operatorname{const}$ . Положив  $\zeta = 0$ , получаем в силу (17.4), что  $k(\zeta) \equiv -1$ .

Объединяя выражения (17.6) и (17.7), получаем представление функции  $h$  в виде степенного ряда

$$h(z) = \ln 2 - 2\pi i - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{1}{(1+i)^k} + \frac{1}{(i-1)^k} \right) (z+i)^k. \quad (17.8)$$

Уточним, при каких  $z$  справедливо равенство (17.8). Приведенный в формуле (17.8) степенной ряд, очевидно, является регулярной ветвью функции  $\operatorname{Ln}(1-z^2)$  в круге сходимости ряда  $|z+i| < \sqrt{2}$ . Обозначим сумму этого ряда через  $S(z)$  при  $z \in B_{\sqrt{2}}(-i)$ . Заданная на  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1)$  функция  $h$  на разрезе  $(-1, 1)$  имеет разрыв. В самом деле, при  $x \in (-1, 1)$  для любой

жордановой кривой  $\gamma \subset G$ , с началом на нижнем краю разреза в точке  $x - i0$  и концом на верхнем краю разреза в точке  $x + i0$  и совершающего обход точки  $z = 1$  справа, по формуле (16.15) получаем

$$\begin{aligned} h(x + i0) &= h(x - i0) + i(\Delta_\gamma \arg(z - 1) + \Delta_\gamma \arg(z + 1)) = \\ &= h(x - i0) + i(2\pi + 0). \end{aligned}$$

При  $x < -1$  аналогично доказывается, что  $h(x + i0) = h(x - i0) + 4\pi i$ . Следовательно, равенство (17.8) имеет место лишь на множестве  $\{z \mid |z + i| < \sqrt{2}, \operatorname{Im} z < 0\}$ . В свою очередь на множестве  $\{z \mid |z + i| < \sqrt{2}, \operatorname{Im} z > 0\}$  за счет скачка значений функции  $h(z)$  при пересечении границы области  $G$  получаем равенство  $h(z) = S(z) + 2\pi i$ . В частности,  $S\left(\frac{i}{5}\right) = h\left(\frac{i}{5}\right) - 2\pi i = \ln \frac{26}{25} - 2\pi i$ .

Так как функция  $S(z)$  является регулярной ветвью многозначной функции  $\operatorname{Ln}(1 - z^2)$  в круге  $V_{\sqrt{2}}(-i)$ , то по формуле (16.22) из для регулярной ветви логарифма получаем

$$S'(z) = \frac{-2z}{1 - z^2}, \quad \text{т. е.} \quad S'\left(\frac{i}{5}\right) = -\frac{5i}{13}.$$

Решение закончено.

Зафиксируем число  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \notin \mathbb{N}$ .

Исследуем регулярные ветви многозначной функции  $\{(1 + z)^a\}$  в круге  $V_1(0)$ .

В силу определения 16.2 и теоремы 16.3 у многозначной функции  $\{(1 + z)^a\}$  существуют регулярные ветви, также как существуют регулярные ветви у функции  $\operatorname{Ln}(1 + z)$  в круге  $V_1(0)$ , которые будем обозначать  $h_k(z)$ , где  $h_k(0) = 2\pi ki$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Тогда соответствующие регулярные ветви многозначной функции  $\{(1 + z)^a\}$  принимают вид

$$w_k(z) = e^{ah_k(z)}, \quad w_k(0) = e^{2\pi kai}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (17.9)$$

Вычислим коэффициенты ряда Тейлора функции  $w_k(z)$  в круге  $V_1(0)$ . По правилу дифференцирования сложной функ-



ции (теорема 5.1) получаем

$$\begin{aligned} w'_k(z) &= w_k(z) \cdot \frac{a}{1+z}, \quad \text{т. е.} \quad w'_k(0) = a \cdot w_k(0), \\ w''_k(z) &= w_k(z) \cdot \frac{a(a-1)}{(1+z)^2}, \quad \text{т. е.} \quad w''_k(0) = a(a-1) \cdot w_k(0), \\ w^{(n)}_k(z) &= w_k(z) \cdot \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{(1+z)^n}. \end{aligned} \quad (17.10)$$

Из соотношений (17.10) и из формулы для коэффициентов ряда Тейлора с центром в точке нуль получаем

$$w_k(z) = w_k(0) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} C_a^n z^n, \quad (17.11)$$

где  $C_a^n := \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{n!}$ .

**ПРИМЕР 17.4.** Разложить в ряд Тейлора по степеням  $z$  регулярную ветвь  $g(z)$  многозначной функции  $\{\sqrt[3]{1-z^2}\}$  в области  $B_1(0)$  с начальным значением  $g(0) = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ .

По формуле (17.11) сразу получаем ответ (при  $a = \frac{1}{3}$ ):

$$g(z) = e^{\frac{2\pi i}{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/3}^n (-1)^n z^{2n}, \quad z \in B_1(0).$$

**ПРИМЕР 17.5.** Установить существование регулярных ветвей многозначной функции  $\{\sqrt[4]{z^3(z+1)}\}$  в области  $\mathring{B}_1(\infty)$ , разложить эти ветви в ряд Лорана по степеням  $z$ .

**РЕШЕНИЕ.** Так как множество  $\mathring{B}_1(\infty) \subset \mathbb{C} \setminus [-1, 0]$ , то, как показано в примере 17.1, регулярные ветви функции  $\{\sqrt[4]{z^3(z+1)}\}$  в области  $G_1 = \mathring{B}_1(\infty)$  существуют, при этом они определяются своим значением в одной произвольно выбранной точке  $z_0 \in G_1$ .

Пусть  $z_0 = 2$ , тогда любая регулярная ветвь  $g_k(z)$  определяется из значения  $g_k(2) = \sqrt[4]{24} e^{\frac{2\pi ki}{4}}$ , т. е.  $g_k(z) = e^{\frac{\pi ki}{2}} \cdot g_0(z)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ .

Для всякого действительного числа  $x > 2$  получаем в силу (16.24) формулу

$$g_0(x) = \sqrt[4]{x^3(x+1)} e^{\frac{i}{4}(3\Delta_\gamma \arg z + \Delta_\gamma \arg(z+1))}.$$

В этой формуле кривая  $\gamma$  есть отрезок  $[2, x]$ , поэтому  $\Delta_\gamma \arg z = 0$ ,  $\Delta_\gamma \arg(z + 1) = 0$ , откуда  $g_0(x) = \sqrt[4]{x^3(x + 1)}$ , т. е. значения функции при действительных  $x > 2$  совпадает с арифметическим значением корня. Воспользовавшись разложением в ряд Тейлора функции действительного переменного, получим при  $x > 2$ :

$$g_0(x) = x \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} = x \sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/4}^n \frac{1}{x^n}. \quad (17.12)$$

Так как регулярные в области  $\mathring{B}_1(\infty)$  функция  $g_0(z)$  и сумма ряда  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/4}^n \frac{1}{z^{n-1}}$  равны на действительной полуоси  $x > 2$ , то по теореме единственности регулярной функции (см. теорему 10.1) указанные функции равны в  $\mathring{B}_1(\infty)$ . В итоге получаем равенство

$$g_k(z) = e^{\frac{\pi k i}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/4}^n \frac{1}{z^{n-1}}, \quad |z| > 1, \quad (17.13)$$

которое в силу теоремы 11.2 о единственности разложения в ряд Лорана является представлением регулярной ветви  $g_k$  искомым рядом Лорана в окрестности бесконечности.

## § 18. Примеры вычисления интегралов от регулярных ветвей многозначных функций

При вычислении с помощью теории вычетов интегралов от действительных функций, являющихся ветвями многозначных функций (таких как корень или логарифм), основной проблемой является построение областей в комплексной плоскости, в которых существуют регулярные ветви этих многозначных функций, и кривых интегрирования, при использовании которых можно получить решение исходной задачи.

**ПРИМЕР 18.1.** Вычислить интеграл

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x \, dx}{(1+x)^2 \sqrt[3]{x}}.$$

**РЕШЕНИЕ.** Для вычисления этого интеграла с помощью вычетов в комплексной области мы вынуждены рассматривать многозначные функции  $\operatorname{Ln} z$  и  $\{\sqrt[3]{z}\}$ .

Определим области  $G := \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$  и  $G_{\varepsilon, R} := \{z \in G \mid \varepsilon < |z| < R\}$ , где  $0 < \varepsilon < 1 < R$ . В области  $G$  у многозначной функции  $\operatorname{Ln} z$  существует регулярная ветвь вида  $h(z) = \ln |z| + i \arg z$ , а у функции  $\{\sqrt[3]{z}\}$  существует регулярная ветвь вида  $g(z) = \sqrt[3]{|z|} e^{\frac{i}{3} \arg z}$ , где в обоих случаях  $\arg z \in (0, 2\pi)$ . Определим функцию

$$f(z) := \frac{h(z)}{(1+z)^2 g(z)},$$

и рассмотрим ее в односвязной области  $G_{\varepsilon, R}$  (см. рис. 18.1).

Очевидно, что эта функция  $f$  регулярна в области  $G_{\varepsilon, R} \setminus \{-1\}$  и непрерывно продолжима вплоть до границы  $\gamma_{\varepsilon, R}$  области  $G_{\varepsilon, R}$ . При этом предельное значение функции  $f$  на верхнем берегу  $I_{\varepsilon, R}^+$  разреза по отрезку  $[\varepsilon, R]$  равно

$$f(x + i0) = \frac{\ln x}{(1+x)^2 \sqrt[3]{x}}, \quad x \in I_{\varepsilon, R}^+. \quad (18.1)$$

Предельное значение функции  $f$  на нижнем берегу  $I_{\varepsilon, R}^-$  разреза

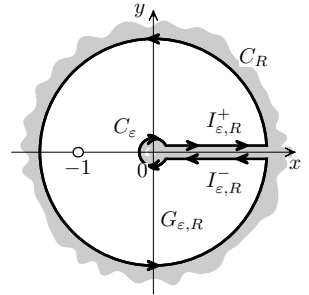


Рис. 18.1

равно

$$f(x - i0) = \frac{\ln x + 2\pi i}{(1+x)^2 \sqrt[3]{x} e^{\frac{2\pi i}{3}}}, \quad x \in I_{\varepsilon, R}^-. \quad (18.2)$$

Точка  $z = -1$  является полюсом 2-го порядка функции  $f$ . По теореме о вычетах и по формуле (13.4) из получаем

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{res}_{-1} f = 2\pi i \frac{d}{dz} \left[ \frac{h(z)}{g(z)} \right]_{z=-1} = \\ &= 2\pi i \left. \frac{g(z)h'(z) - h(z)g'(z)}{g^2(z)} \right|_{z=-1} = 2\pi i \left. \frac{\frac{1}{z} g(z) - \frac{1}{3} \frac{g(z)}{z} h(z)}{g^2(z)} \right|_{z=-1} = \\ &= \left( -1 + \frac{i\pi}{3} \right) \cdot 2\pi i e^{-i\frac{\pi}{3}}. \end{aligned} \quad (18.3)$$

С другой стороны, разбивая кривую  $\gamma_{\varepsilon, R}$  на гладкие компоненты, т. е.  $\gamma_{\varepsilon, R} = I_{\varepsilon, R}^+ \cup I_{\varepsilon, R}^- \cup C_{\varepsilon} \cup C_R$ , где  $C_{\varepsilon}$  и  $C_R$  — окружности с центром в нуле радиусов  $\varepsilon$  и  $R$  соответственно, имеем

$$\int_{\gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz = \left( \int_{I_{\varepsilon, R}^+} + \int_{I_{\varepsilon, R}^-} + \int_{C_{\varepsilon}} + \int_{C_R} \right) f(z) dz.$$

В итоге в силу равенств (18.1) и (18.2) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz &= \int_{\varepsilon}^R \frac{\ln x dx}{(1+x)^2 \sqrt[3]{x}} + \int_R^{\varepsilon} \frac{\ln x + 2\pi i}{(1+x)^2 \sqrt[3]{x} e^{\frac{2\pi i}{3}}} dx + \\ &+ \int_{C_{\varepsilon}} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz = \\ &= \left( 1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}} \right) \int_{\varepsilon}^R \frac{\ln x dx}{(1+x)^2 \sqrt[3]{x}} - 2\pi i e^{-\frac{2\pi i}{3}} \int_{\varepsilon}^R \frac{dx}{(1+x)^2 \sqrt[3]{x}} + \\ &+ \int_{C_{\varepsilon}} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Покажем, что интеграл  $\int_{C_{\varepsilon}} f(z) dz \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , и интеграл

$\int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow +\infty$ .

Для этого получим оценки

$$\left| \int_{C_\varepsilon} f(z) dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{|\ln \varepsilon| + 2\pi}{(1 - \varepsilon)^2 \varepsilon^{1/3}} \varepsilon d\varphi \leq \frac{(|\ln \varepsilon| + 2\pi) 2\pi \varepsilon}{(1 - \varepsilon)^2 \varepsilon^{1/3}} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (18.5)$$

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{|\ln R| + 2\pi}{(R - 1)^2 R^{1/3}} R d\varphi \sim 2\pi \frac{|\ln R|}{R^{4/3}} \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow +\infty. \quad (18.6)$$

Итак, в пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow +\infty$  из формул (18.3)–(18.6) получаем равенство

$$\left( -1 + \frac{i\pi}{3} \right) 2\pi i e^{-i\frac{\pi}{3}} = \left( 1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}} \right) J - 2\pi i e^{-\frac{2\pi i}{3}} \tilde{J},$$

где  $\tilde{J} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^2 \sqrt[3]{x}}$ , т. е.

$$\left( -1 + \frac{i\pi}{3} \right) \pi = \sin \frac{\pi}{3} \cdot J - \pi \left( \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \tilde{J}. \quad (18.7)$$

Приравняв в равенстве (18.7) действительные и мнимые части, получаем два уравнения

$$-\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} J - \frac{\pi}{2} \tilde{J}, \quad \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \tilde{J} = \frac{\pi^2}{3},$$

откуда

$$\tilde{J} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \quad J = \left( \frac{\pi^2}{3\sqrt{3}} - \pi \right) \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

**ПРИМЕР 18.2.** Вычислить интеграл вида

$$J = \int_0^2 \frac{\sqrt[4]{x^3(2-x)}}{(1+x)^2} dx$$

**РЕШЕНИЕ.** Чтобы вычислить этот интеграл с помощью теории вычетов, необходимо продолжить подынтегральную функцию в комплексную плоскость. Однако при этом корень становится многозначной функцией  $\{\sqrt[4]{z^3(2-z)}\}$ . Поэтому необходимо, чтобы у этой многозначной функции существовали регулярные ветви. Последняя проблема разрешима, так как эта

функция допускает выделение регулярных ветвей в области  $G = \mathbb{C} \setminus [0, 2]$ , выполнены все условия теоремы 16.2. (Проверьте самостоятельно аналогично примеру 17.1.)

Выберем теперь такую регулярную ветвь этого корня, которая в пределе на верхнем берегу  $I^+$  разреза по отрезку  $[0, 2]$  принимает значения арифметического корня  $\sqrt[4]{x^3(2-x)} \geq 0$ ,  $x \in [0, 2]$ . Для этого выбираем регулярную в области  $\mathbb{C} \setminus [0, 2]$  ветвь  $g$  многозначной функции  $\{\sqrt[4]{z^3(2-z)}\}$  такую, что ее предел в точке  $z = 1$  из верхней полуплоскости равен

$$g(1+i0) = 1. \quad (18.8)$$

Тогда очевидно, что предельное значение ветви в любой точке  $x \in (0, 2)$  из верхней полуплоскости (т.е. на берегу  $I^+$  разреза) равно  $g(x+i0) = \sqrt[4]{x^3(2-x)} > 0$ . Предельное значение функции  $g$  в точках  $x \in (0, 2)$  из нижней полуплоскости, т.е. на берегу  $I^-$  разреза по отрезку  $[0, 2]$ , принимает по формуле (16.24) значение

$$\begin{aligned} g(x-i0) &= \sqrt[4]{|x^3(2-x)|} e^{\frac{i}{4}(3\Delta_\gamma \arg z + \Delta_\gamma \arg(2-z))} = \\ &= g(x+i0) e^{\frac{i}{4}(3 \cdot 2\pi + 0)} = g(x+i0) e^{\frac{3}{2}\pi i}. \end{aligned} \quad (18.9)$$

В формуле (18.9) кривая  $\gamma$  начинается в точке  $1+i0$  на верхнем берегу разреза и оканчивается в точке  $x-i0$  на нижнем берегу разреза.

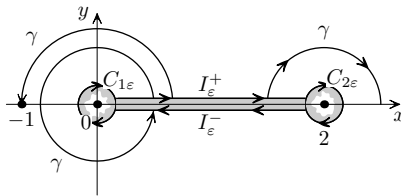


Рис. 18.2

двух берегов  $I_+^{\epsilon}$  и  $I_-^{\epsilon}$  разреза по отрезку  $[\epsilon, 2-\epsilon]$ .

Ориентируем полученную кривую  $\gamma_\epsilon$  положительно по отношению к ограниченной им внешней части плоскости (см. рис. 18.2). Пусть  $f(z) := \frac{g(z)}{(1+z)^2}$ . Так как функцию  $f$  можно непрерывно продолжить на кривую  $\gamma_\epsilon$ , то рассмотрим интеграл

Пусть  $\epsilon \in (0, 1)$ . Рассмотрим в области  $G$  кривую  $\gamma_\epsilon$ , имеющую вид *гантели* (см. рис. 18.2), т.е. составленную из окружностей  $C_{0\epsilon}$  и  $C_{2\epsilon}$  радиуса  $\epsilon$  и центрами в точках 0 и 2 соответственно, а также

$$J_\varepsilon := \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz.$$

По теореме о вычетах, с одной стороны, и из формы кривой  $\gamma_\varepsilon$  с другой, получаем равенства

$$J_\varepsilon = 2\pi i \left( \operatorname{res}_{-1} f + \operatorname{res}_\infty f \right) = \left( \int_{I_\varepsilon^+} + \int_{I_\varepsilon^-} + \int_{C_{0\varepsilon}} + \int_{C_{2\varepsilon}} \right) f(z) dz. \quad (18.10)$$

Так как точка  $z = -1$  есть полюс 2-го порядка функции  $f$  то, воспользовавшись соответствующей формулой (13.4) и формулой (16.22), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{-1} f &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} [(z+1)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{dg(z)}{dz} = \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \left[ \frac{(z^3(2-z))'}{4g^3(z)} \right] = \frac{5}{2g^3(-1)}. \end{aligned}$$

Вычислим значение  $g(-1)$ . Взяв кривую  $\gamma$  с началом в точке  $1 + i0$ , лежащей на верхнем крае  $I_\varepsilon^+$ , и концом в точке  $-1$ , по формуле (16.24) получаем

$$g(-1) = \sqrt[4]{3} e^{\frac{i}{4}(3\Delta_\gamma \arg z + \Delta_\gamma \arg(2-z))} = \sqrt[4]{3} e^{\frac{i}{4}(\pi \cdot 3 + 0)}.$$

В итоге

$$\operatorname{res}_{-1} f = \frac{5}{2 \cdot 3^{3/4}} e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

Для вычисления  $\operatorname{res}_\infty f$  выпишем ряд Лорана по степеням  $z$  функции  $f$  в окрестности  $\infty$ . Пусть  $z = x$  — произвольное действительное число такое, что  $x > 2$ . Тогда по той же формуле (16.24) получаем (здесь кривая  $\gamma$  с началом в точке  $1 + i0$  на  $I_\varepsilon^+$  и концом в точке  $x > 2$ )

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt[4]{x^3(x-2)} e^{\frac{i}{4}(3\Delta_\gamma \arg z + \Delta_\gamma \arg(z-2))} = \\ &= x \sqrt[4]{1 - \frac{2}{x}} e^{\frac{i}{4}(0-\pi)} = e^{-\frac{\pi i}{4}} x \sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/4}^n \left( -\frac{2}{x} \right)^n. \end{aligned}$$

Аналогично тому, как это доказано в примере 17.4, отсюда и из теоремы 10.1 единственности следует равенство

$$g(z) = e^{-\frac{\pi i}{4}} z \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/4}^n \frac{(-2)^n}{z^n}, \quad |z| > 2. \quad (18.11)$$

Для удобства вычислений в силу формулы (18.11) преобразуем функцию  $f$  к виду

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)^2} h(z), \text{ где } h(z) = e^{-\frac{\pi i}{4}} \sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/4}^n \frac{(-2)^n}{z^n}. \quad (18.12)$$

Так как по формуле (17.11) из справедливо следующее разложение в сходящийся при  $|z| > 1$  ряд:

$$\frac{z}{(1+z)^2} = \frac{1}{z \left(1 + \frac{1}{z}\right)^2} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2} + \dots\right), \quad (18.13)$$

то, перемножая ряды (18.12) и (18.13), получаем, что

$$\operatorname{res}_{\infty} f = -h(\infty) = -e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

Оценим интегралы по окружностям  $C_{0\varepsilon} = \{z \mid |z| = \varepsilon\}$  и  $C_{2\varepsilon} = \{z \mid |z - 2| = \varepsilon\}$ :

$$\left| \int_{C_{0\varepsilon}} f(z) dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt[4]{|\varepsilon^3(2+\varepsilon)|}}{(1-\varepsilon)^2} \varepsilon d\varphi \leq A \cdot \varepsilon^{7/4} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\left| \int_{C_{2\varepsilon}} f(z) dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt[4]{(2+\varepsilon)^3 \varepsilon}}{(3-\varepsilon)^2} \varepsilon d\varphi \leq B \cdot \varepsilon^{5/4} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

В силу формул (18.8) и (18.9) получаем выражения

$$\int_{I_{\varepsilon}^{+}} f dz = \int_{\varepsilon}^{2-\varepsilon} \frac{\sqrt[4]{x^3(2-x)}}{(1+x)^2} dx,$$

$$\int_{I_{\varepsilon}^{-}} f dz = \int_{2-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{g(x-i0)}{(1+x)^2} dx = - \int_{\varepsilon}^{2-\varepsilon} \frac{g(x+i0)e^{\frac{3}{2}\pi i}}{(1+x)^2} dx = -e^{\frac{3}{2}\pi i} \int_{I_{\varepsilon}^{+}} f dz.$$

Переходя в формуле (18.10) к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем равенство

$$2\pi i \left( \frac{5}{2 \cdot 3^{3/4}} - 1 \right) e^{-\frac{\pi}{4}i} = J \left( 1 - e^{\frac{3}{2}\pi i} \right),$$

т. е.

$$\pi \left( \frac{5}{2 \cdot 3^{3/4}} - 1 \right) = \frac{e^{\frac{\pi}{4}i} - e^{-\frac{\pi}{4}i}}{2i} J, \quad J = \sqrt{2}\pi \left( \frac{5}{2 \cdot 3^{3/4}} - 1 \right).$$



ЗАМЕЧАНИЕ 18.1. Здесь был приведен общий метод вычисления интегралов типа  $\beta$ -функции. Решение же конкретного примера 18.2 можно было упростить. Так как подынтегральная функция  $f$  непрерывно продолжаема на границу области  $G = \mathbb{C} \setminus [0, 2]$  (с различными значениями на верхнем и нижнем берегах разреза  $(0, 2)$ ), включая концевые точки 0 и 2, то вместо интеграла по «гантеле»  $\gamma_\varepsilon$  можно было по теории вычетов вычислять интеграл по двум берегам  $I^+$  и  $I^-$  разреза по всему отрезку  $[0, 2]$ .

Если бы функция корня (18.8) стояла в знаменателе подынтегральной функции  $f$ , то без гантели  $\gamma_\varepsilon$  не обойтись.

ПРИМЕР 18.3. Пусть регулярная ветвь  $g$  многозначной функции  $\{\sqrt{z^2 - 4}\}$  определена в области  $G$ , представляющей собой комплексную плоскость с разрезом по полуокружности  $|z| = 2$ ,  $\text{Im } z \geq 0$  (см. рис. 18.3), причем главная часть ряда Лорана функции  $g$  в окрестности  $z = \infty$  равна  $z$ . Вычислить интеграл

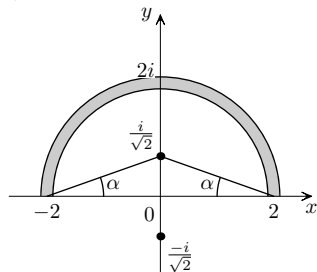


Рис. 18.3

$$J = \int_{|z|=1} \frac{dz}{g(z) - 3z}.$$

РЕШЕНИЕ. Аналогично предыдущим примерам прежде всего следует проверить, что в заданной области действительно существуют регулярные ветви функции  $\{\sqrt{z^2 - 4}\}$ . (Докажите это самостоятельно.)

Для вычисления интеграла  $J$  по теории вычетов надо найти особые точки подынтегральной функции, т. е. точки, в которых справедливо равенство  $g(z) = 3z$ . Чтобы их найти, заметим, что из этого равенства следует  $g^2(z) = (3z)^2$ . Так как по определению корня  $g^2(z) = z^2 - 4$ , то получаем равенство  $z^2 - 4 = 9z^2$ , т. е.  $z_{1,2} = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$  — точки, в которых возможно равенство  $g(z) = 3z$ .

Вычислим значения  $g\left(\pm \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ . Для этого удобно вначале вычислить значение функции  $g$  в конечной точке, например, в

точке  $z = 0$ . Допустим, что мы знаем значение  $g(0)$ . Тогда для любого действительного числа  $x > 2$  вычислим значение  $g(x)$  по формуле (16.23) (взяв кривую  $\gamma$ , идущую из точки  $z = 0$  в точку  $x$ ):

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) \sqrt{\left| \frac{x^2 - 4}{4} \right|} e^{\frac{i}{2}(\Delta_\gamma \arg(z-2) + \Delta_\gamma \arg(z+2))} = \\ &= g(0) \frac{x}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} e^{\frac{i}{2}(\pi+0)} = \frac{i}{2} g(0) \cdot x \left( 1 - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right). \end{aligned}$$

Последнее выражение получено с помощью ряда Тейлора для функции действительного переменного. По теореме 10.1 о единственности регулярной функции отсюда следует, что

$$g(z) = \frac{i}{2} g(0) \left( z - \frac{2}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad |z| > 2.$$

Так как по условию задачи главная часть ряда Лорана функции  $g$  в  $\infty$  равна  $z$ , отсюда получаем, что  $g(0) = -2i$ . Теперь по формуле (16.23) легко вычислить значения  $g\left(\pm \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ :

$$g\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -2i \sqrt{\left| \frac{-0,5 - 4}{4} \right|} e^{\frac{i}{2}(-\operatorname{arctg} 2\sqrt{2} + \operatorname{arctg} 2\sqrt{2})} = -\frac{3i}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично  $g\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3i}{\sqrt{2}}$ . Отсюда знаменатель  $(g(z) - 3z)$  обращается в нуль только в точке  $z = -\frac{i}{\sqrt{2}}$ . Так как

$g'(z) = \frac{z}{g(z)}$ , то  $g'\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3} \neq 3$ . Таким образом, точка  $z = -\frac{i}{\sqrt{2}}$  есть полюс 1-го порядка подынтегральной функции

$f(z) = \frac{1}{g(z) - 3z}$ . В итоге вычисляем интеграл по теореме о вычетах

$$J = 2\pi i \operatorname{res}_{-\frac{i}{\sqrt{2}}} f = 2\pi i \frac{1}{g'\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) - 3} = -\frac{3\pi i}{4}.$$

## § 19. Целые и мероморфные функции

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19.1.** Функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , регулярная во всей комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , называется *целой*.

По теореме 9.2 целая функция  $f$  представима в виде сходящегося во всей комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \quad |z| < +\infty, \quad (19.1)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta. \quad (19.2)$$

Очевидно, что ряд (19.1) одновременно является рядом Лорана функции  $f$  с центром в точке  $\infty$ .

**ТЕОРЕМА 19.1.** Пусть для целой функции  $f$  существуют действительные числа  $A > 0$ ,  $R > 0$  и целое число  $m \geq 0$ , при которых справедливо неравенство

$$|f(z)| \leq A|z|^m, \quad \forall z: |z| > R. \quad (19.3)$$

Тогда функция  $f$  является многочленом степени не выше, чем  $m$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По формуле (19.2) для коэффициентов  $c_n$  при любом  $r > R$  получаем оценку

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{r^{n+1}} |d\zeta| \leq \frac{Ar^m}{2\pi r^{n+1}} \cdot 2\pi r = Ar^{m-n}. \quad (19.4)$$

Так как неравенство (19.4) справедливо для любых  $r > R$ , то при любом  $n > m$  из оценки (19.4) следует, что  $|c_n|$  меньше сколь угодно малого числа  $Ar^{m-n}$  (при  $r \rightarrow \infty$ ), т. е.  $c_n = 0$  при  $n > m$ . Следовательно, из ряда (19.1) получаем, что функция  $f$  есть многочлен степени не выше, чем  $m$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 19.1 (ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ).** Если целая функция  $f$  ограничена в некоторой окрестности бесконечности, то она постоянна.

С помощью теоремы Лиувилля докажем основную теорему алгебры.

ТЕОРЕМА 19.2. *Всякий многочлен*

$$P_n(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n,$$

где  $c_n \neq 0$ ,  $n \geq 1$ , имеет по крайней мере один нуль в плоскости  $\mathbb{C}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное, пусть многочлен  $P_n$  не равняется нулю ни при каком  $z \in \mathbb{C}$ . Тогда определим функцию  $g(z) := \frac{1}{P_n(z)}$ , которая в силу допущения будет целой. При  $z \rightarrow \infty$  имеем  $P_n(z) \rightarrow \infty$ , т. е.  $g(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ . Следовательно, функция  $g$  ограничена в некоторой окрестности  $\mathring{B}_{R_1}(\infty)$ . Тогда по теореме Лиувилля функция  $g(z) \equiv \text{const}$ , что противоречит определению функции  $g$ .  $\square$

Анализируя поведение произвольной целой функции  $f$  на бесконечности, получаем три возможности:

- 1)  $\infty$  — устранимая особая точка, т. е. функция  $f$  ограничена в некоторой окрестности  $\mathring{B}_{R_1}(\infty)$ , откуда по теореме Лиувилля следует, что  $f(z) \equiv \text{const}$ ;
- 2)  $\infty$  — полюс, т. е. существует  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ . Это значит, что главная часть разложения функции  $f$  в ряд Лорана по степеням  $z$  в окрестности  $\infty$ , который совпадает с рядом (19.1), содержит конечное число слагаемых, т. е. функция  $f$  есть многочлен;
- 3)  $\infty$  — существенно особая точка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19.2. Целая функция, у которой бесконечность является существенно особой точкой, называется *целой трансцендентной функцией*.

Примерами целых трансцендентных функций являются функции  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\text{sh } z$ ,  $\text{ch } z$ .

ТЕОРЕМА 19.3 (СОХОЦКИЙ). Пусть задана произвольная целая трансцендентная функция  $f$ . Тогда для любого  $A \in \overline{\mathbb{C}}$  найдется последовательность  $\{z_n\}$ , стремящаяся к бесконечности, и такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть  $A = \infty$ . Так как для любого  $n \in \mathbb{N}$  на множестве  $|z| > n$  функция  $f$  не ограничена (в противном случае  $\infty$  была бы устранимой особой точкой функции  $f$ ,

т.е. функция  $f$  не была бы трансцендентной), то существует точка  $z_n$ ,  $|z_n| > n$ , такая, что  $|f(z_n)| > n$ . В итоге получаем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty$ , что и требовалось доказать.

2. Пусть  $A \neq \infty$ . Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда существуют числа  $\varepsilon_0 > 0$  и  $\delta_0 > 0$  такие, что для всех  $z$ ,  $|z| > \delta_0$  справедливо неравенство  $|f(z) - A| > \varepsilon_0$ .

Рассмотрим функцию  $g(z) = \frac{1}{f(z) - A}$ . Она в силу допущения регулярна в области  $\mathring{B}_{\delta_0}(\infty)$ , причем в этой области справедлива оценка  $|g(z)| < 1/\varepsilon_0$ . То есть  $\infty$  есть устранимая особая точка функции  $g$ , поэтому существует предел  $B = \lim_{z \rightarrow \infty} g(z)$ , где  $B \in \mathbb{C}$ . Так как  $f(z) = A + \frac{1}{g(z)}$ , то функция  $f$  тоже при  $z \rightarrow \infty$  имеет конечный предел, если  $B \neq 0$ , или бесконечный предел, если  $B = 0$ . Это противоречит условию теоремы, по которому  $\infty$  есть существенно особая точка функции  $f$ . Следовательно, наше допущение оказывается неверным, и теорема доказана.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 19.1. Пусть для целой функции  $f$  существуют числа  $A > 0$ ,  $R_1 > 0$  и целое  $m \geq 0$ , при которых справедливо неравенство

$$|f(z)| \geq A|z|^m, \quad \forall z : |z| > R_1.$$

Докажите, что тогда  $f$  является многочленом. (Сравните с теоремой 19.1.)

ЗАМЕЧАНИЕ 19.1. Так как при доказательстве теоремы Сохоцкого используется лишь то, что бесконечность есть существенно особая точка функции  $f$ , то аналогично можно доказать следующую более общую теорему.

ТЕОРЕМА 19.4 (Сохоцкий). Пусть функция  $f: \mathring{B}_\varepsilon(a) \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна, а точка  $a \in \overline{\mathbb{C}}$  — существенно особая точка функции  $f$ . Тогда для любого числа  $A \in \mathbb{C}$  найдется последовательность  $\{z_n\}$ , сходящаяся к точке  $a$ , и такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ .

Более сильный результат, характеризующий поведение целой трансцендентной функции, описан в следующей теореме, которую приводим без доказательства.

**ТЕОРЕМА 19.5 (ПИКАР).** Пусть задана целая трансцендентная функция  $f$ . Тогда в каждой окрестности бесконечности функция  $f$  принимает, и притом бесконечное число раз, любое значение из  $\mathbb{C}$ , кроме, быть может, одного.

Иначе говоря, теорема Пикара утверждает, что если  $f$  — целая трансцендентная функция, то для всякого  $A \in \mathbb{C}$ , за исключением, быть может, одного, уравнение  $f(z) = A$  имеет бесконечное число решений  $\{z_n\}$ . При этом в следствие теоремы единственности  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ .

Рассмотрим, например, функцию  $w = e^z$ . Для любого  $A \neq 0$  уравнение  $e^z = A$  имеет решения  $z_n = \ln |A| + i(\arg_{\text{гд}} A + 2\pi n)$ , где  $\arg_{\text{гд}} A \in (-\pi, \pi]$ ,  $n$  — любое целое число. Здесь число  $A = 0$  является как раз тем исключительным по теореме Пикара значением.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19.3.** Функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  называется *мероморфной*, если для каждого  $R > 0$  она регулярна в круге  $B_R(0)$ , за исключением, быть может, конечного числа полюсов.

Приведем примеры мероморфных функций.

1) Рациональные функции вида  $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ , где  $P_n(z)$  и  $Q_m(z)$  — многочлены степени  $n$  и  $m$  соответственно. Эта функция имеет конечное число полюсов в  $\mathbb{C}$ .

2) Функция  $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$  имеет счетное число полюсов 1-го порядка в точках  $z_k = \pi k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ .

3) Функция  $\frac{z}{e^z - 1}$  имеет полюсы 1-го порядка в точках  $z_k = 2\pi ki$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \neq 0$ .

Пусть задана мероморфная функция  $f$  и пусть  $\{z_k\} \subset \mathbb{C}$  — все ее полюсы. Для каждого полюса  $z_k \in \mathbb{C}$  порядка  $m_k$  найдется проколота окрестность  $\mathring{B}_{\delta_k}(z_k)$ , в которой функция  $f$  представима в виде сходящегося ряда Лорана

$$f(z) = \frac{c_{-m_k}^k}{(z - z_k)^{m_k}} + \dots + \frac{c_{-1}^k}{z - z_k} + c_0^k + c_1^k(z - z_k) + \dots \quad (19.5)$$

Обозначим главную часть этого ряда Лорана с центром в точке

$z_k$  через  $q_k(z)$ , т. е.

$$q_k(z) := \frac{c_{-m_k}^k}{(z - z_k)^{m_k}} + \dots + \frac{c_{-1}^k}{z - z_k}. \quad (19.6)$$

**ТЕОРЕМА 19.6.** *Если мероморфная функция  $f$  имеет в бесконечности устранимую особую точку или полюс, то она является рациональной функцией.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Число всех полюсов такой функции  $f$  конечно, так как иначе, в силу компактности расширенной комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  будет существовать предельная точка полюсов, которая в силу определения мероморфной функции не может быть конечной точкой и не может быть бесконечностью (это противоречит условию теоремы). Обозначим через  $\{z_k\}_{k=1}^l$  все конечные полюсы функции  $f$ , через  $q_k$  — главную часть (19.6) каждого ряда Лорана функции  $f$  с центром в точке  $z_k$ . Обозначим также

$$q_0(z) := c_1 z + \dots + c_n z^n$$

главную часть ряда Лорана функции  $f$  с центром в бесконечности. Определим функцию

$$r(z) := f(z) - \sum_{k=0}^l q_k(z).$$

Эта функция в силу своего определения в каждой точке  $z_k$ , где  $k \in \overline{1, l}$ , а также в бесконечности имеет устранимые особенности. Поэтому, если доопределить ее в этих точках по непрерывности, и так как других особенностей у функции  $r$  нет, то получаем, что функция  $r$  является целой и ограниченной в некоторой окрестности бесконечности. По теореме Лиувилля это означает, что  $r(z) \equiv a_0$ . Таким образом, справедливо равенство

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=0}^l q_k(z), \quad (19.7)$$

т. е. функция  $f$  является рациональной.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 19.2.** В теореме 19.6 также доказана формула (19.7), широко употребляемая в математическом анализе,

о возможности представления рациональной функции  $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$  в виде суммы элементарных дробей.

Покажем, как утверждение теоремы 19.6 можно развить на случай мероморфной функции со счетным числом полюсов.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19.4.** Систему простых замкнутых кусочно-гладких положительно ориентированных кривых  $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$  назовем правильной, если выполнены три условия:

- 1) Для любого  $n$  область, ограниченная кривой  $\Gamma_n$  содержится внутри области, ограниченной кривой  $\Gamma_{n+1}$ , причем точка 0 содержится внутри кривой  $\Gamma_1$ .
- 2) Обозначим  $d_n := \min \{|z| \mid z \in \Gamma_n\}$ . Требуется, чтобы  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$ .
- 3) Обозначим  $l_n :=$  длина кривой  $\Gamma_n$ . Требуется, чтобы существовало число  $A > 0$  такое, что  $l_n \leq A d_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Приведем простейшие примеры правильных систем кривых.

1. Окружности с центрами в точке 0 и радиусами  $R_n = n \in \mathbb{N}$ .

2. Квадраты с центрами в точке 0 и диагоналями на осях координат длины  $n \in \mathbb{N}$ .

**ТЕОРЕМА 19.7 (КОШИ).** Пусть для заданной мероморфной функции  $f$  существует правильная система кривых  $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$  такая, что выполнены два дополнительных условия:

1. Пусть  $\varepsilon_n := \max \{|f(z)| \mid z \in \Gamma_n\}$ . Требуется, чтобы  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ .
2. Полюсы  $\{z_k\}$  функции  $f$  пронумерованы так, что для любого  $n \in \mathbb{N}$  область, ограниченная кривой  $\Gamma_n$ , содержит ровно  $n$  первых по порядку полюсов функции  $f$ , причем на самой кривой  $\Gamma_n$  полюсов функции  $f$  нет.

Тогда функция  $f$  представима в виде суммы ряда элементарных дробей вида

$$f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} q_k(z), \quad (19.8)$$

где функции  $q_k$  определены в формуле (19.6). Более того, для



любого  $R > 0$  в круге  $B_R(0)$ , из которого выброшены точки полюсов функции  $f$ , ряд (19.8) сходится равномерно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякого  $n \in \mathbb{N}$  определим функции

$$S_n(z) := \sum_{k=1}^n q_k(z), \quad (19.9)$$

$$r_n(z) := f(z) - S_n(z). \quad (19.10)$$

Зафиксируем  $n \in \mathbb{N}$ . Внутри кривой  $\Gamma_n$  по условию теоремы содержится ровно  $n$  различных полюсов  $z_1, z_2, \dots, z_n$  функции  $f$ . В силу определений (19.9), (19.10) для функции  $r_n$  каждая точка  $z_k$ ,  $k \in \overline{1, n}$ , является устранимой особой точкой, так как ее ряд Лорана в проколотой  $\delta_k$ -окрестности точки  $z_k$  есть разность между суммой ряда Лорана функции  $f$  в этой окрестности и  $S_n(z)$  — суммой главных частей рядов Лорана функции  $f$  с центрами в полюсах, в том числе и с центром в данной точке  $z_k$ . Доопределив функцию  $r_n$  в каждой точке  $z_k$  при  $k \in \overline{1, n}$  соответствующим значением предела, получаем, что функция  $r_n$  регулярна внутри  $\Gamma_n$  и непрерывна на замыкании области, ограниченной кривой  $\Gamma_n$ . По интегральной формуле Коши (теорема 8.1) в любой точке  $z$ , принадлежащей области, ограниченной кривой  $\Gamma_n$ , получаем

$$\begin{aligned} r_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{r_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{S_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned} \quad (19.11)$$

Вычислим  $I_{1n}(z) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{S_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$  с помощью вычетов (теорема 13.1). Здесь подынтегральная функция регулярна всюду, кроме полюсов в точках  $\zeta = z$ ,  $\zeta = z_1, \dots, \zeta = z_n$ . Вне кривой  $\Gamma_n$  она регулярна, и поэтому

$$I_{1n}(z) = \operatorname{res}_{\infty} \frac{S_n(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Так как в силу равенств (19.6) и (19.9) получаем сумму

$$\frac{S_n(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{m_k} \frac{c_{-l}^k}{(\zeta - z)(\zeta - z_k)^l},$$

в которой каждое слагаемое представимо в виде

$$\frac{c_{-l}^k}{(\zeta - z)(\zeta - z_k)^l} = c_{-l}^k \left( \frac{1}{\zeta^{l+1}} + o\left(\frac{1}{\zeta^{l+1}}\right) \right),$$

где  $l + 1 \geq 2$ , то по формуле вычетов (13.12) получаем

$$\operatorname{res}_{\infty} \frac{S_n(\zeta)}{\zeta - z} = 0, \text{ т. е. } I_{1n}(z) \equiv 0.$$

В итоге справедливо равенство

$$r_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

из которого получаем оценку

$$|r_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| |d\zeta| \leq \frac{l_n}{2\pi} \max \left\{ \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| \mid \zeta \in \Gamma_n \right\}. \quad (19.12)$$

Зафиксируем произвольное число  $R > 0$ . Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$  (по условию 2 определения 19.4), то найдется номер  $N_0$  такой, что для всех  $n \geq N_0$ ,  $d_n > 2R$ . В силу условия 3 определения 19.4 для всех  $z \in B_R(0)$  и всех  $n \geq N_0$  получаем оценку

$$|r_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon_n}{d_n - R} l_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R}{d_n}} \cdot \frac{l_n}{d_n} \leq \frac{\varepsilon_n}{\pi} A.$$

Отсюда и из равенства  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$  (условие 1 теоремы) следует, что последовательность функций  $r_n$  сходится равномерно на  $B_R(0)$  к нулю. Это значит, что последовательность функций  $S_n = f - r_n$  равномерно сходится к функции  $f$  в круге  $B_R(0)$  всюду, за исключением тех точек, где функция  $f$  не определена, т. е. за исключением точек ее полюсов.  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 19.2.** Пусть в теореме 19.7 выполнены все условия, за исключением условия 1, вместо которого выполнено условие

1') существуют числа  $C > 0$  и  $m \in \mathbb{N}$  такие, что справедливо неравенство

$$\varepsilon_n := \max \{ |f(z)| \mid z \in \Gamma_n \} \leq C \cdot (d_n)^m, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (19.13)$$

где  $d_n$  — см. в определении 19.4. Тогда, если точка нуль не являлась полюсом функции  $f$ , то добавляя еще одну достаточно малую окружность с центром в нуле, содержащуюся внутри кривой  $\Gamma_1$ , получаем, что для функции  $\frac{f(z)}{z^{m+1}}$  выполнены усло-

вия теоремы 19.7, по которой можно получить разложение ее в ряд элементарных дробей, откуда, в свою очередь, легко получается ряд элементарных дробей для функции  $f$ .

**ПРИМЕР 19.1.** Разложить функцию  $w = \operatorname{ctg} z$  в ряд элементарных дробей.

**РЕШЕНИЕ.** Так как точки  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = \pi$ ,  $z_3 = -\pi$ ,  $z_4 = 2\pi \dots$ , — полюсы 1-го порядка, то строим правильную систему кривых  $\Gamma_n$  в виде квадратов, изображенных на рисунке. Каждый квадрат  $\Gamma_n$  имеет стороны длины  $\pi n$ , параллельные осям координат, причем при нечетных  $n$  центр квадрата  $\Gamma_n$  находится в точке 0, а при четных  $n$  — в точке  $\pi/2$  (см. рис. 19.1).

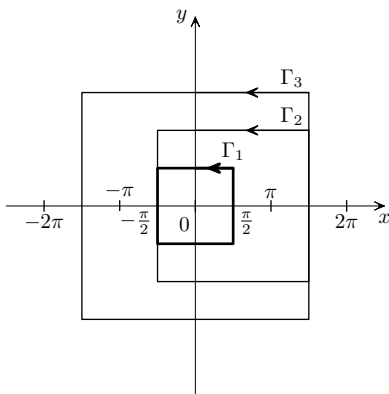


Рис. 19.1

Эта система квадратов правильная, так как  $d_n \geq (n-1) \frac{\pi}{2}$ ,  $l_n = 4\pi n$ , т. е.  $l_n/d_n \leq 16$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Проверим условия теоремы 19.7.

1) Оценим  $\max \{ |\operatorname{ctg} z| \mid z \in \Gamma_n \}$ . На вертикальных сторонах квадрата  $\Gamma_n$ , имеющих вид:  $z = \frac{\pi}{2} + iy + \pi m$ , получаем

$$\frac{\left| \cos \left( \frac{\pi}{2} + iy + \pi m \right) \right|}{\left| \sin \left( \frac{\pi}{2} + iy + \pi m \right) \right|} = \frac{|\sin iy|}{|\cos iy|} = \left| \frac{e^{-y} - e^y}{e^{-y} + e^y} \right| \leq 1.$$

На горизонтальных сторонах квадрата  $\Gamma_n$ , имеющих вид:  $z = x + iy_n$ ,  $|y_n| = \frac{\pi}{2} n$ , получаем по формулам Эйлера

$$\begin{aligned} |\operatorname{ctg} z| &= \frac{|e^{ix-y_n} + e^{-ix+y_n}|}{|e^{ix-y_n} - e^{-ix+y_n}|} \leq \frac{|e^{ix-y_n}| + |e^{-ix+y_n}|}{||e^{ix-y_n}| - |e^{-ix+y_n}||} \leq \\ &\leq \frac{e^{-y_n} + e^{y_n}}{|e^{-y_n} - e^{y_n}|} = \frac{1 + e^{-2|y_n|}}{1 - e^{-2|y_n|}} < 2. \end{aligned}$$

В итоге, функция  $|\operatorname{ctg} z|$  ограничена на квадратах  $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

2) Каждый квадрат  $\Gamma_n$  содержит внутри себя ровно  $n$  полюсов и на  $\Gamma_n$  нет полюсов.

Таким образом, функция  $\frac{\operatorname{ctg} z}{z}$  удовлетворяет всем условиям теоремы 19.7. Найдем главные части разложений в ряд Лорана функции  $\frac{\operatorname{ctg} z}{z}$  в ее полюсах:

1. В полюсе  $z = 0$  получаем

$$\frac{\operatorname{ctg} z}{z} = \frac{\cos z}{z \sin z} = \frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \dots}{z^2 \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots\right)} = \frac{1}{z^2} + c_0 + \dots,$$

т. е.  $q_0(z) = \frac{1}{z^2}$ .

2. Остальные полюсы  $z_k = \pi k$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ , будут 1-го порядка, т. е.

$$q_k = \frac{\operatorname{res} f}{z - z_k}; \quad \operatorname{res} f = \left. \frac{\frac{\cos z}{z}}{(\sin z)'} \right|_{z=\pi k} = \frac{1}{\pi k}.$$

По теореме 19.7 получаем разложение в сумму ряда элементарных дробей

$$\frac{\operatorname{ctg} z}{z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{k \neq 0 \\ k=-\infty}}^{+\infty} \frac{1}{\pi k(z - \pi k)},$$

откуда

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} z &= \frac{1}{z} + \sum_{\substack{k \neq 0 \\ k=-\infty}}^{+\infty} \frac{(z - \pi k) + \pi k}{\pi k(z - \pi k)} = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{k \neq 0 \\ k=-\infty}}^{+\infty} \left( \frac{1}{\pi k} + \frac{1}{z - \pi k} \right) = \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{\pi k} + \frac{1}{z - \pi k} + \frac{1}{-\pi k} + \frac{1}{z + \pi k} \right). \end{aligned}$$

В итоге получаем ответ

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{z - \pi k} + \frac{1}{z + \pi k} \right).$$

## § 20. Принцип аргумента. Теорема Руше

**ТЕОРЕМА 20.1.** Пусть задана односвязная область  $G$  и замкнутая простая кусочно-гладкая положительно ориентированная кривая  $\gamma$  в области  $G$ . Пусть функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна в  $G \setminus \left( \bigcup_{k=1}^s a_k \right)$ , где  $\{a_k\}_{k=1}^s$  — полюсы функции  $f$ , причем все  $\{a_k\}$  лежат внутри кривой  $\gamma$ . Пусть  $f(z) \neq 0$  при всех  $z \in \gamma$ . Тогда справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P, \quad (20.1)$$

где  $N$  и  $P$  — число нулей и полюсов функции  $f$  внутри кривой  $\gamma$  с учетом их порядков.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как функция  $f$  тождественно не равна нулю, то по теореме 10.1 (единственности) функция  $f$  внутри кривой  $\gamma$  может иметь лишь конечное число нулей. Обозначим через  $b_1, b_2, \dots, b_n$  все нули функции  $f$  внутри кривой  $\gamma$  (если они существуют).

Для всякого нуля  $b = b_k$  порядка  $m$  функции  $f$  в некоторой окрестности  $B_\delta(b)$  справедливо представление

$$f(z) = (z - b)^m g(z), \quad (20.2)$$

где функция  $g$  регулярна и  $g(z) \neq 0$  при всех  $z \in B_\delta(b)$ . Тогда в проколотой окрестности  $\mathring{B}_\delta(b)$  получаем

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z - b)^{m-1}g(z) + (z - b)^m g'(z)}{(z - b)^m g(z)} = \frac{m}{z - b} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \quad (20.3)$$

Так как функция  $\frac{g'(z)}{g(z)}$  регулярна в окрестности  $B_\delta(b)$ , то

$$\operatorname{res}_b \frac{f'}{f} = m, \quad (20.4)$$

т.е. вычет в каждой точке  $b$ , являющейся нулем функции  $f$ , равен порядку этого нуля.

Для всякого полюса  $a = a_k$  порядка  $l$  в силу следствия 12.1 в некоторой окрестности  $B_\varepsilon(a)$  имеем представление функции  $f$

$$f(z) = \frac{p(z)}{(z-a)^l}, \quad (20.5)$$

где функция  $p$  регулярна и  $p(z) \neq 0$  при всех  $z \in B_\varepsilon(a)$ . Тогда, проведя вычисления, в проколотовой окрестности  $\mathring{B}_\varepsilon(a)$  получаем

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-l}{z-a} + \frac{p'(z)}{p(z)}. \quad (20.6)$$

Так как функция  $\frac{p'(z)}{p(z)}$  регулярна в окрестности  $B_\varepsilon(a)$ , то

$$\operatorname{res}_a \frac{f'}{f} = -l,$$

т. е. вычет в каждой точке  $a$ , являющейся полюсом функции  $f$ , равняется порядку этого полюса со знаком минус. По теореме о вычетах, суммируя вычеты по всем особым точкам интегрируемой в (20.1) функции, т. е. по всем нулям и полюсам функции  $f$ , получаем в итоге формулу (20.1).  $\square$

Геометрический смысл теореме 20.1 придает следующее следствие.

**СЛЕДСТВИЕ 20.1 (ПРИНЦИП АРГУМЕНТА).** *В условиях теоремы 20.1 справедлива формула*

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg f(z) = N - P, \quad (20.7)$$

где  $N$  и  $P$  — числа нулей и полюсов функции  $f$  с учетом их порядков, принадлежащих ограниченной области  $D$ , границей которой является кривая  $\gamma$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу условий теоремы 20.1 кривая  $\Gamma_0 := f(\gamma)$  является замкнутой кусочно-гладкой кривой и  $0 \notin \Gamma_0$ . В силу определения 16.1 имеем

$$\Delta_{\gamma} \arg f(z) = \Delta_{[0,1]} \arg f(z(t)) = \Delta_{\Gamma_0} \arg w, \quad (20.8)$$

где  $z = z(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  — некоторая кусочно-гладкая параметризация кривой  $\gamma$ , причем  $z(0) = z(1)$ .

Так как  $f(z(0)) = f(z(1))$ , то элементарной проверкой убеждаемся (см., например, формулу (15.21)) в том, что

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma_0} \frac{dw}{w} = \ln |w| \Big|_{w=f(z(0))}^{f(z(1))} = 0.$$

Отсюда и по теореме 14.1 получаем

$$\Delta_{\Gamma_0} \arg w = \frac{1}{i} \int_{\Gamma_0} \frac{dw}{w}. \quad (20.9)$$

В свою очередь, выражая кривую  $\Gamma_0$  через параметризацию  $w = f(z(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ , получаем

$$\int_{\Gamma_0} \frac{dw}{w} = \int_0^1 \frac{f'(z(t))z'(t) dt}{f(z(t))} = \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (20.10)$$

Таким образом, в силу выражений (20.8), (20.9), (20.10) получим

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = i \Delta_{\gamma} \arg f(z). \quad (20.11)$$

В итоге из теоремы 20.1 и равенства (20.11) получаем формулу (20.7).  $\square$

**ТЕОРЕМА 20.2 (РУШЕ).** Пусть заданы регулярные в односвязной области  $G$  функции  $f, g: G \rightarrow \mathbb{C}$  и замкнутая простая кусочно-гладкая кривая  $\gamma \subset G$ , такие, что справедливо неравенство

$$|f(z)| > |g(z)|, \quad \forall z \in \gamma. \quad (20.12)$$

Тогда функция  $f$  и функция  $h := f + g$  имеют в области  $D$ , ограниченной кривой  $\gamma$ , одинаковое число нулей с учетом их порядков.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу условия (20.12) получаем, что  $f(z) \neq 0$  при всех  $z \in \gamma$ , и  $|h(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$ , т. е.  $h(z) \neq 0$  при всех  $z \in \gamma$ .

Обозначим через  $N_f$  и  $N_h$  числа нулей функций  $f$  и  $h$  в области  $D$  с учетом их порядков. По теореме 20.1 в силу леммы 16.1

получаем

$$\begin{aligned} N_h &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg h(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg \left[ f(z) \left( 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg f(z) + \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg \left( 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right). \quad (20.13) \end{aligned}$$

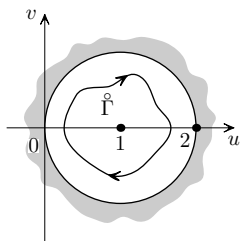


Рис. 20.1

Оценим второе слагаемое в равенстве (20.13). Функция  $w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$  определена на кривой  $\hat{\gamma}$ , и при движении по этой кривой ее значения описывают некоторую замкнутую кривую  $\hat{\Gamma}$ . В силу неравенства (20.12) кривая  $\hat{\Gamma}$  принадлежит области  $|w - 1| = \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$ , т. е. кривая  $\hat{\Gamma}$  принадлежит односвязной области  $|w - 1| < 1$ , не содержащей точку нуль (см. рис. 20.1). Поэтому, например, в силу леммы 16.2 (в которой нужно взять  $f(z) \equiv z$ ) справедливо равенство  $\Delta_{\hat{\Gamma}} \arg w = 0$ . Так как  $\Delta_{\hat{\Gamma}} \arg w = \Delta_{\gamma} \arg \left( 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right)$ , то второе слагаемое в (20.13) равно нулю, что и доказывает теорему.  $\square$

**ТЕОРЕМА 20.3 (ГАУСС).** *Всякий многочлен  $n$ -й степени*

$$P_n(z) := z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_0 \quad (20.14)$$

*имеет в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  ровно  $n$  нулей с учетом их порядков.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Определим две функции

$$f(z) := z^n, \quad g(z) := c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_0.$$

Так как функция  $\frac{g(z)}{z^n} \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ , то существует число  $R_0 > 0$  такое, что для всякого  $R \geq R_0$  справедливо неравенство  $\left| \frac{g(z)}{z^n} \right| < 1$  при  $|z| = R$ . По теореме Руше число нулей функции  $P_n$  внутри окружности  $\gamma_R := \{z \mid |z| = R\}$  равно числу нулей функции  $f(z) = z^n$  внутри  $\gamma_R$  с учетом их порядков. Так как точка 0 есть нуль функции  $z^n$  порядка  $n$ , то многочлен  $P_n$  в



любом круге  $B_R(0)$ ,  $R > R_0$ , имеет ровно  $n$  нулей с учетом их порядков, а в силу произвольности  $R > R_0$  многочлен  $P_n$  имеет ровно  $n$  нулей с учетом их порядков во всей плоскости  $\mathbb{C}$ .  $\square$

**ПРИМЕР 20.1.** Рассмотрим функцию Жуковского вида  $f(z) := \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  и при любом  $R > 1$  две окружности  $\gamma_1 := \{z \mid |z| = R\}$  и  $\gamma_2 := \{z \mid |z| = \frac{1}{R}\}$ , положительно ориентированные.

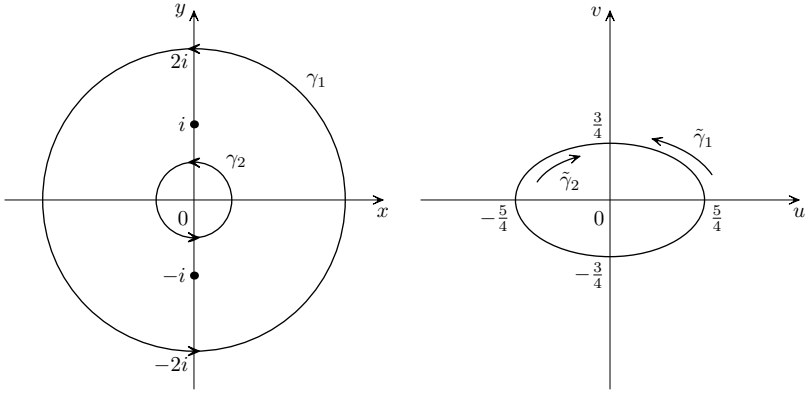


Рис. 20.2

Функция Жуковского имеет нули первого порядка в точках  $i$ ,  $-i$ , а точка  $z = 0$  является полюсом 1-го порядка. Поэтому в силу принципа аргумента получаем

$$\Delta_{\gamma_1} \arg f(z) = 2\pi(N - P) = 2\pi(2 - 1) = 2\pi,$$

$$\Delta_{\gamma_2} \arg f(z) = 2\pi(N - P) = 2\pi(0 - 1) = -2\pi.$$

Геометрически это значит, что окружность радиуса  $R > 1$  функцией Жуковского отображается в кривую (эллипс) с сохранением ориентации, а окружность радиуса  $\frac{1}{R}$  отображается в тот же эллипс с противоположной ориентацией (см. рис. 20.2).

## § 21. Геометрические принципы

В данном параграфе приведем основные геометрические принципы регулярных функций.

**ЛЕММА 21.1 (ОБ ОТКРЫТОСТИ).** Пусть заданы область  $G \subset \mathbb{C}$ , точка  $z_0 \in G$  и функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ , которая регулярна. Пусть  $w_0 = f(z_0)$  и

$$f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0, \quad (21.1)$$

где  $n \geq 2$ . Тогда существуют круг  $B_r(z_0) \subset G$  и круг  $B_\varepsilon(w_0)$ ,  $\varepsilon > 0$ , такие, что  $B_\varepsilon(w_0) \subset f(B_r(z_0))$  и для любой точки  $w_1 \in \mathring{B}_\varepsilon(w_0)$  уравнение  $f(z) = w_1$  имеет ровно  $n$  различных решений в круге  $B_r(z_0)$ . В этом случае говорят, что функция  $f$  является  $n$ -листной в круге  $B_r(z_0)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как по условию леммы  $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ , то  $f(z) \neq \text{const}$ . Тогда по теореме единственности нули этой регулярной функции изолированы друг от друга. Поэтому существует замкнутый круг  $\overline{B_r(z_0)} \subset G$  такой, что функции  $(f(z) - w_0)$  и  $f'(z)$  не обращаются в нуль на множестве  $\overline{B_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$ . Обозначим окружность  $\gamma_r := \{z \mid |z - z_0| = r\}$  и кривую  $\Gamma := f(\gamma_r)$ . Так как по построению  $w_0 \notin \Gamma$ , то существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что  $\varepsilon < \inf\{|w_0 - \zeta| \mid \zeta \in \Gamma\}$ , т.е.  $B_\varepsilon(w_0) \cap \Gamma = \emptyset$ . Поэтому для любого  $w_1 \in \mathring{B}_\varepsilon(w_0)$  справедливо неравенство

$$|w_0 - w_1| < \varepsilon < |f(z) - w_0|, \quad \forall z \in \gamma_r. \quad (21.2)$$

В силу этого неравенства по теореме 20.2 (Руше) «бóльшая» функция  $(f(z) - w_0)$  и суммарная функция  $(f(z) - w_1) = (f(z) - w_0) + (w_0 - w_1)$  имеют в круге  $B_r(z_0)$  одинаковое число нулей. По условию леммы функция  $(f(z) - w_0)$  имеет в круге  $B_r(z_0)$  один нуль (точку  $z_0$ ) порядка  $n$ . Следовательно у функции  $(f(z) - w_1)$  в круге  $B_r(z_0)$  имеется  $n$  нулей с учетом их порядков. Так как в силу выбора круга  $B_r(z_0)$  имеем, что  $f'(z) \neq 0$  в этом круге, то функция  $(f(z) - w_1)$  может иметь лишь нули первого порядка в круге  $B_r(z_0)$ . Таким образом доказали, что функция  $(f(z) - w_1)$  имеет ровно  $n$  различных нулей первого порядка, что и требовалось.  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 21.1.** Если функция  $f$  регулярна в окрестности точки  $z_0 \neq \infty$ , то условие  $f'(z_0) \neq 0$  является необходимым и достаточным для однолиственности отображения  $f$  в некоторой достаточно малой окрестности точки  $z_0$ , т. е. «однолиственности в малом».

Заметим, что условие  $f'(z_0) \neq 0$  не является достаточным для однолиственности в области, т. е. «однолиственности в большом». Например, функция  $w = e^z$  всюду удовлетворяет условию  $f'(z) \neq 0$ , но она не однолистна, например, в  $\mathbb{C}$ .

**ТЕОРЕМА 21.1 (ПРИНЦИП СОХРАНЕНИЯ ОБЛАСТИ).** Пусть функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна в области  $G$  и  $f(z) \neq \text{const}$ . Тогда при отображении  $f$  образом области  $G$  является область.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $G^*$  — образ области  $G$  при отображении  $f$ , т. е.  $G^* = f(G)$ .

1) Рассмотрим любую точку  $w_0 \in G^*$ , тогда существует точка  $z_0 \in G$  такая, что  $w_0 = f(z_0)$ . Так как точка  $z_0$  является внутренней точкой области  $G$ , то функция  $f$  регулярна в некоторой окрестности точки  $z_0$ , причем так как  $f(z) \neq \text{const}$ , то существует  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ . По лемме 21.1 существует круг  $B_\varepsilon(w_0)$ , входящий в  $G^*$ , т. е.  $w_0$  — внутренняя точка множества  $G^*$ , поэтому множество  $G^*$  открыто.

2) Докажем (линейную) связность множества  $G^*$ . Пусть точки  $w_0$  и  $w_1 \in G^*$ , тогда существуют точки  $z_0, z_1 \in G$  такие, что  $f(z_0) = w_0$  и  $f(z_1) = w_1$ . Так как множество  $G$  есть область, то существует кусочно-гладкая кривая  $\gamma \subset G$ , соединяющая точку  $z_0$  с точкой  $z_1$ . Тогда в силу определения  $f(\gamma) \subset G^*$ , т. е. кусочно-гладкая кривая  $f(\gamma)$  соединяет точки  $w_0$  и  $w_1$ .  $\square$

**ТЕОРЕМА 21.2 (ПРИНЦИП МАКСИМУМА МОДУЛЯ).** Пусть функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна в ограниченной области  $G$  и непрерывна в  $\bar{G} = G \cup \Gamma$ , где  $\Gamma$  — граница области  $G$ . Пусть  $f(z) \neq \text{const}$ . Тогда супремум модуля этой функции

$$\sup\{|f(z)| \mid z \in \bar{G}\}$$

достигается строго на границе  $\Gamma$  области  $G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим произвольную точку  $z_0 \in G$ . Для доказательства теоремы достаточно доказать, что существует точка  $z_1 \in G$  такая, что  $|f(z_1)| > |f(z_0)|$ . По теореме 21.1 образом области  $G$  является область  $G^*$ , и поэтому точка  $w_0 = f(z_0)$  является внутренней точкой образа, т.е. существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что справедливо включение  $B_\varepsilon(w_0) \subset G^*$ . Возьмем точку  $w_1 \in B_\varepsilon(w_0)$ , которая находится дальше от начала координат (см. рис. 21.1а), например,

$$w_1 = w_0 \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2|w_0|} \right), \quad |w_1| > |w_0|.$$

Так как  $w_1 \in G^*$ , то существует точка  $z_1 \in G$  такая, что  $f(z_1) = w_1$ , т.е.  $|f(z_1)| > |f(z_0)|$ .

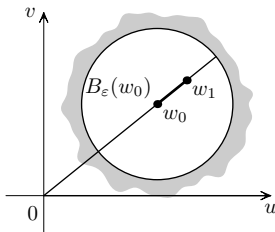


Рис. 21.1а

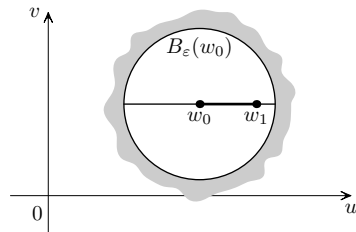


Рис. 21.1б

Следовательно,

$$\sup\{|f(z)| \mid z \in \Gamma\} = \sup\{|f(z)| \mid z \in \overline{G}\}.$$

В свою очередь, функция  $|f(z)|$  непрерывна на ограниченном замкнутом множестве  $\overline{G}$ , и поэтому она достигает свою точную верхнюю грань в некоторой точке границы.  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 21.2.** Если функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна в ограниченной области  $G$  и непрерывна в ее замыкании  $\overline{G}$ , причем  $f(z) \neq 0, \forall z \in \overline{G}$  и  $f(z) \neq \text{const}$ , то  $\inf\{|f(z)| \mid z \in \overline{G}\}$  достигается строго на границе области  $G$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 21.1.** Докажите следствие 21.2.

Еще одним важным следствием принципа максимума модуля является

ЛЕММА 21.2 (ШВАРЦ). Пусть функция  $f: B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна в круге  $B_1(0)$ , ограничена:  $|f(z)| \leq 1$  для всех  $z \in B_1(0)$  и  $f(0) = 0$ . Тогда справедлива оценка

$$|f(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in B_1(0). \quad (21.3)$$

Если в неравенстве (21.3) достигается равенство хотя бы в одной точке  $z_0 \in B_1(0)$ ,  $z_0 \neq 0$ , то оно справедливо всюду в  $B_1(0)$  и существует  $\alpha \in \mathbb{R}^1$  такое, что  $f(z) = e^{i\alpha}z$ , при всех  $z \in B_1(0)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию  $g(z) := \frac{f(z)}{z}$ . В силу условия  $f(0) = 0$  функция  $g$  имеет в нуле устранимую особенность, т.е. доопределяя ее по непрерывности в нуле, получаем, что  $g$  регулярна в круге  $B_1(0)$ . По принципу максимума модуля для любого  $r \in (0, 1)$  максимум  $|g(z)|$  в круге  $B_r(0)$  достигается на границе  $\gamma_r := \{z \mid |z| = r\}$ . Отсюда и по условию леммы ( $|f(z)| \leq 1$ ) получаем оценку

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r}, \quad \forall z \in B_r(0). \quad (21.4)$$

Зафиксируем произвольное  $z_0 \in B_1(0)$ . Так как справедливо включение  $z_0 \in B_r(0)$  при любом  $r \in (|z_0|, 1)$ , то из оценки (21.4) имеем  $|g(z_0)| \leq \frac{1}{r}$  при всех  $r \in (|z_0|, 1)$ . Устремляя  $r \rightarrow 1$ , получаем  $|g(z_0)| \leq 1$ , т.е.  $|f(z_0)| \leq |z_0|$ , т.е. оценка (21.3) доказана.

Допустим, что существует точка  $z_1 \in B_1(0)$ ,  $z_1 \neq 0$ , в которой в неравенстве (21.3) имеет место равенство. Тогда функция  $g$  достигает свой максимум в этой внутренней точке, т.е.  $|g(z_1)| = 1$ . Но по принципу максимума модуля это возможно только в случае, когда  $g$  константа, т.е. найдется  $\alpha \in \mathbb{R}^1$  такое, что  $g(z) = e^{i\alpha}$ . Тогда  $f(z) = e^{i\alpha}z$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 21.2. Покажите, что в условиях леммы Шварца справедливо неравенство  $|f'(0)| \leq 1$ , в котором равенство возможно лишь в случае, когда  $f(z) = e^{i\alpha}z$ .

ТЕОРЕМА 21.3 (ПРИНЦИП МАКСИМУМА И МИНИМУМА ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ). Пусть функция  $u: G \rightarrow \mathbb{R}^1$  гармо-

нична в ограниченной области  $G \subset \mathbb{R}^2$  и непрерывна на ее замыкании  $\overline{G} = G \cup \Gamma$ . Пусть  $u(x, y) \neq \text{const}$ . Тогда максимум и минимум этой функции достигаются на границе области  $G$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Допустим противное. Пусть в точке  $(x_0, y_0) \in G$  достигается  $\max \{u(x, y) \mid (x, y) \in G\}$ . Так как множество  $G$  есть область, то точка  $z_0 = x_0 + iy_0$  является внутренней точкой множества  $G$ , и существует число  $r > 0$  такое, что круг  $B_r(z_0) \subset G$ .

Как показано в теореме 4.2, существует регулярная функция  $f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  такая, что  $\text{Re } f(z) = u(x, y)$ . (Напомним, что надо взять

$$v(x, y) := \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

и

$$f(z) := u(x, y) + iv(x, y)).$$

Пусть  $w_0 = f(z_0)$ . По теореме 21.1 существует круг  $B_\varepsilon(w_0)$  такой, что  $B_\varepsilon(w_0) \subset f(B_r(z_0))$ . Возьмем в круге  $B_\varepsilon(w_0)$  точку  $w_1$  правее  $w_0$ , т.е.  $\text{Re } w_1 > \text{Re } w_0$  (см. рис. 21.1б), причем существует точка  $z_1 \in B_r(z_0)$  такая, что  $f(z_1) = w_1$ . Тогда  $\text{Re } f(z_1) = u(x_1, y_1) > u(x_0, y_0)$ , что противоречит допущению. Следовательно, допущение неверно.

2. Доказательство утверждения о минимуме следует из первой части доказательства о максимуме, так как  $\min u(x, y) = -\max(-u(x, y))$ , а функция  $-u(x, y)$  также является гармонической функцией.  $\square$

Для гармонической функции  $u(x, y)$  удобно ввести обозначение:  $u(z) := u(x, y)$ , где  $z = x + iy$ .

ТЕОРЕМА 21.4 (О СРЕДНЕМ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ). Пусть функция  $u : \overline{B_R(a)} \rightarrow \mathbb{R}$  является гармонической

в круге  $B_R(a)$  и непрерывной на его замыкании  $\overline{B_R(a)}$ . Тогда справедлива формула

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + Re^{i\varphi}) d\varphi. \quad (21.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4.2 существует регулярная функция  $f: B_R(a) \rightarrow \mathbb{C}$  такая, что  $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$ . Тогда по интегральной формуле Коши для любой окружности  $\gamma_\rho = \{z \mid |z - a| = \rho\}$ , где  $\rho \in (0, R)$ , имеем равенство

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta.$$

Так как для всякой точки  $\zeta \in \gamma_\rho$ , справедливо представление  $\zeta = a + \rho e^{i\varphi}$ , где  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , то  $d\zeta = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$ , и после замены переменных в интеграле получаем

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + \rho e^{i\varphi}) i\rho e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\varphi}) d\varphi. \quad (21.6)$$

Выбирая в (21.6) действительные части, получаем равенство

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\varphi}) d\varphi. \quad (21.7)$$

Из непрерывности функции  $u(z) = u(x, y)$  на круге  $\overline{B_R(a)}$  следует равномерная по  $\varphi \in [0, 2\pi]$  непрерывность функции  $\rho \rightarrow u(a + \rho e^{i\varphi})$  при  $\rho \in (0, R]$ . По известной теореме математического анализа о переходе к пределу под знаком интеграла, устремляя  $\rho$  к  $R$ , получаем формулу (21.5).  $\square$

## § 22. Конформные отображения в $\overline{\mathbb{C}}$

В данном параграфе сформулируем определение конформного отображения в произвольной области из  $\overline{\mathbb{C}}$  и объясним некоторые геометрические свойства такого отображения.

**22.1. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции.** Пусть задана функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ , определенная в области  $G \subset \mathbb{C}$ . Пусть точка  $z_0 \in G$  такова, что в ней существует производная  $f'(z_0) \neq 0$ . Обозначим

$$w_0 = f(z_0), \quad \Delta w = f(z) - f(z_0), \quad \Delta z = z - z_0.$$

Тогда в силу определения производной имеем

$$\Delta w = f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z), \quad (22.1)$$

где  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} = 0$ ,  $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$ .

Рассмотрим приращение функции  $\Delta w$  по формуле (22.1), воспользовавшись его приближенным представлением через дифференциал  $dw = f'(z_0)\Delta z$  (так как с точностью до члена более высокого порядка малости, чем  $|\Delta z|$ , имеет место приближенное равенство  $\Delta w \simeq dw$ ). Расписав дифференциал  $dw$  по компонентам, получаем

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} \frac{u_x}{K} & -\frac{v_x}{K} \\ \frac{v_x}{K} & \frac{u_x}{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}, \quad (22.2)$$

где  $K := |f'(z_0)|$ . Из выражения (22.2) следует, что линейное относительно  $\Delta z$  отображение  $dw = f'(z_0)\Delta z$  является суперпозицией двух отображений: растяжения с коэффициентом  $K = |f'(z_0)| > 0$  и ортогонального преобразования плоскости (так как очевидно, что последняя квадратная матрица в равенстве (22.2) является ортогональной).

В частности, так как  $|dw| = |f'(z_0)||\Delta z|$ , то образом окружности  $\gamma_r := \{z \mid |z - z_0| = r\}$  радиуса  $r > 0$  (на которой  $|\Delta z| = r$ ) при отображении  $f$  будет окружность  $\gamma = \{w \mid |w - w_0| = Kr\}$  радиуса  $Kr$  с точностью до  $o(|\Delta z|)$  (см. рис. 22.1).



Полученное свойство отображения  $f$  называют *свойством сохранения окружности в малом*, причем коэффициент линейного растяжения в точке  $z_0$  равен

$$K = |f'(z_0)| = \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}. \quad (22.3)$$

Кроме того из формулы (22.2) также следует, что отображение  $f$  сохраняет углы между кривыми, выходящими из точки  $z_0$ , так как каждая из них повернется на один и тот же угол. Поясним это более подробно.

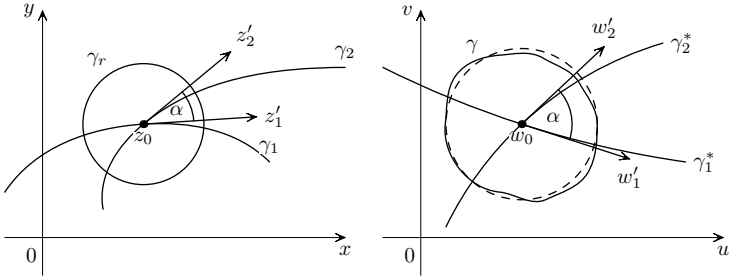


Рис. 22.1

Пусть функция  $f: B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна и  $f'(z) \neq 0$ . Пусть  $w_0 = f(z_0)$ . Рассмотрим две гладкие кривые  $\gamma_1, \gamma_2 \subset B_r(z_0)$ , проходящие через точку  $z_0$  (см. рис. 22.1), т. е. представимые в виде

$$\gamma_k := \{z \mid z = z_k(t), t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]\}, \quad \delta > 0, \quad k \in \overline{1, 2}, \quad (22.4)$$

причем  $z'_k(t) \neq 0$  и  $z_1(t_0) = z_2(t_0) = z_0$ .

Тогда функция  $f$  отображает кривые  $\gamma_k, k \in \overline{1, 2}$ , в кривые

$$\gamma_k^* = \{w \mid w = w_k(t) := f(z_k(t)), \quad t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]\}. \quad (22.5)$$

Тогда в силу очевидной формулы

$$w'_k(t) = f'(z_k(t))z'_k(t), \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \quad k \in \overline{1, 2}, \quad (22.6)$$

получаем, что  $w'_k(t) \neq 0, \forall t$ , т. е. кривые  $\gamma_k^*$  являются гладкими.

Угол между кривыми  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в точке  $z_0$  по определению есть угол между касательными векторами  $z'_1(t_0)$  и  $z'_2(t_0)$ . Соответ-

ственно, угол между кривыми  $\gamma_1^*$  и  $\gamma_2^*$  в точке  $w_0$  есть угол между векторами  $w'_1(t_0)$  и  $w'_2(t_0)$ . При этом из формулы (22.6) при  $t = t_0$  получаем

$$w'_k(t_0) = f'(z_0)z'_k(t_0),$$

откуда следует равенство

$$\text{Arg } w'_k(t_0) = \arg_{\text{гл}} f'(z_0) + \text{Arg } z'_k(t_0), \quad \forall k \in \overline{1, 2}. \quad (22.7)$$

Из формулы (22.7) следует, что каждый касательный вектор  $z'_k(t_0)$  кривой  $\gamma_k$  при отображении  $f$  поворачивается на один и тот же угол  $\arg_{\text{гл}} f'(z_0)$ . То есть угол между двумя кривыми, выходящими из точки  $z_0$ , сохраняется при регулярном отображении  $f$ , если  $f'(z_0) \neq 0$ . Это свойство называется *свойством сохранения углов*.

**22.2. Конформные отображения в  $\mathbb{C}$ .** На основе указанных геометрических свойств производной функции введем понятие конформного отображения в точке из  $\mathbb{C}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.1.** Отображение  $f: B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  называется *конформным в точке  $z_0 \in \mathbb{C}$* , если его компоненты  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  дифференцируемы в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$ , а линейное отображение

$$\begin{cases} du = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y, \\ dv = v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y, \end{cases} \quad (22.8)$$

представляет собой композицию растяжения и поворота относительно точки 0.

**ТЕОРЕМА 22.1.** *Отображение  $f$  конформно в точке  $z_0 \in \mathbb{C}$  тогда и только тогда, когда функция  $f$  дифференцируема в точке  $z_0$  и  $f'(z_0) \neq 0$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** То, что дифференцируемая функция  $f$ , у которой  $f'(z_0) \neq 0$ , является конформной в точке  $z_0$  (по определению 22.1), было показано в начале этого параграфа. Пусть теперь отображение  $f$  конформно в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$  по определению 22.1. Тогда существуют  $K > 0$  и  $\theta \in [0, 2\pi)$  такие, что

выражение (22.8) принимает вид

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}, \quad (22.9)$$

откуда следует, что  $u_x = K \cos \theta$ ,  $u_y = K \sin \theta$ ,  $v_x = -K \sin \theta$ ,  $v_y = K \cos \theta$ , т. е. выполнены условия Коши–Римана, в результате чего функция  $f$  дифференцируема в точке  $z_0$  и  $|f'(z_0)| = K \neq 0$ .  $\square$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.2.** Отображение  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  называется *конформным в области*  $G \subset \mathbb{C}$ , если оно однолистно в области  $G$  и конформно в каждой точке области  $G$ .

**СЛЕДСТВИЕ 22.1.** В силу теоремы 22.1 функция осуществляет конформное отображение некоторой области из  $\mathbb{C}$  в комплексную плоскость  $\mathbb{C}$  тогда и только тогда, когда она регулярна в данной области и однолистна. Отсюда и в силу принципа сохранения области (см. теорему 21.1) при конформном отображении образом области является область.

**22.3. Конформные отображения в  $\overline{\mathbb{C}}$ .** Обобщим понятие конформного отображения на случай расширенной комплексной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Отметим, что определенное выше понятие конформности отображения в конечной точке включает в себя два геометрических свойства таких отображений: свойство сохранения углов и свойство сохранения окружностей в малом. Мы хотели бы определить конформность отображения в бесконечно удаленной точке  $\infty$ , опираясь на эти же геометрические свойства, по крайней мере, на свойство сохранения углов.

Для этого необходимо ввести понятие угла между кривыми в бесконечности. Отметим следующие два свойства стереографической проекции  $\overline{\mathbb{C}}$  на сферу Римана  $S$  (см. § 2).

1) Угол между любыми двумя гладкими кривыми, пересекающимися в некоторой конечной точке из  $\mathbb{C}$ , при стереографической проекции переходит в равный ему угол между образами данных кривых на сфере Римана  $S$ .

2) Отображение плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  на плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$ , осуществляемое функцией  $w = \frac{1}{z}$ , при стереографической проекции соответствует отображению  $S$  на себя, получаемому при повороте сферы Римана на угол  $\pi$  вокруг диаметра сферы с концами в точках, являющихся образами точек  $+1$  и  $-1$  из  $\mathbb{C}$ .

В силу этих свойств под углом между двумя неограниченными кривыми в точке  $\infty$  следует понимать угол между образами этих кривых (при стереографической проекции) на сфере Римана в верхней точке  $P$ , если эти образы имеют в точке  $P$  касательные. Этот угол, в свою очередь, совпадает с углом в точке нуль на плоскости  $\mathbb{C}$  между новыми кривыми, получаемыми из данных кривых при отображении  $w = 1/z$  плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  на себя.

Приведенные выше соображения порождают следующие определения.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.3.** Пусть функция  $f: \mathring{\mathbb{B}}_R(\infty) \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  имеет в точке  $z_0 = \infty$  устранимую особую точку. Скажем, что отображение  $f$  конформно в точке  $\infty$ , если отображение  $g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$ , доопределенное по непрерывности в нуле, конформно в точке нуль (по определению 22.1).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.4.** Пусть точка  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$  является особой точкой функции  $f$ , но не является устранимой особой точкой. Скажем, что отображение  $f$  конформно в точке  $z_0$ , если отображение  $\varphi(z) := \frac{1}{f(z)}$ , доопределенное в точке  $z_0$  по непрерывности, конформно в точке  $z_0$  (по определению 22.1 или 22.3).

**ЗАМЕЧАНИЕ 22.1.** Отметим, что в определении 22.4 особая точка может быть только полюсом 1-го порядка, так как иначе нарушается однолистность в малом, т.е. в любой проколотой окрестности особой точки.

**УПРАЖНЕНИЕ 22.1.** Докажите справедливость замечания 22.1.

Теперь мы можем ввести понятие отображения, конформного в области из расширенной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  в расширенную плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.5.** Отображение  $f: G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  называется *конформным в области  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$* , если оно однолистно на области  $G$  и конформно в каждой точке области  $G$ .

Суммируя вышесказанное, сформулируем следующее следствие.

**СЛЕДСТВИЕ 22.2.** *Функция  $f: G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  осуществляет конформное отображение области  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$  на область  $f(G)$  тогда и только тогда, когда  $f$  однолистна на  $G$  и  $f$  регулярна во всех точках области  $G$ , за исключением, быть может, двух точек:*

- 1)  $\infty$ , если  $\infty \in G$  и  $\infty$  является устранимой особой точкой или полюсом первого порядка функции  $f$ ;
- 2) некоторой конечной точки  $z_0 \in G$ , которая является полюсом первого порядка функции  $f$ , при этом либо  $\infty \notin G$ , либо, если  $\infty \in G$ , то  $\infty$  есть устранимая особая точка функции  $f$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 22.2.** Докажите справедливость следствия 22.2.

Исследование конкретных классов конформных отображений, получаемых с помощью элементарных функций, проделаем в следующих трех параграфах.

## § 23. Дробно-линейные отображения

В этом параграфе изучим свойства дробно-линейных отображений, как покажем, важнейшего класса конформных отображений плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  на себя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23.1. Функция (или отображение) вида

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad (23.1)$$

где коэффициенты  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ , называется *дробно-линейной функцией (или отображением)*.

Доопределим функцию  $w$  из (23.1) в особых точках по непрерывности в  $\overline{\mathbb{C}}$ :

1) если  $c = 0$ , то полагаем

$$w(\infty) = \infty,$$

2) если  $c \neq 0$ , то полагаем

$$w(\infty) = \frac{a}{c}, \quad w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty. \quad (23.2)$$

Таким образом, функция (23.1), (23.2) отображает  $\overline{\mathbb{C}}$  на  $\overline{\mathbb{C}}$ .

В случае, когда  $c = 0$ , получаем аффинную функцию вида  $w = az + b$ ,  $a \neq 0$ , свойства которой считаем известными из курса линейной алгебры и аналитической геометрии. Поэтому, как правило, полагаем, что  $c \neq 0$ .

ТЕОРЕМА 23.1. *Дробно-линейная функция (23.1), (23.2) отображает расширенную комплексную плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  на всю расширенную комплексную плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  конформно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Докажем однолиственность функции (23.1), (23.2) на плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$ . Из формул (23.1), (23.2) элементарными вычислениями можно выразить  $z$  через  $w$ , в результате чего получаем, что существует обратное отображение вида

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}, \quad (23.3)$$

$$z(\infty) = -\frac{d}{c}, \quad z\left(\frac{a}{c}\right) = \infty. \quad (23.4)$$

Таким образом, отображение (23.1), (23.2) однолистно отображает плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  на всю плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$ , причем, так как определитель

$$\begin{vmatrix} -d & b \\ c & -a \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0,$$

то обратное отображение (23.3), (23.4) также является дробно-линейным.

2. Докажем конформность функции (23.1), (23.2) в каждой точке  $z_0$  плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  при  $c \neq 0$ .

1) Пусть  $z_0 \neq -\frac{d}{c}$ ,  $z_0 \neq \infty$ . Тогда

$$w'(z_0) = \frac{a(cz_0 + d) - c(b + az_0)}{(cz_0 + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz_0 + d)^2} \neq 0, \quad (23.5)$$

т.е. по определению 22.1 и теореме 22.1 функция (23.1), (23.2) конформна в точке  $z_0$ .

2) Пусть  $z_0 = -\frac{d}{c}$ . Так как  $\lim_{z \rightarrow z_0} w(z) = \infty$ , то по определению 22.4 рассмотрим функцию

$$g(z) := \frac{1}{w(z)} = \frac{cz + d}{az + b},$$

$$g'(z_0) = \frac{bc - ad}{(az_0 + b)^2} = \frac{c^2}{cb - ad} \neq 0.$$

Это значит, что функция  $g$  конформна в точке  $z_0$ , откуда по определению 22.4 функция  $w(z)$  конформна в точке  $z_0 = -\frac{d}{c}$ .

3) Пусть  $z_0 = \infty$ . Тогда  $\lim_{z \rightarrow \infty} w(z) = \frac{a}{c}$ . По определению 22.3 исследуем на конформность функцию

$$g(\zeta) := w\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{a + b\zeta}{c + d\zeta}$$

в точке  $\zeta_0 = 0$ . Вычисляя производную в этой точке

$$g'(\zeta_0) = \frac{bc - ad}{(c + d\zeta_0)^2} = \frac{bc - ad}{c^2} \neq 0.$$

получаем, что функция  $g$  конформна в нуле. Отсюда по определению 22.3 функция  $w(z)$  конформна в точке  $\infty$ .

Итак, по определениям 22.1–22.5 функция (23.1), (23.2) конформно отображает плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  на всю плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 23.1. Докажите, что если некоторая функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  конформно отображает всю плоскость  $\mathbb{C}$  на всю плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$ , то эта функция  $f$  является дробно-линейной.

Отметим следующее «круговое свойство» дробно-линейных отображений.

ТЕОРЕМА 23.2. При дробно-линейном отображении (23.1), (23.2) образом любой окружности или прямой является окружность или прямая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для аффинного отображения (т.е. при  $c = 0$ )

$$w = az + b, \quad a \neq 0, \quad (23.6)$$

круговое свойство, приведенное в формулировке теоремы, очевидно, справедливо, так как из линейной алгебры известно, что невырожденное аффинное отображение плоскости  $\mathbb{R}^2$  на себя сводится к суперпозиции преобразования подобия, поворота и переноса, при которых окружности переходят в окружности, а прямые в прямые.

В общем случае (при  $c \neq 0$ ) представим отображение (23.1) в виде

$$w = \frac{a}{c} + \frac{-ad + bc}{c} \cdot \frac{1}{cz + d},$$

т.е. функцию (23.1) представим в виде суперпозиции трех отображений:

$$w = \alpha + \beta t, \quad t = \frac{1}{\zeta}, \quad \zeta = cz + d. \quad (23.7)$$

В формулах (23.7) два отображения являются аффинными, и, как уже отмечали выше, они обладают круговым свойством. Осталось доказать, что отображение  $t = \frac{1}{\zeta}$  также обладает круговым свойством.

Зададим произвольную окружность  $\gamma$  в плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$ . Как следует из аналитической геометрии, она описывается некоторым уравнением 2-го порядка

$$A(\xi^2 + \eta^2) + B\xi + C\eta + D = 0, \quad (23.8)$$



где  $A, B, C, D$  — действительные числа, удовлетворяющие условиям  $A \neq 0$ ,  $B^2 + C^2 > 4AD$ . В случае, когда  $A = 0$ , уравнение (23.8) описывает некоторую прямую. Так как  $\xi^2 + \eta^2 = |\zeta|^2 = \zeta\bar{\zeta}$ ,  $\xi = \frac{1}{2}(\zeta + \bar{\zeta})$ ,  $\eta = \frac{1}{2i}(\zeta - \bar{\zeta})$ , то уравнение (23.8) можно переписать в виде

$$A\zeta\bar{\zeta} + \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2i}\right)\zeta + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2i}\right)\bar{\zeta} + D = 0. \quad (23.9)$$

Отображение  $t = \frac{1}{\zeta}$  преобразует окружность (23.9) в кривую, уравнение которой имеет вид

$$A + \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2i}\right)\bar{t} + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2i}\right)t + Dt\bar{t} = 0. \quad (23.10)$$

Очевидно, что уравнение (23.10) в случае, когда  $D \neq 0$ , также является уравнением окружности, а в случае, когда  $D = 0$ , является уравнением прямой.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 23.1.** При конкретном дробно-линейном отображении окружности или прямой нетрудно уточнить, что будет ее образом: окружность или прямая. Для этого достаточно посмотреть на точку  $z_0 := -\frac{d}{c}$ , для которой  $w(z_0) = \infty$ . Если точка  $z_0$  принадлежит исходной кривой, то образом будет прямая, в противном случае ее образом будет окружность.

Из средней школы известно понятие точки, симметричной данной точке относительно прямой. Расширим это понятие на случай окружности.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23.2.** Пусть на плоскости  $\mathbb{R}^2$  задана окружность  $\gamma$  радиуса  $R$  с центром в точке  $A$  (см. рис. 23.1). Точки  $M$  и  $M^*$  называются симметричными относительно окружности  $\gamma$ , если они лежат на одном луче, выходящем из центра  $A$ , и справедливо равенство

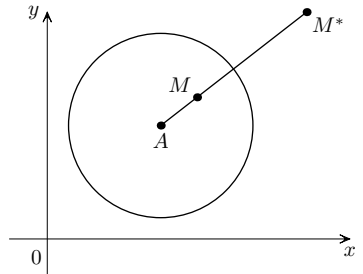


Рис. 23.1

$$|AM| \cdot |AM^*| = R^2. \quad (23.11)$$

Переходя на язык комплексных чисел, получаем, что точки  $z_0, z_0^* \in \mathbb{C}$  являются симметричными относительно окружности  $\gamma = \{z \mid |z - a| = R\}$ , если справедливо равенство

$$z_0^* - a = \frac{R^2}{z_0 - a}. \quad (23.12)$$

Так как в формуле (23.12) при  $z_0 \rightarrow a$  получаем  $z_0^* \rightarrow \infty$ , то будем считать, что точки  $a$  и  $\infty$  также являются симметричными относительно окружности  $\gamma = \{z \mid |z - a| = R\}$ .

**ТЕОРЕМА 23.3.** *При дробно-линейном отображении (23.1), (23.2) пара точек, симметричных относительно некоторой окружности или прямой, переходит в пару точек, симметричных относительно образа этой кривой.*

**ЗАМЕЧАНИЕ 23.2.** В силу сходства получаемых свойств дробно-линейных отображений, связанных как с окружностями, так и с прямыми, для краткости изложения в формулировках теорем будем окружностью называть не только окружности, но также и прямые.

Для доказательства теоремы 23.3 нам потребуется следующая

**ЛЕММА 23.1.** *Точки  $z_0$  и  $z_0^*$  являются симметричными относительно данной окружности (или прямой)  $\gamma$  тогда и только тогда, когда любая окружность или прямая  $\Gamma$ , проходящая через точки  $z_0$  и  $z_0^*$ , пересекает окружность  $\gamma$  под прямым углом.*

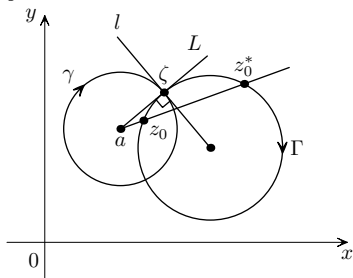


Рис. 23.2

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

**Необходимость.** Пусть точки  $z_0$  и  $z_0^*$  симметричны относительно окружности  $\gamma$  радиуса  $R$  с центром в точке  $a$ . Пусть  $\Gamma$  — произвольная окружность, проходящая через точки  $z_0$  и  $z_0^*$  (см. рис. 23.2).

Проведем через точку  $a$  касательную прямую  $L$  к окружно-

сти  $\Gamma$ . При этом обозначим через  $\zeta$  точку касания окружности  $\Gamma$ , т. е.  $\zeta \in \Gamma \cap L$ .

По теореме о касательной и секущей получаем, что  $|\zeta - a|^2 = |z_0 - a| \cdot |z_0^* - a|$ . Отсюда и из определения 23.2 о симметричных точках (равенство (23.12)) получаем, что  $|\zeta - a| = R$ , т. е. точка  $\zeta$  лежит на окружности  $\gamma$ , т. е. точка  $\zeta$  есть точка пересечения окружностей  $\gamma$  и  $\Gamma$ . Так как радиус  $[a, \zeta]$  окружности  $\gamma$  перпендикулярен касательной  $l$  к окружности  $\gamma$ , проведенной через точку  $\zeta$ , то касательные  $L$  и  $l$  перпендикулярны, т. е. окружности  $\gamma$  и  $\Gamma$  перпендикулярны.

*Достаточность.* Пусть точки  $z$  и  $z^*$  таковы, что любая окружность  $\Gamma$ , проходящая через эти точки, перпендикулярна данной окружности  $\gamma$  радиуса  $R$  с центром в точке  $a$ .

1) Рассмотрим в качестве кривой  $\Gamma$  прямую, проходящую через точки  $z$  и  $z^*$ . Так как по условию прямая  $\Gamma$  перпендикулярна окружности  $\gamma$ , то прямая  $\Gamma$  проходит через центр  $a$ . Более того, точки  $z$  и  $z^*$  лежат на одном луче с началом в точке  $a$ , так как в противном случае, проведя окружность  $\Gamma_1$  с диаметром, совпадающим с отрезком  $[z, z^*]$ , очевидно, получаем, что окружность  $\Gamma_1$  не перпендикулярна окружности  $\gamma$ , т. е. не выполнено условие.

2) Рассмотрим теперь в качестве  $\Gamma$  произвольную окружность, проходящую через точки  $z$  и  $z^*$ .

Обозначим через  $\zeta$  точку пересечения окружностей, т. е.  $\zeta \in \Gamma \cap \gamma$ . Тогда касательная к окружности  $\Gamma$  в точке  $\zeta$  (обозначим ее  $L$ ) по условию перпендикулярна касательной к окружности  $\gamma$  в точке  $\zeta$  (обозначим ее  $l$ ), следовательно, прямая  $L$  пройдет через центр  $a$ , т. е. отрезок  $[a, \zeta]$  лежит на касательной  $L$  к окружности  $\Gamma$ . По теореме о касательной и секущей получаем  $R^2 = |\zeta - a|^2 = |z - a| \cdot |z^* - a|$ . Это означает, что точки  $z$  и  $z^*$  являются симметричными относительно окружности  $\gamma$ . □

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 23.3.** Пусть  $z_0$  и  $z_0^*$  — симметричные точки относительно окружности  $\gamma$  и пусть дробно-линейное отображение  $f$  вида (23.1), (23.2) переводит окруж-

ность  $\gamma$  в кривую  $\tilde{\gamma} = f(\gamma)$ . По круговому свойству (по теореме 23.2) кривая  $\tilde{\gamma}$  является окружностью (или прямой). Пусть  $w_0 = f(z_0)$ ,  $w_0^* = f(z_0^*)$ . Рассмотрим любую окружность  $\tilde{\Gamma}$  такую, что  $w_0, w_0^* \in \tilde{\Gamma}$ . Тогда существует окружность  $\Gamma$  такая, что  $f(\Gamma) = \tilde{\Gamma}$  и  $z_0, z_0^* \in \Gamma$ .

Так как точки  $z_0$  и  $z_0^*$  симметричны, то по лемме 23.1 окружность  $\Gamma$  перпендикулярна окружности  $\gamma$ . По свойству сохранения углов при конформных отображениях и так как по теореме 23.1 дробно-линейное отображение конформно в  $\overline{\mathbb{C}}$ , окружность  $\tilde{\Gamma} = f(\Gamma)$  будет перпендикулярна окружности  $\tilde{\gamma} = f(\gamma)$ . Отсюда в силу произвольности окружности  $\tilde{\Gamma}$  и по лемме 23.1 следует, что точки  $w_0$  и  $w_0^*$  являются симметричными точками относительно окружности  $\tilde{\gamma}$ .

**ТЕОРЕМА 23.4.** *Совокупность дробно-линейных отображений образует группу относительно операции суперпозиции, т. е. суперпозиция двух дробно-линейных отображений является дробно-линейным отображением, и обратное к любому дробно-линейному отображению также является дробно-линейным отображением.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим два дробно-линейных отображения

$$\zeta = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \quad (23.13)$$

$$w = \frac{a_2 \zeta + b_2}{c_2 \zeta + d_2}. \quad (23.14)$$

Представим фигурирующие здесь величины  $z$ ,  $\zeta$ ,  $w$  через отношения  $z = \frac{z_1}{z_2}$ ,  $\zeta = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ ,  $w = \frac{w_1}{w_2}$ . Тогда выражения (23.13) и (23.14) можно записать как две системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \zeta_1 = a_1 z_1 + b_1 z_2, \\ \zeta_2 = c_1 z_1 + d_1 z_2. \end{cases} \quad \begin{cases} w_1 = a_2 \zeta_1 + b_2 \zeta_2, \\ w_2 = c_2 \zeta_1 + d_2 \zeta_2. \end{cases} \quad (23.15)$$

суперпозиция которых удовлетворяет матричному равенству

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \quad (23.16)$$

Отсюда следует, что если суперпозицию двух отображений записать в виде

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (23.17)$$

то его коэффициенты  $a, b, c, d$  получаются из равенства

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad (23.18)$$

т. е. его определитель  $ad - cb$  равен произведению определителей данных отображений и поэтому не равен нулю. Следовательно, отображение (23.17) также является дробно-линейным.

Доказательство того, что обратное отображение к дробно-линейному также является дробно-линейным, приведено в доказательстве теоремы 23.1.  $\square$

Разберем некоторые примеры канонических областей в плоскости  $\mathbb{C}$  и их образов, получаемых при дробно-линейных отображениях.

**ПРИМЕР 23.1.** Описать дробно-линейные отображения верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на круг  $|w| < 1$ .

**РЕШЕНИЕ.** Выберем произвольную точку  $z_0$  в верхней полуплоскости. Найдем дробно-линейное отображение, которое переводит  $z_0$  в точку 0. Потребуем дополнительно, чтобы точка  $\bar{z}_0$  отобразилась в  $\infty$ , т. е. рассмотрим отображение вида

$$w = A \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \quad A \neq 0. \quad (23.19)$$

Так как симметричные относительно прямой  $\text{Im } z = 0$  точки  $z_0$  и  $\bar{z}_0$  по свойству дробно-линейных отображений перейдут в точки 0 и  $\infty$ , которые симметричны для любой окружности с центром в нуле, т. е. образом прямой  $\text{Im } z = 0$  будет некоторая окружность с центром в точке 0. Чтобы получить из

(23.19) требуемое отображение верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на круг  $|w| < 1$ , заметим, что для любой граничной точки  $z_1$ ,  $\text{Im } z_1 = 0$ , ее образом должна быть граничная точка  $w_1$ , т.е. такая, что  $|w_1| = 1$ . Отсюда можем уточнить величину  $A$ , т.е.

$$1 = |w_1| = |A| \frac{|z_1 - z_0|}{|z_1 - \bar{z}_0|} = |A| \frac{|x_1 - z_0|}{|x_1 - \bar{z}_0|} = |A|.$$

Итак,  $A = e^{i\alpha}$ , где  $\alpha$  — произвольное действительное число. В итоге получили, что отображения вида

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \quad (23.20)$$

описывают семейство искомых конформных отображений, определяемых выбором трех действительных параметров: двумя координатами точки  $z_0$ , у которой  $\text{Im } z_0 > 0$ , и числа  $\alpha \in [0, 2\pi)$ .

**ПРИМЕР 23.2.** Описать дробно-линейные отображения круга  $B_1(0) = \{z \mid |z| < 1\}$  на круг  $B_1(0) = \{w \mid |w| < 1\}$ .

**РЕШЕНИЕ.** Выберем произвольную точку  $z_0$  в круге, т.е.  $|z_0| < 1$ . Найдем дробно-линейное отображение, переводящее точку  $z_0$  в точку 0, а симметричную ей относительно окружности  $|z| = 1$  точку  $\frac{1}{\bar{z}_0}$  в точку  $\infty$ . Такое отображение, очевидно, имеет вид

$$w = A \frac{z - z_0}{z - \frac{1}{\bar{z}_0}} = \tilde{A} \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}. \quad (23.21)$$

При отображении (23.21) окружность  $|z| = 1$  по теореме 23.3 переходит в некоторую окружность с центром в точке 0. Чтобы эта окружность имела радиус  $R = 1$ , достаточно для любой граничной точки  $z_1 = e^{i\varphi}$  приравнять модуль образа единице, т.е.

$$1 = |w| = |\tilde{A}| \frac{|z_0 - e^{i\varphi}|}{|1 - e^{i\varphi} \cdot \bar{z}_0|} = |\tilde{A}| \frac{|e^{i\varphi} - z_0|}{|e^{i\varphi}| |e^{-i\varphi} - \bar{z}_0|} = |\tilde{A}|.$$

Из равенства следует, что число  $\tilde{A}$  имеет вид  $\tilde{A} = e^{i\alpha}$ . В итоге показали, что отображения вида

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0} \quad (23.22)$$

описывают семейство требуемых конформных отображений, определяемых выбором трех действительных параметров: двумя координатами точки  $z_0$  такой, что  $|z_0| < 1$ , и числа  $\alpha \in \mathbb{R}^1$ .

В следующем параграфе мы покажем, что семейство (23.22) описывает все конформные отображения единичного круга на себя.

**ПРИМЕР 23.3.** Описать дробно-линейные отображения, которые три различные точки  $z_1, z_2, z_3$  отображают в три различные точки  $w_1, w_2, w_3$ , т. е.  $w_k = f(z_k)$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

**РЕШЕНИЕ.** Такое конформное отображение, очевидно, задается формулой

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \quad (23.23)$$

Если выразить неявную функцию  $w = f(z)$  из (23.23), то получим, что функция  $f$  является дробно-линейным отображением, так как она представима в виде суперпозиции двух отображений

$$w = g^{-1} \cdot h, \quad \text{где} \quad h(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

и

$$g(w) = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1},$$

а отображение  $g^{-1}$  также дробно-линейно (см. теорему 23.4).

Докажем, что требуемое дробно-линейное отображение единственно. Пусть некоторое дробно-линейное отображение  $w = \frac{az + b}{cz + d}$  отображает три различные точки  $\{z_k\}$  на себя, точнее

$$\frac{az_k + b}{cz_k + d} = z_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Отсюда получаем, что уравнение  $cz_k^2 + (d - a)z_k - b = 0$  имеет три различных решения  $z_1, z_2, z_3$ , что возможно (по теореме Гаусса) лишь при  $c = d - a = -b = 0$ , т. е.  $w(z) \equiv z$ . Допустим, что  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  — два дробно-линейных отображения, отображающие три точки  $z_k$  в три точки  $w_k$  (при  $k = 1, 2, 3$ ), тогда

$w = f_2^{-1} \cdot f_1(z)$  оставляет точки  $z_k$  на месте, т. е.  $f_2^{-1} \cdot f_1(z) \equiv z$ , т. е.  $f_1 \equiv f_2$ .

**ПРИМЕР 23.4.** Описать конформные отображения, переводящие верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  на верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$ .

**РЕШЕНИЕ.** Возьмем три различные точки на действительной оси  $x_1, x_2, x_3$  так, что  $x_1 < x_2 < x_3$ . При движении от точки  $x_k$  к точке  $x_{k+1}$  по возрастанию их индексов область  $\operatorname{Im} z > 0$  остается слева. Так как каждое дробно-линейное отображение конформно на всей плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$ , то при отображении полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  на полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$  граница (действительная ось) должна отобразиться на границу (действительную ось). Поэтому искомое дробно-линейное отображение должно отобразить данные точки  $x_1, x_2, x_3$  в три различные точки  $u_1, u_2, u_3$ , лежащие на действительной оси с той же ориентацией обхода точек, т. е. область  $\operatorname{Im} w > 0$  при их соответствующем обходе должна оставаться слева (так как конформные отображения сохраняют углы).

Рассмотрим отображение, задаваемое формулой (23.23), где  $z_k = x_k$  и  $w_k = u_k$  при  $k = 1, 2, 3$ . В этой формуле все коэффициенты оказались действительными числами. Следовательно, после преобразования формулы (23.23) к виду  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  получаем в данной формуле также действительные коэффициенты  $a, b, c, d$ . Так как при этом действительная ось перешла в действительную ось с сохранением ориентации обхода (т. е. действительная ось не поворачивается), то  $\arg w'(x) = 0$  при каждом действительном значении  $x$ . Поэтому

$$w'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} > 0,$$

откуда следует, что  $ad - bc > 0$ .

В итоге показали, что дробно-линейное отображение осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости на верхнюю полуплоскость тогда и только тогда, когда его коэффициенты  $a, b, c, d$  действительны и справедливо неравенство  $ad - bc > 0$ ,



## § 24. Конформные отображения элементарными функциями. Теорема Римана

Продолжим рассмотрение примеров конформных отображений, осуществляемых элементарными функциями, являющимися локально однолиственными.

**24.1. Степенная функция.** Зафиксируем число  $t > 0$  и рассмотрим на области  $G := \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$  функцию

$$w = |z|^t e^{it \arg z}, \quad \text{где} \quad \arg z \in (0, 2\pi). \quad (24.1)$$

Эта функция регулярна в данной области  $G$ , так как она представима в виде  $w = e^{t \cdot h(z)}$ , где функция  $h(z) = \ln |z| + i \arg z$ ,  $\arg z \in (0, 2\pi)$ , есть регулярная ветвь логарифма в области  $G$ .

Функция (24.1), очевидно, однолистна на угловой области

$$G_{0, \varphi_0} := \{z \mid |z| > 0, 0 < \arg z < \varphi_0\}, \quad (24.2)$$

где  $\varphi_0 \leq 2\pi$ ,  $t\varphi_0 \leq 2\pi$ .

При этом всякий луч  $l_{\varphi_1} := \{z \mid z = re^{i\varphi_1}, \forall r \in (0, +\infty)\}$ , где  $\varphi_1 = \text{const} \in (0, \varphi_0)$ , отображится на луч  $l_{t\varphi_1} = \{w \mid w = \mu e^{it\varphi_1}, \forall \mu \in (0, +\infty)\}$ . Всякая дуга  $\{z \mid z = r_0 e^{i\varphi}, \forall \varphi \in (0, \varphi_0)\}$ , где  $r_0 = \text{const} > 0$ , взаимно однозначно отображится на дугу  $\{w \mid w = r_0^t e^{i\psi}, \forall \psi \in (0, t\varphi_0)\}$  (см. рис. 24.1).

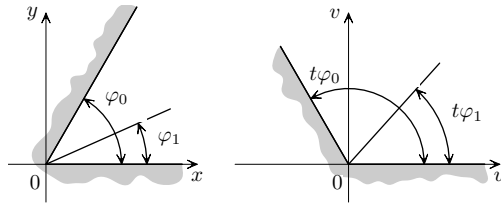


Рис. 24.1

В итоге область  $G_{0, \varphi_0}$  из (24.2) конформно отображается функцией (24.1) на область

$$G_{0, t\varphi_0} = \{w \mid |w| > 0, 0 < \arg w < t\varphi_0\}.$$

Рассмотрим более конкретные примеры таких отображений.

**ПРИМЕР 24.1.** Пусть заданы функция  $w = z^2$  (т. е.  $t = 2$ ) и область  $G_1 := \{z \mid |z| < 1, \text{Im } z > 0\}$ . Тогда функция  $w =$

$= z^2$  конформна на области  $G_{0,\pi}$  и отображает область  $G_1 \subset \subset G_{0,\pi}$  конформно на область  $G_1^* = \{w \mid |w| < 1, w \notin [0, 1]\}$  (см. рис. 24.2).

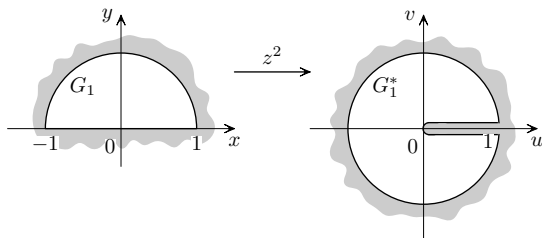


Рис. 24.2

ПРИМЕР 24.2. Пусть функция  $w = z^2$  задана на области  $G_2 := \{z \mid \operatorname{Im} z > a > 0\} \subset G_{0,\pi}$ . Тогда граница области  $G_2$ , т.е. прямая  $\operatorname{Im} z = a$ , функцией  $w = z^2$  отображается в граничную кривую  $w = x^2 - a^2 + 2iax$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , образа  $G_2^*$ , т.е.

$$\begin{cases} u = x^2 - a^2, \\ v = 2ax, \end{cases}$$

откуда, исключая параметр  $x$ , получаем уравнение параболы  $u = \frac{v^2}{4a^2} - a^2$ . Отсюда и из того, что  $0 \notin G_2^*$ , получаем, что  $G_2^* = \{w = u + iv \mid v^2 > 4a^2(u + a^2)\}$  (см. рис. 24.3).

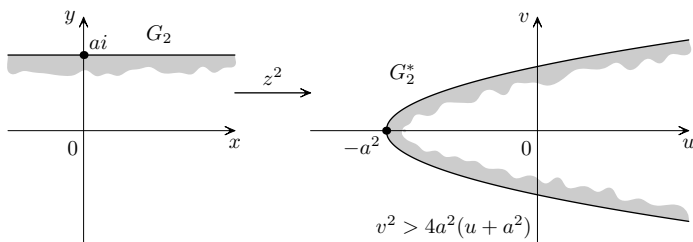


Рис. 24.3

ПРИМЕР 24.3. Пусть необходимо область  $G_3 := \{z = x + iy \mid y^2 > 2p(\frac{p}{2} + x)\}$ , где  $p > 0$ , конформно отобразить в некоторое полупространство. Если параметр  $p$  заменить на параметр  $a = \sqrt{\frac{p}{2}}$ , то в силу предыдущего примера 24.2 функция  $w = |z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i \arg z}{2}}$ , где  $\arg z \in (0, 2\pi)$ , конформно отоб-

ражает область  $G_3$  на полуплоскость  $G_3^* = \{w \mid \operatorname{Im} w > \sqrt{\frac{p}{2}}\}$  (см. рис. 24.4).

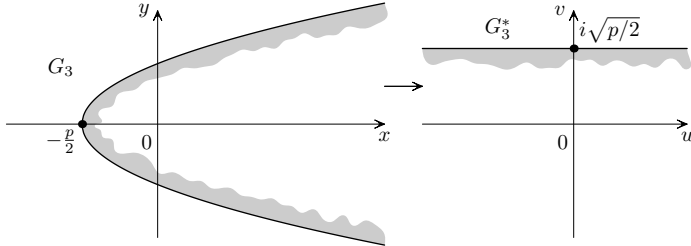


Рис. 24.4

**24.2. Экспоненциальная функция.** Пусть заданы действительные числа  $a, b, \alpha, \beta$  такие, что  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  и  $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ . Рассмотрим функцию  $w = e^z$ . Эта функция на прямоугольнике

$G := \{z = x + iy \mid a < x < b, \alpha < y < \beta\}$ , где  $\beta - \alpha \leq 2\pi$ , однолистка (что показано нами в примере 5.2) (см. рис. 24.5).

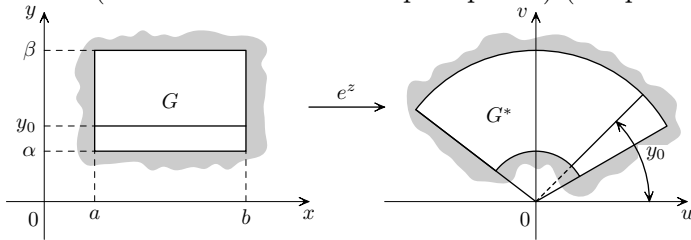


Рис. 24.5

При этом функция  $w = e^z$  интервал  $\{z \mid z = t + iy_0, a < t < b\}$ , где  $y_0 \in (\alpha, \beta)$ , отображает на интервал  $\{w \mid w = \tau e^{iy_0}, \tau \in (e^a, e^b)\}$ , а интервал  $\{z \mid z = x_0 + it, \alpha < t < \beta\}$ , отображает на дугу  $\{w \mid w = e^{x_0} \cdot e^{it}, \alpha < t < \beta\}$ .

В итоге функция  $w = e^z$  конформно отображает прямоугольник  $G$  на сектор

$$G^* = \{w \mid e^a < |w| < e^b, \alpha < \arg w < \beta\}.$$

Рассмотрим два частных случая прямоугольника  $G$ .

**ПРИМЕР 24.4.** Пусть прямоугольник  $G$  имеет вид  $G_4 := \{z = x + iy \mid x < 0, 0 < y < \pi\}$ . Тогда в силу сказанного выше

функция  $w = e^z$  конформно отображает область  $G_4$  на полукруг  $G_4^* = \{z \mid |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$  (см. рис. 24.6).

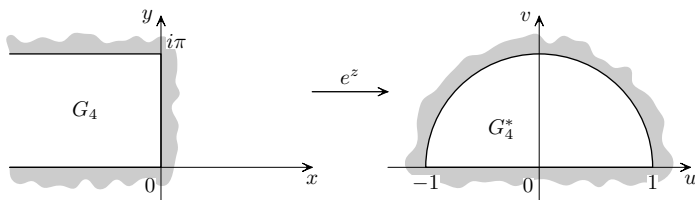


Рис. 24.6

**ПРИМЕР 24.5.** Пусть прямоугольник  $G$  имеет вид  $G_5 := \{z = x + iy \mid x > 0, 0 < y < \pi\}$ . Тогда в силу сказанного выше функция  $w = e^z$  конформно отображает область  $G_5$  на область  $G_5^* = \{z \mid |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$  (см. рис. 24.7).

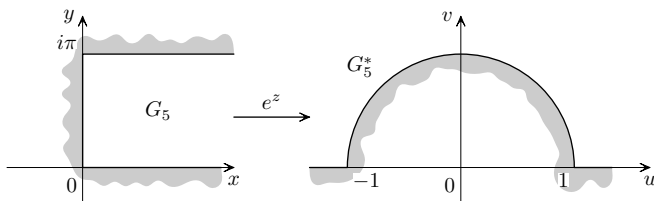


Рис. 24.7

**ЗАМЕЧАНИЕ 24.1.** Так как конформные отображения во многих примерах (как в примерах 24.1, 24.2 и примерах 24.4, 24.5) заданы регулярными функциями, однолиственными на соответствующих областях, то обратные к ним функции конформно отображают образы на соответствующие им прообразы. Это уже показано в примере 24.3. Также, например, полукруг  $G_4^*$  регулярной функцией  $h(z) = \ln |z| + i \arg z$ ,  $\arg z \in (0, \pi)$ , конформно отображается на область  $G_4$ , а область  $G_5^*$  этой же функцией  $h$  конформно отображается на область  $G_5$ .

**24.3. Функция Жуковского.** Функция

$$w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad (24.3)$$

называется *функцией Жуковского*.

Исследуем, каким условиям должна удовлетворять область, чтобы функция Жуковского (24.3) на ней была конформной.

Очевидно, что функция (24.3) регулярна в области  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . При этом

$$w'(z) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right), \quad \text{т. е.} \quad w'(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad z \neq \pm 1.$$

В точке  $z = 0$  функция  $w$  (24.3) имеет полюс 1-го порядка. Тогда рассмотрим функцию

$$g(z) := \frac{1}{w(z)} = \frac{2z}{1+z^2}, \quad g'(z) = \frac{2-2z^2}{(1+z^2)^2}, \quad \text{т. е.} \quad g'(0) = 2 \neq 0.$$

Отсюда и из определения 22.4 следует, что функция  $w$  конформна в точке 0.

Аналогично для проверки конформности функции  $w$  в точке  $\infty$  достаточно рассмотреть функцию  $\tilde{g}(z) := w\left(\frac{1}{z}\right)$  в точке 0. Так как  $w\left(\frac{1}{z}\right) = w(z)$  и, как уже показали, функция  $w$  конформна в нуле, то по определению 22.3 функция  $w$  конформна в  $\infty$ .

Итак, мы показали, что функция Жуковского  $w$  конформна в каждой точке множества  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\pm 1\}$ .

Исследуем условия на область, при которых функция Жуковского будет однолистной в этой области.

Допустим, что две различные точки  $z_1, z_2$  таковы, что  $w(z_1) = w(z_2)$ . Это значит, что

$$\frac{1}{2} \left( z_1 + \frac{1}{z_1} \right) = \frac{1}{2} \left( z_2 + \frac{1}{z_2} \right), \quad \text{т. е.}$$

$$(z_1 - z_2) \left( 1 - \frac{1}{z_1 z_2} \right) = 0, \quad \text{т. е.} \quad z_1 z_2 = 1.$$

Таким образом, функция Жуковского однолистка в области  $G$  тогда и только тогда, когда для любого  $z \in G$  следует, что  $\frac{1}{z} \notin G$ .

Вывод. Функция Жуковского (24.3) конформна на всякой области  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$  такой, что  $\pm 1 \notin G$  и  $\forall z \in G \Rightarrow \frac{1}{z} \notin G$ .

Так как равенство  $z_2 = \frac{1}{z_1}$  означает, что  $z_2$  получено из  $z_1$  суперпозицией двух симметрий (см. рис. 24.8) — относительно окружности  $|z| = 1$  и относи-

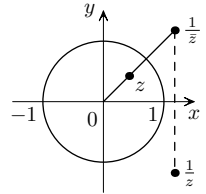


Рис. 24.8

тельно прямой  $\operatorname{Im} z = 0$ , то для того, чтобы функция (24.3) была конформна на некоторой области  $G$ , достаточно, чтобы эта область не содержала пар точек, симметричных относительно указанной окружности, или указанной прямой. Поэтому примерами областей, на которых функция Жуковского конформна, очевидно, являются четыре области:

- 1)  $\operatorname{Im} z > 0$ ,      3)  $|z| > 1$ ,
- 2)  $\operatorname{Im} z < 0$ ,      4)  $|z| < 1$ .

Для дальнейшего изучения свойств функции Жуковского (24.3) воспользуемся представлением числа  $z$  в полярной форме  $z = re^{i\varphi}$ . Тогда функция Жуковского принимает вид

$$w = \frac{1}{2} re^{i\varphi} + \frac{1}{2r} e^{-i\varphi} = u + iv,$$

где

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \\ v = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \end{cases} \quad (24.4)$$

а) Пусть задана окружность  $\gamma_{r_0} := \{z \mid z = r_0 e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$  радиуса  $r_0 > 0$ , где  $r_0 \neq 1$ . Тогда из формулы (24.4) получаем, что ее образ удовлетворяет уравнению

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1, \quad (24.5)$$

где

$$a := \frac{1}{2} \left( r_0 + \frac{1}{r_0} \right), \quad b := \frac{1}{2} \left| r_0 - \frac{1}{r_0} \right|, \quad (24.6)$$

т. е. функция Жуковского отображит окружности  $\gamma_{r_0}$  и  $\gamma_{\frac{1}{r_0}}$  при  $r_0 \neq 1$  в один и тот же эллипс (24.5), (24.6) с фокусами в точках  $+1$  и  $-1$  (так как очевидно, что  $c^2 = a^2 - b^2 = 1$ ) (см. рис. 24.9).

б) Пусть задан луч

$$\lambda_{\varphi_0} := \{z \mid z = te^{i\varphi_0}, 0 < t < \infty\}, \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi).$$

Вначале полагаем, что  $\varphi_0 \notin \left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\}$ . По формулам (24.4) для образа луча  $\lambda_{\varphi_0}$  получаем выражения

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi_0} = \frac{1}{4} \left( t^2 + 2 + \frac{1}{t^2} \right), \quad \frac{v^2}{\sin^2 \varphi_0} = \frac{1}{4} \left( t^2 - 2 + \frac{1}{t^2} \right),$$

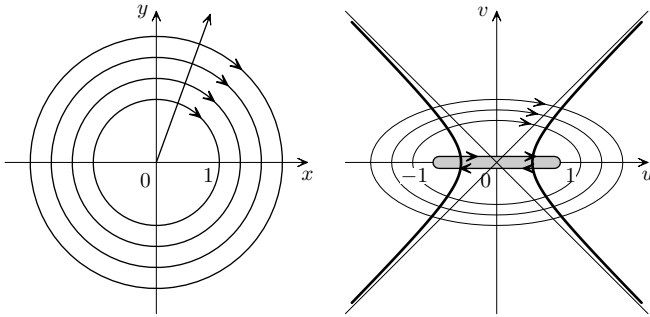


Рис. 24.9

откуда следует, что

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi_0} = 1. \quad (24.7)$$

Это означает, что функция Жуковского отображает луч  $\lambda_{\varphi_0}$  на ветвь гиперболы (24.7), фокусы которой находятся в точках  $+1$  и  $-1$  (так как здесь  $c^2 = a^2 + b^2 = \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 = 1$ ) (см. рис. 24.9).

Если  $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ , то из формул (24.4) получаем, что в образе  $u > 0$ , а функция  $v$  при возрастании параметра  $t$  возрастает от  $-\infty$  до  $+\infty$ , т. е. образом луча является правая ветвь гиперболы (24.7).

Если  $\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \pi$ , то из формул (24.4) получаем, что в образе  $u < 0$ , а функция  $v$  возрастает, т. е. образом этого луча является левая ветвь гиперболы (24.7).

Для рассмотрения образов лучей из третьей и четвертой четвертей плоскости отметим следующее. При замене  $\varphi_0$  на  $-\varphi_0$  из формул (24.4) следует, что образом луча  $\lambda_{-\varphi_0}$  служит та же ветвь гиперболы, что и образом луча  $\lambda_{\varphi_0}$ , с заменой направления движения по ней на противоположное.

В заключение осталось рассмотреть образы лучей, идущих по координатным осям. Для  $\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$  из формул (24.4) получаем, что образом каждого из лучей  $\lambda_{\frac{\pi}{2}}$  и  $\lambda_{-\frac{\pi}{2}}$  является мнимая ось (со взаимно противоположными направлениями обхода).

Для  $\varphi_0 = 0$  образом луча  $\lambda_0$  будет луч  $[1, +\infty)$  с двойным обходом.

Для  $\varphi_0 = \pi$  образ луча  $\lambda_\pi$  будет луч  $(-\infty, -1]$  с двойным обходом.

Разберем некоторые примеры областей, на которых функция Жуковского (24.3) конформна.

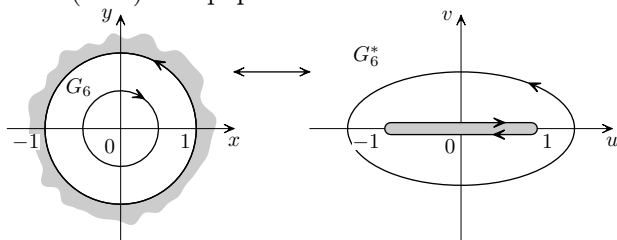


Рис. 24.10

**ПРИМЕР 24.6.** Пусть задана область  $G_6 = B_1(0) := \{z \mid |z| < 1\}$ , то функция Жуковского конформна на  $G_6$ , причем ее граница  $|z| = 1$  переходит в разрез по отрезку  $[-1, 1]$  (см. рис. 24.10).

Рассмотрев образы всех окружностей с центром в  $0$ , содержащихся в области  $G_6$ , в силу приведенных выше рассуждений получаем, что функция Жуковского отображает область  $G_6$  на область  $G_6^* = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .

**ПРИМЕР 24.7.** Пусть задана верхняя полуплоскость  $G_7 = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ . Тогда функция Жуковского на области  $G_7$  конформна, и, рассмотрев образы лучей, выходящих из нуля и лежащих в верхней полуплоскости, получаем, что образом области  $G_7$  является область  $G_7^* = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$  (см. рис. 24.11).

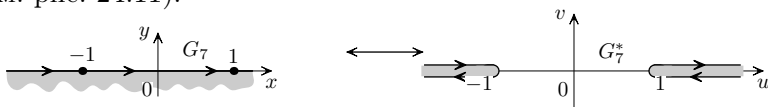


Рис. 24.11

**ЗАМЕЧАНИЕ 24.2.** Разобранные выше примеры позволяют также конформно отображать область  $G_6^*$  на область  $G_6$ , а область  $G_7^*$  на область  $G_7$ . Для этого нужно рассмотреть обратные к функции Жуковского отображения. Из определения функции (24.3) получаем квадратное относительно  $z$  уравнение  $z^2 - 2wz + 1 = 0$ , решая которое получаем, что в области



$G_6^*$  существуют две регулярные функции, обратные к функции Жуковского, это функции вида  $z = w \pm g_0(w)$ , где  $g_0(w)$  есть регулярная ветвь корня  $\{\sqrt{w^2 - 1}\}$ , которая эквивалентна  $w$  при  $w \rightarrow \infty$ . Тогда область  $G_6^*$  конформно отображается на область  $G_6$  функцией  $z = w - g_0(w)$ , так как при  $w \rightarrow \infty$  ее предел равен нулю.

В односвязной области  $G_7^*$  также существуют две регулярные ветви многозначной функции  $\{\sqrt{w^2 - 1}\}$ . Возьмем ее регулярную ветвь  $g_1(w)$  такую, что  $g_1(0) = +i$ . Тогда функция  $z = w + g_1(w)$  конформно отображает область  $G_7^*$  на область  $G_7$ .

ПРИМЕР 24.8. Пусть задана область

$$G_8 = \{z \mid |z - ia| > \sqrt{1 + a^2}\}, \quad (24.8)$$

где число  $a > 0$ . Границей области  $G_8$  является окружность  $\gamma$ , проходящая через точки  $\pm 1$ ,  $ib$  и  $-\frac{i}{b}$ , где  $b := a + \sqrt{a^2 + 1}$  (см. рис. 24.12).

Дробно-линейное отображение  $f(z) = \frac{1}{z}$  отображает окружность  $\gamma$  на себя, так как три точки из  $\gamma$  отображаются на три точки из  $\gamma$ , т.е.  $f(-1) = -1$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(ib) = -\frac{i}{b}$ . Так как  $f(\infty) = 0$ , то функция  $f(z) = \frac{1}{z}$  отобразит область  $G_8$  на дополнение  $\mathbb{C} \setminus \overline{G_8}$ , т.е. в области  $G_8$  нет точек, переходящих при отображении  $\frac{1}{z}$  в область  $G_8$ , т.е. по критерию однолиственности функция Жуковского на области  $G_8$  однолистка.

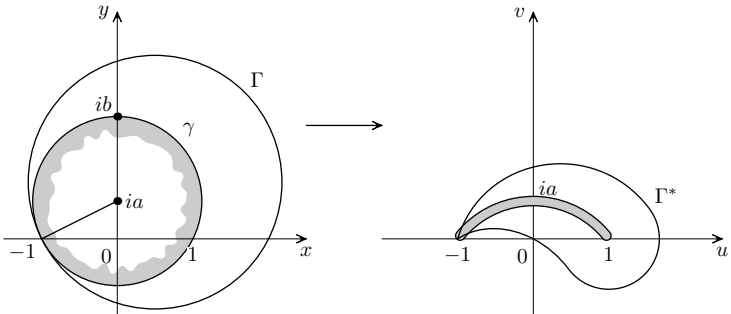


Рис. 24.12

Найдем образ области  $G_8$  при отображении функцией Жуковского. Представим функцию (24.3) как суперпозицию трех

отображений:

$$w = \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}, \quad (24.9)$$

$$\zeta = t^2, \quad t = \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (24.10)$$

Дробно-линейное отображение  $t(z)$  (24.10), очевидно, переводит окружность  $\gamma$  в прямую, а функция  $\zeta = t^2$  переведет эту прямую в луч, идущий из 0 в  $\infty$  и не лежащий на действительной оси. Дробно-линейное отображение (24.9) переведет этот луч в дугу окружности с концами в точках 1 и  $-1$ . Точку  $z = ib$  функция Жуковского переведет в точку

$$w = \frac{1}{2} \left( ib + \frac{1}{ib} \right) = ia.$$

Таким образом, функция Жуковского конформно отображит область  $G_8$  в плоскость  $\mathbb{C}$  с разрезом по дуге окружности с концами в точках  $+1$ ,  $-1$  и проходящей через точку  $ia$ . Если в области  $G_8$  взять любую окружность  $\Gamma$ , касающуюся окружности  $\gamma$  в точке  $-1$ , то функция Жуковского отобразит ее в кривую  $\Gamma^*$ , называемую *профилем Жуковского* (см. рис. 24.12).

**ЗАМЕЧАНИЕ 24.3.** Эти кривые  $\Gamma^*$  впервые использовались Н. Е. Жуковским для построения профилей крыла самолета при расчете подъемной силы крыла самолета.

**24.4. Теорема Римана.** В этом и предыдущем параграфах мы рассмотрели много примеров, в которых регулярные и однолистные в некоторой области функции конформно отображают эту область на ее образ. Рассмотрим теперь более трудную и более важную для приложений обратную задачу. Пусть заданы две области  $G_1$  и  $G_2$  из  $\overline{\mathbb{C}}$  и требуется найти функцию  $f: G_1 \rightarrow G_2$ , осуществляющую конформное отображение области  $G_1$  на область  $G_2$ .

Для начала завершим исследование всех конформных отображений круга  $B_1(0)$  на себя. При изучении дробно-линейных отображений мы нашли некоторый класс таких отображений (см. пример 23.2 и формулу (23.22)). Покажем, что этот класс исчерпывает все возможности.

ТЕОРЕМА 24.1. Все отображения, конформно переводящие круг  $B_1(0)$  на себя, являются дробно-линейными функциями вида

$$w = \frac{z - a}{1 - \bar{z}a} e^{i\beta}, \quad (24.11)$$

где  $a$  — точка из  $B_1(0)$  и  $\beta \in \mathbb{R}^1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что некоторая функция  $g$  конформно отображает круг  $B_1(0)$  на себя. Тогда существует точка  $w_0 \in B_1(0)$  такая, что  $g(0) = w_0$ . Рассмотрим отображение  $h(w) := \frac{w - w_0}{1 - \bar{w}w_0}$ , которое, как показано в примере 23.2, конформно отображает круг  $B_1(0)$  на круг  $B_1(0)$ . Тогда суперпозиция  $f := h \circ g$  также конформно отображает  $B_1(0)$  на  $B_1(0)$ , причем  $f(0) = 0$ . Кроме того, это значит, что  $|f(z)| < 1$  при всех  $z \in B_1(0)$ . Применяя лемму Шварца (см. лемму 21.2), получаем, что  $|f(z)| \leq |z|$  для всех  $z \in B_1(0)$ .

В свою очередь, по свойству конформных отображений обратное отображение  $f^{-1} : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$  также конформно, ограничено и  $f^{-1}(0) = 0$ . По лемме Шварца получаем неравенство  $|f^{-1}(w)| \leq |w|$  для всех  $w \in B_1(0)$ , т.е.  $|z| \leq |f(z)|$  при всех  $z \in B_1(0)$ . В результате получаем равенство  $|f(z)| = |z|$  для всех  $z \in B_1(0)$ . По лемме Шварца существует число  $\alpha \in \mathbb{R}^1$  такое, что  $f(z) = e^{i\alpha}z$  для всех  $z \in B_1(0)$ . Отсюда следует, что функция  $g$  имеет вид  $g = h^{-1} \circ f = h^{-1}(e^{i\alpha}z)$ , т.е.  $g$  является дробно-линейной функцией. Докажем, что функция  $g$  описывается формулой (24.11).

Существует точка  $a_0 \in B_1(0)$  такая, что  $g(a_0) = 0$ . Дифференцируя тождество  $e^{i\alpha}z = h \circ g$ , получаем, что

$$e^{i\alpha} = h'(0)g'(a_0),$$

откуда и из того, что  $h'(0) = 1 - |w_0|^2 > 0$ , получаем, что  $\alpha \in \text{Arg } g'(a_0)$ . Рассмотрим функцию  $g_1$ , удовлетворяющую формуле (24.11) при  $a = a_0$  и  $\beta = \alpha$ . Легко проверить, что  $g'_1(a_0) = e^{i\alpha} \frac{1}{1 - |a_0|^2}$ , т.е.  $\alpha \in \text{Arg } g'_1(a_0)$ . Тогда дробно-линейная функция  $\varphi := g_1 \circ g^{-1} : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$  такова, что  $\varphi(0) = 0$ . Кроме того по определению функции  $\varphi$  имеем равенство  $\varphi(g(z)) = g_1(z)$ , откуда следует равенство  $\varphi'(0)g'(a_0) = g'_1(a_0)$ ,

которое в силу того, что  $\alpha \in \text{Arg } g'(a_0)$  и  $\alpha \in \text{Arg } g'_1(a_0)$  дает включение  $0 \in \text{Arg } \varphi'(0)$ . Но это значит, что  $\varphi(z) = z$  и  $g = g_1$ , т.е. все конформные отображения  $B_1(0)$  на себя описываются формулой (24.11).  $\square$

**ЛЕММА 24.1.** Пусть область  $G$  такова, что существует функция  $f_0$ , конформно отображающая область  $G$  на круг  $B_1(0)$ . Тогда совокупность всех конформных отображений области  $G$  на круг  $B_1(0)$  задается формулой

$$f = h \circ f_0, \quad (24.12)$$

где  $h$  — дробно-линейное отображение вида (24.11).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как всякое отображение  $h$  вида (24.11), конформно отображает круг  $B_1(0)$  на себя, то отображение  $f$  из (24.12) очевидно конформно отображает  $G$  на  $B_1(0)$ . С другой стороны, пусть задано произвольное конформное отображение  $f_1: G \rightarrow \mathbb{C}$  области  $G$  на  $B_1(0)$ . Тогда отображение  $\varphi := f_1 \circ f_0^{-1}$  конформно отображает  $B_1(0)$  на себя. В силу теоремы 24.1 функция  $\varphi$  является дробно-линейной вида (24.11), и из последнего равенства получаем представление  $f_1$  в виде (24.12).  $\square$

**ТЕОРЕМА 24.2 (ЕДИНСТВЕННОСТИ).** Если для области  $G \subset \mathbb{C}$  существует конформное отображение  $f_0$  области  $G$  на круг  $B_1(0)$ , то совокупность всех конформных отображений области  $G$  на круг  $B_1(0)$  зависит от трех действительных параметров. В частности, существует единственное конформное отображение области  $G$  на круг  $B_1(0)$ , удовлетворяющее условиям:

$$f(z_0) = 0, \arg f'(z_0) = \theta, \quad (24.13)$$

где  $z_0$  — произвольная точка из  $G$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Первое утверждение следует из леммы 24.1 и того, что дробно-линейное отображение (24.11) зависит от трех действительных параметров: двух координат точки  $z_0$  и числа  $\beta$  в (24.11).

Допустим, что существуют два конформных отображения  $f_1$  и  $f_2$  области  $G$  на круг  $B_1(0)$ , удовлетворяющие условиям

(24.13). Тогда функция  $h := f_1 \circ f_2^{-1}$  будет конформно отображать  $B_1(0)$  на себя, причем  $h(0) = 0$ . Кроме того, из равенства  $f_1 = h \circ f_2$  получаем по теореме о сложной функции  $f'_1(z_0) = h'(0) f'_2(z_0)$ , откуда получаем, что  $\arg h'(0) = 0$ . Из формулы (24.11) при  $h(0) = 0$  и  $\arg h'(0) = 0$  следует, что  $a = 0$  и  $\beta = 0$ , т.е.  $h(z) = z$ , т.е.  $f_1(z) = f_2(z)$  при любом  $z \in G$ .  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 24.4.** В силу леммы и теоремы единственности получаем, что функция (23.19) задает общий вид конформного отображения верхней полуплоскости на круг  $B_1(0)$ .

Заметим, что расширенную комплексную плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  и комплексную плоскость  $\mathbb{C}$  нельзя конформно отобразить на круг  $B_1(0)$ . В самом деле, если бы такое отображение существовало, то это была бы целая функция, со значениями, ограниченными по норме единицей. Но по теореме Лиувилля такая функция может быть лишь постоянной, которая не может давать однолистное отображение на  $B_1(0)$ . Итак, чтобы существовало конформное отображение области  $G$  на круг  $B_1(0)$  необходимо, чтобы граничных точек было больше одной. Оказывается этого и достаточно.

**ТЕОРЕМА 24.3 (РИМАН).** Пусть задана односвязная область  $G$  в  $\overline{\mathbb{C}}$ , граница которой состоит более чем из одной точки. Тогда существует конформное отображение области  $G$  на круг  $B_1(0)$ .

Теорему приводим без доказательства. При желании доказательство можно найти в § 12 книги [10].

**СЛЕДСТВИЕ 24.1.** Если заданы две односвязные области  $G$  и  $G_1$  в  $\overline{\mathbb{C}}$ , и граница каждой состоит более чем из одной точки, то существует конформное отображение, переводящее область  $G$  на область  $G_1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $f: G \rightarrow B_1(0)$  и  $g: G_1 \rightarrow B_1(0)$  — конформные отображения, существующие по теореме 24.3, тогда  $g^{-1} \cdot f$  есть искомое конформное отображение.  $\square$

Также без доказательства приведем следующий результат.

## ТЕОРЕМА 24.4 (ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ ГРАНИЦ).

Пусть заданы две ограниченные односвязные области  $G$  и  $G_1$ , границы которых  $\Gamma$  и  $\Gamma_1$  являются простыми, кусочно-гладкими кривыми. Пусть функция  $f: G \rightarrow G_1$  конформно отображает область  $G$  на область  $G_1$ . Тогда существует непрерывное продолжение  $\tilde{f}$  функции  $f$  с области  $G$  на ее замыкание  $\overline{G} = G \cup \Gamma$ , причем эта функция  $\tilde{f}$  осуществляет однолистное отображение замкнутой области  $\overline{G}$  на замкнутую область  $\overline{G}_1 = G_1 \cup \Gamma_1$ , причем границу  $\Gamma$  отображает на границу  $\Gamma_1$  с сохранением ориентации относительно своей области.

УПРАЖНЕНИЕ 24.1. Покажите, что для выполнения принципа сохранения границ одной регулярности отображения не достаточно. А именно: придумайте пример функции, регулярной (но не однолистной) на некоторой односвязной ограниченной области  $G$  со значениями, образующими некоторую ограниченную область  $G_1$ , причем границы этих областей являются кусочно-гладкими кривыми, но для которой не существует непрерывного продолжения на границу области  $G$ .

## § 25. Принцип симметрии

Рассмотрим один из специальных принципов регулярного продолжения функции, задающей конформное отображение, с некоторой области на большую область.

**ТЕОРЕМА 25.1.** Пусть области  $G$  и  $G^*$  расположены в верхней полуплоскости комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  и имеют границы  $\Gamma$  и  $\Gamma^*$ . Пусть граница  $\Gamma$  содержит конечное число непересекающихся интервалов  $l_1, \dots, l_k$ , лежащих на действительной оси, а граница  $\Gamma^*$  содержит непересекающиеся интервалы  $l_1^*, \dots, l_k^*$ , также лежащие на действительной оси. Определим области  $\tilde{G}$  и  $\tilde{G}^*$ , симметричные относительно действительной оси с областями  $G$  и  $G^*$  соответственно (см. рис. 25.1).

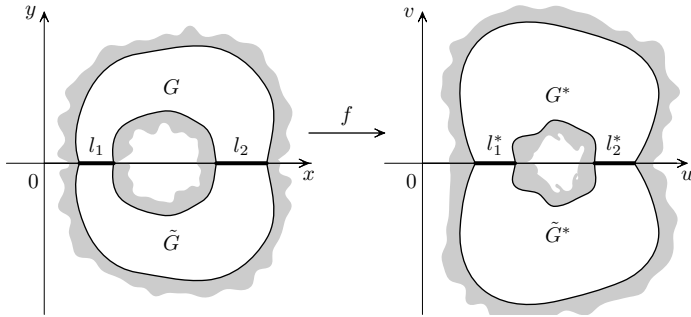


Рис. 25.1

Пусть задана непрерывная функция  $f: G \cup \left(\bigcup_{s=1}^k l_s\right) \rightarrow \mathbb{C}$ , которая конформно отображает область  $G$  на область  $G^*$ , а каждый интервал  $l_s$  взаимно однозначно отображает на интервал  $l_s^*$  при всех  $s \in \overline{1, k}$ . Тогда функция  $f$  допускает некоторое (регулярное) продолжение с области  $G$  на область  $G \cup \left(\bigcup_{s=1}^k l_s\right) \cup \tilde{G}$ , причем полученная при этом регулярная функция конформно отображает область  $G \cup \left(\bigcup_{s=1}^k l_s\right) \cup \tilde{G}$  на область  $G^* \cup \left(\bigcup_{s=1}^k l_s^*\right) \cup \tilde{G}^*$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что искомая функция имеет вид

$$\mathcal{F}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in G \cup (\bigcup_{s=1}^k l_s); \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in \tilde{G}. \end{cases} \quad (25.1)$$

По условиям теоремы функция  $f$  регулярна на области  $G$ . Из формулы (25.1) и из условий теоремы следует, что функция  $\mathcal{F}$  однозначна и непрерывна в области  $\tilde{G}$  и отображает эту область на область  $\tilde{G}^*$ .

1. Докажем регулярность функции  $\mathcal{F}$  в области  $\tilde{G}$ , т.е. существование производной  $\mathcal{F}'(z)$ . Зафиксируем произвольную точку  $z_0 \in \tilde{G}$ . Тогда существует число  $r_0 > 0$  такое, что  $B_{r_0}(z_0) \subset \subset \tilde{G}$ , следовательно, для каждого  $\Delta z$ ,  $0 < |\Delta z| < r_0$ , справедливо включение  $z_0 + \Delta z \in \tilde{G}$ . В силу (25.1) получаем

$$\frac{\mathcal{F}(z_0 + \Delta z) - \mathcal{F}(z_0)}{\Delta z} = \frac{\overline{f(\bar{z}_0 + \overline{\Delta z})} - \overline{f(\bar{z}_0)}}{\Delta z} = \overline{\left[ \frac{f(\bar{z}_0 + \overline{\Delta z}) - f(\bar{z}_0)}{\overline{\Delta z}} \right]}.$$

Так как из определения области  $\tilde{G}$  следует, что  $\bar{z}_0 \in G$  и  $\bar{z}_0 + \overline{\Delta z} \in G$ , то в силу регулярности функции  $f$  на области  $G$  существует предел

$$\lim_{\overline{\Delta z} \rightarrow 0} \frac{f(\bar{z}_0 + \overline{\Delta z}) - f(\bar{z}_0)}{\overline{\Delta z}} = f'(\bar{z}_0).$$

Отсюда следует существование производной  $\mathcal{F}'(z_0)$  и формула

$$\mathcal{F}'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(z_0 + \Delta z) - \mathcal{F}(z_0)}{\Delta z} = \overline{f'(\bar{z}_0)}. \quad (25.2)$$

2. Докажем, что функция  $\mathcal{F}$  непрерывна на области  $G \cup (\bigcup_{s=1}^k l_s) \cup \tilde{G}$ . Для этого осталось доказать, что  $\mathcal{F}$  непрерывна

в произвольной точке  $x_0 \in \bigcup_{s=1}^k l_s$ . В самом деле, из непрерывности  $f$  на множестве  $G \cup (\bigcup_{s=1}^k l_s)$  получаем

$$\lim_{\bar{z} \xrightarrow{\tilde{G}} x_0} \mathcal{F}(z) = \lim_{\bar{z} \xrightarrow{\tilde{G}} x_0} \overline{f(\bar{z})} = \overline{\lim_{\bar{z} \xrightarrow{\tilde{G}} x_0} f(\bar{z})} = \overline{f(x_0)} = f(x_0), \quad (25.3)$$



где последнее равенство в (25.3) следует из того, что по условию теоремы  $f(x_0) \in \left(\bigcup_{s=1}^k l_s^*\right)$ , т. е. является действительным числом.

В итоге, по теореме 10.3 (о стирании разреза) функция  $\mathcal{F}$  регулярна на области  $G \cup \left(\bigcup_{s=1}^k l_s\right) \cup \tilde{G}$ .

Таким образом, функция  $\mathcal{F}$  является регулярным продолжением функции  $f$  с области  $G$  на область  $G \cup \left(\bigcup_{s=1}^k l_s\right) \cup \tilde{G}$ .

3. Из взаимной однозначности отображения  $f: G \leftrightarrow G^*$  и взаимной однозначности  $f: \left(\bigcup_{s=1}^k l_s\right) \leftrightarrow \left(\bigcup_{s=1}^k l_s^*\right)$  и из формулы (25.1) следует взаимная однозначность отображения  $\mathcal{F}: \tilde{G} \leftrightarrow \tilde{G}^*$ . В итоге получаем однолистное отображение  $\mathcal{F}$  области  $G \cup \left(\bigcup_{s=1}^k l_s\right) \cup \tilde{G}$  на область  $G^* \cup \left(\bigcup_{s=1}^k l_s^*\right) \cup \tilde{G}^*$ . Из однолистности и регулярности функции  $\mathcal{F}$  следует, что функция  $\mathcal{F}$  конформно отображает область  $G \cup \left(\bigcup_{s=1}^k l_s\right) \cup \tilde{G}$  на область  $G^* \cup \left(\bigcup_{s=1}^k l_s^*\right) \cup \tilde{G}^*$ .  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 25.1.** Принцип симметрии (теорему 25.1) можно легко обобщить со случая симметрии относительно действительной оси на случай симметрии относительно произвольной прямой или окружности. Такое обобщение можно получить, воспользовавшись конформностью дробно-линейного отображения, которое переводит данную полуплоскость (или круг) на верхнюю полуплоскость, регулярным продолжением по теореме 25.1 и обратным дробно-линейным отображением, переводящим верхнюю полуплоскость в данную полуплоскость (или круг).

Приведем несколько примеров, демонстрирующих эффективность применения принципа симметрии при отыскании функций, осуществляющих конформные отображения заданных областей в заданные области, при наличии у этих областей симметрии относительно прямой или окружности.

ПРИМЕР 25.1. Требуется найти конформное отображение, переводящее область

$$H = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\} \setminus (\{z \mid z = t(1+i), t \in [0, 1]\} \cup \{z \mid z = t(-1+i), t \in [0, 1]\})$$

(см. рис. 25.2а) в верхнюю полуплоскость плоскости  $\mathbb{C}$ .

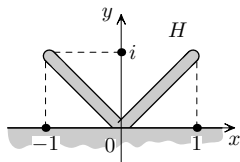


Рис. 25.2а

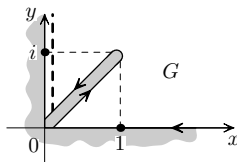


Рис. 25.2б

Воспользуемся симметрией множества  $H$  относительно мнимой оси. Обозначим через  $G$  правую половину этого множества (см. рис. 25.2б). Чтобы не потерять введенный при этом дополнительный участок границы — интервал  $l_1 = (i0, +i\infty)$ , обозначим его на рисунке пунктиром. Задача свелась к тому, чтобы найти функцию  $f$ , которая непрерывна на замыкании области  $G$  по пунктиру на мнимой полуоси и конформно отображает область  $G$  в аналогичный угол первой четверти плоскости, но без разреза по отрезку  $\{z \mid z = t(1+i), t \in [0, 1]\}$  (см. рис. 25.3д). При этом образом пунктира должен быть он сам — интервал  $l_1$ . Тогда по принципу симметрии соответствующее регулярное продолжение функции  $f$  с области  $G$  на область  $H$  отобразит область  $H$  в верхнюю полуплоскость.

1) Выбираем в области  $G$  функцию  $w_1 = z^4$ , которая однолистка (в области же  $H$  она не является однолистной). Эта функция конформно отображает область  $G$  на область  $G_1 = \mathbb{C} \setminus [-4, +\infty)$ . При этом пунктир для области  $G$  этой функцией отображается на новый пунктир для области  $G_1$  — нижний край разреза по интервалу  $(0, +\infty)$  (см. рис. 25.3а).

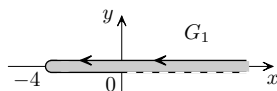


Рис. 25.3а

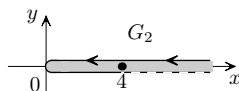


Рис. 25.3б

2) Выбираем функцию  $w_2 = w_1 + 4$ . Она конформно отображает область  $G_1$  на область  $G_2 = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ , причем пунктир отображается на новый пунктир — интервал  $(4, +\infty)$  на нижнем краю разреза (см. рис. 25.3б).

3) Выбираем степенную функцию  $w_3 = |w_2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} \arg w_2}$ , где  $\arg w_2 \in (0, 2\pi)$ . Эта функция, являющаяся регулярной ветвью квадратного корня, конформно отображает область  $G_2$  на верхнюю полуплоскость  $G_3$ , причем на границе  $G_3$  появится новый пунктир, который будет проходить по интервалу  $(-\infty, -2)$  (см. рис. 25.3в).

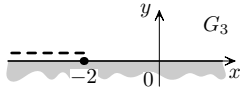


Рис. 25.3в

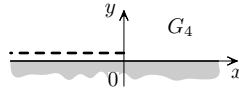


Рис. 25.3г

4) Выбираем функцию  $w_4 = w_3 + 2$ , при этом верхняя полуплоскость  $G_3$  отобразится на верхнюю полуплоскость  $G_4$ , причем на границе области  $G_4$  новый пунктир будет проходить по интервалу  $(-\infty, 0)$  (см. рис. 25.3г).

5) Выбираем степенную функцию  $w_5 = |w_4|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} \arg w_4}$ , где  $\arg w_4 \in (0, \pi)$ . Эта функция, являющаяся регулярной ветвью квадратного корня, конформно отображает область  $G_4$  на область  $G_5 = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\}$ , причем пунктир  $(-\infty, 0)$  отображается на новый пунктир  $(i0, +i\infty)$ , принадлежащий границе области  $G_5$  (см. рис. 25.3д).

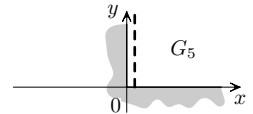


Рис. 25.3д

Итак, суперпозиция всех указанных выше отображений, т.е. функция  $f = w_5 \cdot w_4 \cdot w_3 \cdot w_2 \cdot w_1$ , конформно отображает область  $G$  на область  $G_5$ , при этом она непрерывна на замыкании области  $G$  по пунктиру — интервалу  $(i0, +i\infty)$ , который при этом отображается на себя. Отсюда и из принципа симметрии относительно мнимой оси (см. замечание 25.1) следует существование регулярного продолжения функции  $f$  с области  $G$  на область  $H$ , которое и осуществляет конформное отображение области  $H$  на верхнюю полуплоскость.

**ПРИМЕР 25.2.** Требуется найти конформное отображение, переводящее область  $H = \{z = x + iy \mid y^2 < 2p(x + \frac{p}{2})\}$ , где число  $p > 0$ , (см. рис. 25.4a) на верхнюю полуплоскость.

Границей области  $H$  является парабола. Всякая регулярная (например, в области  $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ ) ветвь корня  $\{\sqrt{z}\}$  переводит данную параболу в прямую. Однако в отличие от примера 27.1 многозначная функция  $\{\sqrt{z}\}$  не имеет регулярных ветвей в области  $H$ , так как в этой области содержится точка 0.

Чтобы обойти эту трудность, воспользуемся симметрией области  $H$  относительно действительной оси. Выберем в качестве новой области  $G$  верхнюю половину области  $H$ , т. е.

$$G := \{z = x + iy \mid y^2 < 2p(x + \frac{p}{2}), y > 0\}.$$

При этом проводим пунктир по добавленному участку границы, т. е. по интервалу  $(-\frac{p}{2}, +\infty)$  (см. рис. 25.4б).

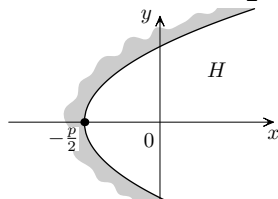


Рис. 25.4a

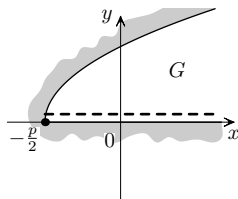


Рис. 25.4б

1) Выбираем на области  $G$  степенную функцию  $w_1 = |z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} \arg z}$ , где  $\arg z \in (0, \pi)$ . Эта функция, являющаяся регулярной ветвью корня, конформно отображает область  $G$  на полуполосу  $G_1 = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z \in [0, \sqrt{p/2}]\}$ . При этом  $w_1(z)$  непрерывна на пункте  $(-p/2, +\infty)$  и образом этого пунктира будет новый пунктир, который пойдет по действительной полуоси и отрезку  $[0, i\sqrt{p/2}]$  на мнимой оси (см. рис. 25.5a).

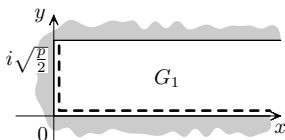


Рис. 25.5a

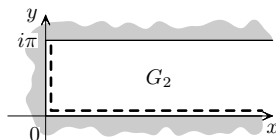


Рис. 25.5б

2) Выбираем линейную функцию  $w_2 = \pi\sqrt{2/p} w_1$ . Она конформно отображает область  $G_1$  на полуполосу  $G_2 = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z \in [0, \pi]\}$  (см. рис. 25.5б).

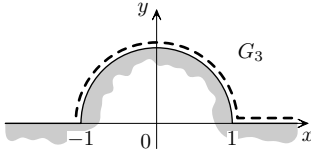


Рис. 25.5б

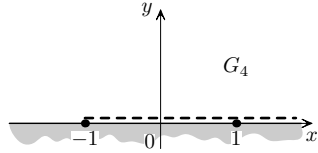


Рис. 25.5г

3) Выбираем  $w_3 = e^{w_2}$ . Эта функция  $w_3$  конформно отображает полуполосу  $G_2$  на область  $G_3 = \{z \mid |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ , причем образом пунктира будет граничная полуокружность и отрезок  $[1, +\infty)$  (см. рис. 25.5б).

4) Выбираем функцию Жуковского  $w_4 = \frac{1}{2} \left( w_3 + \frac{1}{w_3} \right)$ , которая конформна на области  $G_3$  и отображает ее на верхнюю полуплоскость  $G_4$ , причем образом пунктира будет интервал  $(-1, +\infty)$  (см. рис. 25.5г).

Применяя теорему 25.1 (принцип симметрии), отсюда получаем, что регулярное продолжение суперпозиции указанных выше четырех отображений  $w_4 \cdot w_3 \cdot w_2 \cdot w_1$  конформно отображает область  $H$  на плоскость с разрезом, т.е. на область  $G_5 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ .

5) Выбираем отображения  $w_5 = -(w_4 + 1)$  и  $w_6 = \sqrt{|w_5|} \cdot e^{\frac{i}{2} \arg_{\text{г.л.}} w_5}$ , суперпозиция которых, очевидно, конформно отображает область  $G_5$  на верхнюю полуплоскость.

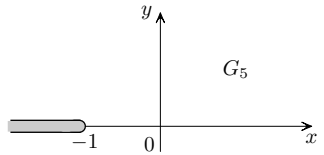


Рис. 25.5д

В итоге, взяв суперпозицию приведенных выше шести отображений, получим искомое отображение области  $H$  на верхнюю полуплоскость.

**ПРИМЕР 25.3.** Требуется найти конформное отображение, переводящее область

$$H = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=0}^2 \{z = te^{i\frac{2\pi}{3}k} \mid t \in [0, 1]\}$$

(см. рис. 25.6) на единичный круг  $B_1(0)$ .

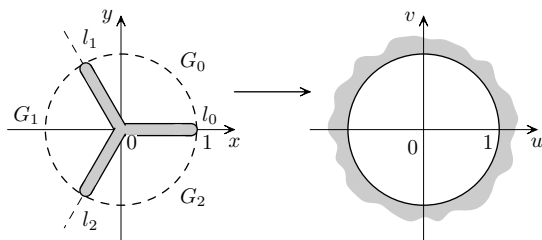


Рис. 25.6

Для решения задачи разобьем область  $H$  на три подобласти  $G_0, G_1, G_2$ , где

$$G_k = \left\{ z \neq 0 \mid \arg z \in \left( \frac{2}{3}\pi k, \frac{2}{3}\pi(k+1) \right) \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \quad (25.4)$$

при этом дополнительные (пунктирные) интервалы границы пойдут по лучам

$$l_k = \{ z = te^{i\frac{2\pi}{3}k} \mid t > 1 \}, \quad k = 0, 1, 2. \quad (25.5)$$

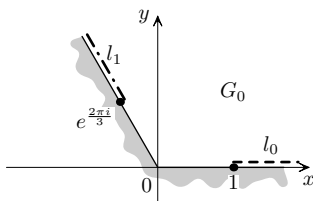


Рис. 25.7a

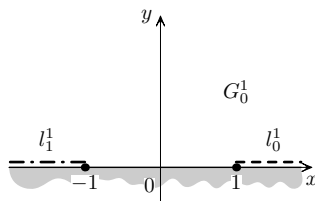


Рис. 25.7б

На границе области  $G_0$  рисуем пунктир по интервалу  $l_0$  и штрих-пунктир по интервалу  $l_1$  (см. рис. 25.7a). С помощью суперпозиции простых конформных отображений ищем отображение, переводящее область  $G_0$  в область

$$G_0^* = \left\{ z \mid |z| > 1, \arg z \in \left( 0, \frac{2}{3}\pi \right) \right\}. \quad (25.6)$$

Более того, искомое отображение должно быть непрерывным на замыкании области  $G_0$  по лежащим на границе области  $G_0$  пунктиру  $l_0$  и штрих-пунктиру  $l_1$ , которые должны отобразиться каждый сам на себя (см. рис. 25.8б).

1) Возьмем в области  $G_0$  степенную функцию

$$w_1 = |z|^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3i}{2} \arg z}, \quad \text{где} \quad \arg z \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right).$$

Как показано в пункте 1 предыдущего параграфа, эта функция конформно отображает область  $G_0$  на верхнюю полу-плоскость  $G_0^1$ . При этом пункт  $l_0$  отображается на себя, а штрих-пунктир  $l_1$  отображается на интервал  $(-\infty, -1)$  (см. рис. 25.7б).

2) Возьмем функцию  $w_2 = w_1 + g(w_1^2 - 1)$ , являющуюся регулярной ветвью обратной функции к функции Жуковского, причем такой, что  $w_2(i) = (1 + \sqrt{2})i$  (здесь функция  $g$  есть соответствующая регулярная ветвь корня). Эта функция конформно отображает область  $G_0^1$  на область  $G_0^2 = \{z \mid |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ , граница которой содержит пунктир (образ пункта) по интервалу  $(1, +\infty)$  и штрих-пунктир (образ штрих-пунктира) по интервалу  $(-\infty, -1)$  (см. рис. 25.8а).

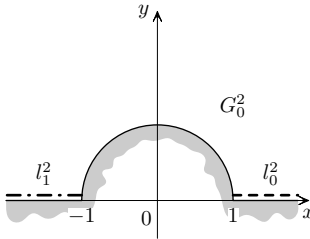


Рис. 25.8а

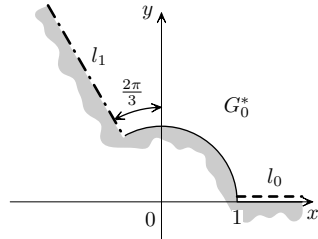


Рис. 25.8б

3) Возьмем степенную функцию

$$w_3 = |w_2|^{\frac{2}{3}} e^{\frac{2i}{3} \arg w_2}, \quad \text{где} \quad \arg w_2 \in (0, \pi).$$

Как показано в предыдущем параграфе, эта функция конформно отображает область  $G_0^2$  на область  $G_0^*$  из (25.6) (см. рис. 25.8б), граница которой содержит пунктир по интервалу  $l_0$  и штрих-пунктир по интервалу  $l_1$ . (см. (25.5)).

Итак, определим функцию  $f_0(z) = w_3(w_2(w_1(z)))$  на области  $G_0$ . Она конформно отображает область  $G_0$  (см. (25.4) и рис. 25.7а) на область  $G_0^*$  (см. (25.6) и рис. 25.8б), она непрерывна на замыкании области  $G_0$  по пунктuru  $l_0$  и штрих-пунктиру  $l_1$ , при этом они отображаются каждый сам на себя.

Более того, так как входящие в функцию  $f_0$  степенные функции  $w_1$  и  $w_3$ , очевидно, отображают точки с равными модулями в точки с равными модулями, а обратная функция  $w_2$  к функции Жуковского нечетна, т.е.  $w_2(x) = -w_2(-x)$  при любом действительном  $x$ , то для точек пунктира  $l_0$  и штрих-пунктира  $l_1$  справедливо соотношение

$$\lim_{z \xrightarrow{G_0} x} f_0(z) e^{2\pi i/3} = \lim_{z \xrightarrow{G_0} x} f_0(z), \quad \forall x \in l_0. \quad (25.7)$$

Продолжим функцию  $f_0$  с области  $G_0$  на области  $G_1$  и  $G_2$ , определенные в (25.4). Определим функцию

$$f_1(z) = e^{\frac{2\pi i}{3}} f_0(e^{-\frac{2\pi i}{3}} z), \quad \forall z \in G_1.$$

Эта функция  $f_1$  конформно отображает область  $G_1$  на область

$$G_1^* = \left\{ z \mid |z| > 1, \arg z \in \left( \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right) \right\},$$

причем в силу равенства (25.7) получаем равенство на границе  $l_1$

$$\lim_{z \xrightarrow{G_1} z_0} f_1(z) = \lim_{z \xrightarrow{G_0} z_0} f_0(z), \quad \forall z_0 \in l_1.$$

Определим функцию

$$f_2(z) = e^{\frac{4\pi i}{3}} f_0(e^{-\frac{4\pi i}{3}} z), \quad \forall z \in G_2.$$

Эта функция  $f_2$  конформно отображает область  $G_2$  на область

$$G_2^* = \left\{ z \mid |z| > 1, \arg z \in \left( \frac{4\pi}{3}, 2\pi \right) \right\},$$

причем в силу равенства (25.7) получаем равенства

$$\lim_{z \xrightarrow{G_2} z_0} f_2(z) = \lim_{z \xrightarrow{G_1} z_0} f_1(z), \quad \forall z_0 \in l_2,$$

$$\lim_{z \xrightarrow{G_0} x_0} f_0(z) = \lim_{z \xrightarrow{G_2} x_0} f_2(z), \quad \forall x_0 \in l_0.$$

В силу теоремы 10.3 (о стирании разреза), получаем регулярную функцию  $F : H \rightarrow \mathring{B}_1(\infty)$  по формуле  $F(z) = f_k(z)$  при  $z \in G_k$ ,  $k = 0, 1, 2$ , причем она конформно отображает область  $H$  на  $\mathring{B}_1(\infty)$ . Осталось применить отображение  $\frac{1}{w}$ , которое внешность круга конформно отображает на круг  $B_1(0)$ .



## § 26. Задача Дирихле на плоскости

В этом параграфе мы продолжим изучение свойств гармонических функций на плоскости, которые, как мы уже знаем, тесно связаны с регулярными функциями.

Для всякой функции  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  введем обозначение:  $u(z) := u(x, y)$ , где  $z = x + iy$ .

**ТЕОРЕМА 26.1.** Пусть регулярная функция  $w = f(z)$  отображает область  $G$  в область  $D$  и  $f(z) \neq \text{const}$ . Пусть в области  $D$  задана гармоническая функция  $\tilde{u}(w)$ . Тогда функция  $u(z) := \tilde{u}(f(z))$  будет также гармонической функцией в области  $G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По принципу сохранения области (теорема 21.1) множество  $f(G)$  есть область и по условию  $f(G) \subset D$ . Выберем произвольную точку  $z_0$  в области  $G$  и пусть точка  $w_0 \in D$  такая, что  $w_0 = f(z_0)$ . Так как  $f(G)$  область, то существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что  $B_\varepsilon(w_0) \subset f(G)$ . Так как функция  $f$  непрерывна в точке  $z_0$  и  $G$  — область, то существует число  $\delta > 0$  такое, что  $B_\delta(z_0) \subset G$  и  $f(B_\delta(z_0)) \subset B_\varepsilon(w_0)$ . По теореме 4.2 в круге  $B_\varepsilon(w_0)$  существует регулярная функция  $h$  такая, что  $\text{Re } h(w) = \tilde{u}(w)$ . По теореме 5.1 (о сложной функции) функция  $z \rightarrow h(f(z))$ , определенная в круге  $B_\delta(z_0)$ , будет регулярной. Следовательно, по теореме 4.1, функция

$$u(z) := \text{Re } h(f(z)) = \tilde{u}(f(z))$$

будет гармонической функцией в круге  $B_\delta(z_0)$ , а в силу произвольности выбора точки  $z_0$  функция  $u(z)$  является гармонической во всей области  $G$ .  $\square$

Приведем формулировки классической и общей задач Дирихле.

**Классическая задача Дирихле.** Пусть задана ограниченная односвязная область  $G \subset \mathbb{C}$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , и на границе  $\Gamma$  задана непрерывная функция  $u_0: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Требуется найти функцию  $u: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^1$ , гармоническую в области  $G$

и непрерывную на замыкании области  $\overline{G} = G \cup \Gamma$ , которая на границе совпадает с заданной функцией, т. е.  $u(\zeta)|_{\zeta \in \Gamma} = u_0(\zeta)$ .

*Общая задача Дирихле.* Пусть задана односвязная область  $G$  в расширенной комплексной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , и на границе  $\Gamma$  задана ограниченная функция  $u_0: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^1$ , непрерывная всюду, кроме, быть может, конечного числа точек  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ , где эта функция имеет точки разрыва 1-го рода (вдоль границы  $\Gamma$ ). Обозначим через  $\tilde{\Gamma} := \Gamma \setminus \{\cup_{k=1}^n \zeta_k\}$ . Требуется найти гармоническую и ограниченную в области  $G$  функцию  $u$ , которая непрерывна на множестве  $G \cup \tilde{\Gamma}$  и принимает значения  $u_0(\zeta)$  в каждой точке  $\zeta$  из множества  $\tilde{\Gamma}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 26.1.** В общей задаче Дирихле область  $G$  может быть неограниченной и содержать бесконечно удаленную точку  $\infty$  как внутри себя, так и на границе  $\Gamma$ . В первом случае из условия ограниченности решения задачи Дирихле следует, что  $\infty$  есть устранимая особая точка этого решения. Если же бесконечно удаленная точка лежит на границе  $\Gamma$  области  $G$ , то из условия общей задачи Дирихле следует, что граничная функция  $u_0$  имеет конечные односторонние пределы в  $\infty$  вдоль кривой  $\Gamma$ .

**ЛЕММА 26.1.** Если существует решение  $u(z)$  общей задачи Дирихле в ограниченной односвязной области  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , то оно принимает значения в интервале  $[m, M]$ , где  $m$  и  $M$  — инфимум и супремум значений граничной функции  $u_0$  на множестве  $\tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus \{\cup_{k=1}^n \zeta_k\}$ , где  $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \Gamma$  — все точки разрыва функции  $u_0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Через  $d$  обозначим диаметр области  $G$ , т. е.  $d := \sup\{|z_1 - z_2| \mid z_1, z_2 \in G\}$ , и пусть выбрано произвольное число  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим функцию

$$U_\varepsilon(z) := M + \varepsilon \sum_{k=1}^n \ln \frac{d}{|z - \zeta_k|}. \quad (26.1)$$

Функция  $U_\varepsilon$ , очевидно, является гармонической в области  $G$  и непрерывной на множестве  $G \cup \tilde{\Gamma}$ .

При приближении к любой из точек  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ , очевидно, получаем

$$\lim_{z \rightarrow \zeta_k} U_\varepsilon(z) = +\infty, \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (26.2)$$

Для каждого достаточно малого числа  $r > 0$  и номера  $k \in \overline{1, n}$  определим множества (см. рис. 26.1):

$$G_r := G \setminus \bigcup_{k=1}^n B_r(\zeta_k), \quad \gamma_r^k := \{z \in G \mid |z - \zeta_k| = r\}. \quad (26.3)$$

В силу равенства (26.2) для каждого номера  $k \in \overline{1, n}$  получаем, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[ \min \{U_\varepsilon(z) \mid z \in \gamma_r^k\} \right] = +\infty. \quad (26.4)$$

Рассмотрим разность функций  $U_\varepsilon(z) - u(z)$ . Из выражения (26.1) и определения числа  $M$  получаем, что  $U_\varepsilon(z) > M \geq u(z)$  для любой точки  $z \in \tilde{\Gamma}$ . Отсюда, из ограниченности по условию функции  $u(z)$  и из выражения (26.4) существует число  $r_0 > 0$  для всякого числа  $r \in (0, r_0)$  справедливо неравенство  $U_\varepsilon(z) - u(z) > 0$  на границе области  $G_r$ . Отсюда в силу принципа максимума и минимума гармонических функций (см. теорему 21.3) получаем неравенство  $U_\varepsilon(z) - u(z) > 0$  для всех  $z \in G_r$ . Очевидно, что для любого  $z \in G$  существует  $r_1 \in (0, r_0)$  такое, что  $z \in G_{r_1}$ . В итоге получаем

$$U_\varepsilon(z) - u(z) > 0, \quad \forall z \in G, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (26.5)$$

В свою очередь, для каждой точки  $z \in G$  в силу (26.1) получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_\varepsilon(z) = M. \quad (26.6)$$

Из выражений (26.5) и (26.6) следует, что  $u(z) \leq M$ ,  $\forall z \in G$ .

Чтобы получить нижнюю оценку для  $u(z)$ , рассмотрим функцию  $-u(z)$ , которая также является гармонической и в силу приведенных выше рассуждений для нее следует верхняя оценка  $-u(z) \leq -m$   $\forall z \in G$ , что и завершает доказательство леммы.  $\square$

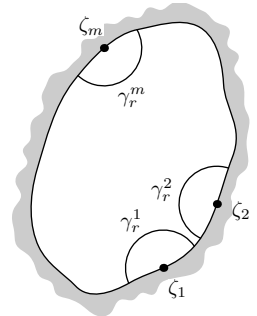


Рис. 26.1

СЛЕДСТВИЕ 26.1. Если в лемме 26.1 функция  $u_0(z) \neq \text{const}$ , то решение общей задачи Дирихле удовлетворяет строгим неравенствам  $m < u(z) < M$ ,  $\forall z \in G$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От противного. Если бы существовала точка  $z_0 \in G$ , в которой достигается равенство  $u(z_0) = M$ , то из принципа максимума гармонической функции следовало бы, что найдется другая точка  $z_1 \in G$ , в которой  $u(z_1) > M$ , что невозможно в силу леммы 26.1. Аналогично доказывается, что  $u(z) > m$  на  $G$ .  $\square$

ТЕОРЕМА 26.2. В односвязной ограниченной области  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$  общая задача Дирихле может иметь не более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\tilde{\Gamma}$  то же, что и в лемме 26.1. Допустим, что существуют две функции  $u_1(z)$  и  $u_2(z)$ , являющиеся ограниченными гармоническими в области  $G$ , непрерывными на множестве  $G \cup \tilde{\Gamma}$  и удовлетворяющие одному и тому же граничному условию. Определим функцию

$$w(z) = u_1(z) - u_2(z).$$

Эта функция является гармонической и ограниченной в области  $G$ , и равна нулю во всех точках множества  $\tilde{\Gamma}$ . По лемме 26.1 получаем, что  $w \equiv 0$ .  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 26.2. Отметим, что в теореме единственности (теореме 26.2) условие ограниченности области  $G$  можно убрать, однако это приведет к значительному усложнению доказательства теоремы (доказательство см., например, в [3]). В свою очередь, в теореме 26.2 условие ограниченности решения  $u(z)$  общей задачи Дирихле в области  $G$  существенно.

Покажем это на примере. Рассмотрим функцию

$$u(z) = \frac{x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = \text{Re} \left( 1 - \frac{2}{z} \right).$$

Эта функция является гармонической в круге  $|z - 1| < 1$ , т.е. при  $x^2 + y^2 < 2x$ . При этом она равна нулю на границе круга всюду, кроме одной точки 0. В результате эта функция дает неограниченное решение общей задачи Дирихле в данном круге, отличное от другого решения, тождественно равного нулю.

Перейдем к исследованию простейшей *классической задачи Дирихле на круге*  $B_R(0)$ , где число  $R > 0$ . Допустим, что решение классической задачи Дирихле на круге

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & |z| < R, \\ u|_{|z|=R} = u_0(x, y), \end{cases} \quad (26.7)$$

существует. Более того, допустим, что решение  $u(x, y)$  задачи (26.7), является гармонической функцией в большем круге  $B_{R_1}(0)$  радиуса  $R_1 > R$ . Тогда, в силу теоремы 4.2, найдется регулярная в круге  $B_{R_1}(0)$  функция  $f$  такая, что

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y), \quad \forall z = x + iy \in B_{R_1}(0). \quad (26.8)$$

Зафиксируем произвольную точку  $z \in B_R(0)$ , и пусть окружность  $\gamma_R = \{\zeta \mid |\zeta| = R\}$  ориентирована движением против хода часовой стрелки. По интегральной формуле Коши (теорема 8.1)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta(\psi))\zeta(\psi)}{\zeta(\psi) - z} d\psi, \quad (26.9)$$

где во втором интеграле мы заменили  $\zeta$  на функцию  $\zeta(\psi) = Re^{i\psi}$ , и, соответственно,  $d\zeta = i\zeta(\psi) d\psi$ .

Рассмотрим точку, симметричную выбранной точке  $z$  относительно окружности  $\gamma_R$ . Эта точка имеет вид  $R^2 \cdot (\bar{z})^{-1}$  и лежит вне круга  $B_R(0)$ . Аналогично равенству (26.9) получаем равенство интегралов

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - R^2(\bar{z})^{-1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\zeta}{\zeta - R^2(\bar{z})^{-1}} d\psi. \quad (26.10)$$

Левый интеграл в (26.10) равен нулю в силу того, что его подынтегральная функция является регулярной в круге  $B_R(0)$ , и для нее справедлива теорема Коши (теорема 7.1). В правом интеграле в (26.10)  $\zeta = \zeta(\psi) = Re^{i\psi}$ .

Вычитая (26.10) из (26.9), получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta) \left[ \frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta \bar{z}}{\zeta \bar{z} - R^2} \right] d\psi. \quad (26.11)$$

Так как  $R^2 = \zeta \bar{\zeta}$ , то упростим выражение в интеграле (26.11):

$$\left[ \frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta \bar{z}}{\zeta \bar{z} - R^2} \right] = \left[ \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \right] = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}. \quad (26.12)$$

Подставляя в интеграл (26.11) выражение (26.12) и  $\zeta = Re^{i\psi}$ , получаем:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\psi}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\psi} - z|^2} d\psi. \quad (26.13)$$

Выбирая слева и справа в равенстве (26.13) действительные части и обозначая

$$u_0(\zeta)|_{|\zeta|=R} := \tilde{u}_0(\psi),$$

получаем так называемую *формулу Пуассона*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}_0(\psi) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\psi} - z|^2} d\psi. \quad (26.14)$$

Правая часть формулы (26.14) называется *интегралом Пуассона*, она вычисляется через значение функции  $u_0$  на границе круга. Слева в (26.14) стоит решение задачи Дирихле  $u(x, y)$  на круге  $B_R(0)$ .

Таким образом, мы показали, что если решение классической задачи Дирихле существует, то оно выражается через интеграл Пуассона (26.14).

Определим ядро интеграла Пуассона (26.14) по формуле

$$K(\zeta, z) := \frac{1}{2\pi} \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}, \quad (26.15)$$

Легко проверить, что  $K(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}$ , откуда получим другую форму интеграла Пуассона:

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} u_0(\zeta) \frac{\zeta + z}{(\zeta - z)\zeta} d\zeta, \quad (26.16)$$

удобную для его вычисления с помощью вычетов.

Перейдем к вопросу о существовании решения *общей задачи Дирихле на круге* и покажем, что именно интеграл Пуассона

(26.14) является решением, причем не только классической, но и общей задачи Дирихле на круге.

Для этого вначале изучим свойства ядра (26.15) интеграла Пуассона.

ЛЕММА 26.2. *Справедливо равенство*

$$J(z) := \int_0^{2\pi} K(Re^{i\psi}, z) d\psi \equiv 1, \quad \forall z \in B_R(0). \quad (26.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интеграл  $J(z)$  представим в виде  $J(z) = \operatorname{Re} J^*(z)$ , где интеграл  $J^*(z)$  удовлетворяет равенству

$$J^*(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\psi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \cdot \frac{1}{\zeta} d\zeta.$$

По теореме о вычетах, обозначая через  $f$  подынтегральную функцию  $f(\zeta) = (\zeta + z)/((\zeta - z)\zeta)$ , вычислим интеграл

$$J^*(z) = \operatorname{res}_0 f + \operatorname{res}_z f = -1 + 2 = 1.$$

Отсюда следует, что  $J(z) = \operatorname{Re} J^*(z) = 1$ . □

ЛЕММА 26.3. *Пусть на окружности  $\gamma_R = \{\zeta \mid |\zeta| = R\}$  выбрана точка  $\zeta_0$  и пусть угол  $\psi_0 \in [0, 2\pi)$  такой, что  $\zeta_0 = Re^{i\psi_0}$ . Для каждого  $\delta \in (0, \pi)$  определим дугу*

$$\gamma(0, \delta) := \{\zeta \mid \zeta = Re^{i\psi}, \psi \in [\psi_0 + \delta, \psi_0 + 2\pi - \delta]\}.$$

*Тогда справедливо равенство*

$$\lim_{z \xrightarrow{B_R(0)} \zeta_0} \max \{K(\zeta, z) \mid \zeta \in \gamma(0, \delta)\} = 0. \quad (26.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как ядро  $K(\zeta, z)$  можно записать в виде

$$K(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{|\zeta_0|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}, \quad (26.19)$$

то числитель в (26.19) при  $z$ , стремящемся к  $\zeta_0$ , очевидно, стремится к нулю. Оценим поведение знаменателя при  $z \rightarrow \zeta_0$ . Так как функция  $e^{i\psi}$  непрерывна, то найдется число  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что  $|\zeta - \zeta_0| = R|1 - e^{i(\psi - \psi_0)}| \geq \varepsilon_0$  при  $\psi \in [\psi_0 + \delta, \psi_0 + 2\pi - \delta]$ .

Выбирая точку  $z \in B_R(0)$  из условия  $|z - \zeta_0| < \varepsilon_0/2$ , получаем

$$|\zeta - z| \geq |\zeta - \zeta_0| - |\zeta_0 - z| > \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

В итоге

$$\max \{K(\zeta, z) \mid \zeta \in \gamma(0, \delta)\} \leq \frac{2}{\pi \varepsilon_0^2} (|\zeta_0|^2 - |z|^2),$$

откуда следует утверждение леммы.  $\square$

**ТЕОРЕМА 26.3.** *Решение общей задачи Дирихле на круге  $B_R(0)$  существует и описывается интегралом Пуассона (26.14).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Покажем, что если граничная функция  $u_0(\zeta)$  является кусочно-непрерывной на окружности  $\gamma_R = \{\zeta \mid |\zeta| = R\}$ , то формула Пуассона (26.14) дает решение общей задачи Дирихле на круге  $B_R(0)$ . В самом деле, правая часть формулы (26.14) определяется значениями функции  $u_0(\zeta)$  на окружности  $\gamma_R$ , причем интеграл Пуассона (26.14) определен на круге  $B_R(0)$ . В силу формулы (26.16) интеграл Пуассона (26.14) можно преобразовать к виду  $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ , где

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\psi, \quad \zeta = Re^{i\psi}. \quad (26.20)$$

Покажем, что функция  $f$  из (26.20) регулярна в круге  $B_R(0)$ , откуда последует гармоничность функции  $u$  в круге  $B_R(0)$ . Для этого вычислим выражение

$$\begin{aligned} & \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\zeta) \frac{\zeta}{(\zeta - z)^2} d\psi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\zeta) \left\{ \left[ \frac{\zeta + z + \Delta z}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right] \frac{1}{2\Delta z} - \frac{\zeta}{(\zeta - z)^2} \right\} d\psi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\zeta) \left\{ \frac{\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z - \Delta z)} - \frac{\zeta}{(\zeta - z)^2} \right\} d\psi = \\ &= \frac{\Delta z}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\zeta) \frac{\zeta d\psi}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - \Delta z)}. \quad (26.21) \end{aligned}$$



Таким образом, эта разность стремится к нулю при  $\Delta z \rightarrow 0$ , т. е. существует производная  $f'$ .

В итоге мы показали, что функция  $f$  регулярна в круге  $B_R(0)$ , а интеграл Пуассона (26.14) является гармонической функцией на этом круге.

Покажем, что функция  $u$  из формулы Пуассона (26.14) на круге  $B_R(0)$  ограничена. Обозначим через  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  точки разрыва 1-го рода функции  $u_0$  на  $\gamma_R$ . Обозначим через  $\tilde{\gamma}_R := \gamma_R \setminus \{\cup_{k=1}^n \zeta_k\}$ . Пусть  $M = \sup\{|u_0(\zeta)| \mid \zeta \in \tilde{\gamma}_R\}$ . Тогда из формулы Пуассона (26.14) и леммы 26.2 получаем, что

$$|u(z)| \leq \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} d\psi \stackrel{(26.17)}{=} M.$$

Осталось показать, что в каждой точке  $\zeta_0 \in \tilde{\gamma}_R$  (т. е. в каждой точке непрерывности функции  $u_0$ ) для функции  $u$  из (26.14) справедливо равенство

$$\lim_{z \xrightarrow{B_R(0)} \zeta_0} u(z) = u_0(\zeta_0).$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \Delta I &:= \int_0^{2\pi} u_0(\zeta) K(\zeta, z) d\psi - u_0(\zeta_0) \stackrel{(26.17)}{=} \\ &\stackrel{(26.17)}{=} \int_0^{2\pi} (u_0(\zeta) - u_0(\zeta_0)) K(\zeta, z) d\psi. \end{aligned} \quad (26.22)$$

Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Так как функция  $u_0$  непрерывна в точке  $\zeta_0 = Re^{i\psi_0}$ , существует число  $\delta \in (0, \pi)$  такое, что для всех точек  $\zeta = Re^{i\psi}$ , у которых  $|\psi - \psi_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|u_0(\zeta) - u_0(\zeta_0)| < \varepsilon$ . Обозначим  $\gamma(1, \delta) = \{\zeta \mid \zeta = Re^{i\psi}, |\psi - \psi_0| < \delta\}$ ,  $\gamma(0, \delta) = \gamma_R \setminus \gamma(1, \delta)$ . Разобьем интеграл (26.22) на два интеграла по дугам  $\gamma(1, \delta)$  и  $\gamma(0, \delta)$ . В силу выбора числа  $\delta$  и из леммы 26.2 получаем оценку

$$\left| \int_{\psi_0 - \delta}^{\psi_0 + \delta} (u_0(\zeta) - u_0(\zeta_0)) K(\zeta, z) d\psi \right| \leq \int_{\psi_0 - \delta}^{\psi_0 + \delta} K(\zeta, z) d\psi < \varepsilon.$$

В силу леммы 26.3 найдется число  $\rho \in (0, R)$  такое, что  $K(\zeta, z) < \varepsilon$  при всех  $\zeta \in \gamma(0, \delta)$  и всех  $z \in B_R(0)$ , у которых  $|z - \zeta_0| < \rho$ . Поэтому для указанных  $z$  получаем оценку

$$\left| \int_{\psi_0+\delta}^{\psi_0+2\pi-\delta} (u_0(\zeta) - u_0(\zeta_0)) K(\zeta, z) d\psi \right| < 2M \int_{\psi_0+\delta}^{\psi_0+2\pi-\delta} K(\zeta, z) d\psi \leq 4M\varepsilon\pi.$$

Объединяя две оценки, получаем  $|\Delta I| \leq (1 + 4\pi M)\varepsilon$ , что в силу произвольности числа  $\varepsilon > 0$  дает выполнение граничного условия в точке  $\zeta_0$ .  $\square$

**ТЕОРЕМА 26.4.** *Для любой ограниченной односвязной области  $G$  с простой кусочно-гладкой границей  $\Gamma$  и для любой ограниченной кусочно-непрерывной (с конечным числом точек разрыва 1-го рода) на  $\Gamma$  функции  $u_0(\zeta)$  решение общей задачи Дирихле существует.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По теореме Римана (теорема 24.3) существует регулярная функция  $w = f(z)$ , осуществляющая конформное отображение области  $G$  на круг  $B_1(0)$ . Пусть  $z = g(w)$  — обратная функция к функции  $f$ . По принципу соответствия границ (теорема 24.4) функция  $f(z)$  (и соответственно  $g(w)$ ) непрерывно продолжима на границу  $\Gamma$  (на окружность  $|w| = 1$ ). Поэтому и в силу кусочной непрерывности на  $\Gamma$  функции  $u_0(\zeta)$  функция  $u_0(g(\alpha))$  будет кусочно-непрерывной на окружности  $|\alpha| = 1$ . По этой граничной функции запишем через интеграл Пуассона функцию  $\tilde{u}(w)$ , определенную в круге  $|w| < 1$ . Тогда по теореме 26.1 функция  $u(z) := \tilde{u}(f(z))$  будет гармонической в области  $G$ . В силу теоремы 26.3 она ограничена и непрерывна на  $G \cup \Gamma$  всюду за исключением точек разрыва функции  $u_0$ . Введем обозначение

$$\tilde{u}_0(\alpha) := u_0(g(\alpha)) = u_0(\zeta), \quad |\alpha| = 1, \quad \zeta \in \Gamma.$$

Запишем решение  $\tilde{u}(w)$  через интеграл Пуассона

$$\tilde{u}(w) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\alpha|=1} \tilde{u}_0(\alpha) \frac{\alpha + w}{\alpha - w} \cdot \frac{d\alpha}{\alpha}, \quad |w| < 1.$$

Так как  $\alpha = f(\zeta)$ ,  $\zeta \in \Gamma$  и  $w = f(z)$ ,  $z \in G$ , то, делая замену переменных  $\alpha$  и  $w$  через  $\zeta$  и  $z$ , при этом допуская, что функция  $f'(z)$  также может быть непрерывно продолжена на границу  $\Gamma$ , получаем формулу решения общей задачи Дирихле в области  $G$  вида

$$u(z) = \tilde{u}(f(z)) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} u_0(\zeta) \frac{f(\zeta) + f(z)}{f(\zeta) - f(z)} \cdot \frac{f'(\zeta)}{f'(\zeta)} d\zeta. \quad (26.23)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 26.3.** Утверждение теоремы 26.4 остается справедливым для случая неограниченной области  $G$ , граница которой содержит точку  $\infty$ , если существует конформное отображение  $f$  области  $G$  на круг  $|w| < 1$ , удовлетворяющее принципу соответствия границ. Если же при этом функция  $f$  удовлетворяет усиленному принципу соответствия границ, т.е. функции  $f$  и  $f'$  непрерывно продолжимы на границу области, то справедлива формула (26.23).

Например, это верно, когда область  $G$  конформно отображается на круг  $|w| < 1$  некоторым дробно-линейным отображением  $f$ , так как оно конформно отображает всю расширенную комплексную плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  на всю плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  и поэтому оно и его производная непрерывно продолжимы на границу данной области  $G$ . В качестве демонстрации этой возможности получим решение *общей задачи Дирихле на верхней полуплоскости*.

**ТЕОРЕМА 26.5.** Пусть задана ограниченная и кусочно-непрерывная функция  $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  с конечным числом точек разрыва первого рода (включая точки  $+\infty$  и  $-\infty$ ). Тогда существует решение  $u(z)$  общей задачи Дирихле в верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  с граничным условием  $u_0$  на прямой  $\Gamma = \{z \mid \operatorname{Im} z = 0\}$ . При этом для решения  $u(z)$  справедлива формула Пуассона вида

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y u_0(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt, \quad (26.24)$$

где  $z = x + iy$ ,  $y > 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование решения  $u(z)$  следует из теоремы 26.4 и замечания 26.3. Формула (26.24) легко следует из формулы (26.23), если в качестве функции  $f$ , отображающей верхнюю полуплоскость в единичный круг, взять, например, функцию  $f(z) = (z - i)/(z + i)$  и провести упрощения выражений под интегралом (26.23).  $\square$

Формулу (26.24) можно получить, не используя теорему 26.4 и формулы (26.23). Зафиксируем произвольную точку  $z_0 = x_0 + iy_0$ , где  $y_0 > 0$ , и рассмотрим дробно-линейное отображение

$$w = f(z) := \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \quad (26.25)$$

конформно отображающее полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на круг  $|w| < 1$ , при котором  $f(z_0) = 0$ . Из формулы (26.25) получаем обратное отображение

$$z = g(w) = \frac{w\bar{z}_0 - z_0}{w - 1} \quad (26.26)$$

круга  $|w| < 1$  на верхнюю полуплоскость.

По теореме 26.1 функция  $\tilde{u}(w) := u(g(w))$  будет гармонической в круге  $|w| < 1$ . При этом она будет непрерывной в замкнутом круге  $|w| \leq 1$ , за исключением конечного числа точек разрыва, полученных от функции  $u_0$ , включая, может быть, и точку  $w_0 = 1$ . По формуле Пуассона (26.14) (или по теореме 21.4 о среднем для гармонических функций) для функции  $\tilde{u}$  получаем

$$u(z_0) = \tilde{u}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(e^{i\psi}) d\psi. \quad (26.27)$$

В интеграле (26.27) сделаем замену и вернемся к прежним переменным. Пусть  $w = e^{i\psi}$ , тогда  $g(e^{i\psi}) = t$ , т.е. принимает действительные значения. И обратно, по формуле (26.25) получаем

$$e^{i\psi} = \frac{t - z_0}{t - \bar{z}_0} = f(t), \quad (26.28)$$

где  $t$  — действительное число. Поэтому

$$\tilde{u}(e^{i\psi}) = \tilde{u}(f(t)) = u(g(f(t))) = u_0(t).$$

Из формулы (26.28) находим

$$d\psi = \frac{z_0 - \bar{z}_0}{i|t - z_0|^2} dt = \frac{2y_0}{(t - x_0)^2 + y_0^2} dt. \quad (26.29)$$

В итоге из выражений (26.27), (26.28) и (26.29) получаем формулу

$$u(z_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(t) \frac{y_0}{(t - x_0)^2 + (y_0)^2} dt.$$

Заменяя в полученной формуле произвольную точку  $z_0$  на точку  $z$ , получим формулу Пуассона (26.24).

ЗАМЕЧАНИЕ 26.4. Так как справедливо равенство

$$\frac{y}{(t - x)^2 + y^2} = \operatorname{Re} \frac{1}{i(t - z)},$$

то формула Пуассона (26.24) может быть преобразована к другому виду

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)}{t - z} dt. \quad (26.30)$$

ПРИМЕР 26.1. Найти решение классической задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & |z| < 1, \\ u|_{|z|=1} = \frac{\sin \psi}{5 + 4 \cos \psi}. \end{cases} \quad (26.31)$$

РЕШЕНИЕ. Воспользуемся формулой Пуассона (26.16) для решения задачи (26.31). Для этого сделаем замену переменных на окружности:  $\zeta = e^{i\psi}$ . Тогда  $\sin \psi = \frac{1}{2i} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right)$ ,  $\cos \psi = \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$ , откуда

$$u_0(\zeta) = \frac{\sin \psi}{5 + 4 \cos \psi} = \frac{\zeta^2 - 1}{2i(2\zeta^2 + 5\zeta + 2)}.$$

Подставляя  $u_0(\zeta)$  в формулу (26.16), получаем, что  $u(z) = \operatorname{Re} J(z)$ , где

$$J(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{(\zeta^2 - 1)(\zeta + z)}{2i(2\zeta^2 + 5\zeta + 2)(\zeta - z)\zeta} d\zeta. \quad (26.32)$$

Вычислим интеграл (26.32) с помощью вычетов. Подынтегральная функция

$$f(\zeta) := \frac{(\zeta^2 - 1)(\zeta + z)}{2i(2\zeta^2 + 5\zeta + 2)\zeta(\zeta - z)}$$

в области  $|\zeta| > 1$  имеет две особые точки. Это  $\zeta_1 = -2$  — полюс 1-го порядка и  $\zeta_2 = \infty$  — устранимая особая точка, так как очевидно, что  $f(\infty) = 0$ .

По теореме о вычетах получаем

$$J(z) = -\operatorname{res}_{-2} f - \operatorname{res}_{\infty} f. \quad (26.33)$$

Вычислим вычеты:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{-2} f &= \frac{(\zeta^2 - 1)(\zeta + z)}{2i(\zeta - z)(4\zeta + 5)\zeta} \Big|_{\zeta=-2} = \frac{2 - z}{4i(z + 2)}, \\ \operatorname{res}_{\infty} f &= \lim_{\zeta \rightarrow \infty} [\zeta(f(\infty) - f(\zeta))] = \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left[ \frac{-(\zeta^2 - 1)(\zeta + z)}{4i(\zeta^2 + \frac{5}{2}\zeta + 1)(\zeta - z)} \right] = -\frac{1}{4i}. \end{aligned}$$

В итоге из формулы (26.33) получаем, что

$$J(z) = \frac{z}{2i(z + 2)},$$

откуда

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \frac{z}{2i(z + 2)} = \frac{y}{(x + 2)^2 + y^2}.$$

ПРИМЕР 26.2. Решить общую задачу Дирихле:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad G = \{z \mid |z| < 1, \quad \operatorname{Im} z > 0\}, \\ u|_{\operatorname{Im} z = 0} &= 0, \quad u|_{|z|=1} = 1. \end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ. Возьмем функцию  $w = -\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ , которая конформно отображает данный полукруг  $G$  на верхнюю полуплоскость. Тогда данные граничные условия преобразуются на новой границе  $\operatorname{Im} w = 0$  в условия

$$\tilde{u}_0(t) = 0, \quad \text{при } |t| > 1; \quad \tilde{u}_0(t) = 1, \quad \text{при } t \in [-1, +1].$$

По формуле Пуассона (26.24) получаем решение

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\xi, \eta) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\eta dt}{(t - \xi)^2 + \eta^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\left(\frac{t}{\eta}\right)}{\left(\frac{t}{\eta} - \frac{\xi}{\eta}\right)^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{1 - \xi}{\eta} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{1 + \xi}{\eta} \right) \right].\end{aligned}$$

Так как для  $w = \xi + i\eta$  и  $z = x + iy$  функция  $w = -\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  дает соотношения

$$\xi = -\frac{x}{2} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} + 1 \right), \quad \eta = -\frac{y}{2} \left( 1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right),$$

откуда заменой переменных получаем решение данной задачи Дирихле

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \frac{1}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{2(x+1)}{y(1-x^2-y^2)} - \frac{x+2}{y} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{arctg} \left( \frac{2(1-x)}{y(1-x^2-y^2)} + \frac{x-2}{y} \right) \right].\end{aligned}$$

## § 27. Аналитическое продолжение

Известны различные способы аналитического продолжения заданных функций. Простейший из них мы уже встречали при рассмотрении примеров по теореме единственности в § 10. Напомним его.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27.1.** Пусть некоторая функция  $f$  задана на множестве  $E$ , а функция  $g$  регулярна в области  $G$ , содержащей множество  $E$ , причем

$$f(z) = g(z), \quad \forall z \in E. \quad (27.1)$$

Тогда функция  $g$  называется *аналитическим продолжением функции  $f$  с множества  $E$  на область  $G$* .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 27.1.** Если множество  $E$  содержит бесконечное число точек и имеет в области  $G$  по крайней мере одну предельную точку, то аналитическое продолжение функции  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$  с множества  $E$  на область  $G$  единственно, т. е. если существует регулярная функция  $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ , удовлетворяющая определению 27.1, то она единственна.

Данное утверждение, очевидно, следует из теоремы 10.1 единственности регулярной функции.

Так, например, в § 10 мы рассмотрели аналитическое продолжение функций  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  с действительной оси на всю комплексную плоскость по формулам

$$e^z := e^x \cdot e^{iy}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Также в § 25 мы рассмотрели случай аналитического (регулярного) продолжения функции с верхней полуплоскости на всю плоскость.

Основные сложности аналитических продолжений связаны с рассмотрением многозначных функций, примерами которых являются  $\operatorname{Ln} z$  и  $\{\sqrt[n]{z}\}$ .

Приведем ряд определений.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27.2.** Пусть выбраны точка  $a \in \mathbb{C}$  и круг  $B_r(a)$ ,  $r > 0$ , на котором задана регулярная функция  $f$ . Тогда пару  $(B_r(a), f)$  назовем *элементом*, а точку  $a$  назовем центром этого элемента.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27.3. Скажем, что элемент  $(B_\rho(b), g)$  является *непосредственным аналитическим продолжением* элемента  $(B_r(a), f)$ , если  $B_r(a) \cap B_\rho(b) \neq \emptyset$  и  $f(z) = g(z)$ ,  $\forall z \in B_r(a) \cap B_\rho(b)$ .

Отметим, что при заданных элементе  $(B_r(a), f)$  и круге  $B_\rho(b)$  функция  $g$  на  $B_\rho(b)$ , если существует, то единственна (в силу теоремы 10.1 единственности).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27.4. Скажем, что два элемента  $(B_r(a), f)$  и  $(B_\rho(b), g)$  *эквивалентны*, если они имеют общий центр  $a = b$  и один из этих элементов является непосредственным аналитическим продолжением другого. То есть, если  $r < \rho$ , то  $f(z) = g(z)$  при всех  $z \in B_r(a)$ . Обозначаем  $(B_r(a), f) \sim (B_\rho(b), g)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27.5. Скажем, что элемент  $(B_\rho(b), g)$  является *аналитическим продолжением элемента*  $(B_r(a), f)$  *через конечную цепочку кругов* (также говорят: через конечную цепочку элементов), если существует конечный набор элементов  $(B_{r_1}(a_1), f_1)$ ,  $(B_{r_2}(a_2), f_2)$ ,  $\dots$ ,  $(B_{r_n}(a_n), f_n)$  таких, что для каждого номера  $k \in \overline{2, n}$  элемент  $(B_{r_k}(a_k), f_k)$  является непосредственным аналитическим продолжением элемента  $(B_{r_{k-1}}(a_{k-1}), f_{k-1})$ , причем справедливы равенства  $(B_{r_1}(a_1), f_1) = (B_r(a), f)$  и  $(B_{r_n}(a_n), f_n) = (B_\rho(b), g)$ .

ПРИМЕР 27.1. Степенной ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$  сходится в круге  $B_1(0)$  и расходится при  $|z| \geq 1$ . При этом по теореме 9.3 Вейерштрасса сумма  $f_1$  данного ряда является регулярной в круге  $B_1(0)$  функцией, и, как показано в примере 9.1, она совпадает в этом круге  $B_1(0)$  с функцией  $f_2(z) = \frac{1}{1-z}$ , которая определена и регулярна в  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ . Таким образом, при любом  $a \in \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$  элемент  $(B_{|a-1|}(a), f_2)$  является непосредственным аналитическим продолжением элемента  $(B_1(0), f_1)$  (так как не пусто множество  $B_1(0) \cap B_{|a-1|}(a)$ , в котором эти функции совпадают). При любом действительном  $a > 1$  множество  $B_1(0) \cap B_{|a-1|}(a)$  пусто, но элемент  $(B_{|a-1|}(a), f_2)$  является аналитическим продолжением элемента  $(B_1(0), f_1)$  через

цепочку кругов, так как, введя, например, еще один элемент  $(B_{|i-1|}(i), f_2)$ , мы убеждаемся, что последний элемент является непосредственным аналитическим продолжением как элемента  $(B_1(0), f_1)$ , так и элемента  $(B_{|a-1|}(a), f_2)$ .

**ПРИМЕР 27.2.** Рассмотрим пять элементов, составленных из регулярных ветвей многозначной функции  $\{\sqrt{z}\}$ , вида  $(B_1(1), f_0)$ ,  $(B_1(i), f_{\pi/2})$ ,  $(B_1(-i), f_{-\pi/2})$ ,  $(B_1(-1), f_{\pi})$ ,  $(B_1(-1), f_{-\pi})$ , где  $f_s(z) = \sqrt{z} e^{\frac{i}{2} \arg_s z}$ , причем

$$\arg_s z \in \left( s - \frac{\pi}{2}, s + \frac{\pi}{2} \right), \quad s = 0, \pm\pi/2, \pm\pi.$$

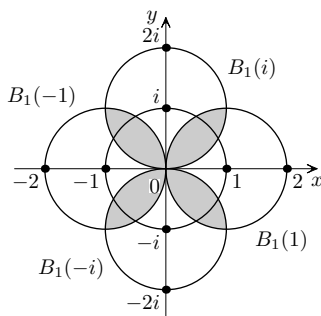


Рис. 27.1

как на множестве  $B_1(1) \cap B_1(i)$  функции  $f_0$  и  $f_{\pi/2}$  равны (см. рис. 27.1).

Аналогично элемент  $(B_1(-1), f_{\pi})$  есть непосредственное аналитическое продолжение элемента  $(B_1(i), f_{\pi/2})$ , а элемент  $(B_1(-1), f_{-\pi})$  есть непосредственное аналитическое продолжение элемента  $(B_1(-i), f_{-\pi/2})$ . В итоге мы получили два различных элемента  $(B_1(-1), f_{\pi})$  и  $(B_1(-1), f_{-\pi})$ , определенных в одном и том же круге, которые являются аналитическими продолжениями одного элемента  $(B_1(1), f_0)$ .

Приведем еще один способ аналитического продолжения — продолжение вдоль кривой.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27.6.** Пусть  $(B_{r_1}(a), f)$  — начальный элемент, а  $\gamma_{ab}$  — кусочно-гладкая кривая с началом в точке  $a$  и концом в точке  $b$ , заданная через параметр ее длины  $s$ ,  
228

Легко убедиться, что в данных пяти элементах каждая функция  $f_s$  на соответствующем ей круге является регулярной ветвью многозначной функции  $\{\sqrt{z}\}$ , причем  $f_{\pi}(z) = -f_{-\pi}(z)$  при всех  $z \in B_1(-1)$ .

В силу определения 27.3 элемент  $(B_1(i), f_{\pi/2})$  (также, как и элемент  $(B_1(-i), f_{-\pi/2})$ ) является непосредственным аналитическим продолжением элемента  $(B_1(1), f_0)$ , так

т.е.  $z = z(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$ ,  $z(0) = a$ ,  $z(l) = b$ . Скажем, что элемент  $(B_{r_2}(b), g)$  является *аналитическим продолжением элемента*  $(B_{r_1}(a), f)$  *вдоль кривой*  $\gamma_{ab}$ , если существует число  $r > 0$ , непрерывная функция  $\varphi: [0, l] \rightarrow \mathbb{C}$  и семейство элементов  $(B_r(z(s)), f_s)$ ,  $\forall s \in [0, l]$  такие, что

- а) для всякого  $s_0 \in [0, l]$  справедливо равенство  $f_{s_0}(z(s)) = \varphi(s)$  при всех  $s \in [0, l] \cap (s_0 - r, s_0 + r)$ ;
- б)  $(B_r(z(0)), f_0) \sim (B_{r_1}(a), f)$  и  $(B_r(z(l)), f_l) \sim (B_{r_2}(b), g)$  (т.е. эквивалентность начального и конечного элементов).

Сформулированные в определении 27.6 условия по существу означают, что при выбранном значении  $s_0$  всякий элемент  $(B_r(z(s)), f_s)$  является непосредственным аналитическим продолжением элемента  $(B_r(z(s_0)), f_{s_0})$  лишь для близких к  $s_0$  значений  $s$ , т.е. при  $|s - s_0| < r$ . Если же круг  $B_r(z(s_0))$  имеет непустое пересечение с кругом  $B_r(z(s_1))$  при далеком от  $s_0$  значении  $s_1$ , то может оказаться, что значения функций  $f_{s_0}$  и  $f_{s_1}$  различны в одних и тех же точках из пересечения указанных выше кругов.

Поясним это. В разобранным ранее примере 27.2 начальный элемент  $(B_1(1), f_0)$  можно продолжать не только вдоль конечной цепочки кругов, но и вдоль кривой — верхней полуокружности  $z = z_1(s) = e^{is}$ ,  $s \in [0, \pi]$ , с помощью семейства элементов  $(B_1(z_1(s)), f_s)$ , где для всех  $s \in [0, \pi]$  функция  $f_s$  определяется так же, как и в примере 27.2. В результате продолжения вдоль этой кривой опять получаем конечный элемент  $(B_1(-1), f_\pi)$ . Если же начальный элемент  $(B_1(1), f_0)$  будем продолжать вдоль нижней полуокружности  $z = z_2(s) = e^{-is}$ ,  $s \in [0, \pi]$  с помощью семейства элементов  $(B_1(z_2(s)), f_{-s})$ , то получится конечный элемент  $(B_1(-1), f_{-\pi})$ . В этом случае, так же как и при продолжении вдоль трехзвенных цепочек кругов в примере 27.2, конечные элементы  $(B_1(-1), f_\pi)$  и  $(B_1(-1), f_{-\pi})$  различны.

**ТЕОРЕМА 27.1.** *Понятия аналитических продолжений вдоль конечной цепочки кругов (по определению 27.5) и вдоль*

кривой (по определению 27.6) эквивалентны. Т.е. для всякого аналитического продолжения вдоль конечной цепочки кругов найдется кривая такая, что аналитическое продолжение вдоль этой кривой приводит к тому же конечному элементу, что и при продолжении вдоль заданной конечной цепочки кругов. С другой стороны, для всякого аналитического продолжения вдоль кривой найдется конечная цепочка кругов, такая, что аналитическое продолжение вдоль нее приводит к тому же элементу, что и при продолжении вдоль заданной кривой.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** 1. Допустим, что элемент  $(B_\rho(b), g)$  является аналитическим продолжением элемента  $(B_r(a), f)$  через некоторую конечную цепочку кругов. Пусть при этом получены элементы  $\{(B_{r_k}(a_k), f_k)\}$  (см. определение 27.5). Тогда в порядке возрастания номера  $k$  последовательно соединяем центры входящих в упорядоченную цепочку кругов отрезками и получаем ломаную  $\gamma_{ab}$ . При этом легко указать число  $r > 0$  такое, что всякий круг радиуса  $r$  с центром в произвольной точке, принадлежащей ломаной  $\gamma_{ab}$ , содержится по крайней мере в одном из кругов  $\{B_{r_k}(a_k)\}_{k=1}^n$ . Отсюда, в соответствии с определением 27.6, можно в каждой точке  $z(s_0)$  ломаной на круге  $B_r(z(s_0))$  задать элемент  $(B_r(z(s_0), f_{s_0})$  и функция  $\varphi(s) = f_{s_0}(z(s))$  при  $s : |s - s_0| < r$  так, что элемент  $(B_\rho(b), g)$  может быть получен в результате аналитического продолжения элемента  $(B_r(a), f)$  вдоль этой ломаной  $\gamma_{ab}$ .

2. Допустим, что элемент  $(B_{r_2}(b), g)$  получен из элемента  $(B_{r_1}(a), f)$  аналитическим продолжением вдоль кусочно - гладкой кривой  $\gamma_{ab}$  (по определению 27.6).

Пусть кривая  $\gamma_{ab}$  через параметр ее длины  $s$  задается функцией  $z = z(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$ ,  $z(0) = a$ ,  $z(l) = b$ . По определению 27.6 существует бесконечное семейство элементов  $(B_r(z(s)), f_s)$ ,  $s \in [0, l]$ , с соответствующими свойствами. Выберем в нем конечную цепочку элементов  $(B_r(z(s_k)), f_{s_k})_{k=1}^n$ , где  $n = \left[ \frac{2l}{r} \right] + 1$ ,  $s_k = \frac{r}{2} k$  при  $k = 0, \dots, n - 1$ , а  $s_n = l$ . Тогда для каждого номера  $k$  справедливо неравенство  $|z(s) -$

$-z(s_k)| \leq \frac{r}{2}$  при любом  $s \in (s_k, s_{k+1}]$ . Поэтому каждый элемент  $(B_r(z(s_{k+1})), f_{s_{k+1}})$  является непосредственным аналитическим продолжением элемента  $(B_r(z(s_k)), f_{s_k})$ , откуда в совокупности следует, что элемент  $(B_{r_2}(b), f_l)$  является аналитическим продолжением элемента  $(B_{r_1}(a), f_0)$  через конечную цепочку кругов  $\{B_r(z(s_k))\}_{k=1}^n$ .  $\square$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27.7.** *Полной аналитической функцией*, порожденной начальным элементом  $(B_r(a), f_0)$  называется совокупность  $\mathcal{F}$  всех элементов, получающихся аналитическим продолжением элемента  $(B_r(a), f_0)$  вдоль всех таких кривых, начинающихся в точке  $a$ , вдоль которых аналитическое продолжение возможно.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27.8.** *Аналитической функцией* (без слова: полная) называется любое связное подмножество элементов полной аналитической функции  $\mathcal{F}$ , т. е. такое подмножество, любые два элемента которого являются аналитическими продолжениями друг друга через некоторую кривую или некоторую конечную цепочку элементов из этого же подмножества.

Очевидно, что каждая аналитическая функция  $\mathcal{F}$  не зависит от выбора начального элемента  $(B_r(a), f_0)$ . В качестве начального можно брать любой элемент из совокупности  $\mathcal{F}$ .

Множество  $G = \bigcup_{\alpha} B_{r_{\alpha}}(z_{\alpha})$ , являющееся объединением кругов всех элементов, принадлежащих аналитической функции  $\mathcal{F}$ , представляет собой область.

В самом деле, открытость множества  $G$  следует из того, что оно есть объединение открытых множеств, связность следует из определения 27.8, т. е. из того, что любые две точки из  $G$  можно соединить ломаной, лежащей в объединении кругов, в узлах которой находятся центры кругов элементов, входящих в цепочку, с помощью которой осуществляется аналитическое продолжение элементов с центрами в указанных точках друг в друга. Поэтому будем говорить, что *аналитическая функция задана (определена) на области  $G$* .

В случае, когда область определения аналитической функции односвязна, имеет место следующее важное утверждение.

**ТЕОРЕМА 27.2 (О МОНОДРОМИИ).** Пусть  $G$  — односвязная область и  $B_r(a) \subset G$ . Если элемент  $(B_r(a), f_0)$  аналитически продолжаем по любой кривой  $\gamma_{ab}$ , лежащей в односвязной области  $G$ , то результат его продолжения в произвольную точку  $b \in G$  не зависит от кривой  $\gamma_{ab}$ , а однозначно определяется его концом  $b$ .

Часто это формулируют и так: аналитическая функция, определенная на односвязной области  $G$ , является однозначной регулярной функцией, определенной на  $G$ .

Для доказательства теоремы 27.2 нам потребуются следующие определение и лемма.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27.9.** Пусть кусочно-гладкие кривые  $\gamma$  и  $\tilde{\gamma}$  заданы соответственно через параметр длины  $s$  в виде  $z = z(s)$ ,  $s \in (0, l)$  и  $z = \tilde{z}(s)$ ,  $s \in (0, \tilde{l})$ . Расстоянием между кривыми  $\gamma$  и  $\tilde{\gamma}$  назовем величину

$$\text{dist}(\gamma, \tilde{\gamma}) := \max \{|z(s) - \tilde{z}(s)| \mid s \in [0, \min(l, \tilde{l})]\} + |l - \tilde{l}|. \quad (27.2)$$

**ЛЕММА 27.1.** Пусть элемент  $(B_{r_0}(a), f_0)$  может быть аналитически продолжен вдоль кусочно-гладкой кривой  $\gamma_{ab}$  (с началом в точке  $a$  и концом в точке  $b$ ). Тогда существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что элемент  $(B_{r_0}(a), f_0)$  может быть аналитически продолжен вдоль любой кусочно-гладкой кривой  $\tilde{\gamma}_{ab}$  (имеющего те же начало и конец) такой, что  $\text{dist}(\gamma_{ab}, \tilde{\gamma}_{ab}) < \varepsilon$  (где  $\text{dist}$  см. в определении 27.9). При этом в конечной точке  $b$  будут получены эквивалентные между собой элементы.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть функция  $z = z(s)$ ,  $s \in (0, l)$ , описывает кривую  $\gamma_{ab}$  через параметр его длины, и  $z(0) = a$ ,  $z(l) = b$ . Пусть число  $r > 0$ , непрерывная функция  $\varphi(s)$ ,  $s \in (0, l)$  и элементы  $(B_r(z(s)), f_s)$  выбраны в соответствии с определением 27.6 при аналитическом продолжении элемента  $(B_{r_0}(a), f_0)$  вдоль кривой  $\gamma_{ab}$ .

Выберем число  $\varepsilon = \frac{r}{4}$  и рассмотрим произвольную кри-

вую  $\tilde{\gamma}_{ab}$ , задаваемая функцией  $z = \tilde{z}(s)$ ,  $s \in (0, \tilde{l})$ , где  $\tilde{z}(0) = a$ ,  $\tilde{z}(\tilde{l}) = b$ , такую, что  $\text{dist}(\gamma_{ab}, \tilde{\gamma}_{ab}) < \varepsilon$ .

Для каждого числа  $s \in [0, \min(l, \tilde{l})]$  определим значение функции  $\tilde{\varphi}(s)$  и элемент  $(B_\varepsilon(\tilde{z}(s)), f_s)$  из выражений  $\tilde{\varphi}(s) = f_s(\tilde{z}(s))$  и  $f_s(z) = f_s(z)$  при всех  $z \in B_\varepsilon(\tilde{z}(s))$ , что возможно в силу очевидного включения  $B_\varepsilon(\tilde{z}(s)) \subset B_r(z(s))$ .

В случае, когда  $l \geq \tilde{l}$ , из равенства  $z(l) = \tilde{z}(\tilde{l}) = b$  следует включение  $B_\varepsilon(\tilde{z}(\tilde{l})) \subset B_r(z(\tilde{l})) \cap B_r(z(l))$ , откуда следует, что  $f_{\tilde{l}}(z) = f_l(z)$  при всех  $z \in B_\varepsilon(\tilde{z}(\tilde{l}))$ , т. е. конечные элементы эквивалентны.

В случае, когда  $l < \tilde{l}$ , для каждого числа  $s \in (l, \tilde{l}]$ , так как  $\tilde{l} - l < \varepsilon$ , то имеем  $\tilde{z}(s) \in B_\varepsilon(b)$ . Поэтому определим значение функции  $\tilde{\varphi}(s)$  и элемент  $(B_\varepsilon(\tilde{z}(s)), f_s)$  из выражений  $\tilde{\varphi}(s) = f_l(\tilde{z}(s))$  и  $f_s(z) = f_l(z)$  при всех  $z \in B_\varepsilon(\tilde{z}(s))$ , что возможно в силу включения  $B_\varepsilon(\tilde{z}(s)) \subset B_r(z(l))$ . В частности, отсюда следует, что и в этом случае (при  $l < \tilde{l}$ ) конечные элементы эквивалентны.

Покажем непрерывность функции  $\tilde{\varphi}(s)$  на отрезке  $[0, \tilde{l}]$ . Для каждого значения  $s_0 \in [0, \min(l, \tilde{l})]$  в силу выбора кривой  $\tilde{\gamma}_{ab}$  справедливо включение  $\tilde{z}(s) \in B_r(z(s_0))$  при всех  $s \in [0, \max(l, \tilde{l})] \cap (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ , откуда следует, что  $\tilde{\varphi}(s) = f_{s_0}(\tilde{z}(s))$  при всех  $s \in [0, \max(l, \tilde{l})] \cap (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ , т. е. функция  $\tilde{\varphi}(s)$  непрерывна в точке  $s_0$ . Аналогично, в случае, когда  $l < \tilde{l}$ , из равенства  $\tilde{\varphi}(s) = f_l(\tilde{z}(s))$  при всех  $s \in (l - \varepsilon, \tilde{l}]$  следует непрерывность функции  $\tilde{\varphi}(s)$  на интервале  $(l - \varepsilon, \tilde{l}]$ . Таким образом, мы показали, что по определению 27.6 существует аналитическое продолжение элемента  $(B_{r_0}(a), f_0)$  вдоль кривой  $\tilde{\gamma}_{ab}$ , причем в конечной точке получен элемент, эквивалентный конечному элементу, получаемому при аналитическом продолжении элемента  $(B_{r_0}(a), f_0)$  вдоль кривой  $\gamma_{ab}$ .  $\square$

Докажем теперь теорему 27.2.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть в односвязной области  $G$  даны две кусочно-гладкие кривые  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  с помощью уравнений  $z = z_0(t)$  и  $z = z_1(t)$ , где  $t \in [0, 1]$ , которые соединяют точки  $a$

и  $b$ , т. е.  $z_0(0) = z_1(0) = a$  и  $z_0(1) = z_1(1) = b$ . Без ограничения общности (так как в силу леммы 27.1 и теоремы Вейерштрасса можно сгладить кривые в конечном числе точек, в которых имеется излом) будем считать, что кривые  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  являются гладкими. В силу односвязности области  $G$  кривые  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  являются гомотопными, т. е. существует функция  $z = z(t, \alpha) \subset G$  при  $t \in [0, 1]$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  такая, что функции  $z(t, \alpha)$  и  $z'_t(t, \alpha)$  непрерывны на квадрате  $[0, 1] \times [0, 1]$ , а также справедливы равенства  $z(t, 0) = z_0(t)$  и  $z(t, 1) = z_1(t)$  при всех  $t \in [0, 1]$ , а  $z(0, \alpha) = a$  и  $z(1, \alpha) = b$  при всех  $\alpha \in [0, 1]$ .

Таким образом, при каждом фиксированном значении параметра  $\alpha \in [0, 1]$  функция  $z = z(t, \alpha)$ ,  $t \in [0, 1]$  описывает гладкую кривую  $\gamma_\alpha$ , которая принадлежит области  $G$  и соединяет точки  $a$  и  $b$ . В силу равномерной непрерывности функций  $z(t, \alpha)$  и  $z'_t(t, \alpha)$  на квадрате  $[0, 1] \times [0, 1]$  длина  $l(\alpha)$  кривой  $\gamma_\alpha$  есть непрерывная функция параметра  $\alpha \in [0, 1]$ , и при достаточно близких значениях  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$  расстояние  $\text{dist}(\gamma_{\alpha_1}, \gamma_{\alpha_2})$  между кривыми мало.

По лемме 27.1 для любого значения параметра  $\alpha \in [0, 1]$  существует число  $\delta(\alpha) > 0$  такое, что при любом значении  $\tilde{\alpha}$ , взятом из интервала  $I_\alpha := [0, 1] \cap (\alpha - \delta(\alpha), \alpha + \delta(\alpha))$ , аналитическое продолжение элемента  $(B_r(a), f_0)$  вдоль каждой кривой  $\gamma_{\tilde{\alpha}}$  приводит к эквивалентным элементам в конечной точке  $b$ .

По лемме Гейне–Бореля можно выбрать конечное число интервалов  $I_{\alpha_j}$ , где  $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ , покрывающих отрезок  $[0, 1]$  так, что эти интервалы удовлетворяют соотношениям:  $I_{\alpha_j} \cap I_{\alpha_{j+1}} \neq \emptyset, \forall j$ , и  $\bigcup_{j=0}^n I_{\alpha_j} = [0, 1]$ . Тогда аналитическое продолжение элемента  $(B_r(a), f_0)$  вдоль каждой кривой  $\gamma_\alpha$ , где  $\alpha \in I_{\alpha_0} \cup I_{\alpha_1}$  приводит к эквивалентным элементам в концевой точке  $b$ . Аналогично это верно при всех  $\alpha \in I_{\alpha_1} \cup I_{\alpha_2}$  и так далее. В результате получаем, что аналитическое продолжение элемента  $(B_r(a), f_0)$  вдоль каждой кривой  $\gamma_\alpha$ , где  $\alpha \in [0, 1]$ , приводит к эквивалентным элементам в точке  $b$ .  $\square$



## § 28. Полные аналитические функции логарифма и корня и их римановы поверхности

**28.1. Полные аналитические функции.** Пусть точка  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ . Выберем в круге  $B_{|a|}(a)$  некоторые регулярные ветви  $h_a$  и  $g_a$  многозначных функций  $\operatorname{Ln} z$  и  $\{\sqrt[n]{z}\}$  соответственно (которые, как показано в теореме 15.1, существуют в круге  $B_{|a|}(a)$ ). В этом случае будет говорить, что элементы  $(B_{|a|}(a), h_a)$  и  $(B_{|a|}(a), g_a)$  порождены многозначными функциями  $\operatorname{Ln} z$  и  $\{\sqrt[n]{z}\}$  соответственно.

**ТЕОРЕМА 28.1.** *Зафиксируем произвольные точки  $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  и начальный элемент  $(B_{|a|}(a), h_a)$ , порожденный многозначной функцией  $\operatorname{Ln} z$ . Тогда этот элемент может быть аналитически продолжен вдоль любой кусочно-гладкой кривой  $\gamma_{ab}$  (с началом в точке  $a$  и концом в точке  $b$ ), не проходящей через нуль. Для полученного в результате такого продолжения элемента  $(B_{|b|}(b), h_b)$  справедливы формулы*

$$h_b(b) = h_a(a) + \int_{\gamma_{ab}} \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (28.1)$$

$$h_b(z) = h_b(b) + \int_b^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in B_{|b|}(b). \quad (28.2)$$

Для всякой точки  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  и всякого элемента  $(B_{|c|}(c), h_c)$ , порожденного многозначной функцией  $\operatorname{Ln} z$ , найдется такая кусочно-гладкая кривая  $\tilde{\gamma}_{ac}$ , не проходящая через нуль, что элемент  $(B_{|c|}(c), h_c)$  является аналитическим продолжением элемента  $(B_{|a|}(a), h_a)$  вдоль кривой  $\tilde{\gamma}_{ac}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** 1. Обозначим через  $r := \inf\{|z| \mid z \in \gamma_{ab}\}$  расстояние от точки 0 до кривой  $\gamma_{ab}$ . Разобьем кривую  $\gamma_{ab}$  точками  $z_0 = a, z_1, \dots, z_K = b$  на дуги  $\gamma_{z_{k-1}z_k}$  так, чтобы длина каждой из них удовлетворяла неравенству  $l(\gamma_{z_{k-1}z_k}) < r, \forall k \in \overline{1, K}$ . Пусть для некоторого  $k \in \overline{1, K}$  элемент  $(B_r(a), h_a)$  допускает аналитическое продолжение вдоль кривой  $\gamma_{az_{k-1}} \subset \gamma_{ab}$ , в результате чего получен элемент  $(B_r(z_{k-1}), h_{k-1})$ . Покажем, что элемент  $(B_r(z_{k-1}), h_{k-1})$  допускает аналитическое продолжение вдоль следующей дуги  $\gamma_{z_{k-1}z_k}$  кривой  $\gamma_{ab}$ .

В самом деле, так как  $|z_{k-1} - z_k| < r \leq |z_{k-1}|$ , то  $z_k \in B_r(z_{k-1})$ . Определим в круге  $B_r(z_k)$  регулярную ветвь  $h_k$  функции  $\text{Ln } z$  по ее значению в центре круга, т.е. пусть  $h_k(z_k) = h_{k-1}(z_k)$ . Тогда

$$\begin{aligned} h_k(z_k) - h_{k-1}(z_{k-1}) &= \ln |z_k| - \ln |z_{k-1}| + i\Delta_{\gamma_{z_{k-1}z_k}} \arg z = \\ &= \int_{\gamma_{z_{k-1}z_k}} \frac{d\zeta}{\zeta}. \end{aligned} \quad (28.3)$$

Отсюда следует, что  $h_k(z) = h_{k-1}(z)$  во всех точках  $z$  из непустого множества  $B_r(z_{k-1}) \cap B_r(z_k)$ . Это означает, что элемент  $(B_r(z_k), h_k)$  есть аналитическое продолжение элемента  $(B_r(z_{k-1}), h_{k-1})$  вдоль дуги  $\gamma_{z_{k-1}z_k}$ . При этом в круге  $B_r(z_k)$ , как показано в следствии 15.2, справедлива формула

$$h_k(z) = h_k(z_k) + \int_{z_k}^z \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (28.4)$$

В частности, мы показали, что при  $k = 1$  элемент  $(B_r(z_1), h_1)$  есть аналитическое продолжение элемента  $(B_r(a), h_a)$  вдоль кривой  $\gamma_{az_1}$ .

В итоге доказали справедливость первого утверждения теоремы о продолжаемости элемента  $(B_{|a|}(a), h_a)$  вдоль кривой  $\gamma_{ab}$ . При этом, складывая по всем  $k$  выражения (28.3), получаем формулу (28.1). Формула (28.2) следует из формулы (28.4) при  $k = K$ .

2. Пусть заданы точка  $c \neq 0$  и произвольный элемент  $(B_{|c|}(c), h_c)$ , порожденный многозначной функцией  $\text{Ln } z$ . Выберем произвольную кусочно-гладкую кривую  $\gamma_{ac}$  с концевыми точками  $a$  и  $c$ , причем такую, что  $0 \notin \gamma_{ac}$ . Тогда по доказанному в пункте 1 элемент  $(B_{|a|}(a), h_a)$  продолжаем вдоль кривой  $\gamma_{ac}$ , в результате чего будет получен некоторый новый элемент  $(B_{|c|}(c), \tilde{h}_c)$ . Так как функции  $h_c$  и  $\tilde{h}_c$  являются регулярными ветвями многозначной функции  $\text{Ln } z$  в круге  $B_{|c|}(c)$ ,

то существует число  $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$  такое, что  $h_c(z) = \tilde{h}_c(z) + 2\pi\tilde{k}i$ ,  $\forall z \in B_{|c|}(c)$ .

Если  $\tilde{k} = 0$ , то все доказано. Если  $\tilde{k} \neq 0$ , то к кривой  $\gamma_{ac}$  надо добавить окружность  $\gamma_1 = \{z \mid |z| = |c|\}$ , по которой производится обход начала координат  $|\tilde{k}|$  раз, причем против хода часовой стрелки при  $\tilde{k} > 0$ , и по ходу часовой стрелки при  $\tilde{k} < 0$ . Тогда аналитическое продолжение элемента  $(B_{|c|}(c), \tilde{h}_c)$  вдоль кривой  $\gamma_1$  приведет к элементу  $(B_{|c|}(c), h_c)$  по формуле (28.1).  $\square$

Из доказанной теоремы мы получаем

**СЛЕДСТВИЕ 28.1.** Полная аналитическая функция  $\text{Ln } z$  состоит из совокупности элементов вида

$$(B_{|a|}(a), h_a(z) + 2\pi ki), \quad \forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

где  $h_a$  — некоторая регулярная ветвь многозначной функции  $\text{Ln } z$  в круге  $B_{|a|}(a)$ .

Так как справедливо равенство множеств  $\{\sqrt[n]{z}\} = e^{\frac{1}{n} \text{Ln } z}$ , то возможность аналитического продолжения элементов, порожденных многозначной функцией  $\text{Ln } z$  в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , влечет возможность аналитического продолжения элементов, порожденных многозначной функцией  $\{\sqrt[n]{z}\}$ . Точнее, из теоремы 28.1 следует утверждение.

**СЛЕДСТВИЕ 28.2.** Зафиксируем произвольные точки  $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  и произвольный элемент  $(B_{|a|}(a), g_a)$ , порожденный многозначной функцией  $\{\sqrt[n]{z}\}$ . Этот элемент может быть продолжен вдоль любой кусочно-гладкой кривой  $\gamma_{ab}$  (с началом в точке  $a$  и концом в точке  $b$ ), не проходящей через нуль. Для полученного в результате такого продолжения элемента  $(B_{|b|}(b), g_b)$  справедлива формула

$$g_b(b) = g_a(a) \cdot \sqrt[n]{\left|\frac{b}{a}\right|} e^{\frac{i}{n} \Delta_{\gamma_{ab}} \arg z}. \quad (28.5)$$

Для всякой точки  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  и всякого элемента  $(B_{|c|}(c), g_c)$ , порожденного многозначной функцией  $\{\sqrt[n]{z}\}$ , найдется такая кусочно-гладкая кривая  $\tilde{\gamma}_{ac}$ , не проходящая через нуль, что

элемент  $(B_{|c|}(c), g_c)$  будет получен аналитическим продолжением элемента  $(B_{|a|}(a), g_a)$  вдоль кривой  $\tilde{\gamma}_{ac}$ .

СЛЕДСТВИЕ 28.3. Полная аналитическая функция  $\sqrt[n]{z}$  состоит из совокупности элементов вида

$$(B_{|a|}(a), g_a(z) \cdot e^{\frac{i}{n} 2\pi k}),$$

где  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $k \in \overline{0, n-1}$ , а  $g_a$  — некоторая регулярная ветвь многозначной функции  $\{\sqrt[n]{z}\}$  в круге  $B_{|a|}(a)$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 28.1. Мы рассмотрели пример многозначной функции  $\{z^{1/n}\}$ . С тем же успехом, в силу определения многозначной функции  $\{z^b\} = e^{b \operatorname{Ln} z}$ , где  $b \in \mathbb{C}$  — фиксировано, и  $z \neq 0$ , взяв для каждого  $a \neq 0$  элемент вида  $(B_{|a|}(a), h_a)$ , порожденный многозначной функцией  $\operatorname{Ln} z$ , мы получим элемент  $(B_{|a|}(a), f_a)$ , где  $f_a(z) = e^{bh_a(z)}$ , порожденный многозначной функцией  $\{z^b\}$ . Аналогично следствию 28.2 получаем, что всякий элемент  $(B_{|a|}(a), f_a)$ , порожденный многозначной функцией  $\{z^b\}$ , допускает аналитическое продолжение по любой кусочно-гладкой кривой  $\gamma_{ac}$ , не проходящей через ноль.

**28.2. Римановы поверхности.** Существует другой способ избавления от многозначности аналитических функций  $\operatorname{Ln} z$  и  $\sqrt[n]{z}$ , через понятия римановых поверхностей этих функций.

2а) Риманова поверхность  $\operatorname{Ln} z$ .

Рассмотрим плоскость  $\mathbb{C}$  с разрезом, точнее, область  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . Как показано в § 15, функция  $\operatorname{Ln} z$  на этой области распадается на бесконечное число регулярных ветвей вида

$$\begin{aligned} h_k(z) &= h_0(z) + 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ h_0(z) &= \ln |z| + i \arg_{\text{гл}} z, \end{aligned} \tag{28.6}$$

где  $\arg_{\text{гл}} z \in (-\pi, \pi)$ .

Воспользуемся этим для построения регулярной на специальном множестве функции, принимающей все значения аналитической функции  $\operatorname{Ln} z$  при  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Расширим область определения искомой функции до некоторого множества (топологического пространства), которое и будет называться «римановым

новой поверхностью» функции  $\text{Ln } z$ . Для этого по определению будем различать точки  $z_k = re^{i(\varphi+2\pi k)}$  (где  $r > 0$ ,  $\varphi \in (-\pi, +\pi]$ ) при различных целых значениях  $k$ . А именно, с помощью введенной таким образом нумерации из множества  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  получим счетное семейство непересекающихся множеств вида

$$G_k := \{z \mid z = re^{i\varphi}, r > 0, \varphi \in (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k]\}, \quad (28.7)$$

где  $k \in \mathbb{Z}$ . На каждом множестве  $G_k$  определим функцию

$$h_k(z) := \ln r + i\varphi, \quad \text{где } z = re^{i\varphi} \in G_k, \quad (28.8)$$

Сравнивая выражения (28.6) и (28.8), убеждаемся, что при каждом  $k \in \mathbb{Z}$  функции (28.6) и (28.8) совпадают на множестве  $\mathring{G}_k := G_k \setminus \{z \mid z = re^{i\pi(1+2k)}, r > 0\}$ , т. е. функция  $h_k$  регулярна на множестве  $\mathring{G}_k$ .

Определим множества

$$G_k^+ := G_k \cap \{z \mid \text{Im } z \geq 0\}, \quad G_k^- := G_k \cap \{z \mid \text{Im } z < 0\}. \quad (28.9)$$

При каждом  $z \in G_k \setminus \mathring{G}_k$  функция  $h_k$  терпит разрыв, а именно, справедливы выражения

$$h_k(z) = \lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ \zeta \in G_k^+}} h_k(\zeta) \neq \lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ \zeta \in G_k^-}} h_k(\zeta), \quad (28.10)$$

$$h_k(z) = \lim_{\substack{\zeta \rightarrow ze^{2\pi i} \\ \zeta \in G_{k+1}^-}} h_{k+1}(\zeta). \quad (28.11)$$

Из семейства непересекающихся множеств  $\{G_k\}$  образуем множество  $G = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} G_k$ , на котором определим функцию  $h$  по формуле

$$h(z) = h_k(z), \quad \text{если } z \in G_k.$$

На множестве  $G$  введем следующую систему окрестностей его точек. Если  $a \in \mathring{G}_k$ ,  $\text{Re } a < 0$ , то окрестностью этой точки  $a$  назовем любой круг вида

$$B_\varepsilon(a), \quad \text{где } \varepsilon \in (0, |\text{Im } a|). \quad (28.12)$$

Если  $a \in \mathring{G}_k$ ,  $\text{Re } a \geq 0$ , то окрестностью этой точки  $a$  назовем любой круг вида

$$B_\varepsilon(a), \quad \text{где } \varepsilon \in (0, |a|). \quad (28.13)$$

Если же  $a \in G_k \setminus \mathring{G}_k$ , то, выбирая любое  $\varepsilon \in (0, |a|)$ , окрестность этой точки определим по формуле

$$\{z \in G_k^+ \mid |z - a| < \varepsilon\} \cup \{z \in G_{k+1}^- \mid |a e^{2\pi i} - z| < \varepsilon\}. \quad (28.14)$$

При таком задании системы окрестностей на множестве  $G$  получаем, что определенная выше функция  $h$  в силу выражений (28.10)–(28.14) является непрерывной функцией, а в силу теоремы 28.1 она будет также и регулярной на множестве  $G$ .

Множество  $G$  с указанной системой окрестностей называется *римановой поверхностью аналитической функции  $\text{Ln } z$* .

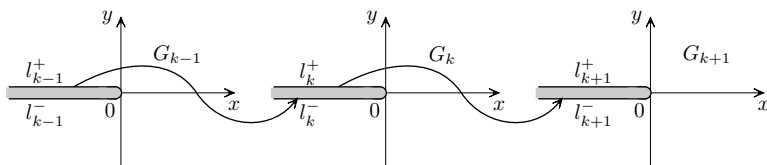


Рис. 28.1

Для наглядного представления римановой поверхности  $G$  в каждом множестве  $G_k$  введем разрез по линии разрыва функции  $h_k$  с соответствующими верхним берегом разреза  $l_k^+ = G_k \setminus \mathring{G}_k$  и нижним берегом разреза  $l_k^- = \{z \mid z = re^{i\varphi}, \varphi = \pi(-1 + 2k)\}$  (см. рис. 28.1).

Очевидно для любого  $k \in \mathbb{Z}$  справедливо равенство  $l_k^+ = l_{k+1}^-$ , которое вместе с заданием окрестностей вида (28.14) означает склейку верхнего берега разреза листа  $G_k$  с нижним берегом разреза листа  $G_{k+1}$  (см. рис. 28.2).

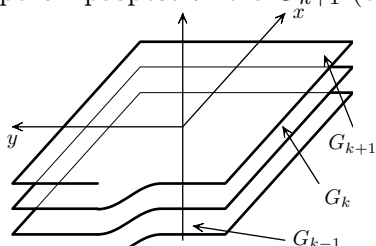


Рис. 28.2

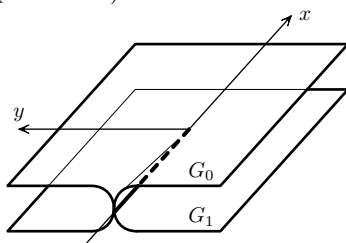


Рис. 28.3

2b) Риманова поверхность корня.

На области  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  существуют две регулярные ветви

многозначной функции  $\{\sqrt{z}\}$  вида

$$g_k(z) = \sqrt{|z|} e^{\frac{i}{2}(\arg_{\text{гл}} z + 2\pi k)}, \quad k \in \overline{0, 1}. \quad (28.15)$$

Для получения регулярной функции, принимающей все значения аналитической функции  $\sqrt{z}$ , расширим ее множество определения  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , а именно: рассмотрим два непересекающихся множества  $G_0$  и  $G_1$ , задаваемые формулами (28.7) (при  $k \in \overline{0, 1}$ ). На каждом  $G_k$  определим функцию

$$g_k = \sqrt{r} e^{\frac{i\varphi}{2}}, \quad \text{где } z = re^{i\varphi} \in G_k, \quad k \in \overline{0, 1}.$$

При каждом  $k \in \overline{0, 1}$  функция  $g_k$  совпадает с функцией (28.15) на множестве  $\mathring{G}_k$ , т. е. там она является регулярной функцией. При этом в каждой точке  $z \in G_k \setminus \mathring{G}_k$  функция  $g_k$  терпит разрыв, а именно, справедливы выражения

$$g_k(z) = \lim_{\substack{G_k^+ \\ \zeta \rightarrow z}} g_k(\zeta) = - \lim_{\substack{G_k^- \\ \zeta \rightarrow z}} g_k(\zeta), \quad (28.16)$$

точнее, имеем:

$$g_1(z) = \lim_{\substack{G_0^- \\ \zeta \rightarrow ze^{-2\pi i}}} g_0(\zeta), \quad z \in G_1 \setminus \mathring{G}_1, \quad (28.17)$$

$$g_0(z) = \lim_{\substack{G_1^- \\ \zeta \rightarrow ze^{2\pi i}}} g_1(\zeta), \quad z \in G_0 \setminus \mathring{G}_0. \quad (28.18)$$

Определим множество  $G = G_0 \cup G_1$  и, как и в случае римановой поверхности логарифма, в соответствии с формулами (28.16)–(28.18) определяем систему окрестностей точек  $a$  из  $\mathring{G}_k$  по формулам (28.12) и (28.13) (где  $k \in \overline{0, 1}$ ), для точек  $a$  из  $G_0 \setminus \mathring{G}_0$  по формулам (28.14) (при  $k = 0$ ), а для точек  $a \in G_1 \setminus \mathring{G}_1$  следующим образом:

$$\{z \in G_1^+ \mid |z - a| < \varepsilon\} \cup \{z \in G_0^- \mid |ae^{-2\pi i} - z| < \varepsilon\}. \quad (28.19)$$

На множестве  $G$  с определенной выше системой окрестностей зададим функцию

$$g(z) = g_k(z), \quad \text{если } z \in G_k, \quad k \in \overline{0, 1}.$$

Эта функция принимает все значения аналитической функции  $\sqrt{z}$ . Мы специально так подобрали систему окрестностей на  $G$ , чтобы функция  $g$  была на множестве  $G$  непрерывной, а в силу следствий 28.2, 28.3 функция  $g$  будет регулярна на множестве

$G$ . Определенное выше множество  $G$  называется *римановой поверхностью аналитической функции  $\sqrt{z}$* .

Приведенный выше выбор окрестностей во множестве  $G$  можно наглядно изобразить как специальную склейку двух листов  $\mathring{G}_0$  и  $\mathring{G}_1$  по берегам разреза, сделанного на интервале  $(-\infty, 0)$ . При этом верхний берег разреза  $l_1^+$  множества  $G_1$  нужно склеить с нижним берегом разреза  $l_0^-$  множества  $G_0$ , а верхний берег разреза  $l_0^+$  множества  $G_0$  нужно склеить с нижним берегом разреза  $l_1^-$  множества  $G_1$  (см. рис. 28.3).



## § 29. Особые точки аналитических функций

В § 12 мы рассмотрели изолированные особые точки регулярных функций, которые называют еще особыми точками однозначного характера. При разборе примеров полных аналитических функций  $\operatorname{Ln} z$  и  $\sqrt[n]{z}$  в § 28 мы показали, что эти аналитические функции существуют в области  $0 < |z| < \infty$ , т. е. точки 0 и  $\infty$  тоже являются особыми, но уже нового типа. Обобщим классификацию особых точек для аналитических функций.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29.1.** Пусть аналитическая функция  $\mathcal{F}$  содержит элемент  $(B_r(a), f_a)$  с центром в точке  $a \in \mathbb{C}$ , и пусть существует кусочно-гладкая кривая  $\gamma_{ab}$  с началом в точке  $a$  и концом в точке  $b \in \mathbb{C}$  такая, что элемент  $(B_r(a), f_a)$  может быть аналитически продолжен вдоль любой части  $\gamma_{az}$  кривой  $\gamma_{ab}$  при  $z \in \gamma_{ab} \setminus \{b\}$ , но не продолжаем вдоль всей кривой  $\gamma_{ab}$  (т. е. не существует элемента  $(B_r(b), f_b)$  с центром в точке  $b$ , являющегося аналитическим продолжением элемента  $(B_r(a), f_a)$  вдоль кривой  $\gamma_{ab}$ ). Тогда точка  $b$  называется *особой точкой аналитической функции  $\mathcal{F}$*  (см. рис. 29.1).

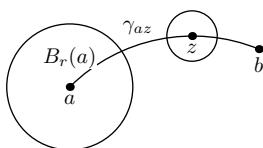


Рис. 29.1

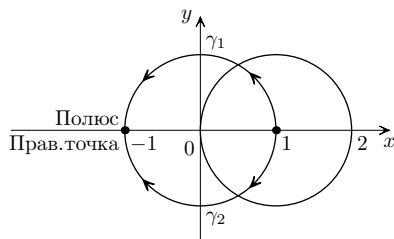


Рис. 29.2

Пусть точка  $b = \infty$  такова, что при замене переменного вида  $z = \frac{1}{\zeta}$  в элементах данной аналитической функции  $\mathcal{F}(z)$  получаем аналитическую функцию  $\tilde{\mathcal{F}}(\zeta)$ , у которой точка  $\zeta = 0$  оказалась особой точкой. Тогда точка  $b = \infty$  называется *особой точкой аналитической функции  $\mathcal{F}(z)$* .

Иногда, когда это требует уточнения, «особой точкой» будем называть пару, состоящую из точки  $b$  и указанной в определении 29.1 кривой  $\gamma_{ab}$ .

Отметим, что полюс и существенно особая точка регулярной функции удовлетворяют определению 29.1, а устранимая особая точка не удовлетворяет определению 29.1.

Особая точка аналитической функции, заданной в области, как правило, является граничной точкой области определения аналитической функции.

Поясним это на примере.

**ПРИМЕР 29.1.** Пусть функция  $f_0(z) = \frac{1}{h(z) - i\pi}$  задана в круге  $B_1(1)$ , где функция  $h$  есть регулярная в круге  $B_1(1)$  ветвь многозначной функции  $\text{Ln } z$  такая, что  $h(1) = 0$ . Аналитически продолжая элемент  $(B_1(1), f_0)$  вдоль верхней полуокружности  $\gamma_1 = \{z \mid z = e^{is}, s \in [0, \pi]\}$ , получаем значение  $h(-1) = i\pi$ , т. е. в особой точке  $(-1, \gamma_1)$  аналитической функции  $\mathcal{F}$ , порожденной элементом  $(B_1(1), f_0)$ , будет полюс (см. рис. 29.2).

Аналитически продолжая элемент  $(B_1(1), f_0)$  вдоль нижней полуокружности  $\gamma_2 = \{z \mid z = e^{-is}, s \in [0, \pi]\}$ , получаем элемент  $(B_1(-1), f_{-\pi})$  со значением  $f_{-\pi}(-1) = \frac{1}{-2i\pi}$ , т. е.  $(-1, \gamma_2)$  есть правильная точка, т. е. точка  $z = -1$  является особой и граничной точкой аналитической функции  $\mathcal{F}$  лишь на одном из листов ее римановой поверхности.

**ТЕОРЕМА 29.1 (КОШИ–АДАМАР).** Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n \quad (29.1)$$

имеет ненулевой конечный радиус сходимости  $R$ . Тогда на границе его круга сходимости  $B_R(a)$  существует хотя бы одна особая точка его суммы.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** От противного. Допустим, что на граничной окружности  $\gamma_R = \{\zeta \mid |\zeta - a| = R\}$  нет особых точек суммы  $S(z)$  ряда (29.1). Тогда элемент  $(B_R(a), S)$  продолжаем по любому радиусу из центра  $a$  в концевую точку  $\zeta$ , лежащую на окружности  $\gamma_R$ .

При этом для каждой точки  $\zeta \in \gamma_R$  существуют число  $r_\zeta > 0$  и круг  $B_{r_\zeta}(\zeta)$ , в котором определена регулярная функция

$f_\zeta$  такая, что элемент  $(B_{r_\zeta}(\zeta), f_\zeta)$  является аналитическим продолжением элемента  $(B_R(a), S)$ .

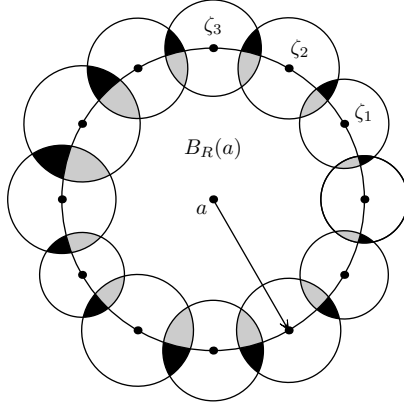


Рис. 29.3

По лемме Гейне–Бореля (см. [2]) из покрытия окружности  $\gamma_R$  открытыми множествами  $\{B_{r_\zeta}(\zeta)\}$ ,  $\zeta \in \gamma_R$ , можно выделить конечное подпокрытие, т. е. конечное множество кругов  $\{B_{r_k}(\zeta_k)\}$ ,  $k \in \overline{1, K}$ , все еще покрывающее окружность  $\gamma_R$  (т. е.  $\gamma_R \subset \bigcup_{k=1}^K B_{r_k}(\zeta_k)$ ).

Определим область  $G := B_R(a) \cup \left( \bigcup_{k=1}^K B_{r_k}(\zeta_k) \right)$  и для каждого  $k \in \overline{1, K}$  обозначим через  $(B_{r_k}(\zeta_k), f_k)$  элемент, полученный продолжением элемента  $(B_R(a), S)$  по радиусу  $[a, \zeta_k]$ . Определим аналитическую функцию

$$\mathcal{F} = \begin{cases} (B_R(a), S), \\ (B_{r_k}(\zeta_k), f_k), \quad \forall k \in \overline{1, K}. \end{cases}$$

Покажем, что аналитическая функция  $\mathcal{F}$  однозначна и регулярна в области  $G$ . Допустим, что номера  $k$  и  $m$  таковы, что  $B_{r_k}(\zeta_k) \cap B_{r_m}(\zeta_m) \neq \emptyset$ . Тогда множество  $B_R(a) \cap B_{r_k}(\zeta_k) \cap B_{r_m}(\zeta_m)$  не пусто (см. рис. 29.3) и по определению аналитического продолжения внутри круга  $B_R(a)$  получаем

$$f_k(z) = S(z) = f_m(z) \quad (29.2)$$

при всех  $z \in B_R(a) \cap B_{r_k}(\zeta_k) \cap B_{r_m}(\zeta_m)$ .

В силу теоремы 10.1 единственности регулярной функции из равенства (29.2) получаем

$$f_k(z) = f_m(z) \quad \text{при всех} \quad z \in B_{r_k}(\zeta_k) \cap B_{r_m}(\zeta_m).$$

Таким образом показали, что аналитическая функция  $\mathcal{F}$  однозначна и регулярна в области  $G$ . Определим число

$$r := \inf\{|z - \zeta| \mid z \in B_R(a), \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus G\}.$$

Очевидно, что число  $r > 0$ , и справедливо включение  $B_{R+r}(a) \subset G$ . Поэтому функция  $\mathcal{F}$  определена и регулярна в круге  $B_{R+r}(a)$ . По теореме 9.2 о разложении в ряд Тейлора функция  $\mathcal{F}$  в круге  $B_{R+r}(a)$  представима в виде сходящегося степенного ряда

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{F}^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k.$$

Так как  $\mathcal{F}(z) = S(z)$  при всех  $z \in B_R(a)$ , то справедливо равенство  $\frac{\mathcal{F}^{(k)}(a)}{k!} = c_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , т. е. мы получили, что ряд (29.1) сходится в круге  $B_{R+r}(a)$ , что противоречит определению радиуса сходимости  $R$ . Таким образом, допущение об отсутствии на граничной окружности  $\gamma_R = \{\zeta \mid |\zeta - a| = R\}$  особых точек суммы  $S(z)$  ряда (29.1) не верно.  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 29.1.** *Радиус сходимости  $R$  степенного ряда (29.1) при условии, что  $0 < R < +\infty$ , равен расстоянию от точки  $a$  до ближайшей особой точки суммы  $S$  ряда (29.1).*

**ПРИМЕР 29.2.** Не вычисляя коэффициентов степенного ряда функции

$$\frac{1}{(z+3)(z^2+2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n,$$

можно сразу сказать, что его радиус сходимости равен  $\sqrt{2}$ , так как ближайшими к точке  $z = 0$  особыми точками являются полюсы  $\pm\sqrt{2}i$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 29.1.** Сходимость ряда (29.1) в точке границы его круга сходимости не связана с тем, является ли данная точка особой или нет. Поясним это на примерах.

ПРИМЕР 29.3. Ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$  сходится в круге  $B_1(0)$  к функции  $\frac{1}{1-z}$  и расходится в каждой точке окружности  $|z| = 1$ , а особой точкой суммы ряда является лишь одна точка  $z = 1$ .

ПРИМЕР 29.4. Ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} z^{n+1} \quad (29.3)$$

сходится в круге  $B_1(0)$  к функции  $S(z) = -z + (1+z)h_0(1+z)$ , где  $h_0(z) = \ln|z| + i \arg_{\text{гл}} z$ , и  $\arg_{\text{гл}} z \in (-\pi, \pi)$  (см. пример 9.4), при этом очевидно, что ряд (29.3) абсолютно сходится в любой точке окружности  $|z| = 1$ .

УПРАЖНЕНИЕ 29.1. По теореме 29.1 на окружности  $|z| = 1$ , являющейся границей его круга сходимости, ряд (29.3) должен иметь по крайней мере одну особую точку. В то же время этот ряд в каждой точке круга  $|z| = 1$  сходится. Нет ли здесь противоречия? Где особая точка?

Для ответа на последний вопрос определим новый тип особых точек аналитических функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29.2. Пусть задана точка  $a \in \overline{\mathbb{C}}$ , и пусть аналитическая функция  $\mathcal{F}$  определена в ее проколотой окрестности  $\mathring{B}_R(a)$  и неоднозначна в этой окрестности. Тогда точка  $a$  называется *точкой ветвления аналитической функции  $\mathcal{F}$* .

Поясним определение 29.2.

Пусть точка  $a \in \mathbb{C}$ . Пусть задана функция  $f_0$ , регулярная в односвязной области  $B_R(a) \setminus [a, b)$ , т.е. в круге  $B_R(a)$  с разрезом по радиусу  $[a, b)$ . Выберем круг  $B_r(a_1)$ , содержащийся в области  $B_R(a) \setminus [a, b)$ . Пусть элемент  $(B_r(a_1), f_0)$  продолжаем вдоль любой кривой, лежащей в области  $\mathring{B}_R(a)$  и начинающейся из точки  $a_1$ . Если получаемая при этом продолжении аналитическая функция  $\mathcal{F}$  многозначна, то точка  $z = a$  является точкой ветвления аналитической функции  $\mathcal{F}$  (см. рис. 29.4).

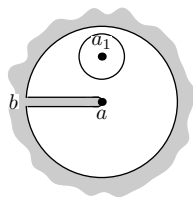


Рис. 29.4

ПРИМЕР 29.5. Точки  $0, \infty$  являются точками ветвления аналитических функций  $\operatorname{Ln} z$  и  $\sqrt[n]{z}$ . В самом деле, по формулам (28.1), (28.3) при  $\tilde{\gamma} = \{z \mid |z| = |a| > 0\}$  после одного обхода окружности против хода часовой стрелки получаем другие значения элементов

$$\tilde{h}_a(a) = h_a(a) + 2\pi i, \quad \tilde{g}_a(a) = g(a) \cdot e^{\frac{i}{n}2\pi}. \quad (29.4)$$

УПРАЖНЕНИЕ 29.2. Покажите, что точка ветвления аналитической функции является особой точкой этой аналитической функции в смысле определения 29.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29.3. Пусть  $a$  — точка ветвления аналитической функции  $\mathcal{F}$ . Пусть  $(B_r(a_1), f_0)$  — любой элемент с центром в точке  $a_1 \in \mathring{B}_R(a)$  функции  $\mathcal{F}$ . Если существует наименьшее число  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ , такое, что в результате аналитического продолжения элемента  $(B_r(a_1), f_0)$  по окружности, лежащей в  $\mathring{B}_R(a)$ , с центром в точке  $a$  (или в точке  $0$ , если  $a = \infty$ ), причем с  $m$ -кратным ее обходом, получаем конечный элемент  $(B_r(a_1), f_1)$ , эквивалентный элементу  $(B_r(a_1), f_0)$ , то говорят, что точка  $a$  является *алгебраической точкой ветвления порядка  $m - 1$* . В противном случае, если нет такого конечного  $m$ , то говорят, что точка  $a$  является *логарифмической точкой ветвления (бесконечного порядка)*.

ПРИМЕР 29.6. Продолжая разбор примера 29.5, из формул (29.4) получаем, что у функции  $\sqrt{z}$  точки  $0$  и  $\infty$  суть алгебраические точки ветвления 1-го порядка, а у функции  $\operatorname{Ln} z$  точки  $0$  и  $\infty$  суть логарифмические точки ветвления.

ПРИМЕР 29.7. Рассмотрим аналитическую в  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  функцию  $\frac{1}{\sqrt[8]{z-1}}$ , которая имеет элемент  $(B_1(2), f_0)$ , где регулярная функция  $f_0$  определена по формуле

$$f_0(z) = \frac{1}{\sqrt[8]{z-1}} e^{-\frac{i}{8}(\Delta_{\gamma_{2z}} \arg(z-1))}.$$

Продолжая элемент  $(B_1(2), f_0)$  по окружности  $|z-1| = 1$ , получаем, что точки  $z = 1, \infty$  — точки ветвления 7-го порядка.

ПРИМЕР 29.8. Рассмотрим аналитическую в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  функцию  $\cos \sqrt{z}$ . Для этого возьмем элемент  $(B_1(1), g_0)$  аналитической функции  $\sqrt{z}$  такой, что  $g_0(1) = 1$ . При однократном обходе точки 0 по замкнутой кривой значение функции  $g_0(z)$  меняется на значение  $-g_0(z)$ , а функция  $\cos g_0(z)$  в силу четности  $\cos z$  не меняется, т. е. аналитическая функция однозначна в  $\mathbb{C}$ , причем точка  $z = \infty$  — существенно особая точка, а точка  $z = 0$  — правильная точка (т. е. точка, где функция регулярна). Это же видно из разложения функции  $\cos \sqrt{z}$  в степенной ряд

$$\cos \sqrt{z} = 1 - \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \dots$$

ПРИМЕР 29.9. Рассмотрим аналитическую в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  функцию  $\sin \sqrt{z}$ . Любой ее элемент можно представить в круге  $B_{|a|}(a)$ ,  $a \neq 0$ , в виде регулярной функции

$$\sin \sqrt{z} = g_0(z) \left( 1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \dots \right) = g_0(z) \cdot f(z),$$

где  $(B_{|a|}(a), g_0)$  — элемент аналитической функции  $\sqrt{z}$ , а  $f$  — регулярная в  $\mathbb{C}$  функция. Таким образом, аналитическая функция  $\sin \sqrt{z}$ , как и функция  $\sqrt{z}$ , имеет точки ветвления 1-го порядка в точках 0 и  $\infty$ .

ПРИМЕР 29.10. Функция  $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ , доопределенная в точке  $z = 0$  по непрерывности, будет целой функцией (см. пример 29.9).

## Список литературы

1. *Бесов О.В.* Лекции по математическому анализу. – М.: Физматлит, 2013.
2. *Бицадзе А.В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1969, 1972, 1984.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – 5-е изд. – М.: Наука, 1988.
4. *Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс математического анализа. Т.1, – М.: Наука, 1998.
5. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973, 1987.
6. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т.2, – М.: Наука, 1991.
7. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. –14-е изд. – М.: Высшая школа, 1999.
8. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982, 1989.
9. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988; М.: Изд-во МФТИ, 1997.
10. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Ч.1,2, – М.: Наука, 1985.
11. *Шабунин М.И., Половинкин Е.С., Карлов М.И.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного / М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2006. – 362 с.
12. *Яковлев Г.Н.* Лекции по математическому анализу. Часть 2, – М.: Физматлит, 2001.



## Предметный указатель

- Абеля теорема, 69  
аналитическое продолжение,  
224–232  
аналитическое продолже-  
ние>вдоль кривой,  
226–227  
аналитическое продолже-  
ние>вдоль цепочки  
элементов, 225–226,  
228–229
- Вейерштрасса теорема, 75–77  
ветви>многозначной функ-  
ции>непрерывные,  
119–123  
ветви>многозначной функ-  
ции>регулярные,  
118–123  
ветвь>главная регуляр-  
ная>функции  $\operatorname{Ln} z$ ,  
42  
ветвь>главная регуляр-  
ная>функции  $\{\sqrt[n]{z}\}$ ,  
40  
ветвь>многозначной функции,  
40  
ветвь>многозначной функ-  
ции>регулярная  
(непрерывная), 40  
вычет функции, 100–109  
вычет функции>в  
бесконечности, 101
- Гаусса теорема, 160–161  
геометрический смысл модуля  
и аргумента производной  
функции, 168–170
- граница области>гладкие  
компоненты, 59  
граница  
области>кусочно-гладкая,  
59–60  
граница области>ориентация,  
59  
граница области>правильные  
гладкие компоненты, 59  
Гурса лемма, 56–58
- Дирихле>задача классическая,  
209, 221  
Дирихле>задача классиче-  
ская>на круге,  
212–214  
Дирихле>задача общая,  
210–212, 222  
Дирихле>задача общая>на  
верхней полуплоскости,  
219–221  
Дирихле>задача общая>на  
круге, 214, 216–218
- Жордана теорема, 44  
Жуковского>профиль, 194  
Жуковского>функция, 188–194
- задача Дирихле , см. Дирихле  
задача
- Пуассона, см. Пуассона  
интеграл  
интеграл>свойства, 51–52
- комплексная плос-  
кость>расширенная,  
16  
комплексное число, 10–14

- комплексное число>аргумент, 12
- комплексное число>аргумент>главное значение, 12
- комплексное число>действительная (вещественная) часть, 11
- комплексное число>комплексно-сопряженное, 11
- комплексное число>мнимая единица, 10
- комплексное число>мнимая часть, 11
- комплексное число>модуль, 11
- комплексное число>предел последовательности, 15
- комплексное число>свойства, 11
- комплексное число>тригонометрическая (полярная) форма, 12
- комплексное число>функция, *см.* функция комплексного переменного
- Коши>интеграл, 66
- Коши>интегральная теорема, 58
- Коши>интегральная формула, 65
- Коши>неравенство для коэффициентов ряда Лорана, 89
- Коши>обобщенная теорема, 63
- Коши>теорема о вычетах, 102–105
- Коши–Адамара>теорема, 241–243
- Коши–Адамара>формула, 70
- Коши–Римана условия, 24
- кривая>Жордана, *см.* простая кривая>гладкая, 48
- кривая>замкнутая, 44
- кривая>непрерывная, 43
- кривая>простая, 44
- кривая>простая>замкнутая, 44
- кривые гомотопные, 115
- Гурса, *см.* Гурса лемма
- Жордана, *см.* Жордана лемма
- лемма>об открытости, 162–163
- Шварца, *см.* Шварца лемма
- Лиувилля теорема, 147
- Лорана ряд, 83–97, 100, 102, 137, 143, 145, 147, 148, 150–151, 153, 156
- Лорана–Вейерштрасса>теорема, 84–87
- множество звездное, 61–63
- Морера теорема, 80–81
- Муавра формула, 13
- непрерывная деформация гладкой кривой, 114–116
- окрестность>бесконечности, 16
- окрестность>точки, 15
- окрестность>точки>проколотая, 15
- ориентация кривой, 43
- отображение>дробно-линейное, 174–184
- отображение>конформное, 170–174, 181, 182, 184–199, 209
- отображение>конформное>в области, 173

- Пикара теорема, 149–150  
 принцип>аргумента, 158–159  
 принцип>максимума и минимума гармонической функции, 165–166  
 принцип>максимума модуля, 163–164  
 принцип>симметрии, 199–208  
 принцип>соответствия границ, 197–198  
 принцип>сохранения области, 163  
 произведение, 10  
 производная функции, 23  
 пространство комплексных чисел, 10  
 Пуассона>интеграл, 214  
 Пуассона>формула, 214  
 разбиение отрезка, 49  
 разрез, 59  
 Римана>сфера, 16, 18  
 Римана>теорема, 194–197  
 риманова поверхность>функции  $\ln z$ , 236, 238  
 риманова поверхность>функции  $\sqrt{z}$ , 239  
 Руше теорема, 159–160  
 ряд>Лорана, *см.* Лорана ряд  
 ряд>Тейлора, *см.* Тейлора ряд  
 ряд>кольцо сходимости, 83–84  
 ряд>степенной, 69–74, 77, 241–244, 246  
 ряд>степенной>круг сходимости, 70  
 ряд>степенной>радиус сходимости, 70  
 ряд>функциональный, 21–22, 52–53  
 ряд>функциональный>сходимость, 74  
 ряд>числовой, 18–19, 22  
 ряд>элементарных дробей, 152, 155–156  
 свойство>сохранения окружности в малом, 168  
 свойство>сохранения углов, 170  
 система кривых правильная, 152–155  
 Сохоцкого теорема, 148–149  
 сумма интегральная функции, 49  
 сфера Римана, *см.* Римана сфера  
 Тейлора ряд, 70–72  
 теорема>Абеля, *см.* Абеля теорема  
 теорема>Вейерштрасса, *см.* Вейерштрасса теорема  
 теорема>Гаусса, *см.* Гаусса теорема  
 теорема>Жордана, *см.* Жордана теорема  
 теорема>Коши о вычетах, *см.* Коши теорема о вычетах  
 теорема>Коши–Адамара, *см.* Коши–Адамара теорема  
 теорема>Лиувилля, *см.* Лиувилля теорема  
 теорема>Лорана–Вейерштрасса, *см.* Лорана–Вейерштрасса теорема  
 теорема>Морера, *см.* Морера теорема  
 теорема>Пикара, *см.* Пикара теорема

- теорема>Римана, *см.* Римана  
теорема  
теорема>Руше, *см.* Руше  
теорема  
теорема>Сохоцкого,  
*см.* Сохоцкого теорема  
теорема>единственности  
регулярной функции, 78–79  
теорема>интегральная Коши,  
*см.* Коши интегральная  
теорема  
теорема>о монодромии, 229  
теорема>о сложной функции,  
35  
теорема>о среднем для гармонической функции,  
166–167  
теорема>о стирании разреза,  
81–82  
теорема>об обратной функции,  
35–38  
теоремы Вейерштрасса, 75  
точка>ветвления, 244–246  
точка>множества>внутренняя,  
19  
точка>множества>предельная,  
20  
точка>особая аналитической  
функции, 240–246  
точка>особая>изолированная,  
90–99  
точка>особая>однозначного  
характера,  
*см.* изолированная  
точка>особая>полус, 90–94,  
100, 148, 150, 151  
точка>особая>порядок  
полуса, 94  
точка>особая>существенно, 90,  
91, 148, 149  
точка>особая>устраняемая, 90,  
91, 148, 149, 151, 153  
точки симметричные относи-  
тельно окружности,  
177–180, 182, 190, 213  
условия Коши–Римана,  
*см.* Коши–Римана условия  
формула>Коши–Адамара,  
*см.* Коши–Адамара  
формула  
формула>Муавра, *см.* Муавра  
формула  
формула>Ньютона–Лейбница,  
*см.* Ньютона–Лейбница  
формула  
формула>Пуассона,  
*см.* Пуассона формула  
формула>Эйлера, *см.* Эйлера  
формула  
формула>интегральная Коши,  
*см.* Коши интегральная  
формула  
функции>мероморфные,  
150–154  
функции>тригонометрические,  
31–32  
функции>целые, 147–151  
функция>Жуковского,  
*см.* Жуковского функция  
функция>аналитическая,  
229–230, 233–246  
функция>аналитическая>полная,  
229  
функция>взаимно однознач-  
ная,  
*см.* однолистная  
функция>гармоническая, 32–35  
функция>голоморфная,  
*см.* регулярная

- функция > комплексного переменного, 19  
 функция > мероморфная, 150  
 функция > многозначная, 39  
 функция > многозначная >  $\operatorname{Ln} z$ , 42  
 функция > многозначная >  $\{\sqrt[n]{z}\}$ , 40  
 функция > непрерывная в точке, 20  
 функция > непрерывная на замыкании, 60  
 функция > непрерывная на множестве, 20  
 функция > однолистная, 38  
 функция > предел по множеству, 20  
 функция > регулярная, 29–31  
 функция > сопряженная, 33  
 функция > целая, 147  
 функция > целая > трансцендентная, 148  
 функция > экспоненциальная, 30, 187–188  
 центр элемента, 224  
 Шварца лемма, 164–165  
 Эйлера формула, 13  
 элемент аналитической функции, 224