Инновационная образовательная программа
"Наукоемкие технологии и экономика инноваций"
Московского физико-технического института
(государственного университета)
на 2006-2007 годы

Е.С. Половинкин
М.В. Балашов

Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа

Второе издание,
исправленное и дополненное

Рекомендовано УМО высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области прикладных математики и физики в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Прикладные математика и физика» и смежным направлениям и специальностям

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2007

УДК 517.9
ББК 22.162
П 52

П о л о в и н к и н Е. С., Б а л а ш о в М. В. **Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа.** — 2-е изд. испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 440 с. — ISBN 978-5-9221-0896-6.

Книга посвящена изложению основ выпуклого анализа и сравнительно нового его направления — сильно выпуклого анализа. Роль понятия «выпуклость» в математике (особенно в таких областях, как оптимизация и многозначный анализ), естествознании, технике, экономике весьма значительна. Помимо собственно выпуклого анализа рассматриваются его приложения. Часть этих приложений (например, свойства центра Штейнера) до сих пор слабо отражена в отечественной литературе.

Первые две главы представляют собой методическое пособие по курсу «Выпуклый анализ», который читается авторами студентам Московского физико-технического института (государственного университета) в рамках подготовки по наукоемким технологиям и экономике инноваций.

В рамках сильно выпуклого анализа изложены некоторые обобщения результатов выпуклого анализа, а также новые результаты по аппроксимации множеств, многозначному анализу и геометрии.

Для аспирантов и научных работников, по роду своей деятельности связанных с выпуклым анализом и его приложениями, а также для студентов старших курсов университетов, изучающих выпуклый анализ.

Ил. 19. Библиогр. 175 назв.

ISBN 978-5-9221-0896-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Напомним, что множество в линейном пространстве называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками оно содержит весь отрезок, концами которого являются данные точки. Вещественная функция, заданная на линейном пространстве, называется *выпуклой*, если множество, лежащее над ее графиком, является выпуклым множеством. Задача отыскания минимума выпуклой функции на выпуклом множестве называется *выпуклой экстремальной задачей* или *задачей выпуклого программирования*.

Раздел математики, изучающий выпуклые множества, выпуклые функции и выпуклые экстремальные задачи, называется *выпуклым анализом*.

Понятие выпуклости играет важную роль в различных областях фундаментальной и прикладной математики. Основные факты и понятия выпуклого анализа сформировались еще в 18-м и начале 19-го столетия. В конце 19-го столетия и начале 20-го столетия Г. Минковским был создан специальный раздел геометрии — выпуклая геометрия (см., например, [65, 153–156]). В создание и развитие выпуклой геометрии наряду с Г. Минковском большой вклад внесли Я. Штейнер, К. Каратеодори, Э. Хелли, В. Бляшке, Т. Боннезен, В. Фенхель и другие ученые (см., например, [17, 18, 20, 117–120, 124, 125, 136, 137, 140, 169, 170]). Основные понятия выпуклой геометрии, такие как опорная функция, поляра, крайняя точка, сыграли большую роль в создании в начале 20-го века функционального анализа.

Примечательной особенностью выпуклых множеств является возможность их двойного описания, прямого (на основе определения, т. е. если две точки принадлежат выпуклому множеству, то и весь отрезок с концами в указанных точках также принадлежит данному множеству) и двойственного (выпуклое множество может быть представлено как пересечение полупространств). В результате для каждого выпуклого множества можно указать двойственное ему множество, называемое *полярой*.

Это свойство позволяет получить двойственное описание и для выпуклых функций. С каждой выпуклой функцией связана двойственная, или сопряженная, получаемая из исходной преобразованием, впервые введенным для выпуклых функций еще в 18-м столетии А.М. Лежандром.

Выпуклый анализ находит многочисленные приложения в вариационном исчислении и математической теории управления, в теоретической механике и теории упругости, теории приближений и экономике. В настоящее время имеется много монографий по выпуклому анализу (см., например, [1, 15, 21, 31, 58–60, 62, 63, 93, 96, 99, 107, 116, 133, 138, 157, 167, 172, 173]). Еще больше монографий существует по приложениям выпуклого анализа (см., например, [2, 4, 7–9, 16, 19, 23, 25–28, 32–37, 43, 48–51, 54, 57, 66, 68, 69, 88, 89, 91, 93–95, 100–103, 106, 111–113, 138, 145]).

Развитие математики и расширение ее приложений привело к созданию различных аналогов и обобщений понятия выпуклости. Аксиоматический подход к понятию выпуклости заключается в следующем. В произвольном множестве X выбирается некоторое семейство подмножеств Φ, называемое *базой выпуклости*. Множество A называется Φ-*выпуклым*, если оно представимо в виде пересечения некоторого подсемейства множеств из данного семейства Φ (см., например, [31, 99, 127, 147]). Независимо разными авторами определялось понятие F-выпуклой функции (см., например, [99, 115, 166]), причем в различных работах разными способами. Например, в работе [115] задается некоторое семейство F функций $f\colon X \to \mathbb{R}$, и говорят, что функция $g\colon X \to \mathbb{R}$ является F-выпуклой на открытом подмножестве $S \subset X$, если для любой точки $x_0 \in S$ найдется функция $f \in F$ такая, что $g(x_0) = f(x_0)$ и $g(x) \geqslant f(x)$ $\forall x \in S$. Оперируя понятием надграфика функции, можно связать понятия Φ-выпуклых множеств и F-выпуклых функций. Большое количество работ было посвящено исследованиям указанных классов множеств и функций (достаточно большой список работ можно найти, например, в [99]).

В нашей книге мы хотим обратить внимание читателей на другое обстоятельство. Используя указанные выше обобщения понятия выпуклости, можно не ослаблять это понятие, а наоборот усиливать его, получая при этом новые результаты выпуклого анализа. Поясним это.

Как отмечается в работе [31], в начале 20-го столетия рядом ученых исследовались классы выпуклых множеств на плоскости, каждый из которых получается как совокупность множеств, представимых в виде пересечений некоторых сдвигов одного и того же заданного выпуклого компактного множества. Оказалось, что каждый такой класс выпуклых множеств обладает более сильной двойственностью, чем обычные выпуклые множества. Речь идет о том, что множество A принадлежит классу, определяемому заданным компактом M, тогда и только тогда, когда вместе с любой парой точек множество A содержит и усиленную выпуклую оболочку этих точек, т. е. содержит множество, получаемое в результате пересечения всевозможных сдвигов множества M, содержащих указанную пару точек. Однако уже для произвольных выпуклых множеств из трехмерного евклидова пространства усиленная двойственность не имела места, и исследования в этом направлении прекратились.

Впоследствии различные ученые (в работах [31, 47, 55, 134, 148, 162]) независимо друг от друга обратили внимание на то, что в прикладных задачах получаются хорошие результаты, когда рассматриваются классы выпуклых множеств из конечномерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, получаемых в результате пересечения сдвигов шара заданного радиуса.

С другой стороны, при изучении задач на экстремум выпуклых функций также были обнаружены некоторые специальные классы выпуклых функций, для которых решения задач находятся проще, а вычислительные алгоритмы работают быстрее. Этот класс функций хорошо известен — это сильно выпуклые функции (см. [88]).

При этом не существовало общей концепции изучения таких множеств и функций. Не было ясно, какие еще классы множеств и функций обладают хорошими в каком-то смысле свойствами.

Настоящая книга посвящена ответу на поставленные выше вопросы.

Книга состоит из четырех глав. Глава 1 посвящена описанию и доказательству известных результатов выпуклого анализа в банаховых пространствах. В ней достаточно подробно изложены привычные для выпуклого анализа аспекты, касающиеся свойств выпуклых множеств и выпуклых функций, свойств сопряженных функций и поляры множеств, теоремы об отделимости, субдифференциальное исчисление. Приведены классические теоремы конечномерного выпуклого анализа — теорема Каратеодори, теорема Хелли и теорема Минковского, а также ее обобщение — теорема Крейна–Мильмана о крайних точках. В этой главе также изучаются метрические пространства, состоящие из компактных подмножеств некоторого банахова пространства, с метрикой Хаусдорфа и приводятся доказательства теоремы о полноте и теоремы Бляшке о компактности соответствующих пространств. Кроме того, исследуются различные конусы и в особенности — различные типы касательных конусов как для выпуклых множеств, так и для невыпуклых множеств. Рассмотрение таких конусов вызвано тем, что, если некоторый тип касательного конуса к данному невыпуклому множеству оказывается выпуклым конусом (как например, касательный конус Кларка), то это позволяет исследовать невыпуклые задачи методами выпуклого анализа (см., например, [54, 93]). При этом много внимания в главе 1 уделено изучению свойств специальных квазилинейных операций со множествами, впервые определенных Г. Минковским, таких, как алгебраическая сумма и геометрическая разность множеств. Приведенные в главе 1 результаты носят главным образом вспомогательный характер, они необходимы для получения результатов в остальных главах книги. Более того, ряд указанных здесь классических результатов нами обобщен и развит в главе 3 и в главе 4, посвященных сильно выпуклому анализу.

Глава 2 также носит вспомогательный характер и содержит некоторые приложения выпуклого анализа. В частности, в ней изучены вопросы нахождения некоторых непрерывных и липшицевых селекторов многозначных отображений, доказаны свойства центра Штейнера, главным из которых является то, что штейнеровский центр множества является липшицевым однозначным селектором выпуклых множеств из евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Приведены алгоритмы решения задач выпуклого и линейного программирования, в частности, приведен классический метод Лагранжа решения задач выпуклого программирования, а также формулировка и доказательство модифицированного симплекс-метода решения задач линейного программирования. Рассмотрены методы приближенного решение некоторых классов задач на максимум выпуклой функции, идеи постановки которых восходят к теории дифференциальных игр (см., например, [84]). В главе 2 мы также приводим важные на наш взгляд результаты негладкого анализа, такие, как теорема Майкла о непрерывном селекторе (см. [152]) и ε-вариационный принцип Экланда (см. [107]). Описаны классические, идущие от Г. Минковского, а также новые методы внешней и внутренней аппроксимации выпуклых множеств многогранниками, основанные на описании опорных функций аппроксимаций. Приведены некоторые специальные задачи теории приближений и исследованы условия непрерывности некоторых классов многозначных отображений, представляющие собой геометрическую разность двух отображений. Последние результаты будут использованы в последних главах при изучении сильно выпуклых множеств. Главу 2 завершает параграф, в котором показано, что пространство, элементами которого являются выпуклые подмножества из банахова пространства, можно вложить в некоторое топологическое линейное пространство, причем так, что это пространство выпуклых множеств будет соответствовать некоторому острому выпуклому конусу в линейном пространстве.

В главе 3, следуя работам [79–81], исследован специальный класс Φ-выпуклых множеств из $\mathbb{R}^n$, у которого семейство Φ состоит из замкнутых шаров произвольного, но фиксированного для данного семейства радиуса $R > 0$ с произвольными центрами. Таким образом, семейство Φ порождено сдвигами одного множества — шара $B_R(0)$ из $\mathbb{R}^n$. Этот класс множеств, каждое из который может быть представлено в виде пересечения некоторой совокупности шаров радиуса $R > 0$, будем называть *R-сильно выпуклыми множествами*. Показано, что указанный класс множеств обладает усиленной двойственностью, т. е. компактное множество является сильно выпуклым множеством радиуса R тогда и только тогда, когда для любой пары точек этого множества оно содержит R-сильно выпуклую оболочку этой пары точек, т. е. содержит множество, являющееся пересечением всех шаров радиуса R, содержащих данную пару точек. Благодаря этому свойству получен ряд алгебраических и топологических свойств этого класса сильно выпуклых множеств. Для указанного класса множеств получено свойство, состоящее в том, что для всякого R-сильно выпуклого множества найдется другое выпуклое множество, такое, что алгебраическая сумма этих двух множеств в точности равняется шару $B_R(0)$ данного радиуса R. Доказано, что всякое R-сильно выпуклое множество преобразуется в некоторое R_1-сильно выпуклое множество при линейных операциях с ним (при вычислении алгебраической суммы множеств, пересечения или геометрической разности множеств, при интегрировании сильно выпуклых многозначных отображений) и в результате действия линейным оператором.

Приведен критерий R-сильной выпуклости множества, состоящий в том, что субдифференциал опорной функции такого множества, заданный на единичной сфере, является отображением, удовлетворяющим условию Липшица с той же константой R. Установлена связь R-сильно выпуклого множества с сильно выпуклыми функциями. Получена формула R-сильно выпуклой оболочки множеств, изучены ее свойства. Показано, что операция взятия R-сильно выпуклой оболочки удовлетворяет условию Липшица в метрике Хаусдорфа. Получены оценки уклонения в метрике Хаусдорфа R-сильно выпуклых оболочек одного и того же множества, но с различными радиусами R. Кроме того, получено обобщение теоремы Каратеодори, состоящее в том, что для всякой точки a из R-сильно выпуклой оболочки множества найдется не более чем $n+1$ точек этого множества таких, что точка a содержится в R-сильно выпуклой оболочке указанной совокупности из $n+1$ точек.

Далее введено понятие R-сильно крайней точки и получено обобщение теоремы Крейна–Мильмана о R-сильно крайних точках.

Опираясь на понятия центра Штейнера и R-сильно выпуклой оболочки множества, построен еще один класс липшицевых однозначных селекторов для выпуклозначных и компактнозначных многозначных отображений.

Так как база выпуклости в разобранном в главе 3 классе R-сильно выпуклых множеств из $\mathbb{R}^n$ состоит из шаров одного радиуса $R > 0$ с произвольными центрами, то шар $B_R(0)$ радиуса R с центром в нуле естественно назвать *порождающим множеством* для данного класса Φ-выпуклых множеств.

Глава 4 книги посвящена обобщению результатов главы 3 на другие классы Φ-выпуклых множеств из банахова пространства. Будем полагать, что каждое семейство Φ образовано множествами, получаемыми в результате всевозможных сдвигов некоторого выпуклого множества M, причем полученный класс Ф-выпуклых множеств обладал усиленным типом двойственности. Следовательно, множество M должно удовлетворять некоторому дополнительному условию. Только в этом случае указанное множество M будем называть порождающим. Уточним это дополнительное условие и тем самым дадим определение порождающего множества.

Назовем выпуклое замкнутое множество M из банахова пространства E *порождающим множеством*, если для любого непустого множества A, представимого в виде $A = \bigcap\limits_{x \in X} (M + x)$ при некотором X, найдется выпуклое замкнутое множество $B \subset E$ такое, что $\overline{A + B} = M$. Соответственно для каждого порождающего множества M всякое непустое множество вида

$$A = \bigcap_{x \in X} (M + x) \tag{$*$}$$

назовем M-*сильно выпуклым множеством*. Заметим, что, как показано в главе 3, всякий шар $B_R(0)$ из евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет дополнительному условию, т. е. шар $B_R(0)$ удовлетворяет определению порождающего множества.

В главе 4 описаны и развиты результаты, полученные нами в работах [11, 82, 83] и др. Показано, что любое выпуклое замкнутое множество на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ удовлетворяет определению порождающего множества. Этим объясняется некоторый успех исследований множеств на плоскости в начале 20-го века (см. [31]).

Однако в более сложных пространствах порождающих множеств не так много. Основными представителями порождающих множеств, полученных в главе 4, являются шар из гильбертова пространства, надграфик параболической функции, определенной на гильбертовом пространстве, образы невырожденных линейных непрерывных преобразований порождающих множеств. В частности, эллипсоиды из $\mathbb{R}^n$ являются порождающими множествами.

Исследован вопрос: в результате каких операций с порождающими множествами получатся новые порождающие множества? Показано, что всякое опорное подмножество порождающего множества также будет порождающим множеством. Прямая сумма двух порождающих множеств также является порождающим множеством, при определенных условиях пределы последовательности порождающих множеств являются порождающими множествами.

Доказаны некоторые критерии порождающих множеств. Показано, что для проверки свойства порождаемости некоторого множества M достаточно проверить определение для более простых множеств A, представимых в виде пересечения всего лишь двух множеств, т. е. вида $A = M \cap (M + x)$.

В § 4.3 проведено исследование общих свойств M-сильно выпуклых множеств при произвольном порождающем множестве M. Приведены условия, при которых сохраняется M-сильная выпуклость множеств, полученных в результате сложения или вычитания множеств по Минковскому, при сходимости последовательности множеств $\{A_k\}$, являющихся соответственно M_k-сильно выпуклыми.

Определено понятие M-сильно выпуклой оболочки множества и исследованы ее свойства. Приведена формула нахождения M-сильно выпуклой оболочки множества и ее опорной функции. Изучены свойства M-сильно выпуклых оболочек одного и того же множества в зависимости от выбора различных порождающих множеств, их взаимосвязь, свойства M-сильно выпуклых оболочек множеств, представимых в виде алгебраической суммой других множеств. Показано, что в случае, когда порождающее множество M ограничено, оператор взятия M-сильно выпуклой оболочки как функция множества удовлетворяет условию Липшица в метрике Хаусдорфа.

В § 4.6 для произвольного строго выпуклого компактного порождающего множества M из $\mathbb{R}^n$ получен еще один аналог теоремы Каратеодори, описывающий свойства M-сильно выпуклой оболочки. Показано, что всякая точка из M-сильно выпуклой оболочки произвольного компактного множества A содержится в M-сильно выпуклой оболочке некоторого конечного подмножества этого множества A, состоящего не более чем из $n+1$ точек.

В § 4.7 приводится еще одно обобщение теоремы Крейна–Мильмана [143] для $B_R(0)$-сильно выпуклых множеств из гильбертова пространства. Для произвольного множества из гильбертова пространства введены понятия R-сильно крайней точки и R-сильно выступающей точки этого множества, показано, что множество этих точек может быть существенно меньше, чем множество классических крайних точек или выступающих точек данного множества соответственно. В итоге показано, что всякое замкнутое множество A из гильбертова пространства содержится в $B_R(0)$-сильно выпуклой оболочке R-сильно выступающих (или R-сильно крайних) точек множества A при достаточно больших $R > 0$.

В § 4.8 изучается класс порождающих множеств, являющихся надграфиками некоторых выпуклых функций. Определены понятия порождающей функции m и понятие m-сильно выпуклой функции. Для того чтобы сформулировать указанные определения, введено понятие «эпи-разности»функций, основанное на геометрической разности Минковского надграфиков указанных функций. Показано, что понятие m-сильно выпуклой функции является естественным обобщением понятия сильно выпуклой функции, впервые введенного в работах Б.Т. Поляка (см., например, [87, 88]). Введено обобщение преобразования Лежандра–Юнга–Фенхеля, названное *m-сильно выпуклым преобразованием функции f*. Получен критерий того, что функция m является порождающей, состоящий в том, что инфимальная конволюция всякой m-сильно выпуклой функции и ее m-сильно выпуклого преобразования тождественно равна функции m. Получены условия m-сильной выпуклости данной функции, состоящие в том, что, как и в случае выпуклой функции, эта функция должна совпадать со своим вторым m-сильно выпуклым преобразованием. Доказано, что неотрицательная квадратичная форма, определенная на гильбертовом пространстве, является порождающей функцией. Из этого, в частности, следует, что всякая собственная полунепрерывная снизу сильно выпуклая функция (в определении Б.Т. Поляка [87]) совпадает с верхней гранью семейства всех не превосходящих ее непрерывных параболических функций. Приведены достаточные условия порождаемости функции, определенной на $\mathbb{R}^n$, с помощью которых получены некоторые классы порождающих функций.

В книге приведены многочисленные примеры и контрпримеры, показывающие, что класс порождающих множеств является достаточно узким. Даже в простых случаях (например, для некоторых выпуклых многогранников из $\mathbb{R}^3$) определение может не выполняться и легко может нарушаться при алгебраических операциях с порождающими множествами.

В книге также содержится много упражнений — от весьма простых задач на проверку определений до доказательства нетривиальных фактов. К некоторым наиболее сложным упражнениям даны указания или ссылки на работы, где можно найти решения.

Авторы выражают глубокую признательность В.М. Тихомирову, который своим творчеством и личным влиянием на авторов во многом способствовал получению приведенных в книге результатов и содействовал написанию данной книги.

Авторы выражают искреннюю благодарность американскому математику Р.Т. Рокафеллару, известному ученому и автору знаменитой монографии «Выпуклый анализ», который в 1995 г. обратил внимание одного из авторов на существование другого множества, кроме шара из евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющего приведенному выше дополнительному условию, а именно: такому условию удовлетворяет и надграфик параболы. Это явилось толчком для введения понятия порождающего множества, исследования классов порождающих множеств, а также изучения общих свойств M-сильно выпуклых множеств.

Авторы считают своим долгом выразить признательность своим коллегам А.В. Арутюнову, А.Г. Бирюкову, А.В. Дмитруку, В.К. Захарову, Г.Е. Иванову, Р.Н. Карасеву, С.П. Коновалову и Р.В. Константинову за полезные обсуждения и за помощь в подготовке рукописи к печати.

Проведенные исследования и издание книги были поддержаны грантами РФФИ по проектам 98-01-00645, 01-01-00743, 03-01-14053.

Глава 1

ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

§ 1.1. Некоторые понятия функционального анализа

В этом параграфе приведем некоторые основные обозначения, определения и утверждения, которые можно найти в современных монографиях по функциональному анализу, например в книгах [30, 56, 97, 109].

Символом $\varnothing$ будем обозначать пустое множество. Через $\mathbb{N}$ будем обозначать множество натуральных чисел, а через $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. Через $\mathbb{R}$ будем обозначать вещественную прямую, а через $\overline{\mathbb{R}}$ будем обозначать вещественную прямую, пополненную плюс бесконечностью, т. е. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. В качестве конечномерного евклидова пространства размерности n будем рассматривать пространство $\mathbb{R}^n$.

Напомним, что *линейным пространством* называется непустое множество элементов, для которых определены операция суммы двух элементов и операция умножения элемента на скаляр, удовлетворяющие некоторому набору аксиом (коммутативности, ассоциативности, существования нуля и обратного элемента, дистрибутивности). Все линейные пространства мы будем рассматривать над вещественным полем скаляров.

Линейное пространство называется *нормированным линейным пространством*, если в нем определена *норма* каждого элемента, т. е. такая функция $\|\cdot\|\colon E \to [0, +\infty)$, которая удовлетворяет трем условиям:

1) $\|x\| \geqslant 0$ для всех $x \in E$ и равенство нулю допускается лишь для $x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x \in E$;

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для всех $x, y \in E$.

Если в линейном пространстве некоторая функция $\|\cdot\|$ такова, что условия 2) и 3) выполнены, а в условии 1) равенство $\|x\| = 0$

возможно при некотором $x \neq 0$, то такая функция называется *полунормой*.

Последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в линейном нормированном пространстве E называется *сходящейся,* если существует некоторая точка $\widetilde{x} \in E$, для которой при любом $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что для любого номера $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\|\widetilde{x} - x_n\| < \varepsilon$.

Последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *последовательностью Коши* (или *фундаментальной*), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что для любых $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\|x_n - x_m\| \leqslant \varepsilon$.

Любая сходящаяся последовательность, очевидно, является фундаментальной. Обратное, вообще говоря, неверно. Для этого необходимы дополнительные предположения либо о самой последовательности, либо о пространстве E.

Нормированное пространство E называется *полным,* если в нем любая фундаментальная последовательность сходится.

Напомним, что всякое полное линейное нормированное пространство называется *банаховым пространством*. Произвольное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ в дальнейшем будем обозначать символом E или $(E, \|\cdot\|)$.

Банахово пространство называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное подмножество, т. е. такое подмножество $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset E$, что для любого элемента (вектора) $x \in E$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер i такой, что $\|x - x_i\| < \varepsilon$.

Банахово пространство называется *гильбертовым пространством* (в дальнейшем будем обозначать символом $\mathcal{H}$), если в нем дополнительно задана действительная функция двух переменных $\langle\cdot,\cdot\rangle$: $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to (-\infty; +\infty)$, называемая *скалярным произведением*, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ для всех $x \in \mathcal{H}$, причем $\langle x, x\rangle = 0$ только при $x = 0$;
2) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ для всех $x,\ y \in \mathcal{H}$;
3) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \ \forall\, x,\ y \in \mathcal{H}$;
4) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ для всех $x,\ y,\ z \in \mathcal{H}$;
5) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad \forall\, x \in \mathcal{H}$.

Напомним, что не для всякого банахова пространства можно задать скалярное произведение его элементов.

Отметим важное свойство скалярного произведения в гильбертовом пространстве.

Лемма 1.1.1. *Для любых векторов* $x, y \in \mathcal{H}$ *справедливо неравенство Коши–Буняковского* $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$, *причем если векторы* x, y *линейно независимы, то неравенство строгое.*

Обобщением понятия нормированного пространства является понятие метрического пространства.

Непустое множество элементов (точек) E называется *метрическим пространством*, если определена функция $\varrho\colon E \times E \to [0, +\infty)$ (называемая *расстоянием* между элементами) такая, что выполнены три условия: 1) $\varrho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$; 2) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ для любых x, $y \in E$; 3) $\varrho(x, z) \leqslant \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ для любых x, y, $z \in E$. Такое пространство будем обозначать (E, ϱ) либо просто E, если это обозначение не вызывает сомнения. В частности, нормированное линейное пространство $(E, \|\cdot\|)$ является метрическим пространством (E, ϱ), где $\varrho(x, y) = \|x - y\|$. В этом случае говорят, что метрика пространства (E, ϱ) порождена нормой $\|\cdot\|$.

В метрическом пространстве (E, ϱ) *открытым шаром* радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $a \in E$ (или ε-окрестностью точки a) будем называть множество $B^o_\varepsilon(a) = \{x \in E \mid \varrho(x, a) < \varepsilon\}$, а *замкнутым шаром* радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $a \in E$ будем называть множество $B_\varepsilon(a) = \{x \in E \mid \varrho(x, a) \leqslant \varepsilon\}$. *Дополнением множества* A называется множество $E \backslash A = \{x \in E \mid x \notin A\}$, которое, как обычно, будем обозначать через A^c.

В метрическом пространстве E точка $x \in E$ называется *граничной* точкой множества $A \subset E$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ справедливы соотношения $B^o_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing$ и $B^o_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \varnothing$. Совокупность всех граничных точек множества A называется *границей* множества A и обозначается через ∂A.

В метрическом пространстве E точка $x \in E$ называется *внутренней* точкой множества A, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $B^o_\varepsilon(x) \subset A$. Совокупность всех внутренних точек множества A называется *внутренностью* множества A и обозначается через $\operatorname{int} A$. Множество A называется *открытым* множеством, если справедливо равенство $\operatorname{int} A = A$.

В метрическом пространстве E точка $x \in E$ называется *предельной* точкой множества A, если для любого числа $\varepsilon > 0$ множество $[B^o_\varepsilon(x) \backslash \{x\}] \cap A$ не пусто. Объединение множества A и всех его предельных точек называется *замыканием* множества A и обозначается через $\overline{A}$. В метрическом пространстве E множество A называется *замкнутым*, если существует открытое множество B такое, что $A = E \backslash B$. Множество A является замкнутым множеством тогда и только тогда, когда справедливо равенство $\overline{A} = A$.

Понятия *сходящихся и фундаментальных последовательностей* в метрическом пространстве, а также понятие *полного метрического пространства* определяются аналогично случаю нормированного пространства с заменой нормы $\|x-y\|$ на расстояние $\varrho(x,y)$.

Обобщением понятия метрического пространства является понятие топологического пространства.

Непустое множество элементов (точек) E называется *топологическим пространством*, если в нем выделено некоторое семейство τ подмножеств (называемое *топологией*), удовлетворяющее следующим условиям: 1) $E \in \tau$ и $\varnothing \in \tau$; 2) пересечение любых двух подмножеств из τ также принадлежит τ; 3) объединение любой совокупности подмножеств из τ принадлежит τ. Такое пространство будем обозначать (E,τ) либо кратко E. Все подмножества, входящие в семейство τ, называются *открытыми множествами*. Любое открытое множество, содержащее точку x, называется *окрестностью точки* x. Подмножества из E, являющиеся дополнительными к открытым множествам (т.е. представимые в виде $E\backslash G$, где $G \in \tau$), называются *замкнутыми множествами* топологического пространства (E,τ). *Замыканием* множества A из топологического пространства E называется пересечение всех замкнутых подмножеств из E, содержащих A.

В дальнейшем мы будем рассматривать такие топологические пространства (E,τ), в которых выполнена первая аксиома отделимости (см. [56]), откуда следует, что каждая точка пространства является замкнутым множеством.

В частности, всякое метрическое пространство (E,ϱ) является топологическим пространством (E,τ), где топология τ состоит из всех открытых в метрическом пространстве (E,ϱ) множеств. В этом случае говорят, что топология τ порождена метрикой пространства (E,ϱ).

Скажем, что система множеств $\{A_\alpha\}$ *покрывает* множество A, если справедливо включение $A \subset \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$. Непустое множество A топологического пространства E называется *компактным множеством*, если всякая покрывающая его система открытых множеств содержит конечную подсистему этих множеств, также покрывающую данное множество A.

Отметим критерий компактности топологических пространств. Некоторую систему подмножеств $\{A_\alpha\}$ множества (пространства) B называют *центрированной*, если любое конечное пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{m} A_{\alpha_i}$ элементов этой системы непусто.

Т е о р е м а 1.1.1. *Для того чтобы топологическое пространство было компактным, необходимо и достаточно, чтобы любая центрированная система его замкнутых подмножеств имела непустое пересечение.*

Линейное пространство E называется *топологическим линейным* (*или векторным*) *пространством*, если в этом линейном пространстве определена топология τ так, что операции сложения элементов и умножения элемента на скаляр являются непрерывными относительно заданной топологии τ.

Совокупность γ окрестностей точки $x \in E$ называется *локальной базой топологии* τ в точке x, если любая окрестность точки x из τ содержит окрестность точки x из γ. В силу непрерывности линейных операций в топологическом линейном пространстве E всякая окрестность произвольной точки x представима в виде суммы $x + U$, где U — некоторая окрестность нуля в пространстве E. Отсюда следует, что задание локальной базы точки нуль полностью определяет топологию τ топологического линейного пространства E.

Топологическое линейное пространство E называется *локально выпуклым*, если в нем всякое непустое открытое множество содержит непустое выпуклое открытое подмножество (т. е. существует локальная база нуля γ, состоящая из выпуклых множеств).

Если γ — локальная база нуля в линейном топологическом пространстве (E, τ), то замыкание множества A может быть вычислено по формуле $\overline{A} = \bigcap\limits_{V\in\gamma} \bigcup\limits_{x\in A} (x + V)$.

Отметим, что в случае, когда пространство E является банаховым пространством, замыкание произвольного множества $A \subset E$ совпадает с пересечением всех замкнутых множеств, содержащих A, и может быть представлено в виде $\overline{A} = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} (A + B^{\circ}_{\varepsilon}(0))$ (понятие суммы множеств приведем в этом параграфе ниже).

Множество A в банаховом пространстве E является *компактным множеством* или просто *компактом*, если из всякой бесконечной последовательности точек $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset A$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$, причем $\lim\limits_{k\to\infty} x_{i_k} \in A$.

Множество A в банаховом пространстве E называется *вполне ограниченным*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует конечное множество точек $\{x_i\}_{i=1}^{m} \subset A$ такое, что для каждой точки $x \in A$ существует номер i, при котором $\|x - x_i\| < \varepsilon$. Соответствующее множество $\{x_i\}_{i=1}^{m}$ называется *конечной ε-сетью* множества A.

Как известно, замкнутость и вполне ограниченность множества в банаховом пространстве эквивалентны компактности этого множества.

В частности, в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$ множество A компактно тогда и только тогда, когда это множество замкнуто и ограничено.

Сформулируем еще три важных результата, которые нам в дальнейшем потребуются.

Теорема 1.1.2 (Р. Бэр). *Пусть $U \subset E$ — открытое подмножество банахова пространства E и счетное семейство подмножеств $\{U_k\}_{k=1}^{\infty} \subset U$ таково, что $\operatorname{int} \overline{U}_k = \varnothing$ для всех k. Тогда $U \neq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k$.*

Множества, представимые в виде не более чем счетного объединения нигде не плотных множеств принято называть множествами первой категории, а все остальные — второй категории. Отметим, что теорема 1.1.2 верна и в более общем случае, когда U — полное метрическое пространство.

Другая формулировка теоремы Бэра следующая.

Теорема 1.1.3 (Р. Бэр). *Пусть (E, ϱ) — полное метрическое пространство и $\{F_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ — последовательность замкнутых подмножеств из E. Тогда если их объединение $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k = E$, то по крайней мере одно из них имеет непустую внутренность, т. е. $\exists\, N \in \mathbb{N}$ такой, что $\operatorname{int} F_N \neq \varnothing$.*

Теорема 1.1.4 (С. Банах, Х. Штейнгауз). *Пусть E_1 — банахово пространство, E_2 — нормированное. Пусть Γ — семейство линейных операторов, действующих из E_1 в E_2 и таких, что $\sup\limits_{T \in \Gamma} \|Tx\|_{E_2} < +\infty$ для любого $x \in E_1$. Тогда существует число $M > 0$ такое, что $\|Tx\|_{E_2} \leqslant M\|x\|_{E_1}$ для всех $x \in E_1$ и всех $T \in \Gamma$.*

Теорема 1.1.5 (В. Хан, С. Банах). *Пусть L — линейное подпространство банахова пространства E, функция $g\colon E \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям $g(x+y) \leqslant g(x) + g(y)$ и $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ $\forall x, y \in E$ $\forall \lambda \geqslant 0$. Пусть на подпространстве L задан линейный функционал $f\colon L \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условию $f(x) \leqslant g(x)$ $\forall\, x \in L$.*

Тогда существует продолжение линейного функционала f с подпространства L на все пространство E с сохранением мажоранты, *т. е. существует линейный функционал* $p\colon E \to \mathbb{R}$ *такой, что*:

1) $p(x) = f(x) \ \ \forall\, x \in L$;

2) $p(x) \leqslant g(x) \ \ \forall\, x \in E$.

Отметим, что в последней теореме в качестве g могут выступать, например, линейный функционал или полунорма.

Пусть E — топологическое линейное пространство. Множество всех линейных непрерывных функционалов, определенных на E, образуют линейное пространство, называемое сопряженным с E пространством, которое будем обозначать E^*. В случае, когда пространство E является банаховым пространством, в сопряженном пространстве E^* вводится норма $\|\cdot\|_*$, определяемая по формуле

$$\|p\|_* = \sup\{|p(x)| \mid \|x\| \leqslant 1\}.$$

Отметим, что пространство непрерывных линейных функционалов, определенных на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, изоморфно самому пространству $\mathcal{H}$. Это означает, что для каждого $p \in \mathcal{H}^*$ найдется вектор $a \in \mathcal{H}$ такой, что $p(x) = \langle a, x\rangle$ для любого $x \in \mathcal{H}$.

В общем случае банахово пространство E является замкнутым подмножеством дважды сопряженного пространства $E^{**} = (E^*)^*$. При этом каждому вектору $x \in E$ можно сопоставить линейный функционал $\Lambda_x \in (E^*)^*$ по формуле $\Lambda_x(p) = p(x)$ для любого $p \in E^*$. Соответствие $\varkappa\colon E \to E^{**}$, где $\varkappa(x) = \Lambda_x$, задает естественное вложение E в E^{**}. Пространство E называется *рефлексивным*, если $\varkappa(E) = E^{**}$. Наиболее важным примером рефлексивных пространств является гильбертово пространство, такое, как пространство l_2 — квадратично-суммируемых последовательностей или пространство $L_2(\Omega)$ квадратично-суммируемых функций на некотором множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, или пространства Соболева $H_0^k(\Omega)$, $H^k(\Omega)$. Но существуют и другие примеры рефлексивных пространств такие, как пространства l_p, $L_p(\Omega)$ при любых $1 < p < +\infty$.

В силу указанного выше естественного вложения E в E^{**} и в силу взаимности между точкой и функционалом значение линейного функционала $p \in E^*$ в произвольной точке $x \in E$ будем записывать в виде

$$p(x) = \langle p, x\rangle.$$

В дальнейшем нам придется рассматривать не только сильные топологии в банаховом пространстве E, т. е. порожденные нормой, но и слабые топологии в пространстве E, а также слабые* топологии в сопряженном пространстве E^*.

Слабой топологией τ_w пространства E называется топология, порожденная локальной базой нуля, состоящей из множеств вида

$$V = V(N, \{\varepsilon_i\}, \{p_i\}) = \bigcap_{1\leqslant i\leqslant N} \{x \in E \,|\, |\langle p_i, x\rangle| < \varepsilon_i\},$$

где N принимает натуральные значения, p_i — произвольные элементы из E^*, числа $\varepsilon_i > 0$.

Слабой топологией* τ_w^* пространства E^* называется топология, порожденная локальной базой нуля, состоящей из множеств вида

$$V^* = V^*(N, \{\varepsilon_i\}, \{x_i\}) = \bigcap_{1\leqslant i\leqslant N} \{p \in E^* \,|\, |\langle p, x_i\rangle| < \varepsilon_i\},$$

где N принимает натуральные значения, x_i — элементы из E, числа $\varepsilon_i > 0$.

Одним из замечательных свойств слабой топологии является то, что множества, не компактные в сильной (порожденной нормой) топологии, могут оказаться компактными в слабой топологии (говорят: слабо компактными).

Теорема 1.1.6 (С. Банах, Л. Алаоглу). *Пусть V — некоторая окрестность нуля в топологическом линейном пространстве E. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ множество*

$$V_\varepsilon^* = \bigcap_{x\in V} \{p \in E^* \,|\, |\langle p, x\rangle| \leqslant \varepsilon\}$$

компактно в слабой$*$ топологии.

Одно из следствий теоремы Банаха–Алаоглу для рефлексивных банаховых пространств принимает следующий вид.

Теорема 1.1.7. *Пусть банахово пространство E рефлексивно. Тогда всякий шар $B_\varepsilon(a)$ из E компактен в слабой топологии.*

Алгебраической суммой Минковского (или просто *суммой*) *двух множеств* A и B из линейного пространства E называется множество вида (см. [154] и рис. 1)

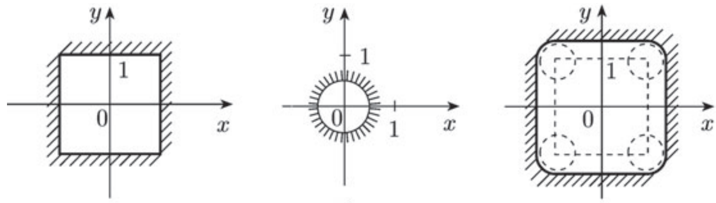
$$A + B = \{a + b \,|\, a \in A,\ b \in B\}.$$

Произведением множества A на число λ называется множество

$$\lambda A = \{\lambda a \,|\, a \in A\}.$$

Если из различных банаховых пространств E_1 и E_2 выбраны множества $A \subset E_1$ и $B \subset E_2$, то *декартовым произведением множеств* A и B называется множество вида

$$A \otimes B = \{(a; b) \in E_1 \times E_2 \,|\, a \in A,\ b \in B\}.$$



а *б* *в*

Рис. 1. *а* — $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid \max\{|x|, |y|\} \leqslant 1\}$; *б* — $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1/4\}$; *в* — $A + B$

Если же некоторое банахово пространство E представлено в виде прямой (алгебраической) суммы своих линейных подпространств E_1 и E_2 (т. е. $E = E_1 + E_2$, причем $E_1 \cap E_2 = 0$), то множество $M = A + B$, где $A \subset E_1$ и $B \subset E_2$, будем называть *прямой суммой множеств* A и B и обозначать $A \oplus B$.

Пусть даны два банахова пространства E_1 и E_2. Для линейного оператора $T\colon E_1 \to E_2$, как обычно, определяются следующие множества: множество значений $\operatorname{Im} T = \{y \in E_2 \mid \exists\, x \in E_1,\ y = Tx\}$ и ядро $\operatorname{Ker} T = \{x \in E_1 \mid Tx = 0\}$.

Для линейного ограниченного оператора $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, определенного в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, как обычно, вводится понятие сопряженного оператора T^*, удовлетворяющего равенству $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ для всех $x,\ y \in \mathcal{H}$. При этом $\mathcal{H} = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{Im}\ T^*}$.

Нам также потребуется понятие сопряженного оператора к линейному непрерывному оператору T, определенному на банаховом пространстве E_1 со значениями в банаховом пространстве E_2. Сопряженный к нему линейный оператор $T^*\colon E_2^* \to E_1^*$ определяется из равенства $\langle g, Tx\rangle = \langle T^*g, x\rangle$ для всех $x \in E_1$ и $g \in E_2^*$.

В дальнейшем нас будут интересовать различные способы отделения (или разделения) непересекающихся множеств. Хорошо известны аксиомы топологической отделимости в топологических пространствах (см. [56]). Самый простой способ равномерной топологической отделимости множеств в банаховом пространстве приведен в следующей теореме.

Теорема 1.1.8 (о топологической отделимости). *Пусть A — компакт из банахова пространства E, $B \subset E$ — замкнутое множество и $A \cap B = \varnothing$. Тогда найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что* $(A + B_\varepsilon^\circ(0)) \cap B = \varnothing$.

Доказательство. Для любого $x \in A$ из того, что $x \notin B$, в силу открытости дополнения B^c найдется $\varepsilon(x) > 0$ такое, что $B^{\circ}_{\varepsilon(x)}(x) \cap B = \varnothing$.

Пусть $\varepsilon_1(x) = \varepsilon(x)/2$. Очевидно, справедливы включения

$$A \subset \bigcup_{x \in A} B^{\circ}_{\varepsilon_1(x)}(x) \subset B^c.$$

Так как множество A является компактом, то из открытого покрытия множества A шарами $B^{\circ}_{\varepsilon_1(x)}(x)$ можно выделить конечное подпокрытие, т. е. найдутся натуральное число m и точки $\{x_i\}_{i=1}^m \subset A$ такие, что справедливо включение

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B^{\circ}_{\varepsilon_1(x_i)}(x_i).$$

Определим число $\varepsilon = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \varepsilon_1(x_i) > 0$. Выберем произвольную точку $x \in A$; для нее найдется соответствующая точка x_i такая, что $\|x - x_i\| < \varepsilon_1(x_i)$. Тогда

$$B^{\circ}_{\varepsilon}(x) \subset B^{\circ}_{\varepsilon_1(x_i)+\varepsilon}(x_i) \subset B^{\circ}_{\varepsilon(x_i)}(x_i) \subset B^c.$$

Таким образом для любого $x \in A$ справедливо соотношение $(x + B^{\circ}_{\varepsilon}(0)) \cap B = \varnothing$, что и доказывает теорему. $\square$

Отметим, что теорема 1.1.8 также справедлива в произвольном топологическим линейном пространстве (при доказательстве вместо шара $B^{\circ}_{\varepsilon}(0)$ нужно выбрать некоторую окрестность нуля).

В дальнейшем нам потребуется еще одна операция со множествами.

Определение 1.1.1. *Геометрической разностью* (иначе *разностью Минковского*) множеств A, $B \subset E$ называется множество

$$A \overset{*}{-} B = \{x \in E \mid x + B \subset A\}.$$

Например, если множество A есть шар $B_R(a) \subset \mathbb{R}^n$ и $B = B_r(b) \subset \subset \mathbb{R}^n$, $R > r$, то легко проверить, что множество $A \overset{*}{-} B$ является шаром $B_{R-r}(a-b)$, при этом справедливо равенство $(A \overset{*}{-} B) + B = A$.

Другой пример: пусть выбраны куб

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \max_{k \in \overline{1,n}} |x_k| \leqslant 2\}$$

и шар $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Тогда легко проверить, что множество $A \overset{*}{-} B$ является кубом $\dfrac{1}{2}A$, но при этом справедливо строгое включение $(A \overset{*}{-} B) + B \subset A$.

Из определений геометрической разности и алгебраической суммы множеств легко получить основные свойства этих операций.

Предложение 1.1.1. *Пусть* A, B, C — *произвольные множества из банахова пространства* E, *пусть* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Справедливы соотношения*

$$A \overset{*}{-} B = (A^c + (-B))^c = \bigcap_{b \in B} (A - b),$$

$$(A \overset{*}{-} C) + B \subset (A + B) \overset{*}{-} C, \quad A \overset{*}{-} B \subset (A + C) \overset{*}{-} (B + C), \qquad (1.1.1)$$

$$(A \overset{*}{-} B) + B \subset A \subset (A + B) \overset{*}{-} B, \qquad (1.1.2)$$

$$(A \overset{*}{-} C) + B \subset (A + B) \overset{*}{-} C, \quad (A \overset{*}{-} B) \overset{*}{-} C = A \overset{*}{-} (B + C), \qquad (1.1.3)$$

$$\lambda A + \lambda B = \lambda(A + B), \quad (\lambda A) \overset{*}{-} (\lambda B) = \lambda(A \overset{*}{-} B),$$

$$A + (B \cup C) = (A + B) \cup (A + C), \quad A \overset{*}{-} (B \cup C) = (A \overset{*}{-} B) \cap (A \overset{*}{-} C),$$

$$(B \cap C) \overset{*}{-} A = (B \overset{*}{-} A) \cap (C \overset{*}{-} A), \quad A + (B \cap C) \subset (A + B) \cap (A + C),$$

$$A \overset{*}{-} (B \cap C) \supset (A \overset{*}{-} B) \cup (A \overset{*}{-} C), \quad (B \cup C) \overset{*}{-} A \supset (B \overset{*}{-} A) \cup (C \overset{*}{-} A).$$

Если $B \subset C$, *то справедливы включения*

$$A + B \subset A + C, \quad A \overset{*}{-} B \supset A \overset{*}{-} C, \quad B \overset{*}{-} A \subset C \overset{*}{-} A.$$

Замечание 1.1.1. В частном случае, когда первое включение в формуле (1.1.2) принимает вид равенства, т. е.

$$(A \overset{*}{-} B) + B = A,$$

говорят, что множество B *полностью выметает* множество A. Этот термин объясняется тем, что для любой граничной точки $a \in \partial A$ найдется точка c такая, что сдвиг множества B на c содержится во множестве A, т. е. справедливо включение $c + B \subset A$, причем это включение таково, что $a \in (B + c)$. В этом случае геометрическая разность по существу является обратной операцией к операции суммы множеств. Данное условие полного выметания лежит в основе многих полученной нами в гл. 3, 4 результатов для сильно выпуклых множеств.

Упражнение 1.1.1. Доказать, что для произвольных множеств A и B из банахова пространства E выполнено включение $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$. Показать, что данное включение нельзя в общем случае заменить на равенство.

Упражнение 1.1.2. Пусть даны компактное множество A и замкнутое множество B в банаховом пространстве E. Доказать, что множество $A + B$ замкнуто. Доказать, что если A и B компактны, то сумма $A + B$ также компакт.

Упражнение 1.1.3. Доказать предложение 1.1.1. Показать, что приведенные в нем включения (1.1.1)–(1.1.3) могут быть строгими.

§ 1.2. Выпуклые множества

В этом параграфе будем рассматривать множества из банахова пространства E.

Определение 1.2.1. Множество $A \subset E$ называется *выпуклым*, если для любого числа $\lambda \in (0,1)$ и любых точек x_1, $x_2 \in A$ справедливо включение $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A$.

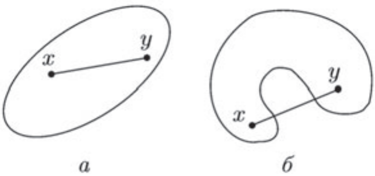


Рис. 2. Множество выпуклое (*а*), невыпуклое (*б*)

Геометрически это означает, что для любых двух точек этого множества и весь отрезок с концами в этих точках также принадлежит этому множеству (рис. 2).

По определению будем полагать, что пустое множество $\varnothing$ и множество, состоящее из одной точки, являются выпуклыми множествами.

Выпуклое множество с непустой внутренностью называют *выпуклым телом*.

Приведем некоторые примеры выпуклых множеств.

Все банахово пространство E и всякое линейное подпространство банахова пространства являются выпуклыми множествами.

Множество $H_p = \{x \in E \mid \langle p, x\rangle = \alpha\}$ при $p \in E^*$, $p \neq 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, называемое гиперплоскостью, а также множества $H_p^+ = \{x \in E \mid \langle p, x\rangle \geqslant \alpha\}$ и $H_p^- = \{x \in E \mid \langle p, x\rangle \leqslant \alpha\}$, называемые полупространствами, очевидно, являются выпуклыми множествами.

Шары $B_\varepsilon(a)$ и $B_\varepsilon^\circ(a)$ являются выпуклыми множествами, так как для любых точек x_1, $x_2 \in B_\varepsilon(a)$ при любом числе $\lambda \in (0,1)$ из неравенства треугольника получаем $\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - a\| \leqslant \lambda \|x_1 - a\| + (1-\lambda)\|x_2 - a\| \leqslant \varepsilon$, т. е. $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in B_\varepsilon(a)$.

Важным примером выпуклого множества является аффинное множество. Множество A называется *аффинным множеством*, если для любых точек x, $y \in A$ и любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливо включение $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$, т. е. прямая, проходящая через любые две точки x, $y \in A$, целиком принадлежит множеству A.

Всякое аффинное множество A может быть представлено в виде суммы некоторого линейного подпространства L и произвольной точки $a \in A$. В самом деле, возьмем произвольную точку $a \in A$ и определим множество L по формуле $L = A - a$. Ясно, что $0 \in L$. Для любых b, $c \in L$ получаем $b + a \in A$, $c + a \in A$, откуда для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем $\lambda(b+a) + (1-\lambda)(c+a) \in A$, т. е. $\lambda b + (1-\lambda)c \in L$, т. е. L есть аффинное множество. Поэтому для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ получаем

$\lambda b = \lambda b + (1-\lambda)\cdot 0 \in L$, и так как $(b+c)/2 = (1/2)b + (1-1/2)c \in \in L$, то отсюда получаем, что $c + b \in L$. Итак, показали, что $0 \in L$, для любых $b, c \in L$ и для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ следует, что $\lambda b \in L$ и $b + c \in L$. Указанные свойства множества L означают, что L есть линейное подпространство. Также легко проверить, что подпространство $L = A - a$ не зависит от выбора точки $a \in A$, а однозначно определяется аффинным множеством A.

В данном случае подпространство L называется *подпространством, параллельным* аффинному множеству A. Если подпространство L конечномерно, по размерностью аффинного множества A по определению называют размерность подпространства L.

Выпуклое множество называется *строго выпуклым*, если его граница не содержит отрезков. Так, например, шар $B_\varepsilon(a) \subset \mathbb{R}^n$ является строго выпуклым множеством, а выпуклое множество $A = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \max\limits_{k\in\overline{1,n}} |x_k| \leqslant 1\Big\}$ не является строго выпуклым.

Перейдем к изучению свойств выпуклых множеств.

Предложение 1.2.1. *Если числа $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, а множества A_i, $i \in I$, выпуклы, то и множества $\lambda A_1 + \mu A_2$, $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ также выпуклы.*

Доказательство следует из определения выпуклого множества.

Лемма 1.2.1. *Если $A \subset E$ выпукло, то и $\overline{A}$ выпукло.*

Доказательство. Утверждение следует из равенства

$$\overline{A} = \bigcap_{\varepsilon>0} (A + B_\varepsilon(0)),$$

выпуклости множеств $A + B_\varepsilon(0)$ и предложения 1.2.1. $\square$

Теорема 1.2.1. *Пусть $A \subset E$ выпукло и $\operatorname{int} A \neq \varnothing$. Тогда $\operatorname{int} A$ выпукло и всюду плотно в $\overline{A}$.*

Доказательство. Утверждение теоремы является следствием того, что для любых точек $x \in \operatorname{int} A$ и $y \in \overline{A}$ и любого числа $\lambda \in [0, 1)$ справедливо включение $(1-\lambda)x + \lambda y \in \operatorname{int} A$. Чтобы это доказать, зафиксируем точки $x \in \operatorname{int} A$, $y \in \overline{A}$ и число $\lambda \in [0, 1)$. При любом $\varepsilon > 0$ множество $(y + B_\varepsilon(0)) \cap A$ непусто, откуда

$$(1-\lambda)x + \lambda y + B_\varepsilon(0) \subset (1-\lambda)x + \lambda(A + B_\varepsilon(0)) + B_\varepsilon(0) = \\ = (1-\lambda)\Big(x + \varepsilon\,\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\,B_1(0)\Big) + \lambda A.$$

Так как $x \in \operatorname{int} A$, то для достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем $x + \varepsilon \frac{1+\lambda}{1-\lambda} B_1(0) \subset A$, т. е.

$$(1-\lambda)\Big(x + \varepsilon \frac{1+\lambda}{1-\lambda} B_1(0)\Big) + \lambda A \subset (1-\lambda)A + \lambda A = A$$

в силу предложения 1.2.1. □

Пусть задано конечное множество точек $\{x_i\}_{i=1}^m \subset E$. Говорят, что точка $x \in E$ есть *выпуклая комбинация* точек $\{x_i\}_{i=1}^m \subset E$, если

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i, \quad \text{где числа } \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Предложение 1.2.2. *Множество A выпукло тогда и только тогда, когда любая выпуклая комбинация точек из A содержится в A.*

Доказательство. Если всякая выпуклая комбинация любого конечного множества точек из данного множества принадлежит этому множеству, то очевидно, что данное множество является выпуклым. Обратное утверждение докажем по индукции. База индукции при $m = 2$, очевидно, верна по определению выпуклого множества. Пусть утверждение верно при некотором $m = k \geqslant 2$. Покажем, что оно верно и при $m = k+1$. Считая, что $\lambda_{k+1} \neq 1$, $\lambda_{k+1} \neq 0$ (иначе все очевидно), имеем

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = \lambda_{k+1} x_{k+1} + (1-\lambda_{k+1}) z, \quad \text{где} \quad z = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} x_i.$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} = 1$ и $\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$, то по предположению индукции справедливо включение $z \in A$, откуда в силу определения 1.2.1 получаем $\lambda_{k+1} x_{k+1} + (1-\lambda_{k+1}) z \in A$. □

Определение 1.2.2. *Выпуклой оболочкой множества A* называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих множество A.

Выпуклую оболочку множества A будем обозначать через $\operatorname{co} A$, а замыкание выпуклой оболочки — через $\overline{\operatorname{co}}\, A$. Понятие выпуклой оболочки впервые ввел К. Каратеодори (см. [125]).

Отметим, что в силу того, что пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством, выпуклая оболочка множества A является наименьшим по включению выпуклым множеством, содержащим множество A.

Например, пусть $\mathcal{Q}$ есть множество всех рациональных чисел, тогда оно плотно в множестве действительных чисел $\mathbb{R}$, и его выпуклая оболочка совпадает с множеством действительных чисел, т. е. $\operatorname{co}\mathcal{Q} = \mathbb{R}$.

Пусть M — линейное подпространство всех многочленов, определенных на отрезке $[0,1]$. Очевидно, справедливо включение $M \subset C[0,1]$, и множество M в силу теоремы Вейерштрасса плотно в пространстве непрерывных функций $C[0,1]$, но в то же время $\operatorname{co} M = M \neq C[0,1]$.

Теорема 1.2.2. *Выпуклая оболочка множества $A \subset E$ состоит из тех и только тех точек, которые являются выпуклой комбинацией конечного числа точек из A.*

Доказательство. Определим множество X по формуле

$$X = \left\{ z \,\middle|\, z = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,\ x_i \in A,\ \lambda_i > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Для доказательства теоремы нужно доказать равенство $\operatorname{co} A = X$. Из определения множества X (выбирая $m = 1$) получаем включение $A \subset X$. Множество X является выпуклым. В самом деле, для любых точек $x, y \in X$ найдутся точки $x_i, y_j \in A$ и положительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и $\mu_1, \ldots, \mu_k$ такие, что $x = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$ и $y = \sum\limits_{j=1}^{k} \mu_j y_j$. Отсюда для любого $\lambda \in (0,1)$ получаем

$$\lambda x + (1-\lambda) y = \sum_{i=1}^{m} \lambda\lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{k} (1-\lambda)\mu_j y_j \in X,$$

так как $\lambda\lambda_i > 0$, $(1-\lambda)\mu_j > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda\lambda_i + \sum\limits_{j=1}^{k} (1-\lambda)\mu_j = \lambda + (1-\lambda) = 1$.

Из включения $A \subset X$ и выпуклости множества X следует включение $\operatorname{co} A \subset X$.

По предложению 1.2.2 любая выпуклая комбинация элементов из $\operatorname{co} A$ лежит в $\operatorname{co} A$, поэтому любая выпуклая комбинация элементов из A лежит в $\operatorname{co} A$ и, следовательно, $X \subset \operatorname{co} A$. $\square$

Отметим следующие очевидные свойства выпуклой оболочки множества.

Предложение 1.2.3. 1. *Если $A \subset B$, то $\operatorname{co} A \subset \operatorname{co} B$.*

2. *Если множество A выпукло и числа λ, μ положительны, то справедливо равенство $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.*

3. $\operatorname{co}(A + B) = \operatorname{co} A + \operatorname{co} B$.

4. *Если множество* $A \subset E$ *открыто, то и множество* $\operatorname{co} A$ *открыто.*

5. *Если множество* $A \subset E$ *конечно, то множество* $\operatorname{co} A$ *является компактным множеством.*

Доказательство. Докажем п. 3, а остальные оставим в качестве упражнений.

Поскольку $A + B \subset \operatorname{co} A + \operatorname{co} B$, а последнее множество выпуклое, то $\operatorname{co}(A + B) \subset \operatorname{co} A + \operatorname{co} B$.

Пусть $z \in \operatorname{co} A + \operatorname{co} B$, т. е. $z = x + y$, где $x \in \operatorname{co} A$, $y \in \operatorname{co} B$. По теореме 1.2.2 $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$, $y = \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k b_k$, $\lambda_k, \mu_k > 0$, $a_k \in A$, $b_k \in B$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k = 1$. Покажем, что $z \in \operatorname{co}(A + B)$, что и завершит доказательство. Ясно, что

$$z = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \lambda_k \mu_l (a_k + b_l),$$

где $a_k + b_l \in A + B$, $\lambda_k \mu_l > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{l=1}^{m} \lambda_k \mu_l = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \sum\limits_{l=1}^{m} \mu_l = 1$. Таким образом, точка z является выпуклой комбинацией точек множества $A + B$, значит по теореме 1.2.2 $z \in \operatorname{co}(A + B)$. $\square$

Дадим еще несколько важных определений, тесно связанных с понятием выпуклости.

Пусть задано конечное множество точек $\{x_i\}_{i=1}^m \subset E$. Говорят, что точка $x \in E$ есть *аффинная комбинация* точек $\{x_i\}_{i=1}^m \subset E$, если

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \quad \text{где числа} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$

Совокупность всех аффинных комбинаций точек множества A называется *аффинной оболочкой* множества A и обозначается $\operatorname{aff} A$.

Легко понять, что аффинная оболочка множества A совпадает с пересечением всех аффинных множеств, содержащих множество A из E. Таким образом, множество $\operatorname{aff} A$ представляет собой минимальное аффинное множество, содержащее множество A.

Говорят, что точка $x \in E$ есть *линейная комбинация* точек $\{x_i\}_{i=1}^m \subset E$, если

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \quad \text{где числа} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Совокупность всех линейных комбинаций точек множества A называется *линейной оболочкой* множества A и обозначается $\operatorname{lin} A$. Очевидно, что $\operatorname{lin} A$ является линейным подпространством пространства E.

Очевидно также включение $\operatorname{co} A \subset \operatorname{aff} A \subset \operatorname{lin} A$.

Точки $\{x_i\}_{i=1}^m \subset E$ называются *аффинно независимыми*, если из равенств

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$$

следует, что $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Предложение 1.2.4. *Точки $\{x_i\}_{i=1}^m \subset E$ аффинно независимы тогда и только тогда, когда для всякого фиксированного номера k, где $1 \leqslant k \leqslant m$, векторы $x_i - x_k$, $i = 1, \ldots, m$, $i \neq k$, линейно независимы.*

Доказательство. Пусть точки $\{x_i\}_{i=1}^m$ аффинно независимы. Допустим, что при некотором номере k существуют числа λ_i, $i = 1, \ldots, m$, $i \neq k$, такие, что $\sum\limits_{i=1, i\neq k}^m \lambda_i (x_i - x_k) = 0$. Определим число λ_k так, чтобы выполнялось равенство $\sum\limits_{i=1}^m \lambda_i = 0$. Отсюда следует

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = \sum_{i=1,\, i\neq k}^m \lambda_i (x_i - x_k) + \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i\right) x_k = 0.$$

Но в силу определения аффинной независимости точек $\{x_i\}_{i=1}^m$ последнее равенство означает, что $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$, что в свою очередь означает линейную независимость векторов $\{x_i - x_k\}$.

Обратное утверждение проверяется аналогично. □

Из предложения 1.2.4 следует, что аффинная оболочка произвольного множества A является аффинным множеством, параллельным подпространству $\operatorname{lin}(A - a)$, где a — произвольная точка множества A. Точнее, имеет место равенство $\operatorname{aff} A = a + \operatorname{lin}(A - a)$ $\forall\, a \in A$.

Поэтому *размерностью выпуклого множества* $A \subset \mathbb{R}^n$ называется размерность аффинного множества $\operatorname{aff} A$, т. е. размерность подпространства $\operatorname{lin}(A - a)$, где $a \in A$ — произвольная фиксированная точка.

Определение 1.2.5. Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *относительно внутренней* точкой выпуклого множества $A \subset \mathbb{R}^n$, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $x + \operatorname{lin}(A - x) \cap B_\varepsilon(0) \subset A$, т. е. точка x содержится в A вместе с некоторым шаром, лежащим в подпространстве $\operatorname{lin}(A - x)$. Если множество A из $\mathbb{R}^n$ таково, что $\operatorname{int} A = \varnothing$, то через $\operatorname{ri} A$ будем обозначать совокупность относительно внутренних точек множества A.

Из предложения 1.2.4 также следует, что если точки $x_1, \ldots, x_m$ аффинно независимы, то всякая точка $x \in \operatorname{aff}\{x_1, \ldots, x_m\}$ может быть представлена как аффинная комбинация точек $x_1, \ldots, x_m$ единственным образом, т. е. существует единственный набор чисел $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, таких, что $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m$. Эти числа называются *барицентрическими координатами* точки x.

Выпуклая оболочка $k+1$ аффинно независимых точек $a_1, \ldots, a_{k+1}$ называется *k-мерным симплексом*, натянутым на эти точки, и обозначается через S_k, а точки $a_1, \ldots, a_{k+1}$ называются *вершинами* этого симплекса.

В силу теоремы 1.2.2 симплекс S_k представим в виде

$$S_k = \left\{ x \,\middle|\, x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i a_i,\ \lambda_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, k+1,\ \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1 \right\}. \quad (1.2.1)$$

Симплекс S_k называется *правильным*, если для его вершин $\{a_i\}_{i=1}^{k+1}$ справедливо соотношение $\|a_i - a_j\| = \mathrm{const}$ для любых номеров $i \neq j$ от 1 до $k+1$.

Предложение 1.2.5. *Пусть компакт A содержится в выпуклом открытом множестве U банахова пространства E. Тогда множество $\overline{\mathrm{co}}\, A$ также является компактом, содержащимся в U.*

Доказательство. 1. Покажем, что $\mathrm{co}\, A$ вполне ограничено, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ в нем существует конечная ε-сеть.

Пусть $\{a_k\}_{k=1}^n \subset A$ — конечная ε-сеть компакта A, т. е. $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_\varepsilon^\circ(a_k)$. Обозначим $B = \{a_k\}_{k=1}^n$.

Рассмотрим произвольную точку $x \in \mathrm{co}\, A$. Найдутся точки $x_m \in A$ и положительные числа λ_m, где $1 \leqslant m \leqslant l$, такие, что $x = \sum\limits_{m=1}^{l} \lambda_m x_m$ и $\sum\limits_{m=1}^{l} \lambda_m = 1$. Для каждого m, $1 \leqslant m \leqslant l$, через $k(m)$ обозначим такой номер, что $1 \leqslant k(m) \leqslant n$ и $\|x_m - a_{k(m)}\| < \varepsilon$.

Определим $z = \sum\limits_{m=1}^{l} \lambda_m a_{k(m)}$. Тогда

$$\|z - x\| \leqslant \sum_{m=1}^{l} \lambda_m \|a_{k(m)} - x_m\| < \varepsilon.$$

Определим множество

$$S_{n-1} = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \,\middle|\, \lambda_m \geqslant 0,\ \sum_{m=1}^{n} \lambda_m = 1 \right\}.$$

Очевидно, это $(n-1)$-мерный симплекс в $\mathbb{R}^n$ с вершинами в стандартных базисных точках $e_1, \ldots, e_n$. Очевидно, что симплекс S_{n-1} является компактом.

Рассмотрим функцию $f(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$. Эта функция f, очевидно, непрерывна на S_{n-1}, в силу чего ее образ компакта S_{n-1}, равный $\operatorname{co} B$, также будет компактом в E. Поэтому существует конечная ε-сеть $\{z_k\}_{k=1}^N$ компакта $\operatorname{co} B$. Следовательно, для точки z найдется номер k_0, $1 \leqslant k_0 \leqslant N$, такой, что $\|z - z_{k_0}\| < \varepsilon$.

В итоге для любого $x \in \operatorname{co} A$ нашли номер k_0, $1 \leqslant k_0 \leqslant N$, такой, что $\|x - z_{k_0}\| < 2\varepsilon$. Поскольку $\operatorname{co} B \subset \operatorname{co} A$, то множество $\{z_k\}_{k=1}^N$ является 2ε-сетью для $\operatorname{co} A$. Таким образом, множество $\operatorname{co} A$ является вполне ограниченным, и поэтому множество $\overline{\operatorname{co}}\, A$ является компактом.

2. Покажем, что $\overline{\operatorname{co}}\, A \subset U$. По теореме 1.1.8 из условия $A \cap U^c = \varnothing$ следует, что существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $A + B^\circ_\varepsilon(0) \subset U$.

В силу предложения 1.2.3 получаем

$$\overline{\operatorname{co}}\, A \subset \operatorname{co} A + B^\circ_\varepsilon(0) = \operatorname{co}\,(A + B^\circ_\varepsilon(0)) \subset U. \ \square$$

Приведем одно интересное свойство суперпозиции операций суммы и геометрической разности множеств.

Предложение 1.2.6. *Пусть даны произвольные выпуклые множества* M, A, $B \subset E$ *и числа* $\alpha > 0$, $\beta > 0$. *Тогда справедливо равенство*

$$(((M + \alpha A) \overset{*}{-} \alpha B) + \beta A) \overset{*}{-} \beta B = (M + (\alpha + \beta)A) \overset{*}{-} (\alpha + \beta)B.$$

Доказательство. В силу включения (1.1.1) и равенства (1.1.3) получаем включения

$$(((M + \alpha A) \overset{*}{-} \alpha B) + \beta A) \overset{*}{-} \beta B \subset$$
$$\subset ((M + (\alpha + \beta)A) \overset{*}{-} \alpha B) \overset{*}{-} \beta B = (M + (\alpha + \beta)A) \overset{*}{-} (\alpha + \beta)B.$$

В силу свойства 2 предложения 1.2.3 представим выпуклое множество M в виде

$$M = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\, M + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\, M,$$

и, применяя включение (1.1.3) (дважды) и предложение 1.2.3, получаем

$$(((M + \alpha A) \overset{*}{-} \alpha B) + \beta A) \overset{*}{-} \beta B \supset$$
$$\supset \left(\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\, M + \alpha A\right) \overset{*}{-} \alpha B + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\, M + \beta A\right) \overset{*}{-} \beta B \supset$$
$$\supset \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\, M + \alpha A\right) \overset{*}{-} \alpha B + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\, M + \beta A\right) \overset{*}{-} \beta B =$$

$$= \alpha\left[\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\,M + A\right) \stackrel{*}{-} B\right] + \beta\left[\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\,M + A\right) \stackrel{*}{-} B\right] =$$

$$= (\alpha+\beta)\left[\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\,M + A\right) \stackrel{*}{-} B\right] = (M + (\alpha+\beta)A) \stackrel{*}{-} (\alpha+\beta)B. \square$$

Упражнение 1.2.1. Пусть $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_2 = 0\} \cup \{(-1, 1), (1, 1)\}$. Найти $\operatorname{co} A$.

Упражнение 1.2.2. Показать, что при отсутствии выпуклости множества A утверждение п. 2 из предложения 1.2.3 неверно. Показать, что, если множество A выпукло и $\lambda\mu < 0$, то может быть неравенство $(\lambda + \mu)A \neq \lambda A + \mu A$.

Упражнение 1.2.3. Привести пример невыпуклого множества A, но такого, что для любых $x_1, x_2 \in A$ справедливо включение $\frac{x_1 + x_2}{2} \in A$. Показать, что, если A дополнительно замкнуто, то множество A выпуклое.

Упражнение 1.2.4. Показать, что замкнутость множества A не гарантирует замкнутости множества $\operatorname{co} A$ даже на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Упражнение 1.2.5. Пусть S_n есть n-мерный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что $\operatorname{int} S_n \neq \varnothing$.

Упражнение 1.2.6. Доказать, что размерность выпуклого множества A из $\mathbb{R}^n$ совпадает с максимальной размерностью симплексов, содержащихся в A.

Упражнение 1.2.7. Точка $x \in A$ называется *C-внутренней* точкой множества $A \subset E$, если

$$\forall\, y \in E \quad \exists\, \lambda > 0 \quad \forall\, \mu \in (0, \lambda) \quad x + \mu y \in A.$$

Показать, что, если для выпуклого множества A в банаховом пространстве E выполнено условие $\operatorname{int} A \neq \varnothing$, то внутренние и C-внутренние точки множества A совпадают.

Упражнение 1.2.8. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ обладает свойством

$$\forall\, x \in A, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n \quad \exists\, \lambda > 0 \quad \forall\, \mu \in (0, \lambda) \quad x + \mu y \in A,$$

т. е. каждая точка множества A является C-внутренней. Показать, что A не обязательно должно быть открытым. Показать, что в случае, когда множество A еще и выпукло, оно открыто.

Упражнение 1.2.9. Пусть E есть банахово пространство. Пусть замкнутое множество $A \subset E$ имеет пустую внутренность. Доказать, что любая точка $a \in A$ не является С-внутренней точкой множества A.

Указание. Воспользоваться теоремой Бэра о категориях.

Упражнение 1.2.10. Пусть $\overline{\text{co}}\, A$ — компакт. Доказать, что $\overline{\text{co}}\,(A+B) = \overline{\text{co}}\, A + \overline{\text{co}}\, B$.

Указание. Воспользоваться предложением 1.2.3 и результатами упражнения 1.1.1.

Упражнение 1.2.11. Пусть $A \subset E$ — выпуклое множество, причем $\operatorname{int} A \neq \varnothing$. Тогда $z \in \operatorname{int} A$ тогда и только тогда, когда $\forall\, x \in A$ $\exists\, \mu > 1$: $(1-\mu)x + \mu z \in A$.

Упражнение 1.2.12 (о ядре звездности) Пусть в замкнутом и ограниченном множестве из $\mathbb{R}^n$ существует по меньшей мере одна точка такая, что любая проходящая через нее прямая имеет с данным множеством единственный общий отрезок. Доказать, что все точки, обладающие этим свойством, образуют выпуклое тело.

Упражнение 1.2.13. Пусть даны выпуклое ограниченное тело $A \subset \mathbb{R}^n$, вектор $q \in \mathbb{R}^n$, $q \neq 0$, и гиперплоскость $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle q, x\rangle = 0\}$. Каждая прямая $l_a = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = a + \lambda q\}$, где $a \in H$, пересекающая множество A, дает в пересечении отрезок $[b_a, c_a] = l_a \cap A$, причем $b_a = a + \lambda_1 q$, $c_a = a + \lambda_2 q$ и $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$. Выбирая по всем таким прямым l_a вместо отрезка $[b_a, c_a]$ отрезок $\left[a + \dfrac{b_a - c_a}{2},\, a + \dfrac{c_a - b_a}{2}\right]$, получаем в совокупности множество $\widetilde{A}$, симметричное относительно гиперплоскости H. (В этом случае говорят, что множество $\widetilde{A}$ получено из множества A *штейнеровской симметризацией* (см. [18, 170]).

Доказать, что множество $\widetilde{A}$ является выпуклым телом.

§ 1.3. Метрика Хаусдорфа

Нам потребуется превратить совокупности подмножеств из банахова пространства E в метрические пространства, определив для них некоторые понятия расстояния. Прежде всего дадим определение расстояния между множествами по Хаусдорфу.

Определение 1.3.1. Для ограниченных замкнутых множеств $A, B \subset E$ *расстояние по Хаусдорфу* (иначе говорят: *хаусдорфово расстояние*) между этими множествами A и B определяется по формуле

$$h(A,B) = \inf\{r > 0 \mid A \subset B + B_r(0),\ B \subset A + B_r(0)\}. \tag{1.3.1}$$

Обозначим через $\varrho(x, A) = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}$ расстояние от точки x до множества A.

Предложение 1.3.1. *Справедливы оценки и формулы*:

а) $|\varrho(x, A) - \varrho(y, A)| \leqslant \|x - y\| \quad \forall\, x,\, y \in E$;

б) $|\varrho(x, A) - \varrho(x, B)| \leqslant h(A, B)$;

в) $$h(A, B) = \max\left\{\sup_{x \in A} \varrho(x, B),\ \sup_{x \in B} \varrho(x, A)\right\}. \tag{1.3.2}$$

Замечание 1.3.1. Равенство (1.3.2) может быть взято за определение расстояния между множествами из метрического пространства, где $\varrho(x, A) = \inf\limits_{a \in A} \varrho(x, a)$, а $\varrho(x, a)$ — метрика исходного пространства.

Уточним, для каких множеств определенная выше функция удовлетворяет аксиомам метрики.

Теорема 1.3.1. *На множестве замкнутых ограниченных подмножеств из банахова пространства E определенная выше функция* (1.3.1) *удовлетворяет аксиомам расстояния, т. е. является метрикой. В частности, множество всех компактных подмножеств банахова пространства E с хаусдорфовой метрикой* (1.3.1) *образуют метрическое пространство.*

Доказательство. Пусть A, B, C — произвольные замкнутые множества из E. Свойство $h(A, B) = h(B, A)$ с очевидностью следует из определения 1.3.1.

Докажем справедливость неравенства треугольника

$$h(A, B) \leqslant h(A, C) + h(C, B).$$

Пусть $r = h(A, B)$, $r_1 = h(A, C)$, $r_2 = h(C, B)$. Это значит, что $A \subset C + B_{\varrho_1}(0)$ для любого $\varrho_1 > r_1$, $C \subset B + B_{\varrho_2}(0)$ для любого $\varrho_2 > r_2$, откуда получаем $A \subset B + B_{\varrho_1 + \varrho_2}(0)$. Аналогично получаем включение с перестановкой A и B. В силу определения 1.3.1 отсюда следует, что $r \leqslant r_1 + r_2$.

Ясно, что $h(A, B) \geqslant 0$. Из равенства $h(A, B) = 0$ следует $A = B$. Действительно, если предположить, что существует точка $x \in A \backslash B$, то по теореме 1.1.8 найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(x) \cap B = \varnothing$. Отсюда $h(A, B) \geqslant \varepsilon$. $\square$

Лемма 1.3.1. *Для компактных множеств A и B из E эквивалентны условия*:

1) $h(A, B) \leqslant r$;

2) $\forall\, a \in A\ \exists\, b_a \in B\colon \|a - b_a\| \leqslant r; \quad \forall\, b \in B\ \exists\, a_b \in A\colon \|b - a_b\| \leqslant r.$

Доказательство. Из условия 1) следует, что $A \subset \overline{B + B_r(0)} = B + B_r(0)$ (в силу компактности множества B множество $B + B_r(0)$ замкнуто), поэтому для любой точки $a \in A$ получаем неравенство $\varrho(a, B) \leqslant r$, откуда и в силу компактности множества B существует такая точка $b_a \in B$, что $\|a - b_a\|| \leqslant r$.

Из условия 2) для каждой точки $a \in A$ найдется точка $b_a \in B$ такая, что $a \in b_a + B_r(0)$, т. е. $A \subset \bigcup\limits_{a\in A} (b_a + B_r(0)) \subset B + B_r(0)$. Аналогично, справедливо включение $B \subset A + B_r(0)$, откуда в итоге получаем, что $h(A, B) \leqslant r$. $\square$

Предложение 1.3.2. *Пусть A, B, C, D — замкнутые множества из банахова пространства E_1, $T\colon E_1 \to E_2$ — непрерывный линейный оператор, α, $\beta \in \mathbb{R}$. Пусть $\|A\| = \sup\{\|a\| \mid a \in A\}$. Справедливы неравенства*

$$h(A + B,\, C + D) \leqslant h(A, C) + h(B, D), \quad h(\alpha A, \alpha B) \leqslant |\alpha| h(A, B),$$
$$h(\alpha A, \beta A) \leqslant |\alpha - \beta| \|A\|, \quad h(TA, TB) \leqslant \|T\| h(A, B),$$
$$h(\operatorname{co} A, \operatorname{co} B) \leqslant h(A, B), \quad h(\overline{\operatorname{co}}\, A, \overline{\operatorname{co}}\, B) \leqslant h(A, B).$$

Обозначим через $\mathcal{K}(E)$ метрическое пространство компактов из E с метрикой Хаусдорфа h, а через $\operatorname{co}\mathcal{K}(E)$ — метрическое пространство выпуклых компактов из E с метрикой Хаусдорфа.

Теорема 1.3.2. *Метричекое пространство $\mathcal{K}(E)$ полно.*

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность компактов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{K}(E)$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N\colon h(A_n, A_m) < \varepsilon. \tag{1.3.3}$$

Требуется показать, что существует компакт $A \in \mathcal{K}(E)$ такой, что $h(A_n, A) \to 0$ при $n \to \infty$.

Выделим подпоследовательность $\{A_{n_k}\}$ из условия

$$h(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) \leqslant 1/2^{k+1} \quad \forall k = 1, 2, \ldots \tag{1.3.4}$$

Определим множество

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(A_{n_k} + \frac{1}{2^k} B_1(0) \right).$$

Покажем, что $A \neq \varnothing$. В силу условия (1.3.4) и леммы (1.3.1) для всякой начальной точки $x_{n_1} \in A_{n_1}$ можно выбрать последовательность точек $x_{n_k} \in A_{n_k}$ так, что $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| \leqslant 1/2^{k+1}$ для всех k. Тогда для любых $k \in \mathbb{N}$ и $m > k$ имеем

$$\|x_{n_m} - x_{n_k}\| \leqslant \sum_{l=k}^{m-1} \|x_{n_l} - x_{n_{l+1}}\| \leqslant \sum_{l=k}^{m-1} \frac{1}{2^{l+1}} \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

Итак, последовательность x_{n_k} фундаментальна и в силу полноты E существует ее предел $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Кроме того, $\|x_{n_k} - x\| \leqslant 1/2^k$ для всех k. Из включений

$$x \in x_{n_k} + \frac{1}{2^k}\, B_1(0) \subset A_{n_k} + \frac{1}{2^k}\, B_1(0) \quad \forall k$$

следует $x \in A$. Поэтому множество A непусто. Покажем, что A и есть искомый предел.

В силу фундаментальности (1.3.3) последовательности $\{A_n\}$ для любого $\varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall k, n > N$ справедливо неравенство $h(A_{n_k}, A_n) < \varepsilon$. Поэтому в силу неравенства треугольника $h(A_n, A) \leqslant h(A_{n_k}, A_n) + h(A_{n_k}, A)$ осталось показать, что $h(A_{n_k}, A) \to 0$ при $k \to \infty$.

В силу определения множества A имеем

$$A \subset A_{n_k} + \frac{1}{2^k}\, B_1(0) \quad \forall k. \tag{1.3.5}$$

Зафиксируем номер $k \in \mathbb{N}$. Выберем произвольную точку $y \in A_{n_k}$. Аналогично тому, как это было сделано выше, выберем новую последовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ такую, что $x_{n_k} = y$, $x_{n_m} \in A_{n_m}$ и $\|x_{n_m} - x_{n_{m+1}}\| \leqslant 1/2^{m+1}$ для любого $m \geqslant k$.

Получаем, что последовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальна, т. е. существует точка x такая, что $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = x$. При этом $\|y - x\| \leqslant 1/2^k$. Для любых $m \geqslant k$ имеем $x \in A_{n_m} + (1/2^m)B_1(0)$. При $m = 1, \ldots, k-1$ в силу выбора последовательности A_{n_m} получаем

$$x \in A_{n_k} + \frac{1}{2^k}\, B_1(0) \subset A_{n_{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}}\, B_1(0) \subset \ldots \subset A_{n_m} + \frac{1}{2^m}\, B_1(0),$$

т. е. $x \in A$. Поскольку точка y из A_{n_k} выбиралась произвольно, то получаем включение

$$A_{n_k} \subset A + \frac{1}{2^k}\, B_1(0). \tag{1.3.6}$$

Из включений (1.3.5) и (1.3.6) следует, что $h(A_{n_k}, A) \leqslant 1/2^k$ для всех натуральных k. $\square$

Для множества $A \subset E$ через $\mathcal{K}(A)$ ($\operatorname{co}\mathcal{K}(A)$) будем обозначать множество всех компактов (выпуклых компактов) из A. Справедлива следующая теорема о компактности, называемая *теоремой выбора Бляшке* (см. [17]).

Теорема 1.3.3 (В. Бляшке). *Пусть $A \subset E$ — компакт. Тогда метрическое пространство $\mathcal{K}(A)$ компактно, т. е. из любой последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{K}(A)$ можно выделить сходящуюся в метрике Хаусдорфа подпоследовательность.*

Доказательство. Для каждого числа $l \in \mathbb{N}$ определим число $\varepsilon_l = 1/(2l)$, и пусть множество $\{a_i\}_{i=1}^{m_l}$ задает ε_l-сеть компакта A.

Тогда из включения
$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m_l} (a_i + \varepsilon_l B_1^\circ(0))$$
для любого натурального числа n получаем включение
$$A_n \subset \bigcup_{k \in J_n} (a_k + \varepsilon_l B_1^\circ(0)),$$
где множество индексов $J_n \subset \{1, 2, \ldots, m_l\}$ таково, что для любых $k \in \in J_n$ и только для таких натуральных k имеем
$$(a_k + \varepsilon_l B_1^\circ(0)) \cap A_n \neq \varnothing.$$
Выберем $y_{nk} \in (a_k + \varepsilon_l B_1^\circ(0)) \cap A_n$. В силу неравенства треугольника для нормы получаем, что $a_k + \varepsilon_l B_1^\circ(0) \subset y_{nk} + 2\varepsilon_l B_1^\circ(0)$, т. е.
$$A_n \subset \bigcup_{k \in J_n} (y_{nk} + 2\varepsilon_l B_1^\circ(0)).$$
Таким образом, для любого натурального числа n во множестве A_n можно выбрать $2\varepsilon_l$-сеть с числом точек, равным m_l, т. е. не зависящим от числа n.

Воспользовавшись этим, для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ во множестве A_n выберем плотное подмножество $\{x_{nk}\}_{k=1}^\infty$ таким образом, что первые точки $\{x_{nk}\}_{k=1}^{m_1}$ образуют $2\varepsilon_1$-сеть множества A_n, следующие точки $\{x_{nk}\}_{k=m_1+1}^{m_1+m_2}$ образуют $2\varepsilon_2$-сеть множества A_n и, далее, множество $\{x_{nk}\}_{k=m_1+\ldots+m_l+1}^{m_1+\ldots+m_{l+1}}$ образует $2\varepsilon_{l+1}$-сеть множества A_n. Отметим, что каждый номер $K_l = \sum\limits_{i=1}^{l} m_i$ не зависит от номера n и каждое множество $\{x_{nk}\}_{k=1}^{K_l}$ образует $2\varepsilon_l$-сеть во множестве A_n.

Последовательность $\{x_{n1}\}_{n=1}^\infty$ содержит (в силу компактности A) сходящуюся к некоторой точке $z_1 \in A$ подпоследовательность с номерами $I_1 \subset \mathbb{N}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty\ n \in I_1} x_{n1} = z_1$.

Последовательность $\{x_{n2}\}_{n \in I_1}$ содержит сходящуюся к некоторой точке $z_2 \in A$ подпоследовательность с номерами $I_2 \subset I_1$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty\ n \in I_2} x_{n2} = z_2$, причем $\min I_1 < \min I_2$.

Продолжая канторов диагональный процесс, получаем вложенную последовательность бесконечных подмножеств натуральных чисел $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, $I_k \supset I_{k+1}$, $\min I_k < \min I_{k+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty\ n\in I_k} x_{nk} = z_k$ для всех k.

Сформируем счетное множество индексов I из первых элементов множеств I_k. По построению для каждого $k \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{n\to\infty,\ n\in I} x_{nk} = z_k$.

Определим $A_0 = \overline{\{z_k\}_{k=1}^{\infty}}$. Так как множество A есть компакт, а множество A_0 замкнуто и содержится в A, то A_0 — также компакт. Покажем, что A_0 является пределом в метрике Хаусдорфа последовательности $\{A_n\}_{n\in I}$, т. е. удовлетворяет условию $\lim\limits_{n\to\infty\ n\in I} h(A_n, A_0) = 0$, что и завершит доказательство.

Фиксируем $l \in \mathbb{N}$ $\big($и тем самым фиксируем $\varepsilon_l = 1/(2l)\big)$.

В силу компактности множества A_0 существует его конечная ε_l-сеть $\{z_{k_j}\}_{j=1}^{m_0}$, т. е. справедливо включение

$$A_0 \subset \bigcup_{j=1}^{m_0} (z_{k_j} + \varepsilon_l B_1^\circ(0)).$$

Выберем произвольно точку $x_0 \in A_0$. Пусть $j_0 \in \overline{1, m_0}$ таков, что $x_0 \in z_{k_{j_0}} + \varepsilon_l B_1^\circ(0)$. В силу конечности множества точек $\{z_{k_j}\}$, где $1 \leqslant j \leqslant m_0$, и из того, что каждая из них является предельной точкой своей последовательности, найдется общий номер N_1 такой, что $x_{nk_j} \in z_{k_j} + \varepsilon_l B_1^\circ(0)$ для всех $j \in \overline{1, m_0}$ и всех $n \in I$ таких, что $n > N_1$, откуда получаем

$$x_0 \in z_{k_{j_0}} + \varepsilon_l B_1^\circ(0) \subset x_{nk_{j_0}} + 2\varepsilon_l B_1^\circ(0) \subset A_n + 2\varepsilon_l B_1^\circ(0).$$

В силу произвольности выбора точки $x_0 \in A_0$ отсюда следует включение

$$A_0 \subset A_n + 2\varepsilon_l B_1^\circ(0) \quad \forall\, n > N_1, \quad n \in I. \tag{1.3.7}$$

С другой стороны, из определения точек z_k для всех $k \in \overline{1, K_l}$ существует общий номер N_2 такой, что

$$\forall\, n > N_2, \quad n \in I, \quad x_{nk} \in z_k + \varepsilon_l B_1^\circ(0).$$

Так как по построению множество $\{x_{nk}\}_{k=1}^{K_l}$ есть $2\varepsilon_l$-сеть множества A_n, то при всех $n > N_2$, $n \in I$, для любого $x_n \in A_n$ найдется номер $k_n \in \overline{1, K_l}$ такой, что

$$x_n \in x_{nk_n} + 2\varepsilon_l B_1^\circ(0) \subset z_{k_n} + 3\varepsilon_l B_1^\circ(0),$$

следовательно,

$$A_n \subset A_0 + 3\varepsilon_l B_1^\circ(0) \quad \forall\, n > N_2, \quad n \in I. \tag{1.3.8}$$

Из (1.8.1) и (1.8.2) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty\ n\in I} h(A_n, A_0) = 0$. $\square$

Лемма 1.3.2. *Если последовательность выпуклых замкнутых множеств $\{A_n\}$ сходится в метрике Хаусдорфа к некоторому замкнутому множеству A, то множество A будет выпуклым.*

Доказательство. Зафиксируем точки $x, y \in A$ и число $\lambda \in (0, 1)$. Покажем, что точка $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ принадлежит множеству A.

В силу сходимости числовой последовательности $\{h(A_n, A)\}$ к 0 и в силу леммы 1.3.1 можно найти последовательности точек $x_n \in A_n$ и $y_n \in A_n$ такие, что $x_n \to x$ и $y_n \to y$ при $n \to \infty$. Но тогда в силу выпуклости A_n точка $z_n = \lambda x_n + (1 - \lambda)y_n$ принадлежит A_n, а $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. Следовательно, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $N(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > N(\varepsilon)$ справедливы включения

$$z \in z_n + B_\varepsilon(0) \subset A_n + B_\varepsilon(0) \subset A + B_{2\varepsilon}(0),$$

откуда в силу замкнутости множества A получаем, что $z \in A$. $\square$

Отметим, что лемма 1.3.2 верна и в случае, когда множества A_n только выпуклы (но не замкнуты).

Следствие 1.3.1. *Лемма* 1.3.2 *показывает, что в теоремах* 1.2.3 *и* 1.3.3 *метрические пространства* $\mathcal{K}(E)$ *и* $\mathcal{K}(A)$ *могут быть заменены на метрические пространства* $\operatorname{co}\mathcal{K}(E)$ *и* $\operatorname{co}\mathcal{K}(A)$ (*где* A — *выпуклый компакт*). *В этом случае пространство* $\operatorname{co}\mathcal{K}(E)$ *является полным, а пространство* $\operatorname{co}\mathcal{K}(A)$ *компактным.*

Отметим также, что доказательства теорем 1.3.2 *и* 1.3.3 *легко обобщаются со случая банахова пространства на случай, когда пространство* E *является всего лишь полным метрическим пространством.*

Замечание 1.3.2. Отметим, что без условия компактности множества A теорема 1.3.3 неверна. Например, если пространство $E = l_2$, $A = B_1(0) = \left\{x \in l_2 \,\middle|\, \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 \leqslant 1\right\}$, а отрезок $A_n = [0, e_n] \subset A$, где $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ — стандартный базисный вектор в пространстве l_2, то последовательность отрезков $\{A_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности (так как последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет сходящейся подпоследовательности).

Упражнение 1.3.1. Доказать предложение 1.3.1.

Упражнение 1.3.2. Доказать предложение 1.3.2.

Упражнение 1.3.3. Пусть даны компакты $A, B \subset E$, причем $B \subset A$. Определим через $\mathcal{K}(A, B)$ пространство компактных подмножеств X таких, что $B \subset X \subset A$, с метрикой Хаусдорфа. Доказать, что пространство $\mathcal{K}(A, B)$ является компактным.

Упражнение 1.3.4. Для любых множеств A, $B \subset E$ определим функцию $h_1(A, B) = \sup\limits_{x\in A} \varrho(x, B) + \sup\limits_{x\in B} \varrho(x, A)$. Показать, что функция h_1 является метрикой, топологически эквивалентной h, в частности, что теоремы 1.3.2 и 1.3.3 справедливы при замене h на h_1.

§ 1.4. Касательные конусы

Определение 1.4.1. В линейном пространстве E *конусом* называется всякое непустое множество $K \subset E$, у которого для каждого элемента $x \in K$ справедливо включение $\lambda x \in K$ при всех $\lambda \geqslant 0$.

В частности, если конус K является выпуклым множеством, то его называют *выпуклым конусом*, причем в этом случае для любых точек x, $y \in K$ и чисел $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ справедливо включение $\lambda x + \mu y \in K$, т. е. справедливы равенства $K + K = K$ и $K \overset{*}{-} K = K$ (последнее равенство докажем в лемме 1.4.4).

Далее в этом параграфе считаем, что мы рассматриваем множества в банаховом пространстве E.

Простейший пример выпуклого конуса, связанного с множеством A, дает *коническая оболочка множества* A, т. е. множество вида

$$\operatorname{cone} A = \left\{ x \in E \,\middle|\, x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \geqslant 0,\ x_i \in A,\ m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Замыкание конической оболочки множества A, как обычно, будем обозначать чертой сверху, т. е. в виде $\overline{\operatorname{cone}} A$.

Лемма 1.4.1. *Коническая оболочка множества A удовлетворяет равенству*

$$\operatorname{cone} A = \bigcup_{\mu \geqslant 0} (\mu \operatorname{co} A).$$

Доказательство. Из определений конической и выпуклой оболочек сразу следует включение

$$\mu \operatorname{co} A \subset \operatorname{cone} A \quad \forall \mu \geqslant 0.$$

Пусть теперь $x \in \operatorname{cone} A$. По определению это значит, что существуют число $m \in \mathbb{N}$, числа $\lambda_i \geqslant 0$ и точки $x_i \in A$, где $i \in \overline{1, m}$, такие, что $x = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$. Определим число $\mu_0 = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i$. Если $\mu_0 = 0$, то $x = 0$, т. е. $x \in \bigcup\limits_{\mu \geqslant 0} (\mu \operatorname{co} A)$.

Пусть $\mu_0 > 0$. Определим числа $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{\mu_0}$ и точку $y = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i x_i$. Очевидно, что все $\mu_i \geqslant 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i = 1$, откуда получаем, что $y \in \operatorname{co} A$. Кроме того, имеем, что $x = \mu_0 y$, т. е. $x \in \bigcup\limits_{\mu \geqslant 0} (\mu \operatorname{co} A)$. $\square$

Отметим следующее простое свойство конической оболочки.

Лемма 1.4.2. *Пусть выпуклые множества $A_k \subset E$, где $k \in \overline{1, m}$, таковы, что $0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{m} A_k$. Тогда справедливо равенство*

$$\bigcap_{k=1}^{m} \operatorname{cone} A_k = \operatorname{cone} \left(\bigcap_{k=1}^{m} A_k \right). \tag{1.4.1}$$

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{cone} \left(\bigcap\limits_{k=1}^{m} A_k \right)$; тогда по лемме 1.4.1 существуют число $\mu \geqslant 0$ и точка $y \in \bigcap\limits_{k=1}^{m} A_k$ такие, что $x = \mu y$. Так как для любого k имеем $y \in A_k$, то отсюда и $x \in \operatorname{cone} A_k$, т. е. $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{m} \operatorname{cone} A_k$.

Пусть теперь $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{m} \operatorname{cone} A_k$. Это значит, что существуют числа $\mu_k > 0$ и точки $y_k \in A_k$ такие, что $x = \mu_k y_k$ при всех $k \in \overline{1, m}$, т. е. $\dfrac{1}{\mu_k} x \in A_k$. Определим число $\mu_0 = \max\limits_{k \in \overline{1,m}} \mu_k$. Тогда в силу выпуклости множества A_k для любого числа $\lambda \in [0, 1)$ имеем $\dfrac{\lambda}{\mu_k} x = (1 - \lambda) 0 + \lambda \dfrac{1}{\mu_k} x \in A_k$. Выбирая $\lambda = \frac{\mu_k}{\mu_0} \in [0, 1)$, получаем включение $\dfrac{1}{\mu_0} x \in A_k$. В итоге $\dfrac{1}{\mu_0} x \in \bigcap\limits_{k=1}^{m} A_k$, т. е. $x \in \operatorname{cone} \left(\bigcap\limits_{k=1}^{m} A_k \right)$. $\square$

Отметим еще одно очевидное свойство выпуклых конусов.

Лемма 1.4.3. *Пусть K_1, K_2 — выпуклые конусы из линейного пространства E. Тогда справедливо равенство*

$$K_1 + K_2 = \operatorname{co} (K_1 \cup K_2).$$

Доказательство очевидно.

Напомним, что в банаховом пространстве E расстояние от точки $x \in E$ до множества $A \subset E$ мы определили по формуле $\varrho(x, A) = \inf \{ \|x - y\| \mid y \in A \}$.

Большой интерес к конусам связан с понятием касательного конуса, т. е. конуса, образованного из касательных векторов (см. [154]).

Вектор $v \in E$ называется *касательным* ко множеству $A \subset E$ в точке $a \in \overline{A}$, если существуют число $\varepsilon > 0$ и отображение $r\colon [0, \varepsilon] \to E$ такие, что справедливо включение $a + \lambda v + r(\lambda) \in A$ при всех $\lambda \in (0, \varepsilon]$, причем $\lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{\|r(\lambda)\|}{\lambda} = 0$.

Нетрудно проверить, что совокупность всех касательных векторов к множеству A в некоторой точке a совпадает со следующим конусом.

Определение 1.4.2. *Нижним касательным конусом* ко множеству $A \subset E$ в точке $a \in \overline{A}$ называется множество вида

$$T_{\text{н}}(A; a) = \{v \in E \mid \lim_{\lambda \to +0} \varrho(v,\ \lambda^{-1}(A - a)) = 0\}. \tag{1.4.2}$$

Приведенное определение нижнего касательного конуса можно переписать в более естественном виде.

Предложение 1.4.1. *Вектор v принадлежит конусу $T_{\text{н}}(A; a)$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности положительных чисел $\{\lambda_k\}$, сходящейся к нулю, найдется последовательность точек $\{v_k\}$, сходящаяся к точке v и такая, что справедливо включение*

$$a + \lambda_k v_k \in A \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство следует из определения.

В случае, когда множество A является выпуклым множеством, легко показать, что для точки $a \in \overline{A}$ конус $T_{\text{н}}(A; a)$ является выпуклым замкнутым множеством, и справедливо равенство (доказательство которого будет содержаться далее в доказательстве предложения 1.4.6)

$$T_{\text{н}}(A; a) = \overline{\operatorname{cone}}(A - a).$$

Для выпуклых множеств A_1 и A_2 таких, что $a \in A_1 \subset A_2$, очевидно, справедливо включение $T_{\text{н}}(A_1; a) \subset T_{\text{н}}(A_2; a)$.

Таким образом, для выпуклых множеств понятие касательного конуса определяется достаточно просто и однозначно.

В случае, когда множество A не является выпуклым, для него кроме понятий конической оболочки множества $A - a$ и нижнего касательного конуса $T_{\text{н}}(A; a)$ известны другие понятия конусов, также называемых касательными.

Определение 1.4.3. *Верхним касательным конусом* (иначе *контингентным конусом* (см. [113])) ко множеству $A \subset E$ в точке $a \in \overline{A}$ называется множество вида

$$T_{\text{в}}(A; a) = \{v \in E \mid \liminf_{\lambda \to +0} \varrho(v,\ \lambda^{-1}(A - a)) = 0\}. \tag{1.4.3}$$

Понятие контингентного конуса введено Булиганом (G. Bouligand) в 30-е годы 20-го столетия в [123]. Наличие в определении 1.4.3 нижнего предела влечет справедливость следующего предложения.

Предложение 1.4.2. *Вектор v принадлежит конусу $T_{\text{в}}(A;a)$ тогда и только тогда, когда существуют последовательность положительных чисел $\{\lambda_k\}$, сходящаяся к нулю, и последовательность точек $\{v_k\} \subset E$, сходящаяся к точке v, такие, что справедливо включение*

$$a + \lambda_k v_k \in A \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Определение 1.4.4. *Касательным конусом Кларка* (см. [53]) ко множеству $A \subset E$ в точке $a \in \overline{A}$ называется множество вида

$$T_C(A;a) = \{v \in E \mid \lim_{\lambda \to +0,\, x \to a} \varrho(v,\, \lambda^{-1}(A - x)) = 0\}, \tag{1.4.4}$$

где стремление $x \to a$ совершается по множеству A, т. е. $x \in A$.

Предложение 1.4.3. *Вектор v принадлежит конусу $T_C(A;a)$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности положительных чисел $\{\lambda_k\}$, сходящейся к нулю, и любой последовательности точек $\{x_k\} \subset A$, сходящейся к точке a, существует последовательность точек $\{v_k\} \subset E$, сходящаяся к точке v, такая, что справедливо включение*

$$x_k + \lambda_k v_k \in A \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Легко убедиться в том, что каждый из полученных выше конусов является замкнутым множеством, причем, очевидно, справедливы включения

$$T_C(A;a) \subset T_{\text{н}}(A;a) \subset T_{\text{в}}(A;a) \subset \overline{\operatorname{cone}}(A - a). \tag{1.4.5}$$

Легко показать, что, если множество A выпукло, то имеет место равенство всех указанных конусов (см. далее предложение 1.4.6), но если множество A не выпукло, то все касательные конусы могут быть различными (покажем далее на примере). Если $a \in \operatorname{int} A$, то очевидно, что $T_C(A;a) = E$.

Предложение 1.4.4. *Касательный конус Кларка $T_C(A;a)$ является выпуклым замкнутым конусом.*

Доказательство. Пусть точки v и u принадлежат конусу $T_C(A;a)$. Для доказательства предложения достаточно доказать, что $v + u$ принадлежат этому же конусу. В силу предложения 1.4.3 рассмотрим любую последовательность положительных чисел $\{\lambda_k\}$, сходящуюся к нулю, и любую последовательность точек $\{x_k\} \subset A$, сходящуюся к точке a. Требуется показать, что существует последовательность точек $\{w_k\}$, сходящаяся к $v+u$ и такая, что справедливо включение

$$x_k + \lambda_k w_k \in A \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{1.4.6}$$

Так как $v \in T_C(A;a)$, то существует последовательность $\{v_k\}$, сходящаяся к v и такая, что справедливо включение $x_k + \lambda_k v_k \in A \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$. В свою очередь так как последовательность $y_k = x_k + \lambda_k v_k \in A$ также сходится к точке a, а $u \in T_C(A;a)$, то существует последовательность $\{u_k\}$, сходящаяся к u и такая, что справедливо включение $y_k + \lambda_k u_k \in A \ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Отсюда получаем включение (1.4.6), в котором $w_k = v_k + u_k$. □

Замечание 1.4.1. Полученное выше свойство выпуклости касательного конуса Кларка очень удобно, так как приближение невыпуклого множества в окрестности некоторой его точки выпуклым касательным конусом позволяет использовать все преимущества выпуклого анализа для невыпуклых множеств. Остальные касательные конусы могут оказаться невыпуклыми. Однако касательный конус Кларка может представлять собой очень малую часть верхнего (и даже нижнего) касательного конуса и тем самым слабо отражать свойства исходного множества.

Пример 1.4.1. Рассмотрим множество $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|, x \in (-\infty, +\infty)\}$. Очевидно, что справедливы равенства $T_{\text{н}}(A;0) = T_{\text{в}}(A;0) = A$ и $T_C(A;0) = \{0\}$.

Мы укажем простой алгоритм, по которому во всяком конусе можно выбрать выпуклый подконус, отличный в общем случае от касательного конуса Кларка. Это позволит построить другие классы выпуклых касательных конусов.

Лемма 1.4.4. *Для всякого конуса K множество $K \overset{*}{-} K$ является его выпуклым подконусом. В случае, когда сам конус K является выпуклым, справедливо равенство $K = K \overset{*}{-} K$.*

Доказательство. Выберем любую точку $x \in K \overset{*}{-} K$. По определению 1.1.1 геометрической разности это значит, что $x + K \subset K$. Так как $0 \in K$, то получаем, что $x \in K$, т. е. $K \overset{*}{-} K \subset K$. Кроме того, для любого числа $\lambda > 0$ получаем $\lambda x + \lambda K \subset \lambda K$, откуда в силу равенства $\lambda K = K$ получаем, что $\lambda x \in K \overset{*}{-} K$, т. е. множество $K \overset{*}{-} K$ является конусом. Докажем его выпуклость. Для любых точек x, $y \in K \overset{*}{-} K$ имеем включения $x + K \subset K$ и $y + K \subset K$, откуда получаем $x + y + K = x + (y + K) \subset x + K \subset K$, т. е. $x + y \in K \overset{*}{-} K$.

Пусть теперь конус K является выпуклым. Это значит, что для любых x, $y \in K$ справедливо включение $x + y \in K$, т. е. $x + K \subset K$, откуда следует, что $x \in K \overset{*}{-} K$, т. е. равенство $K = K \overset{*}{-} K$. □

Лемма 1.4.5. *Для всякого замкнутого конуса K справедливы равенства*

$$T_{\text{н}}(K;0) = T_{\text{в}}(K;0) = K, \tag{1.4.7}$$

$$T_C(K;0) = K \overset{*}{-} K. \tag{1.4.8}$$

Доказательство. Равенство (1.4.7), очевидно, следует из определений конусов. Докажем равенство (1.4.8). Рассмотрим произвольные точки $v \in T_C(K;0)$ и $y \in K$. По предложению 1.4.3 для любой последовательности чисел $\lambda_k > 0$, сходящейся к нулю, и последовательности точек $x_k = \lambda_k y \in K$ (тоже сходящейся к точке 0) существует последовательность точек v_k, сходящаяся к точке v и такая, что справедливо включение $x_k + \lambda_k v_k \in K \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$. Умножая это включение на λ_k^{-1} и учитывая равенство $\lambda_k^{-1} K = K$, получаем включение $y + v_k \in K$. В силу замкнутости конуса K в пределе получаем, что $y + v \in K$, откуда следует, что $v \in K \overset{*}{-} K$.

Докажем обратное включение. Рассмотрим точку $v \in K \overset{*}{-} K$, т. е. $v + K \in K$. Тогда для любой последовательности чисел $\lambda_k > 0$, сходящейся к нулю, и любой последовательности точек $x_k \in K$, сходящейся к нулю, имеем $\lambda_k^{-1} x_k \in K$, откуда в силу условия на v получаем включение $v + \lambda_k^{-1} x_k \in K$. Умножая последнее включение на λ_k получаем включение $x_k + \lambda_k v \in \lambda_k K = K$, которое в силу предложения 1.4.3 означает, что $v \in T_C(K;0)$. $\square$

Приведем пример <другого> выпуклого конуса, порожденного заданным множеством.

Определение 1.4.5. *Асимптотическим конусом* множества $A \subset E$ называется множество

$$O^+ A = \{y \in E \mid \forall\, x \in A,\ \forall\, \lambda \geqslant 0\colon\ x + \lambda y \in A\}.$$

Легко проверить, что для любого непустого выпуклого множества A множество $O^+ A$ является выпуклым конусом, который может оказаться незамкнутым. Используя операцию геометрической разности, из определения 1.4.5 легко доказать равенство

$$O^+ A = A \overset{*}{-} A. \tag{1.4.9}$$

Например, для множества $B_1(0)$ (как и для всякого ограниченного множества) конус $O^+ B_1(0)$ состоит из одной точки $\{0\}$, а для множества $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant x^2\}$ конус $O^+ A$ является лучом $\{(0, \lambda) \mid \lambda \geqslant 0\}$.

Сравнивая выражение для асимптотического конуса (1.4.9) и утверждение леммы 1.4.4, приходим к следующим определениям.

Определение 1.4.6. *Нижним асимптотическим касательным конусом* множества A в точке $a \in \overline{A}$ называется множество (см. [74])

$$T_{\text{ан}}(A; a) = T_{\text{н}}(A; a) \overset{*}{-} T_{\text{н}}(A; a). \tag{1.4.10}$$

Определение 1.4.7. *Верхним асимптотическим касательным конусом* множества A в точке $a \in \overline{A}$ называется множество (см. [74])

$$T_{\text{ав}}(A; a) = \overline{(T_{\text{н}}(A; a) \overset{*}{-} T_{\text{н}}(A; a)) + (T_{\text{в}}(A; a) \overset{*}{-} T_{\text{в}}(A; a))}. \tag{1.4.11}$$

Теорема 1.4.1 (Е.С. Половинкин). *Конусы $T_{\text{ан}}(A; a)$ и $T_{\text{ав}}(A; a)$ выпуклы и замкнуты. При этом справедливы равенства и включения*

$$T_{\text{ан}}(A; a) = T_C(T_{\text{н}}(A; a);\, 0), \tag{1.4.12}$$

$$T_{\text{ав}}(A; a) = \overline{T_C(T_{\text{н}}(A; a);\, 0) + T_C(T_{\text{в}}(A; a);\, 0)}, \tag{1.4.13}$$

$$T_C(A; a) \subset T_{\text{ан}}(A; a) \subset T_{\text{ав}}(A; a) \subset T_{\text{в}}(A; a), \tag{1.4.14}$$

$$T_{\text{ан}}(A; a) \subset T_{\text{н}}(A; a). \tag{1.4.15}$$

Доказательство. Выпуклость конусов $T_{\text{ан}}(A; a)$ и $T_{\text{ав}}(A; a)$, а также среднее включение в (1.4.14) следуют из определений конусов и леммы 1.4.4. Равенства (1.4.12) и (1.4.13) справедливы в силу определений конусов и леммы 1.4.5. Так как для любого замкнутого конуса в силу лемм 1.4.4 и 1.4.5 справедливо включение $T_C(K; 0) \subset K$, то отсюда и из равенства (1.4.12) следует включение (1.4.15).

Левое включение в (1.4.14) в силу определения 1.4.6 эквивалентно включению

$$T_C(A; a) + T_{\text{н}}(A; a) \subset T_{\text{н}}(A; a). \tag{1.4.16}$$

Докажем это включение. Выберем произвольные точки $v \in T_{\text{н}}(A; a)$ и $w \in T_C(A; a)$, а также произвольную последовательность чисел $\lambda_k > 0$, предел которой равен нулю. В силу предложения 1.4.1 существует последовательность точек $v_k \in E$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = v$ и справедливо включение $a + \lambda_k v_k \in A \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Определим последовательность точек x_k из равенства $x_k = a + \lambda_k v_k$. Очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. В силу предложения 1.4.3 существует последовательность точек $w_k \in E$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} w_k = w$ и справедливо включение $x_k + \lambda_k w_k \in A \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Это означает, что $a + \lambda_k(v_k + w_k) \in A \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$, откуда следует, что $v + w \in T_{\text{н}}(A; a)$, т. е. включение (1.4.16) доказано.

Докажем правое включение в (1.4.14). Выберем произвольную точку $v \in T_{\text{ав}}(A; a)$. Тогда по определению конуса с точностью до замыкания существуют точки $u \in T_{\text{ан}}(A; a)$ и $w \in T_{\text{в}}(A; a) \overset{*}{-} T_{\text{в}}(A; a)$

такие, что $v = u + w$. Из включений (1.4.15) и (1.4.5) следует, что $u \in T_{\text{в}}(A; a)$, откуда $v = w + u \in w + T_{\text{в}}(A; a) \subset T_{\text{в}}(A; a)$. Теорема доказана полностью. $\square$

Пример 1.4.2. Рассмотрим множество $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant f(x),\ x \in [-1, 1]\}$ (рис. 3). Здесь $f(x) = 0$ при $x \in [-1, 0]$ и $f(1) = -1$. На отрезке $[0, 1]$ функция f является непрерывной ломаной линией, заключенной между лучом $y = -x$ и лучом $y = -(\operatorname{tg} \pi/10)x$ при $x \geqslant 0$. При этом отрезки каждой ломаной имеют одинаковые по абсолютной величине углы наклона к оси $0x$, равные $2\pi/5$, причем при монотонном убывании x от 1 до 0 знаки величин углов чередуются, начиная с минуса.

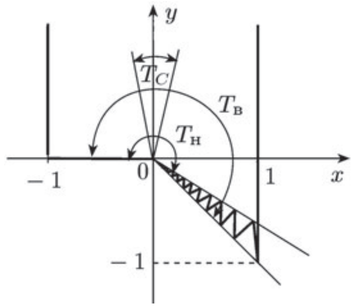


Рис. 3

Чтобы записать касательные конусы ко множеству A в точке 0, введем обозначение

$$K(\alpha, \beta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r \geqslant 0,\ \varphi \in [\alpha, \beta]\}.$$

Тогда легко убедиться в справедливости следующих равенств:

$$T_{\text{н}}(A; 0) = K(-\pi/10, \pi), \quad T_{\text{в}}(A; 0) = K(-\pi/4, \pi),$$

$$T_{\text{ан}}(A; 0) = T_{\text{ав}}(A; 0) = K(0, 9\pi/10), \quad T_{\text{в}}(A; 0) \stackrel{*}{-} T_{\text{в}}(A; 0) = K(0, 3\pi/4),$$

$$T_C(A; 0) = K(2\pi/5, 3\pi/5).$$

Пример 1.4.3. Множество $A \subset \mathbb{R}^2$ определяется так же, как и в примере 1.4.2, с той лишь разницей, что функция f на отрезке $[0, 1]$ является непрерывной ломаной линией, заключенной между лучами $y = x$ и $y = -x$, с теми же углами наклона каждого отрезка ломаной, равными по модулю $2\pi/5$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$T_C(A; 0) = K(2\pi/5, 3\pi/5), \quad T_{\text{н}}(A; 0) = T_{\text{ан}}(A; 0) = K(\pi/4, \pi),$$

$$T_{\text{в}}(A; 0) = K(-\pi/4, \pi), \quad T_{\text{в}}(A; 0) \stackrel{*}{-} T_{\text{в}}(A; 0) = K(0, 3\pi/4),$$

$$T_{\text{ав}}(A; 0) = K(0, \pi).$$

Отметим следующее достаточно очевидное свойство касательных конусов для невыпуклых множеств.

Предложение 1.4.5. *Пусть даны множество $A \subset E$ и точка $a \in \overline{A}$. Для любого числа $\varepsilon > 0$ определим множество A_ε, удовле-*

творяющее включению $A \supset A_\varepsilon \supset A \cap B_\varepsilon(a)$. Тогда для каждого из касательных конусов $T_C(A;a)$, $T_{\text{ан}}(A;a)$, $T_{\text{н}}(A;a)$, $T_{\text{ав}}(A;a)$, $T_{\text{в}}(A;a)$ справедливо равенство с соответствующим касательным конусом ко множеству A_ε, т. е.

$$T_L(A;a) = T_L(A_\varepsilon;a), \quad \text{где} \quad L \in \{C, \text{н, в, ан, ав}\}. \tag{1.4.17}$$

Доказательство. В силу определений 1.4.6 и 1.4.7 равенство (1.4.17) достаточно доказать лишь при $L \in \{C, \text{н, в}\}$. Покажем это на примере конуса $T_C(A;a)$. Пусть $v \in T_C(A;a)$. По предложению 1.4.3 для любой последовательности положительных чисел $\{\lambda_k\}$, сходящейся к нулю, и любой последовательности точек $\{x_k\} \subset A$, сходящейся к точке a, существует последовательность точек $\{v_k\} \subset E$ такая, что $x_k + \lambda_k v_k \in A$.

Так как последовательность точек $\{x_k + \lambda_k v_k\}$ сходится к точке $a \in A$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такой, что при всех $k \geqslant k_\varepsilon$ имеем $x_k \in A \cap B_\varepsilon(a)$ и $x_k + \lambda_k v_k \in A \cap B_\varepsilon(a)$, откуда следует, что $v \in T_C(A_\varepsilon;a)$. $\square$

В заключение покажем связь различных касательных конусов в случае, когда множество A является локально выпуклым в точке $a \in \overline{A}$.

Определение 1.4.8. Множество $A \subset E$ называется *локально выпуклым* в точке $a \in \overline{A}$, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что множество $A_\varepsilon = A \cap B_\varepsilon(a)$ выпукло.

Предложение 1.4.6. *Если множество $A \subset E$ является локально выпуклым множеством в точке $a \in \overline{A}$, то контингентный конус $T_{\text{в}}(A;a)$ является выпуклым конусом и справедливо следующее равенство конусов*:

$$T_C(A;a) = T_{\text{ан}}(A;a) = T_{\text{н}}(A;a) = T_{\text{ав}}(A;a) = T_{\text{в}}(A;a). \tag{1.4.18}$$

Доказательство. В силу определения 1.4.8 выберем число $\varepsilon > 0$ такое, что множество $A_\varepsilon = A \cap B_\varepsilon(a)$ выпукло. В силу теоремы 1.4.1 и предложения 1.4.5 достаточно показать включение

$$\operatorname{cone}(A_\varepsilon - a) \subset T_C(A_\varepsilon;a).$$

Пусть $v \in \operatorname{cone}(A_\varepsilon - a)$. Тогда существует число $\mu > 0$ и точка $b \in A_\varepsilon$ такие, что $b = a + \mu^{-1}v$. Так как $a \in \overline{A_\varepsilon}$ и множество A_ε выпукло, то справедливо включение $a + \tau v = (1 - \tau\mu)a + \tau\mu b \in A_\varepsilon$ для всех $\tau \in (0, \mu^{-1}]$. Пусть заданы любые последовательность чисел $\lambda_k > 0$, сходящаяся к нулю, и последовательность точек $x_k \in A_\varepsilon$, сходящаяся к точке a. Рассмотрим последовательность точек $v_k = (b - x_k)\mu$. Она, очевидно, сходится к точке v, и справедливо включение

$$x_k + \lambda_k v_k = (1 - \lambda_k \mu) x_k + \lambda_k \mu b \in A_\varepsilon.$$

Таким образом, в силу предложения 1.4.3 показали, что $v \in \in T_C(A_\varepsilon; a)$. $\square$

Упражнение 1.4.1. Показать, что для невыпуклых множеств A_k, даже при замене $\operatorname{cone} A$ на $T_{\text{н}}(A;0)$ в лемме 1.4.2 она становится, вообще говоря, неверной. Показать, что имеет место включение

$$T_{\text{н}}\left(\bigcap_{k=1}^{m} A_k; 0\right) \subset \bigcap_{k=1}^{m} T_{\text{н}}(A_k; 0),$$

причем оно может быть строгим.

Упражнение 1.4.2. Доказать, что если A есть замкнутое подпространство, то для любой точки $a \in A$ справедливо равенство $T_{\text{н}}(A;0) = A$.

Упражнение 1.4.3. Доказать равенство

$$T_{\text{н}}(A;a) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{0<\lambda<\delta} \left(\frac{1}{\lambda}(A-a) + B_\varepsilon(0)\right).$$

Упражнение 1.4.4. Доказать равенство

$$T_{\text{в}}(A;a) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\delta>0} \bigcup_{0<\lambda<\delta} \left(\frac{1}{\lambda}(A-a) + B_\varepsilon(0)\right).$$

Упражнение 1.4.5. Доказать равенство

$$T_C(A;a) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{0<\lambda<\delta} \bigcap_{b \in A \bigcap B_\delta(a)} \left(\frac{1}{\lambda}(A-b) + B_\varepsilon(0)\right).$$

Упражнение 1.4.6. Определить все касательные конусы в точке $0 \in \mathbb{R}^2$ для множества $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < |x|,\ x \in (-\infty, +\infty)\}$.

Упражнение 1.4.7. Показать, что множество O^+A является выпуклым конусом. Привести пример множества, у которого его асимптотический конус незамкнут.

Упражнение 1.4.8. Привести пример неограниченного замкнутого выпуклого множества в l_2, для которого $O^+A = \{0\}$. Это показывает, что только в $\mathbb{R}^n$ для выпуклого замкнутого множества A условие $O^+A \neq \{0\}$ эквивалентно неограниченности множества A.

§ 1.5. Полунепрерывные снизу функции

В этом параграфе мы будем рассматривать функции $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, определенные на топологическом пространстве E, со значениями из расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Мы охватываем тем самым случай нормированной и слабой топологии на банаховом пространстве.

Функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *положительно однородной*, если справедливо равенство $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для любых $\lambda > 0$ и $x \in E$.

Эффективным множеством функции $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется множество $\operatorname{dom} f = \{x \in E \mid f(x) < +\infty\}$.

Функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *собственной*, если $\operatorname{dom} f \neq \varnothing$.

Надграфиком функции $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется множество $\operatorname{epi} f = \{(x, \mu) \in E \times \mathbb{R} \mid x \in \operatorname{dom} f,\ \mu \geqslant f(x)\}$.

Например, пусть функция задана соотношениями $f(0) = 0$ и $f(x) = +\infty$, $x \neq 0$. Тогда очевидно, что $\operatorname{dom} f = \{0\}$, функция f является собственной, $\operatorname{epi} f = \{(0; \lambda) \mid \lambda \geqslant 0\}$.

Определение 1.5.1. Функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *полунепрерывной снизу* (сокращенно: пн. сн.) в точке $x \in \operatorname{dom} f$, если справедливо неравенство

$$f(x) \leqslant \liminf_{y \to x} f(y).$$

Последнее можно расшифровать в терминах Гейне: если обобщенная последовательность $x_\lambda \to x$, то все предельные точки множества $\{f(x_\lambda)\}$ не меньше $f(x)$; или в терминах Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists U(x) \text{ — окрестность точки } x, \quad \forall y \in U(x)\colon\ f(x) \leqslant f(y) + \varepsilon.$$

Другими словами, разрешаются скачки функции f <вниз>.

Функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется полунепрерывной снизу (пн. сн.) на множестве A, если она пн. сн. в каждой точке $x \in A \subset \operatorname{dom} f$. Функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется полунепрерывной снизу (пн. сн.), если она пн. сн. на множестве $\operatorname{dom} f$.

Теорема 1.5.1. *Пусть дана собственная функция* $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. *Эквивалентны условия*:

1) f *пн. сн.*;

2) *лебеговы множества уровня* $L_\alpha(f) = \{x \in E \mid f(x) \leqslant \alpha\}$ *замкнуты для всех* $\alpha \in \mathbb{R}$;

3) *множество* $\operatorname{epi} f$ *непусто и замкнуто в* $E \times \mathbb{R}$.

Доказательство. 1) Пусть f пн. сн., тогда если $x_\lambda \to x$ и $\mu_\lambda \geqslant f(x_\lambda)$ $\forall \lambda$ и $\mu_\lambda \to \mu$, то $\mu \geqslant f(x)$, что равносильно 3). Отсюда следует и 2), если положить $\alpha = \mu = \mu_\lambda$, $\forall \lambda$.

Пусть верно 2). Пусть $x_\lambda \to x$ и $f(x_\lambda) \to \mu = \liminf\limits_{y \to x} f(y)$. Для любого $\alpha > \mu$ значения $f(x_\lambda)$ должны при больших λ стать меньше α, следовательно,

$$x \in \overline{\{y \mid f(y) \leqslant \alpha\}} = \{y \mid f(y) \leqslant \alpha\} \quad \forall \alpha > \mu.$$

Отсюда $f(x) \leqslant \mu = \liminf\limits_{y \to x} f(y)$. $\square$

Замечание 1.5.1. В силу свойства 3) теоремы 1.5.1 пн. сн. на E функции также называют *замкнутыми функциями* (см. [50, 63]).

Определение 1.5.2. Для всякой собственной функции f наибольшая пн. сн. функция, мажорирующая f снизу, называется *замыканием функции* f и обозначается $\overline{f}$.

Из теоремы 1.5.1 следует равенство $\operatorname{epi} \overline{f} = \overline{\operatorname{epi} f}$.

Аналогично понятию пн. сн. функции вводится понятие полунепрерывности сверху.

Определение 1.5.3. Функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *полунепрерывной сверху* (далее для краткости: пн. св.) в точке $x \in \operatorname{dom} f$, если справедливо неравенство

$$f(x) \geqslant \limsup_{y \to x} f(y).$$

Очевидно, что функция f пн. св. тогда и только тогда, когда функция $(-f)$ пн. сн.

Определение 1.5.4. Функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *непрерывной* в точке $x \in \operatorname{dom} f$, если f пн. сн. и пн. св. в точке x.

Полунепрерывность снизу — значительно более слабое свойство функции, чем непрерывность. Это легко увидеть на конкретных примерах. Но, тем не менее, это свойство весьма полезно в задачах минимизации.

Теорема 1.5.2 (К. Вейерштрасс). *Пусть E — компактное топологическое пространство и $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ — собственная полунепрерывная снизу функция. Тогда f достигает своего минимума на E, т. е. существует точка $x_0 \in E$ такая, что $f(x_0) \leqslant f(x)$ для всех $x \in E$.*

Определение 1.5.5. Пусть E — банахово пространство. Функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *локально липшицевой* на множестве X, если $X \subset \operatorname{dom} f$ и

$$\forall x_0 \in X \quad \exists \delta > 0 \quad \exists L > 0, \quad \forall x_1, x_2 \in B_\delta(x_0) \cap X\colon$$
$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L \|x_1 - x_2\|.$$

Упражнение 1.5.1. Доказать теорему 1.5.2.

Упражнение 1.5.2. Показать, что справедлива формула

$$\overline{f}(x) = \sup \{g(x) \mid g(x) \leqslant f(x),\ g(x) \text{ непрерывна}\}.$$

§ 1.6. Выпуклые функции

Определение 1.6.1. В банаховом пространстве E функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *выпуклой*, если $\operatorname{epi} f$ есть непустое выпуклое множество в пространстве $E \times \mathbb{R}$.

Предложение 1.6.1. *Собственная функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ является выпуклой тогда и только тогда, когда множество $\operatorname{dom} f$ является непустым выпуклым множеством и для любых точек x_1, $x_2 \in E$ и любого числа $\lambda \in [0,1]$ справедливо неравенство*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2). \tag{1.6.1}$$

Доказательство. 1. Пусть $\operatorname{epi} f$ есть непустое выпуклое множество. Это значит, что для любых точек $z_i = (x_i,\, f(x_i)) \in \operatorname{epi} f$, $i = 1, 2$, и числа $\lambda \in (0,1)$ справедливо включение

$$\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\, \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)) \in \operatorname{epi} f,$$

откуда и из определения множества $\operatorname{epi} f$ следует неравенство $\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \geqslant f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$. В частности, получаем, что из условия $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$ следует включение $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \operatorname{dom} f$, т. е. $\operatorname{dom} f$ есть выпуклое множество. Допустим, что хотя бы одна из точек $x_1 \notin \operatorname{dom} f$, т. е. $f(x_1) = +\infty$, тогда неравенство (1.6.1), очевидно, выполняется.

2. Пусть для функции f выполнено неравенство (1.6.1). Возьмем две произвольные точки $z_i = (x_i, \mu_i) \in \operatorname{epi} f$, $i = 1, 2$, и число $\lambda \in [0,1]$. Рассмотрим точку z вида

$$z = \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\, \lambda \mu_1 + (1-\lambda)\mu_2).$$

В силу неравенств $\mu_i \geqslant f(x_i)$ и неравенства (1.6.1) получаем

$$\lambda \mu_1 + (1-\lambda)\mu_2 \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \geqslant f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2),$$

т. е. $z \in \operatorname{epi} f$, что влечет выпуклость множества $\operatorname{epi} f$. $\square$

Определение 1.6.2. Функция f называется *вогнутой*, если функция $(-f)$ выпукла.

Очевидно, что изучение выпуклых и вогнутых функций равносильно.

В предложении 1.2.2 было показано, что всякое выпуклое множество содержит выпуклые комбинации $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$, $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, любых своих точек $\{x_i\}_{i=1}^{m}$ при любых $m \in \mathbb{N}$. Отсюда аналогично доказательству предложения 1.6.1 получаем доказательство следующего предложения.

Предложение 1.6.2. *Для любой собственной выпуклой функции f справедливо неравенство*

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i), \tag{1.6.2}$$

для любых $m \in \mathbb{N}$, *любых точек* $\{x_i\}_{i=1}^m \subset E$, *чисел* $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$, *таких, что* $\lambda_i \geqslant 0$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

Неравенство (1.6.2) называется *неравенством Иенсена*.

Простейшими примерами собственных выпуклых функций $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ являются:

1) аффинная функция $f(x) = \langle p, x\rangle + \alpha$, где $p \in E^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

2) норма в нормированном пространстве E, т. е. функция $f(x) = \|x\|$;

3) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ эллиптический параболоид $f(x) = \frac{1}{2}\langle Tx, x\rangle$, где $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — самосопряженный линейный оператор, соответствующий нетривиальной неотрицательно определенной квадратичной форме (т. е. $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0 \ \ \forall x \in \mathcal{H}$).

Для выпуклых множеств определим следующие три выпуклых функции:

1) *индикаторная функция* выпуклого множества $A \subset E$, определяемая по формуле

$$\delta(x, A) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \in A, \\ +\infty, & \text{если} \quad x \notin A; \end{cases} \tag{1.6.3}$$

2) *функция Минковского* выпуклого множества $A \subset E$, у которого $0 \in \operatorname{int} A$, определяемая по формуле (см. [154, 155])

$$\mu(x, A) = \inf\{t > 0 \,|\, x/t \in A\}, \quad x \in E; \tag{1.6.4}$$

3) *опорная функция* множества $A \subset E$, определяемая по формуле (см. [154, 155])

$$s(p, A) = \sup\{\langle p, x\rangle \,|\, x \in A\}, \quad p \in E^*. \tag{1.6.5}$$

Опишем основные свойства этих функций. Очевидно, что индикаторная функция множества A является выпуклой собственной функцией тогда и только тогда, когда множество A является непустым выпуклым множеством. При этом если множество A замкнуто, то функция $\delta(\,\cdot\,, A)$ пн. сн., и наоборот.

Лемма 1.6.1 *Пусть* $A,\ D \subset E$ — *выпуклые множества, причем* $0 \in \operatorname{int} A,\ \ A \subset D$. *Тогда имеют место следующие свойства*:

1) *если множество* A *ограничено, то* $\mu(x, A) > 0$ *для всех* $x \in E$, $x \neq 0,\ \ \mu(0, A) = 0$;

2) $\mu(\lambda x, A) = \lambda \mu(x, A)\ \ \forall\, \lambda > 0,\ \ x \in E$;

3) $\mu(x + y, A) \leqslant \mu(x, A) + \mu(y, A)\ \ \forall\, x,\ y \in E$;

4) $\mu(x, A) \geqslant \mu(x, D)\ \ \forall\, x \in E$;

5) *определим множества* $B = \{x \,|\, \mu(x, A) < 1\}$ *и* $C = \{x \,|\, \mu(x, A) \leqslant \leqslant 1\}$; *тогда справедливы включения* $B \subset A \subset C$ *и равенство* $\mu(x, B) = = \mu(x, A) = \mu(x, C)\ \ \forall\, x$, *кроме того*, $\overline{A} = C$.

Доказательство. Свойства 1), 2), 4) очевидны в силу определения (1.6.4) функции $\mu(x, A)$.

3) Выберем точки $x,\ y \in E$ и числа $s,\ t,\ u$ такие, что $\mu(x, A) < s$, $\mu(y, A) < t$ и $u = s + t$. В силу определения (1.6.4) функции Минковского это значит, что $x/s \in A$, $\ y/t \in A$, и так как A выпукло, то при $\lambda = s/u$ получаем

$$\frac{x + y}{u} = \lambda\, \frac{x}{s} + (1 - \lambda)\, \frac{y}{t} \in A.$$

Поэтому $\mu(x + y,\ A) \leqslant u$. Переходя к пределу по $s \to \mu(x, A) + 0$ и $t \to \mu(y, A) + 0$, получаем 3).

5) Для всякого $x \in E$ определим множество $H_A(x) = \{t > 0 \,|\, x/t \in \in A\}$. Зафиксируем $t \in H_A(x)$ и $s > t$. В силу выпуклости множества A и включения $0 \in A$ получаем, что $s \in H_A(x)$, т.е. множество $H_A(x)$ есть неограниченный интервал на числовой оси с левым концом в точке $\mu(x, A)$.

Если теперь $x \in B$, т.е. $\mu(x, A) < 1$, то $1 \in H_A(x)$, т.е. $x \in A$. Итак, $B \subset A$. В свою очередь из включения $x \in A$ по определению (1.6.4) следует, что $\mu(x, A) \leqslant 1$, т.е. $A \subset C$. Отсюда (в силу свойства 4)) следует, что для любой точки $x \in E$ выполнены неравенства $\mu(x, C) \leqslant \mu(x, A) \leqslant \mu(x, B)$.

Допустим, что $\mu(x, C) < s < t$. По определению (1.6.4) это значит, что $x/s \in C$, и по определению множества C это означает, что $\mu(x/s, A) \leqslant 1$, что по свойству 2) дает $\mu\,(x/t, A) \leqslant s/t < 1$. Следовательно, $x/t \in B$ и по (1.6.4) получаем $\mu\,(x/t, B) \leqslant 1$. Итак, справедливо неравенство $\mu(x, B) \leqslant t$ для любого $t > \mu(x, C)$. Переходя в этом неравенстве к пределу по $t \to \mu(x, C) + 0$, получаем неравенство $\mu(x, B) \leqslant \mu(x, C)$.

Наконец, равенство $\overline{A} = C$ следует из того, что по теореме 1.2.1 для получения замыкания $\overline{A}$ достаточно замкнуть интервалы вида $\{x/\lambda \mid \lambda \in H_A(x)\}$ при всех $x \in E$. $\square$

Приведем два простейших примера функции Минковского. Для единичного шара $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ функция $\mu(x, B_1(0)) = \|x\|$. Для n-мерного куба в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле и ребрами длины 2, параллельными осям координат, функция Минковского равна $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$.

Приведем свойства опорных функций.

Лемма 1.6.2. *Опорная функция непустого множества A является пн. сн., положительно однородной и выпуклой, т. е. справедливы соотношения*:

1) $s(0, A) = 0$;

2) $s(\lambda p, A) = \lambda s(p, A) \quad \forall \lambda \geqslant 0, \;\; p \in E^*$; $\qquad$ (1.6.6)

3) $s(p_1 + p_2,\, A) \leqslant s(p_1, A) + s(p_2, A) \quad \forall p_1,\, p_2 \in E^*$.

Доказательство. Полунепрерывность снизу опорной функции следует из того, что ее надграфик замкнут, так как он является пересечением замкнутых полупространств, которыми являются надграфики функций $\langle p, x\rangle$. Положительная однородность (свойства 1) и 2)) очевидна из определения (1.6.5). Докажем выпуклость. Пусть $\lambda \in (0, 1), \;\; p_1,\, p_2 \in E^*$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} s(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2,\, A) &= \sup\{\langle \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2,\, x\rangle \mid x \in A\} \leqslant \\ &\leqslant \sup\{\langle \lambda p_1, x\rangle \mid x \in A\} + \sup\{\langle (1-\lambda)p_2,\, x\rangle \mid x \in A\} = \\ &= \lambda s(p_1, A) + (1-\lambda)s(p_2, A). \end{aligned}$$

Чтобы получить формулу (1.6.6), надо в последнем неравенстве взять $\lambda = 1/2$ и сократить неравенство на $1/2$, что возможно в силу положительной однородности опорной функции. $\square$

Лемма 1.6.3. *Справедливы равенства* $s(p, A+B) = s(p, A) + s(p, B)$, $s(p, \lambda A) = \lambda s(p, A) \;\; \forall \lambda > 0$. *Если $T\colon E \to E$ — линейный оператор, то справедливо равенство $s(p, TA) = s(T^*p, A)$, где T^* — оператор*, *сопряженный оператору T*.

Доказательство. По определению опорной функции и из свойств точной верхней грани очевидны равенства

$$\begin{aligned} s(p,\, A+B) &= \sup\{\langle p,\, a+b\rangle \mid a \in A,\, b \in B\} = \\ &= \sup\{\langle p, a\rangle \mid a \in A\} + \sup\{\langle p, b\rangle \mid b \in B\} = s(p, A) + s(p, B). \end{aligned}$$

Справедливость второго и третьего равенств, приведенных в формулировке леммы, столь же очевидна. Покажем справедливость третьего равенства:

$$s(p, TA) = \sup\{\langle p, Ta\rangle \mid a \in A\} = \sup\{\langle T^*p, a\rangle \mid a \in A\} = s(T^*p, A). \ \square$$

Лемма 1.6.4. *Пусть множество $A \subset E$ ограничено. Тогда функция $s(\,\cdot\,, A)$ удовлетворяет условию Липшица с константой, равной полунорме $\|A\| = \sup\{\|a\| \mid a \in A\}$.*

Доказательство. Пусть $p_1,\, p_2 \in E^*$. Из положительной однородности опорной функции и из оценки сверху скалярного произведения получаем

$$s(p_2, A) = s(p_1 + (p_2 - p_1),\, A) \leqslant s(p_1, A) + s(p_2 - p_1,\, A),$$

$$|s(p_2, A) - s(p_1, A)| \leqslant \max\{s(p_2 - p_1,\, A),\ s(p_1 - p_2, A)\} \leqslant$$
$$\leqslant \|p_2 - p_1\|_* \sup\{\|a\| \mid a \in A\} = \|A\| \cdot \|p_2 - p_1\|_*,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Приведем примеры опорных функций некоторых множеств.

1. Пусть $A = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Так как для любого $x \in B_1(0)$ справедливо неравенство $\langle p, x\rangle \leqslant \|p\|$, причем для $x_0 = p/\|p\| \in B_1(0)$ оно становится равенством, то

$$s(p, B_1(0)) = \sup\{\langle p, x\rangle \mid x \in B_1(0)\} = \left\langle p,\ \frac{p}{\|p\|}\right\rangle = \|p\|.$$

2. Пусть $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1|, |x_2|\} \leqslant 1\}$. Легко показать, что $s(p, A) = |p_1| + |p_2|$, где $p = (p_1, p_2)$.

3. Пусть $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + (x_2)^2 \leqslant 0\}$. Легко показать, что

$$s(p, A) = \begin{cases} p_2^2/(4p_1), & p_1 > 0, \\ 0, & p_1 = p_2 = 0, \\ +\infty & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Отметим, что в последнем примере опорная функция не является непрерывной в точке $p = 0$ (нарушена пн. св. в точке $p = 0$).

Замечание 1.6.1. Для собственных выпуклых функций $f,\, g\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ сумма этих функций $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, очевидно, также является выпуклой функцией, однако она может не быть собственной. Например, если f и g — суть индикаторные функции непересекающихся выпуклых множеств, то их сумма тождественно равна $+\infty$.

Определение 1.6.3. *Выпуклой оболочкой* (*невыпуклой*) *функции* $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется функция $\operatorname{co} f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, определяемая равенством $\operatorname{co} f(x) = \inf\{\mu \mid (x, \mu) \in \operatorname{co}\,(\operatorname{epi} f)\}$.

Из определения 1.6.3, очевидно, следует, что собственная функция выпукла тогда и только тогда, когда справедливо равенство $f = \mathrm{co}\, f$. Кроме того, у собственной функции f ее выпуклая оболочка $\mathrm{co}\, f$ может не быть собственной. Например, для функции $f(x) = -|x|$, $x \in \in \mathbb{R}^1$, имеем $\mathrm{co}\, f(x) \equiv -\infty$.

Выпуклым замыканием функции $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется функция $\overline{\mathrm{co}}\, f$, определяемая равенством $\mathrm{epi}(\overline{\mathrm{co}}\, f) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{epi}\, f)$.

Из определения 1.6.3 и теоремы 1.2.2 легко получаем следующее предложение.

Предложение 1.6.3. *Пусть даны собственные функции* f, g: $E \to \overline{\mathbb{R}}$, *функционал* $p \in E^*$ *и число* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Тогда*:

1) *для любой точки* $x \in \mathrm{co}\,\mathrm{dom}\, f$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{co}\, f(x) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i) \,\middle|\, x_i \in \mathrm{dom}\, f,\ \lambda_i > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,\ m \in \mathbb{N} \right\};$$

2) $\mathrm{co}\,(f+g)(x) \geqslant \mathrm{co}\, f(x) + \mathrm{co}\, g(x)$;

3) $\mathrm{co}\,(f(x) + \langle p, x\rangle + \alpha) = \mathrm{co}\, f(x) + \langle p, x\rangle + \alpha$.

Упражнение 1.6.1. Доказать предложение 1.6.3.

Упражнение 1.6.2. Для индикаторной функции доказать равенство $\overline{\delta}(\,\cdot\,, A) = \delta(\,\cdot\,, \overline{A})$.

Упражнение 1.6.3. Доказать, что дифференцируемая функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выпукла тогда и только тогда, когда ее производная f' возрастает.

Упражнение 1.6.4. Доказать, что дифференцируемая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выпукла тогда и только тогда, когда для любых x, $y \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $f(x) - f(y) \geqslant \langle \nabla f(y),\, x - y\rangle$.

Упражнение 1.6.5. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ монотонно возрастает и выпукла, а функция $g\colon E \to \mathbb{R}$ выпукла. Доказать, что $h(x) = f(g(x))$ выпукла. Показать, что суперпозиция произвольных выпуклых функций не обязательно выпукла.

Упражнение 1.6.6. Доказать, что для любого натурального m и для любых чисел $x_i \in (0, \pi)$, где $1 \leqslant i \leqslant m$, выполнено неравенство

$$\prod_{i=1}^{m} \sin x_i \leqslant \sin^m \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i}{m} \right).$$

Указание. Воспользоваться выпуклостью функции $f(x) = = -\ln \sin x$, $x \in (0, \pi)$, и неравенством Иенсена (1.6.2).

Упражнение 1.6.7. Пусть выпуклое ограниченное и центрально-симметричное (относительно нуля) множество $A \subset \mathbb{R}^n$ таково, что $0 \in \operatorname{int} A$, и пусть $\mu(x, A)$ — его функция Минковского. Показать, что функция $\varrho(x, y) = \mu(x - y,\, A)$ определяет функцию расстояния.

Упражнение 1.6.8. Пусть f — непрерывная выпуклая собственная функция. Показать, что $\operatorname{int}\operatorname{epi} f = \{(x, \mu) \in E \times \mathbb{R} \mid x \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f,$ $\mu > f(x)\}$.

Упражнение 1.6.9. Найти опорную функцию: а) отрезка $[a, b] \subset$ $\subset \mathbb{R}^n$; б) n-мерного куба с ребрами длины 2, параллельными осям координат, и с центром в нуле.

Упражнение 1.6.10. Доказать, что опорная функция всякого выпуклого многогранника из $\mathbb{R}^n$ является кусочно линейной функцией.

Упражнение 1.6.11. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ опорная функция всякой окружности $O_R(a, q) = \partial B_R(a) \cap H_q(a)$ радиуса $R > 0$ с центром в точке $a \in \mathbb{R}^3$, лежащая в гиперплоскости $H_q(a) = \{x \in$ $\in \mathbb{R}^3 \mid \langle q, x\rangle = \langle q, a\rangle\}$, где $q \neq 0$, для любого вектора $p \in \mathbb{R}^3$ вычисляется по формуле

$$s(p, O_R(a, q)) = R\|p \times q\| + \langle p, a\rangle,$$

где $p \times q$ означает векторное произведение векторов p и q.

Упражнение 1.6.12. Показать, что из включения $A \subset B$ следует неравенство $s(p, A) \leqslant s(p, B) \ \ \forall\, p$.

Упражнение 1.6.13. Пусть $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, Tx\rangle \leqslant 1\}$, где T — положительно определенная симметричная матрица. Доказать справедливость формулы $s(p, M) = \sqrt{\langle p,\, T^{-1}p\rangle}$.

Упражнение 1.6.14. Доказать, что замкнутое множество A в банаховом пространстве E является выпуклым тогда и только тогда, когда функция $x \to \varrho(x, A) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$ выпукла.

Упражнение 1.6.15. Привести пример невыпуклой функции f, удовлетворяющей условию

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\, f(x) + \frac{1}{2}\, f(y) \quad \forall\, x,\, y. \tag{1.6.7}$$

Показать, что если функция f непрерывна и выполнено условие (1.6.7), то она выпукла.

§ 1.7. Непрерывность выпуклых функций

В этом параграфе мы опишем замечательное свойство выпуклой функции во внутренних точках эффективного множества быть непрерывной и даже локально липшицевой.

Теорема 1.7.1. *Пусть* $f\colon E \to \overline{R}$ *— собственная выпуклая функция. Тогда эквивалентны условия*:

1) f *ограничена сверху на некотором открытом множестве* U;

2) $\operatorname{int}\operatorname{dom} f \neq \varnothing$ *и функция* f *является локально липшицевой на множестве* $\operatorname{int}\operatorname{dom} f$;

3) $\operatorname{int}\operatorname{epi} f \neq \varnothing$, *причем справедлива формула*

$$\operatorname{int}\operatorname{epi} f = \{(x, \mu) \in E \times \mathbb{R} \mid x \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f,\ \mu > f(x)\}. \tag{1.7.1}$$

Доказательство. I. Очевидно, что из 2) следуют 1) и 3).

II. Докажем, что из 1) следует 2).

Так как множество U открыто и $U \subset \operatorname{dom} f$, то получаем, что $\operatorname{int}\operatorname{dom} f \neq \varnothing$.

II a). Пусть $x_0 \in U$, $\alpha, \eta \in \mathbb{R}$, где $\eta > 0$, такие, что $B_\eta(x_0) \subset U$ и $f(x) \leqslant \alpha$ для всех $x \in B_\eta(x_0)$.

Зафиксируем точку $x \in B_\eta(x_0)$, причем $x \neq x_0$.

Определим число $\vartheta = \dfrac{\|x - x_0\|}{\eta + \|x - x_0\|}$. Очевидно, что $\vartheta \in (0; 1)$. Зададим точку $y = \dfrac{x_0 - (1-\vartheta)x}{\vartheta}$. Тогда

$$\|y - x_0\| = \frac{1-\vartheta}{\vartheta}\,\|x - x_0\| = \frac{\eta + \|x - x_0\|}{\|x - x_0\|}\,\frac{\eta}{\eta + \|x - x_0\|}\,\|x - x_0\| = \eta,$$

следовательно, $f(y) \leqslant \alpha$. В силу выпуклости f получаем

$$f(x_0) = f(\vartheta y + (1-\vartheta)x) \leqslant \vartheta\alpha + (1-\vartheta)f(x),$$

откуда $\vartheta f(x_0) + (1-\vartheta)f(x_0) \leqslant \vartheta\alpha + (1-\vartheta)f(x)$, т. е.

$$f(x_0) \leqslant f(x) + \frac{\vartheta}{1-\vartheta}\,(\alpha - f(x_0)) = f(x) + \frac{\alpha - f(x_0)}{\eta}\,\|x - x_0\|. \tag{1.7.2}$$

Для получения другой оценки выберем точку $z = \dfrac{x - (1-\tau)x_0}{\tau}$, где $\tau = \dfrac{\|x - x_0\|}{\eta} \in (0, 1]$. Тогда

$$\|x_0 - z\| = \left\|\frac{x - (1-\tau)x_0 - \tau x_0}{\tau}\right\| = \frac{\|x - x_0\|}{\tau} = \eta,$$

следовательно, $f(z) \leqslant \alpha$. Опять в силу выпуклости f получаем, что

$$f(x) = f(\tau z + (1-\tau)x_0) \leqslant \tau\alpha + (1-\tau)f(x_0) = f(x_0) + \tau(\alpha - f(x_0)),$$

т. е.

$$f(x) \leqslant f(x_0) + \frac{\alpha - f(x_0)}{\eta}\|x - x_0\|. \tag{1.7.3}$$

Из оценок (1.7.2) и (1.7.3) следует

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{\alpha - f(x_0)}{\eta}\,\|x - x_0\| \quad \forall\, x \in B_\eta(x_0). \tag{1.7.4}$$

II б). Зафиксируем число $\beta \in (0;\eta)$. Покажем, что функция f удовлетворяет условию Липшица на шаре $B_\beta(x_0)$ с константой Липшица $L = \dfrac{2(\alpha - f(x_0))}{\eta - \beta}$.

Зафиксируем точки $x_1,\, x_2 \in B_\beta(x_0)$. Выберем натуральное число $n > \|x_1 - x_2\|/(\eta - \beta)$. Для каждого $j \in \overline{0,n}$ определим точку $y_j = x_1 + \dfrac{j}{n}\,(x_2 - x_1)$. Отметим, что для $0 \leqslant j \leqslant n-1$

$$\|y_{j+1} - y_j\| = \frac{\|x_1 - x_2\|}{n} \leqslant \eta - \beta. \tag{1.7.5}$$

Кроме того,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \|y_{j+1} - y_j\| = \|x_1 - x_2\|. \tag{1.7.6}$$

Из включения $y_j \in [x_1, x_2] \subset B_\beta(x_0)$ и формулы (1.7.5) получаем

$$y_{j+1} \in B_{\eta-\beta}(y_j) \subset B_\eta(x_0) \quad \forall\, j \in \overline{0,n}. \tag{1.7.7}$$

В силу (1.7.4) имеем $|f(y_j) - f(x_0)| < \alpha - f(x_0)$, откуда $\alpha - f(y_j) \leqslant 2(\alpha - f(x_0))$ для всех $j \in \overline{0,n}$. Так как функция f ограничена сверху числом α на каждом шаре $B_{\eta-\beta}(y_j)$, то из (1.7.4) (заменяя x_0 на y_j) и (1.7.7) получаем, что

$$|f(y_{j+1}) - f(y_j)| \leqslant \frac{2(\alpha - f(x_0))}{\eta - \beta}\,\|y_{j+1} - y_j\| \quad \forall\, j \in \overline{0, n-1}.$$

Отсюда и из (1.7.6) следует оценка

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} |f(y_{j+1}) - f(y_j)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2(\alpha - f(x_0))}{\eta - \beta} \sum_{j=0}^{n-1} \|y_{j+1} - y_j\| = \frac{2(\alpha - f(x_0))}{\eta - \beta}\,\|x_1 - x_2\|.$$

II в). Покажем локальную липшицевость функции f на множестве $\operatorname{int}\operatorname{dom} f$.

Пусть $z_1 \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f$, причем $z_1 \neq x_0$, так как липшицевость функции f в окрестности точки x_0 доказана в п. II б). Выберем число $\gamma > 0$ такое, что $B_\gamma(z_1) \subset \operatorname{dom} f$.

Определим число $\lambda = \gamma/(\gamma + \|x_0 - z_1\|)$ (очевидно, что $\lambda \in (0;1)$) и точку z_2 по формуле

$$z_2 = x_0 + \frac{1}{1-\lambda}(z_1 - x_0) = \frac{z_1 - \lambda x_0}{1-\lambda} = z_1 + \gamma\,\frac{z_1 - x_0}{\|z_1 - x_0\|} \in \operatorname{dom} f.$$

Выберем произвольную точку $y \in B_{\lambda\eta}(z_1)$, по которой определим точку $z = (y + \lambda x_0 - z_1)/\lambda$. Тогда $\|z - x_0\| = (1/\lambda)\,\|y - z_1\| \leqslant \eta$, откуда $f(z) \leqslant \alpha$. Легко также проверить справедливость равенства $y = \lambda z + (1-\lambda)z_2$. Отсюда и из выпуклости функции f получаем

$$f(y) = f(\lambda z + (1-\lambda)z_2) \leqslant \lambda f(z) + (1-\lambda)f(z_2) \leqslant \\ \leqslant \lambda\alpha + (1-\lambda)f(z_2) \leqslant |\alpha| + |f(z_2)| = \delta.$$

Итак, показали, что функция f на шаре $B_{\lambda\eta}(z_1)$ ограничена сверху числом δ. Отсюда как показано в пп. II а) и II б), следует липшицевость функции f на всяком шаре $B_\varepsilon(z_1)$, где $\varepsilon \in (0;\lambda\eta)$.

III. Докажем, что из 3) следует 1). По условию найдутся число $\varepsilon > 0$ и точка (z_0, μ_0) такие, что $B_\varepsilon((z_0,\mu_0)) \subset \operatorname{int}\operatorname{epi} f$. Это значит, что для любого $x \in B_\varepsilon(z_0)$ справедливо неравенство $f(x) \leqslant \mu_0 + \varepsilon$, т. е. функция f ограничена на шаре $B_\varepsilon(z_0)$.

Проверку формулы (1.7.1) легко провести из определений. □

С л е д с т в и е 1.7.1. *Пусть* $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ — *пн. сн. собственная выпуклая функция, причем* $\operatorname{int}\operatorname{dom} f \neq \varnothing$. *Тогда функция* f *локально липшицева на* $\operatorname{int}\operatorname{dom} f$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим множества $E_n = \{x \in E \mid f(x) \leqslant n\}$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\operatorname{dom} f = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} E_n$. Так как функция f пн. сн., то множества E_n замкнуты (по теореме 1.5.1). По теореме 1.1.2 Бэра счетное объединение замкнутых множеств с пустой внутренностью имеет пустую внутренность, следовательно, найдется номер n_0 такой, что $\operatorname{int} E_{n_0} \neq \varnothing$. Выбрав в качестве U в теореме 1.7.1 множество $\operatorname{int} E_{n_0}$, завершим доказательство. □

Рассмотрим некоторые специальные случаи.

О п р е д е л е н и е 1.7.1. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *локально симплициальным*, если для каждой точки $x \in A$ найдется конечное число симплексов $S_1, \ldots, S_m$, содержащихся в A и таких, что x является вершиной симплекса S_i для любого $i \in \overline{1, m}$ и существует окрестность $B_\varepsilon(x)$ точки x такая, что $B_\varepsilon(x) \cap A = B_\varepsilon(x) \cap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i\right)$.

Например, многогранники являются локально симплициальными множествами, открытые множества — тоже. Цилиндр не является локально симплициальным множеством. Отметим, что понятие локальной симплициальности не связано с выпуклостью или замкнутостью множества.

Теорема 1.7.2. *Пусть даны локально симплициальное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ и выпуклая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что $A \subset \operatorname{dom} f$. Тогда функция f является пн. св. на множестве A.*

Доказательство. Зафиксируем точку $x_0 \in A$. Пусть последовательность точек $\{x_i\} \in A$ такова, что $x_i \to x_0$ при $i \to \infty$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \sup\limits_{x \in A} f(x) = \lim\limits_{i \to \infty} f(x_i)$.

Так как множество A является локально симплициальным, то для точки x_0 найдутся симплексы $S_1, \ldots, S_m$, содержащиеся в A и удовлетворяющие определению 1.7.1. Обозначим все вершины симплексов $S_1, \ldots, S_m$ через $y_0, y_1, \ldots, y_N$, причем в силу определения 1.7.1 считаем, что $y_0 = x_0$.

Тогда в силу определения 1.7.1 для достаточно больших номеров i каждая точка x_i лежит в выпуклой оболочке точек $x_0, y_1, \ldots, y_N$, т. е.

$$x_i = \lambda_{0i} x_0 + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ji} y_j, \quad \sum_{j=0}^{N} \lambda_{ji} = 1, \quad \lambda_{ji} \geqslant 0. \tag{1.7.8}$$

В силу выпуклости функции f получаем

$$f(x_i) \leqslant \lambda_{0i} f(x_0) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ji} f(y_j). \tag{1.7.9}$$

Так как $x_i \to x_0$, то в (1.7.8) $\lambda_{0i} \to 1 - 0$, $\lambda_{ji} \to 0 + 0$ для всех $j \in \overline{1, N}$. Переходя к пределу в (1.7.9) при $i \to \infty$, получаем

$$\lim_{x \to x_0} \sup_{x \in A} f(x) = \lim_{i \to \infty} f(x_i) \leqslant f(x_0). \ \square$$

Лемма 1.7.1. *Пусть даны собственная выпуклая функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ и компактное множество A из E, причем $A \subset \operatorname{int} \operatorname{dom} f$. Тогда функция f удовлетворяет условию Липшица на множестве A.*

Доказательство. По предложению 1.2.5 $A_1 = \overline{\operatorname{co}}\, A$ является компактом и $A_1 \subset \operatorname{int} \operatorname{dom} f$. Для каждого $x \in A_1$ $\exists\, \delta(x) > 0$:

$B^\circ_{\delta(x)}(x) \subset \operatorname{int}\operatorname{dom} f$ и по теореме 1.7.1 функция f удовлетворяет условию Липшица на $B^\circ_{\delta(x)}(x)$ с некоторой константой $L(x)$. Выделим из покрытия $\bigcup\limits_{x\in A_1} B^\circ_{\delta(x)}(x)$ компакта A_1 конечное подпокрытие, т. е. $A_1 \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} B^\circ_{\delta_i}(x_i)$, $x_i \in A_1$, $\delta_i = \delta(x_i)$. Отсюда видно, что функция f удовлетворяет условию Липшица на $A \subset A_1$ с константой $L = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} L(x_i)$. $\square$

Пример 1.7.1. Приведем пример линейной функции $f\colon l_2 \to \mathbb{R}$, не ограниченной сверху в любой окрестности каждой точки (и поэтому не являющейся непрерывной).

Напомним, что базисом Гамеля в гильбертовом пространстве l_2 называется максимальное линейно независимое подмножество в l_2. Существование базиса Гамеля в l_2 можно доказать, опираясь на лемму Цорна (см. [30, гл. 1, § 14]). Также достаточно легко показать, что базис Гамеля в l_2 имеет мощность континуум. В силу сказанного будем обозначать базис Гамеля через $B = \{x_\alpha \mid \alpha \in [0, +\infty)\}$, где параметр α принимает все значения из вещественной полупрямой $[0, +\infty)$, причем $\|x_\alpha\| = 1$ для всех $\alpha \in [0, +\infty)$. В силу определения базиса Гамеля любой вектор из l_2 единственным образом представим в виде конечной линейной комбинации элементов из B.

Определим теперь функцию f. Пусть $f(x_\alpha) = \alpha$ для всех $\alpha \in [0, +\infty)$. Для каждого вектора $x \in l_2$ справедливо его представление через элементы базиса Гамеля вида $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_{\alpha_k}$, откуда по определению полагаем $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_{\alpha_k}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k$. Полученная функция, очевидно, является линейной на пространстве l_2. Зафиксируем произвольные точку $x \in l_2$ и число $\varepsilon > 0$. Для любого числа $\alpha \in [0, +\infty)$ выполнено включение $x + \varepsilon x_\alpha \in B_\varepsilon(x)$, откуда следует неограниченность сверху функции f на шаре $B_\varepsilon(x)$, а именно

$$\sup_{y\in B_\varepsilon(x)} f(y) \geqslant \sup_{\alpha\geqslant 0} f(x + \varepsilon x_\alpha) = \sup_{\alpha\geqslant 0} \big(f(x) + \varepsilon\cdot\alpha\big) = +\infty.$$

Приведем усиленный вариант леммы 1.7.1.

Теорема 1.7.3. *Пусть $U \subset E$ — открытое выпуклое множество и A — компакт, причем $A \subset U$. Пусть семейство выпуклых пн. сн. функций $\{f_i \mid i \in I\}$ удовлетворяет условиям*:

1) $\sup\limits_{i\in I} f_i(x) < +\infty \quad \forall\, x \in U$;

2) *функция* $\sup\limits_{i\in I} f_i(x)$ *ограничена сверху на некотором открытом множестве, содержащемся в* U;

3) $\exists\, x_0 \in U\colon\ \inf\limits_{i\in I} f_i(x_0) > -\infty$.

Тогда функции $\{f_i\}$ *равномерно ограничены и удовлетворяют условию Липшица на компакте* A *с одной и той же константой, т. е. существует число* $L > 0$ *такое, что для* $\forall x_1,\ x_2 \in A$ *справедливы соотношения* $|f_i(x_1) - f_i(x_2)| \leqslant L\|x_1 - x_2\|\ \ \forall\, i$.

Доказательство. Пусть $A_1 = \overline{\mathrm{co}}\, A$. По предложению 1.2.5 множество A_1 также является компактом, причем $A_1 \subset U$.

1) Покажем, что функции f_i равномерно ограничены на компакте A_1.

Определим функцию $f(x) = \sup\limits_{i\in I} f_i(x)$. Ясно, что функция f является собственной выпуклой и пн. сн. функцией, так как надграфик $\mathrm{epi}\, f = \bigcap\limits_{i\in I} \mathrm{epi}\, f_i$, т. е. он является выпуклым и замкнутым множеством как пересечение выпуклых и замкнутых надграфиков функций f_i. При этом $U \subset \mathrm{int}\,\mathrm{dom}\, f$.

По следствию 1.7.1 функция f является локально липшицевой на U.

1, а). Покажем, что функции f_i равномерно ограничены сверху на A_1. В силу локальной липшицевости f для $\forall\, x \in A_1$ существует $\delta(x) > 0$ такое, что функция f ограничена сверху на $B^{\circ}_{\delta(x)}(x)$ некоторым числом $\alpha(x)$. Так как A_1 — компакт, то существует конечный набор точек $\{x_i\}_{i=1}^m$ такой, что $A_1 \subset \bigcup\limits_{i=1}^m B^{\circ}_{\delta_i/4}(x_i)$, где $\delta_i = \delta(x_i)$.

Пусть $\varepsilon = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \dfrac{\delta_i}{4}$. Тогда справедливы включения

$$A_1 + B_\varepsilon(0) \subset \bigcup_{i=1}^m (B^{\circ}_{\delta_i/4}(x_i) + B^{\circ}_{\delta_i/4}(0)) \subset \bigcup_{i=1}^m (B^{\circ}_{\delta_i}(x_i)).$$

На правом множестве функция f ограничена сверху числом $\alpha_1 = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \alpha(x_i)$, при этом

$$\alpha_1 \geqslant \sup_{x\in A_1 + B_\varepsilon(0)} f(x) \geqslant \sup_{x\in A_1 + B_\varepsilon(0)} f_i(x) \quad \forall\, i. \tag{1.7.10}$$

1, б). Покажем равномерную ограниченность снизу.

Пусть x_0 взято из условия 3) теоремы, и пусть $\beta_1 = \inf\limits_{i\in I} f_i(x_0)$. По условию $\beta_1 > -\infty$. Найдутся числа $\gamma > 0$ и β_2 такие, что $B_\gamma(x_0) \subset U$ и $\beta_2 = \sup\limits_{x\in B_\gamma(x_0)} f(x) < +\infty$.

Зафиксируем произвольную точку $x \in U$, $x \neq x_0$, и определим точку $z = x_0 + \dfrac{\gamma(x_0 - x)}{\|x_0 - x\|}$ и число $\lambda = \dfrac{\gamma}{\gamma + \|x_0 - x\|}$.

Легко проверить, что $\lambda \in (0;1)$, $x_0 = (1-\lambda)z + \lambda x$ и $\|z - x_0\| = \gamma$, в силу чего для каждого $i \in I$ получаем

$$\beta_1 \leqslant f_i(x_0) \leqslant (1-\lambda)f_i(z) + \lambda f_i(x) \leqslant (1-\lambda)\beta_2 + \lambda f_i(x) \leqslant \\ \leqslant |\beta_2| + \lambda f_i(x) \Rightarrow f_i(x) \geqslant \frac{\beta_1 - |\beta_2|}{\lambda} \geqslant \beta_1 - |\beta_2| = \alpha_2.$$

Из пунктов 1, а) и 1, б) следует, что все функции f_i ограничены сверху и снизу на множестве $A_1 + B_\varepsilon(0) \supset A$.

2) Покажем, что все функции f_i липшицевы на A_1 с одной константой L.

Выберем произвольные точки $x, y \in A_1$, и определим точку $z = y + \dfrac{\varepsilon(y-x)}{\|y-x\|}$. В силу определения $z \in A_1 + B_\varepsilon(0)$.

Определим число $\lambda = \dfrac{\|x-y\|}{\varepsilon + \|x-y\|}$, тогда получим, что $y = (1-\lambda)x + \lambda z$. В силу выпуклости функции f_i отсюда получаем

$$f_i(y) \leqslant (1-\lambda)f_i(x) + \lambda f_i(z) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \|x-y\|}\, f_i(x) + \frac{\|x-y\|}{\varepsilon + \|x-y\|}\, f_i(z) = \\ = f_i(x) + \frac{\|x-y\|}{\varepsilon + \|x-y\|}\,(f_i(z) - f_i(x)) \leqslant f_i(x) + \frac{\|x-y\|}{\varepsilon}\,(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Неравенство остается верным при перестановке y и x. Отсюда следует липшицевость функций f_i на A_1 с общей константой $L = \dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{\varepsilon}$. $\square$

Теорема 1.7.4. *Пусть $U \subset E$ — открытое выпуклое множество, V — счетное плотное подмножество множества U. Пусть последовательность выпуклых полунепрерывных снизу функций f_i удовлетворяет условиям* 1)–3) *теоремы* 1.7.3, *и пусть для каждой точки $x \in V$ существует $\lim\limits_{i\to\infty} f_i(x) \in \mathbb{R}$.*

Тогда существует выпуклая функция f, к которой на U поточечно сходится последовательность f_i, причем на каждом компакте из U сходимость будет равномерной. Кроме того, для всякой сходящейся последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset U$ такой, что $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x \in U$, следует равенство $\lim\limits_{i\to\infty} f_i(x_i) = f(x)$.

Доказательство. Пусть $A \subset U$ — произвольный компакт. По теореме 1.7.3 найдется число $L > 0$ такое, что при любом номере $i \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leqslant L\|x - y\| \quad \forall\, x,\, y \in A.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть A_0 — некоторая конечная $\varepsilon/(3L)$-сеть множества A, причем $A_0 \subset V$. Так как A_0 — конечное множество, а последовательность функций f_i сходится поточечно на $V \supset A_0$, то найдется номер i_0 такой, что

$$|f_i(z) - f_j(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, i > i_0 \quad \forall\, j > i_0 \quad \forall\, z \in A_0.$$

Выберем любую точку $x \in A$. Тогда найдется точка $z \in A_0$ такая, что $\|x - z\| \leqslant \varepsilon/(3L)$. Для всех $i,\, j > i_0$ получаем

$$|f_i(x) - f_j(x)| \leqslant |f_i(x) - f_i(z)| + |f_i(z) - f_j(z)| + |f_j(z) - f_j(x)| \leqslant$$
$$\leqslant L\|x - z\| + \frac{\varepsilon}{3} + L\|x - z\| \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, для каждой точки $x \in A$ числовая последовательность $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ является фундаментальной, т. е. она сходится к некоторому значению, которое обозначим $f(x)$. Так как номер i_0 не зависит от выбора точки $x \in A$, то последовательность функций $\{f_i\}$ сходится к новой функции f равномерно на множестве A. Из этих рассуждений, в частности, следует, что для любой точки $x_0 \in U \backslash V$ последовательность $\{f_i(x_0)\}$ сходится: достаточно рассмотреть случай, когда в качестве множества A взято множество $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{x_i\}\right) \cup \{x_0\}$, где $x_i \in V$ и $\lim\limits_{i \to \infty} x_i = x_0$.

Определенная выше функция $f\colon U \to \overline{\mathbb{R}}$, очевидно, является выпуклой, так как неравенство выпуклости в пределе сохраняется.

Отметим, что функция f является собственной и ограниченной сверху на открытом подмножестве из U, на котором по условию теоремы $\sup\limits_{1 \leqslant i < \infty} f_i(x)$ ограничен сверху, поэтому по следствию 1.7.1 она локально липшицева на U.

Докажем последнее утверждение теоремы. Для данной в условии теоремы последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset U$ и точки $x = \lim\limits_{i \to \infty} x_i$ берем в качестве компакта A множество $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{x_i\}\right) \cup \{x\}$. Возьмем число $\eta > 0$ такое, что $B_\eta(x) \subset U$. Пусть L_0 — константа Липшица функции f на $B_\eta(x)$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что $\varepsilon/(3L_0) < \eta$. Пусть A_0 есть $\varepsilon/(6L_0)$-сеть множества A. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ выберем точку $z_i \in A_0$ так, чтобы $\|x_i - z_i\| < \varepsilon/(6L_0)$. Тогда

$$|f_i(x_i) - f(x)| \leqslant |f_i(x_i) - f_i(z_i)| + |f_i(z_i) - f(z_i)| + |f(z_i) - f(x)|.$$

Первое слагаемое меньше $\varepsilon/3$ в силу липшицевости функций f_i с общей константой L.

Второе слагаемое при достаточно больших i меньше $\varepsilon/3$, так как для каждого $y \in A_0$ имеем $f_i(y) \to f(y)$.

В силу оценки $\|x - z_i\| \leqslant \|x_i - z_i\| + \|x_i - x\|$ при достаточно большом i (когда $\|x_i - x\| < \varepsilon/(6L_0)$) для третьего слагаемого получаем $|f(z_i) - f(x)| \leqslant L_0\|z_i - x\| \leqslant \varepsilon/6 + L_0\|x_i - x\| < \varepsilon/3$. $\square$

Теорема 1.7.5. *Пусть банахово пространство E сепарабельно, U — открытое выпуклое подмножество в E. Пусть $\{f_i\}$ — последовательность функций, удовлетворяющая условиям* 1)–3) *теоремы* 1.7.3. *Тогда найдется подпоследовательность последовательности $\{f_i\}$, сходящаяся к выпуклой функции на U, причем на любом компакте из U сходимость будет равномерной.*

Доказательство. По теореме 1.7.4 достаточно построить подпоследовательность последовательности $\{f_i\}$, сходящуюся на счетном плотном подмножестве $V \subset U$.

Выберем (в силу сепарабельности E) счетное плотное в U подмножество $V = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$.

По условию числовая последовательность $\{f_i(x_1)\}_{i=1}^{\infty}$ ограничена. Значит, найдутся число $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ и счетное подмножество индексов $I_1 \subset \mathbb{N}$ такие, что $\lim\limits_{i\to\infty,\ i\in I_1} f_i(x_1) = \alpha_1$.

Числовая последовательность $\{f_i(x_2)\,|\, i \in I_1\}$ также ограничена, поэтому найдутся число $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ и счетное подмножество индексов $I_2 \subset I_1$ такие, что $\min I_1 < \min I_2$ и $\lim\limits_{i\to\infty,\ i\in I_2} f_i(x_2) = \alpha_2$.

Продолжая процесс по индукции, находим для числовой последовательности $\{f_i(x_{k+1})\,|\, i \in I_k\}$ число $\alpha_{k+1} \in \mathbb{R}$ и бесконечное множество индексов $I_{k+1} \subset I_k$ такие, что $\min I_k < \min I_{k+1}$ и $\lim\limits_{i\to\infty\ i\in I_{k+1}} f_i(x_{k+1}) = \alpha_{k+1} \in \mathbb{R}$.

Определим счетное множество индексов I, состоящее из первых элементов множеств $\{I_k\}$. По построению множества I получаем, что $\lim\limits_{i\to\infty,\ i\in I} f_i(x_j) = \alpha_j$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Следовательно, полученная функциональная подпоследовательность $\{f_i \mid i \in I\}$ поточечно сходится на V. $\square$

Упражнение 1.7.1. Привести пример выпуклой функции $f\colon B_1(0) \to \mathbb{R}$, где $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, которая в точке $(1, 0)$ не пн. сн. и не пн. св.

Упражнение 1.7.2. Доказать, что в $\mathbb{R}^n$ всякая выпуклая функция f непрерывна на $\operatorname{int}\operatorname{dom} f$.

Упражнение 1.7.3. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое выпуклое множество, $T = [0; 1]$. Функция $f\colon T \times U \to \mathbb{R}$ обладает свойствами: 1) $\forall\, t \in T$ функция $x \to f(t, x)$ выпукла; 2) $\forall\, x \in U$ функция $t \to \to f(t, x)$ непрерывна. Доказать, что f непрерывна по совокупности переменных на $T \times U$.

Упражнение 1.7.4. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — открытое выпуклое множество. Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема на X. Доказать, что функция f выпукла тогда и только тогда, когда для любого $x_0 \in X$ квадратичная форма

$$k(p) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i\, \partial x_j}\, p_i p_j$$

неотрицательна при всех $p \in \mathbb{R}^n$.

Упражнение 1.7.5. Доказать, что функция $f\colon l_2 \to \mathbb{R}$ вида $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\, x_n^2$ является собственной выпуклой функцией, причем она не ограничена в любой относительной окрестности любой точки из $\operatorname{dom} f$ и поэтому разрывна в каждой точке из $\operatorname{dom} f$.

§ 1.8. *P*-множества

В математике известны различные классы множеств. Некоторые из них мы рассмотрели в первом параграфе этой главы. Выпуклые множества позволяют находить новые классы множеств с определенными свойствами. Примерами таких классов являются классы выпуклых многогранников и классы строго выпуклых множеств. В последующих главах мы изучим классы сильно выпуклых множеств. В данном параграфе, опираясь на результаты работы [14], мы опишем еще один интересный, на наш взгляд, класс выпуклых компактных множеств из $\mathbb{R}^n$, обладающих определенной регулярностью границы и включающий в себя классы выпуклых многогранников и строго выпуклых множеств.

Для описания этого класса множеств по заданному произвольному вектору $q \in \mathbb{R}^n$, $\|q\| = 1$, определим прямую $l(q) = \{\lambda q \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ и подпространство $L(q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, q\rangle = 0\}$. Таким образом, пространство $\mathbb{R}^n$ представим в виде прямой суммы подпространств $L(q)$ и $l(q)$, т. е. $\mathbb{R}^n = L(q) \oplus l(q)$. В итоге произвольная точка $z \in \mathbb{R}^n$ представима в виде $z = x + \mu q$, где $x \in L(q)$, а $\mu \in \mathbb{R}$, или, короче, $z = (x; \mu)$. Опираясь на такое представление, определим линейный оператор проектирования $P_{L(q)}\colon \mathbb{R}^n \to L(q)$ по формуле $P_{L(q)} z = x$, где $z = (x;\mu)$. В результате для произвольного выпуклого компакта $A \subset \mathbb{R}^n$ определим функцию

$$f_{A,q}\colon P_{L(q)}A \to \mathbb{R}; \quad f_{A,q}(x) = \min\{\mu \,|\, (x;\mu) \in A\} \quad \forall\, x \in P_{L(q)}A. \tag{1.8.1}$$

Лемма 1.8.1. *Для любого вектора $q \in \mathbb{R}^n$, $\|q\| = 1$, и любого выпуклого компакта $A \subset \mathbb{R}^n$ функция $f_{A,q}$ из* (1.8.1) *является собственной выпуклой пн. сн. функцией на $P_{L(q)}A$.*

Доказательство. Функция $f_{A,q}$, очевидно, является собственной выпуклой функцией. Известно, что для выпуклой функции $f = f_{A,q}$ условие ее пн. сн. эквивалентно замкнутости лебеговых множеств функции f, т.е. множеств вида $\mathrm{L}_\alpha(f) = \{x \in P_{L(q)}A \,|\, f(x) \leqslant \alpha\}$ (см. теорему 1.5.1). Поскольку, очевидно, справедливо равенство

$$\{x \in P_{L(q)}A \,|\, f(x) \leqslant \alpha\} = P_{L(q)}\left(A \cap \{(x;\mu) \,|\, \mu \leqslant \alpha\}\right),$$

а последнее множество замкнуто, то функция f является пн. сн. на $P_{L(q)}A$. $\square$

Определение 1.8.1. Выпуклый компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *P-множеством*, если для каждого вектора $q \in \mathbb{R}^n$, у которого $\|q\| = 1$, функция $f_{A,q}$, определенная выражением (1.8.1), непрерывна на множестве $P_{L(q)}A$ (рис. 4).

Лемма 1.8.2. *Пусть даны P-множество $A \subset \mathbb{R}^n$, число $\lambda \in \mathbb{R}$ и точка $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда множества λA и $A + a$ являются P-множествами.*

Доказательство. Для проверки определения 1.8.1 выберем произвольный вектор $q \in \mathbb{R}^n$, $\|q\| = 1$, по которому определены прямая $l(q) = \{z \in \mathbb{R}^n \,|\, z = \mu q,\ \mu \in \mathbb{R}\}$ и подпространство $L(q) = \{z \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle z, q\rangle = 0\}$. Тогда для любого вектора $z \in \mathbb{R}^n$ справедливо представление $z = x + \mu q$, т.е. $z = (x;\mu)$. При необходимости указания зависимости компонентов $(x;\mu)$ от z будем писать $z = (x(z);\mu(z))$, причем по свойству проекций полученные функции $x(z)$ и $\mu(z)$ непрерывны. В частности, данная точка a представима в виде $a = (x(a);\mu(a))$. Тогда из формулы (1.8.1) следует равенство

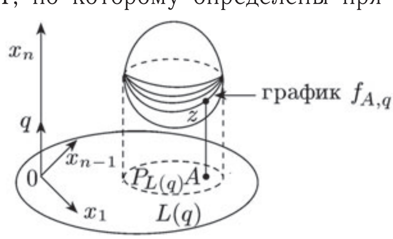


Рис. 4

$$f_{A+a,q}(x) = f_{A,q}(x - x(a)) + \mu(a) \quad \forall\, x \in P_{L(q)}(A + a). \tag{1.8.2}$$

При $\lambda = 0$ утверждение леммы очевидно. При $\lambda > 0$ из формулы (1.8.1) следует равенство

$$f_{\lambda A,q}(\lambda x) = \lambda f_{A,q}(x) \quad \forall\, x \in P_{L(q)}A,$$

а при $\lambda < 0$ — равенство

$$f_{\lambda A,q}(\lambda x) = |\lambda|\, f_{A,-q}(x) \quad \forall\, x \in P_{L(q)}A.$$

Таким образом, из непрерывности функции $f_{A,q}$ следует непрерывность соответствующих функций (1.8.2)–(1.8.4) для множеств $A + a$ и λA. $\square$

Лемма 1.8.3. *Всякий выпуклый многогранник из $\mathbb{R}^n$ и всякий выпуклый компакт из $\mathbb{R}^2$ являются P-множествами.*

Доказательство. Если A — выпуклый многогранник из $\mathbb{R}^n$, то для любого вектора $q \in \mathbb{R}^n$, $\|q\| = 1$, множество $P_{L(q)}A$ также является выпуклым многогранником, т. е. локально симплициальным множеством (см. определение 1.7.1).

В случае, когда выпуклый компакт A принадлежит плоскости $\mathbb{R}^2$, его проекция $P_{L(q)}A$ является отрезком (или точкой), т. е. это также локально симплициальное множество.

По теореме 1.7.2 всякая выпуклая функция, определенная на локально симплициальном множестве, является пн. св., т. е. функция $f_{A,q}$ пн. св. на многограннике $P_{L(q)}A$. То, что функция $f_{A,q}$ является пн. сн., следует из леммы 1.8.1. $\square$

Лемма 1.8.4. *Всякий строго выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$ является P-множеством.*

Доказательство. Пусть A — строго выпуклый компакт, т. е. его граница не содержит отрезков. Для проверки определения 1.8.1 выберем произвольный вектор $q \in \mathbb{R}^n$, $\|q\| = 1$, соответствующие прямую $l(q)$, подпространство $L(q)$ и оператор проектирования $P_{L(q)}$. Из сильной выпуклости множества A, очевидно, следует сильная выпуклость множества $P_{L(q)}A$ в подпространстве $L(q)$.

Поскольку соответствующая выпуклая функция $f_{A,q}$ из (1.8.1) непрерывна на непустом множестве $\operatorname{int} P_{L(q)}A \subset L(q)$ (см. следствие 1.7.1), то с учетом леммы 1.8.1 достаточно проверить пн. св. функции $f_{A,q}$ на границе $\partial P_{L(q)}A$ области определения функции.

Допустим, что функция $f_{A,q}$ не является пн. св. в некоторой точке $x_0 \in \partial P_{L(q)}A$, т. е. найдется последовательность точек $x_k \in \operatorname{int} P_{L(q)}A$ такая, что $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$ и $\mu_0 = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) > f(x_0)$. Тогда в силу замкнутости и выпуклости множества A отрезок $[(x_0; f(x_0)),\ (x_0; \mu_0)]$ принадлежит множеству A. Если допустить, что какая-то точка этого отрезка является внутренней точкой множества A, то приходим к противоречию с включением $x_0 \in \partial P_{L(q)} A$. Таким образом, весь отрезок $[(x_0; f(x_0)),\ (x_0; \mu_0)]$ принадлежит границе ∂A, но это в свою очередь противоречит строгой выпуклости множества A. □

Лемма 1.8.5. *Пусть выпуклые компакты A_1 и A_2 из $\mathbb{R}^n$ являются P-множествами. Тогда непустое множество $A = A_1 \cap A_2$ также является P-множеством.*

Доказательство. Для проверки определения 1.8.1 выберем произвольный вектор $q \in \mathbb{R}^n$, $\|q\| = 1$. Пусть выпуклые функции $f = f_{A,q}$, $f_1 = f_{A_1,q}$ и $f_2 = f_{A_2,q}$ определены в силу (1.8.1) для соответствующих множеств A, A_1, A_2.

Очевидно, справедливо равенство $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$ при $x \in P_{L(q)} A \subset P_{L(q)} A_1 \cap P_{L(q)} A_2$. В силу этого и из непрерывности по условию функций f_1 и f_2 на $P_{L(q)} A$ получаем непрерывность функции f. □

Лемма 1.8.6. *Пусть даны P-множество $A \subset \mathbb{R}^n$ и аффинное множество $H \subset \mathbb{R}^n$ размерности $k < n$ такие, что $A \cap H \neq \varnothing$. Тогда для любого $x \in A \cap H$ множество $(A - x) \cap (H - x)$ является P-множеством в несущем подпространстве $H - x$.*

Доказательство леммы 1.8.6 очевидно.

Лемма 1.8.7. *Пусть даны три непустые множества A, A_1, $A_2 \subset \mathbb{R}^n$ такие, что справедливо равенство $A = A_1 \overset{*}{-} A_2$, а множество A_1 является P-множеством. Тогда множество A также является P-множеством.*

Доказательство. Пусть задан вектор $q \in \mathbb{R}^n$, $\|q\| = 1$, по которому определены прямая $l(q) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = \mu q,\ \mu \in \mathbb{R}\}$ и подпространство $L(q) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, q\rangle = 0\}$. Тогда для любого вектора $z \in \mathbb{R}^n$ справедливо представление $z = x + \mu q$, т. е. $z = (x; \mu)$, а точнее $z = (x(z); \mu(z))$, причем функции $x(z)$ и $\mu(z)$ непрерывны.

По формуле (1.8.1) для соответствующих множеств A, A_1, $A_1 - z$ определим функции $f_{A,q}\colon P_{L(q)} A \to \mathbb{R}$, $f_{A_1,q}\colon P_{L(q)} A_1 \to \mathbb{R}$ и $f_{A_1-z,q}\colon P_{L(q)}(A_1 - z) \to \mathbb{R}$ для любого $z \in \mathbb{R}^n$. Из формулы (1.8.2) следует равенство

$$f_{A_1-z,q}(y) = f_{A_1,q}(y + x(z)) - \mu(z) \quad \forall\, y \in P_{L(q)}(A_1 - z). \tag{1.8.5}$$

Так как по определению разности множеств A_1 и A_2 справедливо выражение $A = \bigcap\limits_{z \in A_2} (A_1 - z)$, то получаем равенство

$$f_{A,q}(x) = \sup\{f_{A_1-z,q}(x) \mid z \in A_2\} \quad \forall\, x \in P_{L(q)} A. \tag{1.8.6}$$

Из непрерывности (по условию) функции $f_{A_1,q}$ и из формулы (1.8.5) следует равномерная непрерывность функций $f_{A_1-z,q}$ на компакте $P_{L(q)}A$, причем равномерно по всем значениям параметра $z \in A_2$, а именно

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0, \quad \forall\, x_1, x_2 \in P_{L(q)}A\colon \|x_1 - x_2\| \leqslant \delta(\varepsilon) \quad \forall\, z \in A_2,$$

$$|f_{A_1-z,q}(x_1) - f_{A_1-z,q}(x_2)| \leqslant \varepsilon. \tag{1.8.7}$$

Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и точки $x_1, x_2 \in P_{L(q)}A$ такие, что $\|x_1 - x_2\| \leqslant \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon)$ взято из выражения (1.8.7). Определим максимизирующую последовательность $\{z_k\} \subset A_2$ для выражения $\sup\{f_{A_1-z,q}(x_1) \,|\, z \in A_2\}$. Из условия (1.8.7) для любого номера k следует неравенство

$$f_{A_1-z_k,q}(x_1) - f_{A_1-z_k,q}(x_2) \leqslant \varepsilon.$$

Переходя в этом выражении к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\sup\{f_{A_1-z,q}(x_1) \,|\, z \in A_2\} - \lim\sup_{k\to\infty} f_{A_1-z_k,q}(x_2) \leqslant \varepsilon.$$

Так как $\lim\sup_{k\to\infty} f_{A_1-z_k,q}(x_2) \leqslant \sup\{f_{A_1-z,q}(x_2) \,|\, z \in A_2\}$, то

$$\sup\{f_{A_1-z,q}(x_1) \,|\, z \in A_2\} - \sup\{f_{A_1-z,q}(x_2) \,|\, z \in A_2\} \leqslant \varepsilon.$$

Аналогичное неравенство верно с заменой x_1 на x_2, т. е., используя $\delta(\varepsilon)$ из (1.8.7) и формулу (1.8.6), получаем

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0, \quad \forall\, x_1, x_2 \in P_{L(q)}\, A\colon \|x_1 - x_2\| \leqslant \delta(\varepsilon),$$

$$|f_{A,q}(x_1) - f_{A,q}(x_2)| \leqslant \varepsilon,$$

что означает равномерную непрерывность функции $f_{A,q}$ на множестве $P_{L(q)}A$. $\square$

Перейдем к более сложным свойствам P-множеств.

Приведем характерное свойство, отличающее P-множества от других выпуклых компактов.

Лемма 1.8.8. *Пусть дано P-множество $A \subset \mathbb{R}^n$, причем $0 \in A$. Тогда для любой сходящейся последовательности точек $\{a_k\} \subset A$, у которой $\lim_{k\to\infty} a_k = a \neq 0$, существуют последовательности точек $\{b_k\} \subset A$ и чисел $\lambda_k \geqslant 0$ такие, что*

$$\lim_{k\to\infty} b_k = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = 1$$

и для любого номера $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $b_k = a_k - \lambda_k a$.

Доказательство. По условию леммы справедливы соотношения

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, k_1(\varepsilon) \quad \forall\, k \geqslant k_1(\varepsilon) \quad \|a - a_k\| \leqslant \varepsilon. \tag{1.8.8}$$

По точке a зададим прямую $l(a) = \{z \mid z = \mu a/\|a\|,\ \mu \in \mathbb{R}\}$ и ортогональное ей подпространство $L(a) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, a\rangle = 0\}$, причем всякий вектор $w \in \mathbb{R}^n$ представим в виде $w = z + \mu a/\|a\|$, т. е. $w = (z; \mu)$, где $z = P_{L(a)}w \in L(a)$, а $\mu \in \mathbb{R}$. В частности, точки $a_k \in A$ получают представление в виде $a_k = (z_k; \mu_k)$, где $z_k = P_{L(a)}a_k$, $\mu_k \in \mathbb{R}$. Точка a представима в виде $a = (0; \|a\|)$.

Отсюда, следуя (1.8.1), определим функцию $g\colon P_{L(a)}A \to \mathbb{R}$ по формуле $g(z) = f_{A,a}(z) = \min\{\mu \mid (z;\mu) \in A\}$ для $\forall\, z \in P_{L(a)}A \subset L(a)$. Так как по условию леммы множество A является P-множеством, функция g непрерывна на множестве $P_{L(a)}A$. Из включения $a_k \in A$ и определения функции g следует неравенство $g(z_k) \leqslant \mu_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.

Из соотношения (1.8.8) и представлений точек a_k и a получаем для точек z_k выражение

$$\forall\,\varepsilon > 0, \quad \forall\, k \geqslant k_1(\varepsilon) \quad \|z_k\| \leqslant \|a - a_k\| \leqslant \varepsilon. \tag{1.8.9}$$

В свою очередь из сходимости последовательности $\{z_k\}$ к нулю и из непрерывности функции g следует выражение

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, k_2(\varepsilon) \quad \forall\, k \geqslant k_2(\varepsilon) \quad |g(0) - g(z_k)| \leqslant \varepsilon. \tag{1.8.10}$$

Определим номера $k_3(\varepsilon) = \max\{k_1(\varepsilon), k_2(\varepsilon)\}$ и $k_4 = k_3(\|a\|/3)$, а также точки $b_k = (z_k; g(z_k) - g(0)) \quad \forall\, k > k_4$ и $b_k = a_k \quad \forall\, k \in \overline{1, k_4}$. Так как по условию $0 \in A$, то справедливо неравенство $g(0) \leqslant 0$. Из этого неравенства, с одной стороны, и из неравенства $g(z_k) \leqslant \mu_k$, с другой стороны, следует, что точки b_k и a_k лежат на одном луче $\{(z_k; g(z_k)) + \mu a \mid \mu \geqslant 0\}$, причем $\|b_k - (z_k; g(z_k))\| = |g(0)|$ при всех $k > k_4$. Кроме того, из представления точки a в виде $a = (0; \|a\|)$ и неравенства $g(0) \leqslant 0$ следует равенство $\|a - (0; g(0))\| = \|a\| + |g(0)|$.

В силу этого и соотношений (1.8.9), (1.8.10) для числа $\varepsilon = \|a\|/3$ и для всех номеров $k > k_4$ получаем оценки

$$\begin{aligned}
\mu_k - g(z_k) &= \|a_k - (z_k; g(z_k))\| \geqslant \\
&\geqslant \|a - (0; g(0))\| - \|a_k - a\| - \|(0; g(0)) - (z_k; g(z_k))\| \geqslant \\
&\geqslant \|a - (0; g(0))\| - \|a_k - a\| - \|z_k\| - \|g(0) - g(z_k)\| \geqslant \\
&\geqslant \|a\| + |g(0)| - 3\varepsilon = |g(0)|,
\end{aligned}$$

т. е. справедливы включения $b_k \in [(z_k; g(z_k)),\ a_k] \subset A$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Кроме того, из определения точек b_k для любого $\varepsilon > 0$ при всех номерах $k > k_3(\varepsilon)$ следует, что $\|b_k\| \leqslant \|z_k\| + |g(0) - g(z_k)| \leqslant 2\varepsilon$.

Таким образом, последовательность точек $b_k \in A$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$ и справедливы включения $b_k \in \{a_k - \lambda a \mid \lambda \geqslant 0\}$, т. е. существуют числа $\lambda_k \geqslant 0$ такие, что справедливы равенства $b_k = a_k - \lambda_k a$ для $\forall k \in \mathbb{N}$. При этом из равенств $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$ следует равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 1$. $\square$

Теорема 1.8.1 (М.В. Балашов [14]). *Пусть даны P-множества $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$. Тогда их сумма $A = A_1 + A_2$ также является P-множеством.*

Доказательство. Пусть задан произвольный вектор $q \in \mathbb{R}^n$, $\|q\| = 1$, по которому определены прямая $l(q) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = \mu q, \mu \in \mathbb{R}\}$, подпространство $L(q) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, q\rangle = 0\}$ и линейный оператор $P_{L(q)}$ ортогонального проектирования на подпространство $L(q)$. Тогда для любого вектора $z \in \mathbb{R}^n$ определено представление вида $z = x + \mu q$, т. е. $z = (x; \mu)$, где $x = P_{L(q)} z$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Договоримся под i подразумевать числа 1 или 2. Для каждого множества A_i, следуя (1.8.1), в любой точке $x \in P_{L(q)} A_i$ определим функцию $f_i(x) = \min\{\mu \mid (x; \mu) \in A_i\}$. По условию теоремы каждая функция f_i непрерывна на множестве $P_{L(q)} A_i$.

Для множества A, следуя (1.8.1), определим функцию $f(x) = \min\{\mu \mid (x; \mu) \in A\}$, где $x \in P_{L(q)} A$. Требуется доказать, что эта функция также непрерывна.

Легко проверить, что функция $f(x)$ при $x \in P_{L(q)} A$ может быть представлена в виде

$$f(x) = \min\left\{ f_1(u_1) + f_2(u_2) \mid u_1 + u_2 = x,\ u_i \in P_{L(q)} A_i \right\}. \tag{1.8.11}$$

В самом деле, зафиксируем произвольную точку $x \in P_{L(q)} A$. В силу очевидного равенства $P_{L(q)} A = P_{L(q)} A_1 + P_{L(q)} A_2$ найдутся точки $u_i \in P_{L(q)} A_i$ такие, что $u_1 + u_2 = x$. Выбрав любые такие точки u_i, обозначим $f_i(u_i) = \mu_i$. Отсюда следует включение $(x; \mu_1 + \mu_2) \in A$, т. е. по определению функции f имеем $f(x) \leqslant \mu_1 + \mu_2 = f_1(u_1) + f_2(u_2)$.

В свою очередь обозначим $\mu_0 = f(x)$. Это значит, что $(x; \mu_0) \in A = A_1 + A_2$. Следовательно, существуют точки $(x_i; \mu_i^o) \in A_i$ такие, что $x_1 + x_2 = x$ и $\mu_1^o + \mu_2^o = \mu_0$. Докажем от противного, что справедливы равенства $\mu_i^o = f_i(x_i)$. Допустим, что $\mu_1^o > f_1(x_1) = \mu_1^{oo}$, а $\mu_2^o \geqslant f_2(x_2) = \mu_2^{oo}$. Тогда $(x_i; \mu_i^{oo}) \in A_i$, откуда следует

$(x; \mu_1^{oo} + \mu_2^{oo}) \in A$ и $\mu_1^{oo} + \mu_2^{oo} < \mu_0 = f(x)$, что противоречит определению функции f. Таким образом, $f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, и равенство (1.8.11) доказано.

По лемме 1.8.1 функция f является пн. сн.

Допустим, что функция f не является пн. св. на множестве $P_{L(q)}A$, т. е. существуют точки $x \in P_{L(q)}A$ и $x_i \in P_{L(q)}A_i$, а также последовательность точек $t_k \in P_{L(q)}A$, сходящаяся к точке x при $k \to \infty$, такие, что с учетом формулы (1.8.11) справедливо выражение

$$\lim_{k\to\infty} f(t_k) > f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2),\ x = x_1 + x_2. \tag{1.8.12}$$

Заменяя, если нужно, множество A_1 на множество $A_1 - (x_1; f_1(x_1))$, а множество A_2 — на множество $A_2 - (x_2; f_2(x_2))$ (в силу леммы 1.8.2 при этом они останутся P-множествами), будем считать, что $0 \in A_1 \cap A_2$ и справедливы равенства $x_1 = x_2 = x = 0 \in L(q)$ и $f_1(0) = f_2(0) = f(0) = 0$.

По определению множества A и в силу формулы (1.8.11) для каждого номера $k \in \mathbb{N}$ найдутся точки $x_k^i \in P_{L(q)}A_i$ такие, что $x_k^1 + x_k^2 = t_k$ и $f_1(x_k^1) + f_2(x_k^2) = f(t_k)$. В силу компактности множеств $P_{L(q)}A_i$ можно выделить в последовательностях $\{x_k^i\}$ сходящиеся подпоследовательности, т. е. существуют точки $y_i \in P_{L(q)}A_i$ такие, что $x_k^i \to y_i$ при $k \to \infty$ и $y_1 + y_2 = 0\,(= \lim\limits_{k\to\infty} t_k)$, причем из непрерывности функций f_i и из неравенства (1.8.12) получаем в пределе неравенство

$$f_1(y_1) + f_2(y_2) > f(0) = 0.$$

Таким образом, $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$.

Рассмотрим последовательность точек $a_k^i = (x_k^i, f_i(x_k^i)) \in A_i$, сходящуюся по доказанному выше к точке $a_i = (y_i; f_i(y_i))$. По лемме 1.8.8 для каждого $i = 1, 2$ существуют последовательности чисел $\lambda_k^i \geqslant 0$ и точек $b_k^i \in A_i$ таких, что $\lim\limits_{k\to\infty} b_k^i = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k^i = 1$ и справедливы равенства $b_k^i = a_k^i - \lambda_k^i a_i$ для $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Определим последовательность точек $\{c_k^i\}$, задаваемых равенством $c_k^i = P_{L(q)} b_k^i$. Ясно, что справедливо включение $c_k^i \in P_{L(q)}A_i$ и $\lim\limits_{k\to\infty} c_k^i = 0$ (так как $\|c_k^i\| \leqslant \|b_k^i\|$). Кроме того, из равенства $b_k^i = a_k^i - \lambda_k^i a_i$ в подпространстве $L(q)$ следует равенство $c_k^i = x_k^i - \lambda_k^i y_i$.

Определим числа λ_k по формуле $\lambda_k = \min\{\lambda_k^1, \lambda_k^2\}$. Очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 1$.

Определим для каждого $i = 1, 2$ последовательность точек $\{d_k^i\}$ следующим образом: $d_k^i = x_k^i - \lambda_k y_i \in [c_k^i, x_k^i] \subset P_{L(q)}A_i$.

В силу изложенного выше каждая последовательность $\{d_k^i\} \subset \subset P_{L(q)}A_i$ является бесконечно малой, причем $d_k^1 + d_k^2 = x_k^1 + x_k^2 - - \lambda_k(y_1 + y_2) = t_k$ для $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Из формулы (1.8.11) для $\forall\, k \in \mathbb{N}$ следует неравенство $f(t_k) \leqslant \leqslant f_1(d_k^1) + f_2(d_k^2)$, из которого, переходя к пределу и учитывая непрерывность функций f_i, получаем неравенство

$$\lim_{k\to\infty} f(t_k) \leqslant \lim_{k\to\infty} (f_1(d_k^1) + f_2(d_k^2)) = f_1(0) + f_2(0) = f(0) = 0,$$

что противоречит неравенству (1.8.12) (напомним, что в нем после преобразования множеств A_i справедливо равенство $x_1 = x_2 = x = = 0$). □

Теорема 1.8.2 (М.В. Балашов [14]). *Пусть даны P-множество $A \subset \mathbb{R}^n$, линейный оператор $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и множество $B = TA$. Тогда отображение $T\colon A \to B$ является открытым в индуцированных на множествах A и B топологиях.*

Замечание 1.8.1. Топологию, индуцированную на A, следует понимать как $\tau_A = A \cap \tau_{R^n}$, т.е. окрестностью точки $a \in A$ является всякое множество вида $(a + U) \cap A$, где U — окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$. Топология, индуцированная на B, определяется так же: $\tau_B = B \cap \tau_{R^m}$.

Доказательство. Доказательство того, что отображение T является открытым в некоторой точке x из множества A, получается путем замены множества A на множество $A - x$, допустимой в силу леммы 1.8.2. Таком образом, оно сводится к случаю, когда $0 \in A$, $0 \in B$, и требуется доказать, что отображение $T\colon A \to B$ является открытым в нуле.

При этом достаточно доказать утверждение о том, что для любой последовательности $\{y_k\} \subset B$ такой, что $y_k \to 0$ при $k \to \infty$, найдутся подпоследовательность последовательности $\{y_k\}$ (снова обозначаем ее $\{y_k\}$) и последовательность $\{b_k\} \subset A$ такие, что $Tb_k = y_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $b_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Вначале покажем, что из последнего утверждения в самом деле будет следовать то, что отображение $T\colon A \to B$ открыто в нуле. Допустим противное, т.е. пусть отображение $T\colon A \to B$ не является открытым в нуле. Это значит, что существует число $\delta > 0$ такое, что для любого номера $k \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение

$$B_{1/k}(0) \cap B \not\subset T\,(B_\delta(0) \cap A)\,,$$

т.е. найдутся точки $y_k \in B_{1/k}(0) \cap B$ такие, что

$$y_k \notin T\,(B_\delta(0) \cap A)\,. \qquad (1.8.13)$$

В силу приведенного выше утверждения существует последовательность точек $b_k \in A$ такая, что $b_k \to 0$ при $k \to \infty$ и $Tb_k = y_k$. Это означает, что при больших номерах k будет справедливо включение $b_k \in B_\delta(0) \cap A$, что противоречит соотношению (1.8.13).

Теперь докажем требуемое утверждение. Зафиксируем произвольную последовательность точек $\{y_k\} \subset B$ такую, что $y_k \to 0$ при $k \in \infty$. Для каждого номера $k \in \mathbb{N}$ найдется точка $a_k \in A$, удовлетворяющая равенству $Ta_k = y_k$. В силу компактности множества A существует точка $a \in A$, для которой (выбирая, быть может, подпоследовательность) получаем $a_k \to a$ при $k \to \infty$, причем очевидно, что $Ta = 0$. Если точка $a = 0$, то все доказано. Рассмотрим случай, когда точка $a = 0$.

По лемме 1.8.8 существуют последовательности чисел $\lambda_k \geqslant 0$ и точек $b_k \in A$ таких, что $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 1$ и справедливы равенства $b_k = a_k - \lambda_k a$ для $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Отсюда получаем равенство

$$Tb_k = Ta_k - \lambda_k Ta = Ta_k = y_k,$$

т. е. b_k — искомая в утверждении последовательность. Утверждение и теорема доказаны. □

Теорема 1.8.3 (М.В. Балашов [14]). *Пусть даны линейный оператор $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и P-множество $A \subset \mathbb{R}^n$. Тогда множество $B = TA$ также является P-множеством.*

Доказательство. Пусть задан произвольный вектор $q \in \mathbb{R}^m$, $\|q\| = 1$, по которому определены прямая $l(q) = \{z \in \mathbb{R}^m \mid z = \mu q,\ \mu \in \mathbb{R}\}$ и подпространство $L(q) = \{z \in \mathbb{R}^m \mid \langle z, q\rangle = 0\}$. Пусть $P_{L(q)}$ — линейный оператор ортогонального проектирования на подпространство $L(q)$. Тогда для любого вектора $z \in \mathbb{R}^m$ определено представление вида $z=x+\lambda q$, т. е. $z=(x;\lambda)$, где $x=P_{L(q)}z$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Для каждой точки $x \in P_{L(q)}B$ определим функцию $f(x) = \min\{\lambda \mid (x;\lambda) \in B\}$. Докажем, что функция f непрерывна на $P_{L(q)}B$.

Допустим противное, т. е. пусть существуют точка $x_0 \in P_{L(q)}B$, точка $d \in \mathbb{R}^m$ и последовательность точек $x_k \in P_{L(q)}B$ такие, что $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$ и

$$\lim_{k\to\infty} (x_k; f(x_k)) = d, \quad \text{причем} \quad d \neq (x_0; f(x_0)).$$

Определим точки $d_k = (x_k; f(x_k))$ при $\forall\, k \in \mathbb{N}$ и $d_0 = (x_0; f(x_0))$. По допущению и по определению функции f получаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) > f(x_0)$, т. е. вектор $d - d_0 \neq 0$ сонаправлен с вектором q.

Выберем точки a_0 и a из множестваA такие, для которых $d_0 = Ta_0$ и $d = Ta$.

Далее, заменяя множество A множеством $A - a_0$, считаем, что $a_0 = 0 \in A$, $d_0 = 0$ и $d \neq 0$. Отсюда следует, что вектор $d = Ta$ сонаправлен с вектором q и $a \neq 0$.

В силу теоремы 1.8.2 об открытом отображении для оператора $T\colon A \to B$ существует последовательность точек $a_k \in A$ такая, что $Ta_k = d_k$ при $\forall\, k \in \mathbb{N}$ и $a_k \to a$ при $k \to \infty$.

По лемме 1.8.8 существуют последовательности чисел $\lambda_k \geqslant 0$ и точек $b_k \in A$ таких, что $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 1$ и справедливы равенства $b_k = a_k - \lambda_k a$ для $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Поэтому существует номер k_0 такой, что справедливы неравенства $\lambda_k \geqslant 1/2$ для $\forall\, k \geqslant k_0$.

Для номеров $k > k_0$ получаем

$$Tb_k = Ta_k - \lambda_k Ta = d_k - \lambda_k d.$$

Поскольку вектор d сонаправлен с вектором q, то из последнего равенства следует, что точка $Tb_k \in B$ лежит ниже (относительно направления прямой $l(q)$), чем точка $d_k = (x_k; f(x_k))$, что невозможно по определению функции f. Получили противоречие, в силу которого допущение о разрывности функции f было неверным. $\square$

Пример 1.8.1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ множество A вида (рис. 5)

$$A = \mathrm{co}\,\left\{\{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 1,\ x_3 = 1\} \cup \{(0,0,0)\}\right\}.$$

Покажем, что данный выпуклый компакт не является P-множеством.

Возьмем вектор $q = (0,0,1)$, т. е. получаем гиперплоскость $L(q) = 0x_1x_2$ и прямую $l(q) = 0x_3$. Тогда проекция множества A на $L(q)$ получается вида $P_{L(q)}A = \{(x_1, x_2, 0) \,|\, x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leqslant 1\}$. В силу этого определим функцию

$$f(x_1, x_2) = \min\{x_3 \,|\, (x_1, x_2, x_3) \in A\} \qquad \forall\,(x_1, x_2, 0) \in P_{L(q)}A.$$

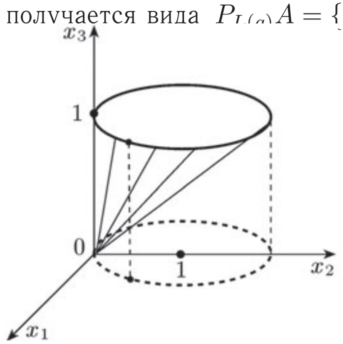


Рис. 5

Очевидно, что $f(0,0) = 0$, а при любом значении $\varphi \in (-\pi/2, 0)$ справедливо равенство $f(\cos\varphi,\, 1 + \sin\varphi) = 1$. Отсюда следует, что данная функция f не является пн. св. в точке $(0,0)$, т. е. данное множество A не является P-множеством.

Пример 1.8.2. Покажем, что теорема 1.8.2 неверна без предположении о том, что множество A является P-множеством. Для этого рассмотрим множество A из примера 1.8.1.

Пусть T — оператор ортогонального проектирования на плоскость $0x_1x_2$. Легко видеть, что $TA = \big\{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leqslant \leqslant 1\big\}$. Взяв $\delta \in (0, 1/2)$, получаем

$$T\,(B_\delta(0) \cap A) \subset$$
$$\subset T\left(\operatorname{co}\left\{\left\{\left(x_1, x_2, \frac{1}{2}\right) \,\middle|\, x_1^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\} \cup \{(0,0,0)\}\right\}\right) =$$
$$= \left\{(x_1, x_2, 0) \,\middle|\, x_1^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 1/4\right\}.$$

Последнее множество не является окрестностью нуля во множестве TA.

§ 1.9. Теоремы об отделимости

В теореме 1.1.8 мы рассмотрели случай отделимости двух непересекающихся множеств с помощью построения непересекающихся окрестностей этих множеств. Для выпуклых множеств, как покажем ниже, имеет место другая отделимость непересекающихся множеств с помощью гиперплоскости, разделяющей все пространство на два полупространства, каждое из которых содержит по одному из данных множеств. При этом задание гиперплоскости и полупространств удобно осуществлять с помощью линейных функционалов. По принципу: от простого к сложному, мы рассмотрим утверждения об отделимости сначала для множеств из гильбертова пространства (и даже из $\mathbb{R}^n$), а уж затем для множеств из банахова пространства. В гильбертовом пространстве теоремы об отделимости приобретают простой геометрический смысл, так как здесь (как покажем ниже) существует единственная проекция на всякое выпуклое замкнутое множество.

Определим следующие понятия разделения множеств.

Определение 1.9.1. 1) Пусть множества A и B из E таковы, что существует линейный функционал $p \in E^*\backslash\{0\}$ такой, что $\langle p, a\rangle \leqslant \langle p, b\rangle \quad \forall\, a \in A, \ \ \forall\, b \in B$. Это значит, что существует число $\alpha = \sup\{\langle p, a\rangle \,|\, a \in A\}$, при котором справедливы включения

$$A \subset H_p^-(\alpha) = \{z \in E \,|\, \langle p, z\rangle \leqslant \alpha\}, \quad B \subset H_p^+(\alpha) = \{z \in E \,|\, \langle p, z\rangle \geqslant \alpha\}.$$

В этом случае говорят, что гиперплоскость $H_p(\alpha) = \{z \in E \,|\, \langle p, z\rangle = \alpha\}$ (или функционал p) *отделяет* (или *разделяет*) множества A и B.

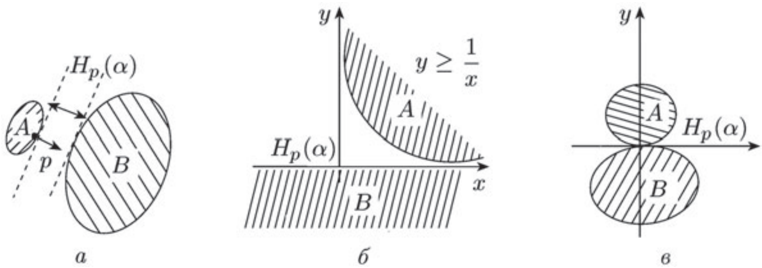


Рис. 6. Разделение множеств: *а* — сильное; *б* — строгое; *в* — нестрогое

2) Если, более того, имеется строгое неравенство $\langle p, a\rangle < \langle p, b\rangle$ $\forall\, a \in A$, $\forall\, b \in B$, т. е. существует число $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $A \subset H_p^-(\alpha)$ и $B \subset \operatorname{int} H_p^+(\alpha)$ или $A \subset \operatorname{int} H_p^-(\alpha)$ и $B \subset H_p^+(\alpha)$, то говорят, что гиперплоскость $H_p(\alpha)$ (или функционал p) *строго разделяет* множества A и B.

3) Если, более того, существует число $\delta > 0$ такое, что $\langle p, a\rangle + \delta \leqslant \langle p, b\rangle$ $\forall\, a \in A$, $\forall\, b \in B$, то говорят, что некоторая гиперплоскость $H_p(\alpha)$ (или функционал p) *сильно разделяет* множества A и B (рис. 6).

Определим функцию расстояния от точки $x \in E$ до множества A по формуле $\varrho(x, A) = \inf\limits_{z \in A} \|x - z\|$ и многозначную функцию проекции точки x на множество A по формуле

$$P_A x = \{y \in A \mid \|x - y\| = \varrho(x, A)\}.$$

В общем случае множество $P_A x$ может оказаться как пустым, так и состоящим из одной или множества точек.

Лемма 1.9.1. *Пусть множество $A \subset \mathcal{H}$ выпукло и замкнуто. Тогда для всякой точки $x \notin A$ проекция $P_A x$ является непустым множеством, состоящим из одной точки.*

Доказательство. Пусть $x \notin A$, $\varrho = \varrho(x, A)$, и пусть $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \subset A$ — последовательность точек из A, для которой $\lim\limits_{i\to\infty} \|x - a_i\| = \varrho$. В силу равенства параллелограмма

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

получаем

$$\left\|\frac{a_i - a_j}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\,\|x - a_i\|^2 + \frac{1}{2}\,\|x - a_j\|^2 - \left\|x - \frac{a_i + a_j}{2}\right\|^2.$$

Так как $\frac{1}{2}\|x-a_i\|^2 \to \frac{\varrho^2}{2}$, $\frac{1}{2}\|x-a_j\|^2 \to \frac{\varrho^2}{2}$, а $\liminf\limits_{i\to\infty}\liminf\limits_{j\to\infty}\Big\|x - \frac{a_i+a_j}{2}\Big\|^2 \geqslant \varrho^2$, то последовательность $\{a_i\}$ является фундаментальной. Поэтому в силу замкнутости множества A существует точка $a \in A$ такая, что $a = \lim\limits_{i\to\infty} a_i$ и $\|x-a\| = \varrho$, т. е. $a \in P_A x$.

Покажем, что множество $P_A x$ состоит из одной точки a. Допустим, что существует другая точка $a_1 \in P_A x$, т. е. $a_1 \neq a$. Возьмем точку $a_0 = \frac{(a+a_1)}{2}$. Тогда $a_0 \in A$ в силу выпуклости A, а векторы $a-x$, a_1-x линейно независимы (поскольку, если это не так, т. е. $a-x = \lambda(a_1-x)$, и так как очевидно, что $\lambda \neq \pm 1$, то из этого равенства следует, что одно из чисел $\|a-x\|$, $\|a_1-x\|$ больше, что противоречит их равенству ϱ). Следовательно, с учетом леммы 1.1.1 получаем

$$\|a_0-x\|^2 = \left\|\frac{a-x}{2} + \frac{a_1-x}{2}\right\|^2 = \frac{\varrho^2}{4} + \frac{\varrho^2}{4} + \frac{1}{2}\langle a-x, a_1-x\rangle < \\ < \frac{\varrho^2}{2} + \frac{1}{2}\|a-x\|\,\|a_1-x\| = \varrho^2,$$

т. е. $\|a_0-x\| < \varrho$, что противоречит определению ϱ. $\square$

Теорема 1.9.1. *Пусть даны выпуклое замкнутое множество $A \subset \mathcal{H}$ и точка $x \notin A$. Определим вектор $p = (x - P_A x)/\|x-P_A x\| \in \partial B_1(0)$. Тогда гиперплоскость $H_p(\alpha) = \{z \in \mathcal{H} \mid \langle p, z\rangle = \alpha\}$, где $\alpha = \langle p, P_A x\rangle$, строго отделяет точку x от множества A (т. е. $x \in \operatorname{int} H_p^+(\alpha) = \{z \in \mathcal{H} \mid \langle p, z\rangle > \alpha\}$ и $A \subset H_p^-(\alpha) = \{z \in \mathcal{H} \mid \langle p, z\rangle \leqslant \alpha\}$) (рис. 7).*

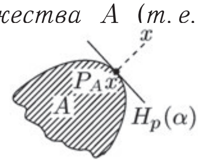


Рис. 7

Доказательство. Включение $x \in \operatorname{int} H_p^+(\alpha)$ верно, так как по определению p справедливо неравенство $\langle p, x\rangle > \langle p, P_A x\rangle$.

Допустим, что найдется точка $y \in A$ такая, что $y \in \operatorname{int} H_p^+(\alpha)$. Тогда $\langle p, y - P_A x\rangle > 0$, что эквивалентно неравенству

$$\langle x - P_A x, y - P_A x\rangle > 0. \tag{1.9.1}$$

Пусть $\lambda \in (0;1)$, и определим $x(\lambda) = \lambda y + (1-\lambda)P_A x \in A$. Очевидно, что $x(\lambda) \neq P_A x$. Отсюда следует

$$\|x - x(\lambda)\|^2 = \|x-P_A x\|^2 - 2\lambda\langle x-P_A x, y-P_A x\rangle + \lambda^2\|y-P_A x\|^2. \tag{1.9.2}$$

В силу (1.9.1) значение $-2\lambda\langle x-P_A x, y-P_A x\rangle + \lambda^2\|y-P_A x\|^2$ меньше нуля при достаточно малых $\lambda \in (0;1)$, откуда в силу (1.9.2) для малых λ получаем $\|x - x(\lambda)\|^2 < \|x - P_A x\|^2$, что противоречит определению проекции $P_A x$, по которому $\|x - P_A x\| \leqslant \|x - y\| \quad \forall\, y \in A$. $\square$

С л е д с т в и е 1.9.1. *Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — выпуклое замкнутое множество. Для каждой точки $x \notin A$ определим вектор $p(x) = \dfrac{x - P_A x}{\|x - P_A x\|}$. Тогда справедливо выражение*

$$A = \bigcap_{x \notin A} \{z \in \mathcal{H} \mid \langle p(x), z\rangle \leqslant \langle p(x), P_A x\rangle\}.$$

С л е д с т в и е 1.9.2. *Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — выпуклый компакт, $B \subset \mathcal{H}$ — выпуклое замкнутое множество и $A \cap B = \varnothing$. Тогда существуют $p \in \partial B_1(0)$ и гиперплоскость $H_p(\alpha)$, которая сильно разделяет множества A и B.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим множество $C = A - B = A + (-B)$, оно будет замкнутым (см. упр. 1.1.2) и $0 \notin C$. Возьмем $p = -P_C 0/\|P_C 0\|$, в качестве α возьмем $\|P_C 0\| \neq 0$. Применяя теорему 1.9.1, получаем утверждение следствия. $\square$

Следующие несколько результатов докажем в $\mathbb{R}^n$.

С л е д с т в и е 1.9.3. *Пусть множества A и B из $\mathbb{R}^n$ выпуклы, причем A открыто и $A \cap B = \varnothing$. Тогда существует $p \in \partial B_1(0)$ и гиперплоскость $H_p(\alpha)$, которая разделяет множества A и B.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим множество $C = A - B$, оно выпукло и открыто. Если $0 \notin \overline{C}$, то доказательство сводится к доказательству следствия 1.9.2.

Если $0 \in \overline{C}$, то существует последовательность точек $x_k \notin \overline{C}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$.

По теореме 1.9.1 для любого k найдется вектор $p_k \in \partial B_1(0)$ такой, что $\forall\, x \in \overline{C}$: $\langle p_k, x\rangle < \langle p_k, x_k\rangle$. Так как $\partial B_1(0)$ — компакт в $\mathbb{R}^n$, то, выделяя из последовательности $\{p_k\}$ сходящуюся подпоследовательность (которую снова обозначаем через $\{p_k\}$), получаем, что существует вектор $p = \lim\limits_{k\to\infty} p_k$, причем $\|p\| = 1$. Переходя в неравенстве $\langle p_k, x\rangle < \langle p_k, x_k\rangle$ к пределу по k, получаем $\langle p, x\rangle \leqslant 0 \quad \forall\, x \in \overline{C}$, откуда следует утверждение следствия. $\square$

Среди гиперплоскостей, разделяющих множества, выделим понятия опорной гиперплоскости множества и опорного ко множеству функционала, а также изучим вопрос об их существовании.

О п р е д е л е н и е 1.9.2. Функционал $p \in E^* \backslash \{0\}$ называется *опорным* ко множеству $A \subset E$ в точке $a \in \partial A$, если $A \subset \{x \in E \mid \langle p, x\rangle \leqslant \langle p, a\rangle\}$. При этом гиперплоскость $H_p(\alpha) = \{x \in E \mid \langle p, x\rangle = \alpha\}$, где

$\alpha = \langle p, a\rangle$, называется *опорной* гиперплоскостью ко множеству A в точке a.

В частности, в теореме 1.9.1 было показано, что если точка $y \in A$ является проекцией некоторой точки $x \notin A$ на выпуклое замкнутое множество A из гильбертова пространства, т. е. $y = P_A x$, то через точку y можно провести опорную гиперплоскость к данному множеству A.

Теорема 1.9.2. *Пусть A — выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$. Тогда через любую точку $x \in \partial A$ можно провести опорную гиперплоскость ко множеству A.*

Доказательство. Для точки $x \in \partial A$ найдется последовательность $\{x_k\}$, где $x_k \notin A \ \ \forall k$, такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. По теореме 1.9.1 для каждого номера $k \in \mathbb{N}$ найдется вектор $p_k \in \partial B_1(0)$, отделяющий точку x_k от множества A, т. е.

$$\langle p_k, x_k\rangle > \langle p_k, y\rangle \quad \forall\, y \in A. \tag{1.9.3}$$

В силу компактности сферы существует вектор $p \in \partial B_1(0)$ и подпоследовательность p_{km} такие, что $\lim\limits_{m\to\infty} p_{km} = p$. Переходя к пределу по $m \to \infty$ в (1.9.3) получаем, что $\langle p, x\rangle \geqslant \langle p, y\rangle \ \ \forall\, y \in A$. $\square$

Замечание 1.9.1. Ситуация, описанная в теореме 1.9.2 для $\mathbb{R}^n$, может не иметь места в случае гильбертова пространства.

Поясним это на примерах.

Пусть $\mathcal{H} = l_2$. Напомним, что пространство l_2 состоит из векторов $x \in l_2$, являющихся последовательностями, т. е. $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которых $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 < +\infty$. Скалярное произведение векторов $x,\, y \in l_2$ определяется по формуле $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$.

Пример 1.9.1. Рассмотрим в l_2 так называемый <гильбертов кирпич> $A = \{x \in l_2 \,|\, |x_k| \leqslant 1/k \ \ \forall\, k\}$. Легко показать, что множество A есть выпуклый компакт (оставляем это читателю в качестве упражнения). Кроме того, $0 \in \partial A$, так как, например, луч $\{\lambda e \,|\, \lambda > 0\}$ не пересекается со множеством A при $e = (1;\ 1/2^{2/3};\ \ldots;\ 1/k^{2/3};\ \ldots)$. Покажем, что через 0 нельзя провести опорную гиперплоскость к A.

Допустим, что это можно сделать, т. е. существует вектор $p = \{p_k\}_{k=1}^{\infty} \in \partial B_1(0) \subset l_2$ такой, что

$$\forall\, x \in A \quad \langle p, x\rangle \leqslant 0. \tag{1.9.4}$$

Зададим точку $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in A$ так, что $x_k = \operatorname{sign} p_k/k$. Тогда

$$\langle p, x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|p_k|}{k} > 0,$$

что противоречит (1.9.4).

Пример 1.9.2. Покажем, что в l_2 найдется пара выпуклых замкнутых неограниченных непересекающихся множеств, которые нельзя

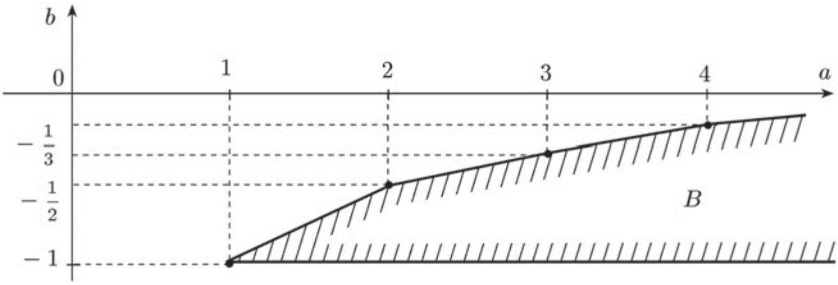


Рис. 8

разделить гиперплоскостью. (Как мы увидим ниже, если одно из множеств ограничено, то разделить их всегда можно.)

Пусть A — <гильбертов кирпич>.

Возьмем пару векторов z_1 и z_2, обладающих тем свойством, что $\{\lambda z_1 \mid \lambda \neq 0\} \cap A = \varnothing$, $\{\lambda z_2 \mid \lambda \neq 0\} \cap A = \varnothing$ и z_1, z_2 не параллельны. Например, можно взять $z_1 = (1;\, 1/2^{2/3};\, \ldots;\, 1/k^{2/3};\, \ldots)$ и $z_2 = (1;\, 1/2^{3/4};\, \ldots;\, 1/k^{3/4};\, \ldots)$.

Пусть $L = \operatorname{lin}\{z_1, z_2\}$. С помощью процесса ортогонализации введем в L ортонормированный базис, состоящий из векторов a, b.

Отметим, что L изоморфно $\mathbb{R}^2$, пусть a сонаправлен с осью абсцисс, b — с осью ординат.

Рассмотрим множества $B = \overline{\mathrm{co}} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(na - \frac{b}{n}\right)$ (рис. 8), $A_1 = \{\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ и $A_2 = A + B$. Из элементарной планиметрии следует, что $B \cap A_1 = \varnothing$ и $\inf\{\|x - y\| \mid x \in B,\ y \in A_1\} = 0$.

Отметим, что A_2 замкнуто как сумма компакта A и замкнутого множества B (см. упр. 1.1.2).

Покажем, что для любых λ, μ: $|\lambda| + |\mu| > 0$, справедливо соотношение

$$\lambda a + \mu b \notin A. \tag{1.9.5}$$

Ясно, что найдутся λ_1 и μ_1 такие, что $\lambda a + \mu b = \lambda_1 z_1 + \mu_1 z_2$, причем $|\lambda_1| + |\mu_1| > 0$. Пусть, например, $|\lambda_1| \geqslant |\mu_1|$; тогда при больших k

справедливы неравенства $\frac{|\lambda_1|}{k^{2/3}} \pm \frac{|\mu_1|}{k^{3/4}} > \frac{1}{k}$, откуда и следует (1.9.5). Таким образом, $A \cap L = \{0\}$.

Покажем, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Если бы это было не так, то нашлись бы точка $x \in A$ и точка $z = \lambda a + \mu b \in B$ (причем $\mu \neq 0$ по построению B) такие, что $x + z = \gamma a$, т. е. $x = (\gamma - \lambda)a - \mu b$, что противоречит (1.9.5).

Допустим, что существует гиперплоскость H, отделяющая множества A_1 и A_2. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ гиперплоскость H отделяет точку na от множества $A + na - b/n$. Переходя в факторпространство $\backslash a$, получаем, что для любого $n \in N$ гиперплоскость H отделяет точку 0 от множества $A - b/n$, т. е. H отделяет 0 от A, что невозможно в силу примера 1.9.1.

Конструкции, подобные описанной в примере 1.9.2, были предложены Дж. Тьюки и В. Кли (см. [141]).

Перейдем к изучению отделимости множеств в банаховых пространствах. Здесь уже мы не можем гарантировать непустоту и одноточечность проекции на выпуклое замкнутое множество. Поэтому основным инструментом для доказательства теорем отделимости будет являться теорема Хана–Банаха о продолжении линейного функционала с сохранением мажоранты.

Наиболее общая теорема об отделимости имеет следующий вид.

Теорема 1.9.3 (об отделимости). Пусть A и B — непустые выпуклые множества из банахова пространства E, причем $A \cap B = \varnothing$.

Тогда:

1) *если A открыто, то найдутся число $\gamma \in \mathbb{R}$ и функционал $p \in E^*$ такие, что*

$$\langle p, a \rangle < \gamma \leqslant \langle p, b \rangle \quad \forall\, a \in A, \quad \forall\, b \in B,$$

т. е. найдется гиперплоскость, строго разделяющая множества A и B;

2) *если множество A компактно, а B замкнуто, то найдутся число $\delta > 0$ и функционал $p \in E^*$ такие, что*

$$\langle p, a \rangle + \delta \leqslant \langle p, b \rangle \quad \forall\, a \in A, \quad \forall\, b \in B, \tag{1.9.6}$$

т. е. найдется гиперплоскость, сильно разделяющая множества A и B.

Доказательство. 1) Фиксируем произвольные точки $a_0 \in A$, $b_0 \in B$.

Определим точку $x_0 = b_0 - a_0$ и множество $C = A - B + x_0$. Очевидно, что $x_0 \neq 0$, множество C открыто и выпукло и $0 \in C$. Возьмем в качестве функции $g(x)$ функцию Минковского $\mu(x, C)$. По свойствам 2) и 3) леммы 1.6.1 эта функция g удовлетворяет условиям теоремы 1.1.5 Хана–Банаха. Так как $A \cap B = \varnothing$, то $x_0 \notin C$, откуда $g(x_0) \geqslant 1$.

Определим линейный функционал $f(\lambda x_0) = \lambda \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ на одномерном подпространстве $L = \operatorname{lin}\{x_0\}$. Если $\lambda \geqslant 0$, то $f(\lambda x_0) = \lambda \leqslant \lambda g(x_0) = g(\lambda x_0)$; если $\lambda < 0$, то $f(\lambda x_0) < 0 \leqslant g(\lambda x_0)$. Итак, $f \leqslant g$ на L. По теореме Хана–Банаха функционал f продолжаем до линейного функционала p на E, удовлетворяющего неравенству $p \leqslant g$. В частности, $\langle p, x\rangle \leqslant 1$ на C, и поэтому $\langle p, x\rangle \geqslant -1$ на $-C$, так что $\|p\| \leqslant 1$ в окрестности нуля $C \cap (-C)$. Как известно, из ограниченности линейного функционала на некоторой окрестности нуля следует его непрерывность. Итак, $p \in E^*$.

Пусть $a \in A$ и $b \in B$; тогда

$$\langle p, a\rangle - \langle p, b\rangle + 1 = \langle p, a - b + x_0\rangle \leqslant g(a - b + x_0) < 1,$$

так как $\langle p, x_0\rangle = 1$, $a - b + x_0 \in C$ и C открыто. Таким образом, $\langle p, a\rangle < \langle p, b\rangle$. Отсюда следует, что $p(A)$ и $p(B)$ — непересекающиеся выпуклые множества на прямой $\mathbb{R}$, причем $p(A)$ лежит левее $p(B)$. Кроме того, множество $p(A)$, очевидно, открыто, следовательно, множество $p(A)$ как непрерывный образ открытого связного множества является ограниченным справа открытым интервалом. В качестве γ берем правый конец этого интервала.

2) По теореме 1.1.8 существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $(A + B_\varepsilon^\circ(0)) \cap B = \varnothing$. По п. 1) данной теоремы для множества $A + B_\varepsilon^\circ(0)$ (которое выпукло и открыто) и B, получаем, что найдется $p \in E^*$ такой, что $p(A + B_\varepsilon^\circ(0))$ и $p(B)$ являются непересекающимися выпуклыми подмножествами на $\mathbb{R}$, причем множество $p(A + B_\varepsilon^\circ(0))$ открыто и лежит левее множества $p(B)$. Отсюда следует неравенство (1.9.6), так как множество $p(A)$ есть компактное подмножество множества $p(A + B_\varepsilon^\circ(0))$. $\square$

З а м е ч а н и е 1.9.2. Теорема 1.9.3 верна в любом отделимом локально выпуклом линейном топологическом пространстве: при доказательстве п. 2) вместо $B_\varepsilon^\circ(0)$ нужно взять некоторую выпуклую окрестность нуля.

С л е д с т в и е 1.9.4. *Замкнутость (замыкание) выпуклого множества $A \subset E$ в сильной и слабой топологиях локально выпуклого пространства E совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что локальной базой нуля слабой топологии пространства E является набор множеств вида

$$V = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \{x \in E \mid |\langle p_i, x\rangle| \leqslant \varepsilon_i\},$$

где $p_i \in E^*$, $\varepsilon_i > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Так как любая слабая окрестность нуля является и сильной окрестностью нуля, то слабая замкнутость множества A влечет его (сильную) замкнутость.

Пусть теперь множество A замкнуто. Рассмотрим любую точку $x_0 \notin A$. Тогда по теореме 1.9.3, п. 1) найдутся функционал $p_0 \in E^*$ и число γ_0 такие, что $\langle p_0, x_0 \rangle < \gamma_0 \leqslant \langle p_0, x \rangle \quad \forall\, x \in A$, поэтому множество $\{x \in E \,|\, \langle p_0, x \rangle < \gamma_0\}$ является слабой окрестностью точки x_0, не пересекающейся со множеством A. Объединяя такие слабые окрестности по всем точкам из дополнения ко множеству A, получаем, что дополнение к A слабо открыто, следовательно, множество A слабо замкнуто. □

Следствию 1.9.4 можно придать следующий смысл.

Следствие 1.9.5 (опорный принцип). *Выпуклое замкнутое множество $A \subset E$ совпадает с пересечением всех содержащих его замкнутых полупространств.*

Следствие 1.9.6. *В рефлексивном банаховом пространстве, если $A \cap B = \varnothing$, где A и B — выпуклые замкнутые множества, причем одно из них ограничено, то эти множества сильно отделимы, т. е. для них справедливо утверждение теоремы* 1.9.3, *п.* 2).

Доказательство. В рефлексивном пространстве E всякое выпуклое замкнутое ограниченное множество является компактным в слабой топологии, поэтому в силу замечания 1.9.2 следует применить теорему 1.9.3, п. 2) к пространству E со слабой топологией. □

Замечание 1.9.3. В. Кли построил в произвольном нерефлексивном сепарабельном банаховом пространстве пример выпуклых замкнутых ограниченных непересекающихся множеств, которые не могут быть разделены гиперплоскостью или функционалом из E^* [141]. Таким образом, теорема 1.9.3 и ее следствие 1.9.6 не могут быть усилены.

В силу того, что в банаховом пространстве существуют две естественные топологии, нормированная (сильная) и слабая, то можно говорить о сильно и слабо полунепрерывных снизу функциях. Это не одно и то же.

Лемма 1.9.2. *Пусть E — банахово пространство. Тогда каждая слабо пн. сн. функция на E является сильно пн. сн., а каждая выпуклая пн. сн. функция на E является слабо пн. сн.*

Доказательство. Так как каждое слабо замкнутое множество в $E \times \mathbb{R}$ является также и сильно замкнутым, то по теореме 1.5.1 из слабой пн. сн. следует сильная пн. сн. функции.

Обратно, для выпуклой сильно пн. сн. функции ее надграфик является выпуклым замкнутым множеством (по теореме 1.5.1), а в силу следствия 1.9.4 получаем, что ее надграфик будет слабо замкнутым множеством, т. е. по теореме 1.5.1 функция слабо пн. сн. □

Отсюда получаем критерий существования минимума у полунепрерывной снизу выпуклой функции, определенной на бесконечномерном пространстве.

Теорема 1.9.4. *Пусть E — рефлексивное банахово пространство, пусть $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая пн. сн. функция и $A \subset E$ — выпуклое замкнутое и ограниченное подмножество. Тогда функция f достигает минимума на A, т. е. существует точка $x_0 \in A$ такая, что $f(x_0) \leqslant f(x)$ для всех $x \in A$.*

Доказательство. В силу леммы 1.9.2 функция f слабо пн. сн. на E, а по следствию 1.9.4 множество A слабо замкнуто. Так как A содержится в некотором замкнутом шаре, который в силу теоремы 1.1.7 является слабым компактом, то и множество A как замкнутое подмножество компакта в слабой топологии также будет слабо компактным. Применяя теорему 1.5.2 для случая пространства E со слабой топологией, получаем утверждение теоремы. □

Рассмотрим теперь вопрос о существовании опорных функционалов (см. определение 1.9.2) в граничных точках выпуклых множеств из банахова пространства.

Теорема 1.9.5. *Пусть даны выпуклое множество $A \subset E$ и точка $a \in \partial A$. Если существует точка $x_0 \notin A$ такая, что $\|x_0 - a\| = \inf\limits_{z \in A} \|x_0 - z\|$, то существует опорный функционал ко множеству A в точке a.*

Доказательство. Пусть $\varrho = \|x_0 - a\| > 0$. Открытый шар $B^\circ_\varrho(x_0)$ не пересекается со множеством A по условию. По теореме 1.9.3 найдется ненулевой линейный функционал $p \in E^*$ такой, что $\sup\{\langle p, x\rangle \mid x \in A\} \leqslant \inf\{\langle p, y\rangle \mid y \in B^\circ_\varrho(x_0)\} \leqslant \langle p, a\rangle$, т. е. функционал p является опорным ко множеству A в точке a. □

Отметим, что если множество A выпукло и $\operatorname{int} A \neq \varnothing$, то в силу теоремы 1.9.3 в каждой точке $x \in \partial A$ найдутся опорная гиперплоскость и опорный функционал (так как эту точку x можно отделить от выпуклого открытого множества $\operatorname{int} A$.

В случае, когда $\operatorname{int} A = \varnothing$, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.9.6. *Пусть $A \subset E$ — выпуклое замкнутое множество. Пусть*

$$\forall\, x \notin A \quad \exists\, a \in A\colon\ \|x - a\| = \inf\{\|x - z\| \mid z \in A\}. \tag{1.9.7}$$

Тогда существует всюду плотное подмножество граничных точек множества A, в каждой точке которого существует опорный функционал.

Доказательство. Зафиксируем граничную точку $a \in \partial A$ и последовательность точек $\{x_n\} \notin A$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

По условию теоремы существуют точки $a_n \in \partial A$ такие, что $\|x_n - a_n\| = \inf\{\|x_n - z\| \mid z \in A\}$. По теореме 1.9.5 в каждой точке a_n найдется опорный функционал p_n. Доказательство завершается оценкой

$$\|a - a_n\| \leqslant \|a - x_n\| + \|x_n - a_n\| \leqslant 2\|x_n - a\| \to 0. \ \square$$

Следствие 1.9.7. *Условие* (1.9.7) *теоремы* 1.9.6 *выполняется для любого выпуклого замкнутого множества в случае, когда пространство E является рефлексивным банаховым пространством.*

Рассмотрим теперь в некотором смысле обратные задачи к теоремам об отделимости. Допустим, что в каждой граничной точке множества существует опорная гиперплоскость или для каждой точки из дополнения этого множества существует и единственна проекция на множество. Что можно утверждать о выпуклости такого множества? Приведем несколько результатов такого сорта.

Теорема 1.9.7. *Пусть замкнутое множество A из гильбертова пространства $\mathcal{H}$ таково, что $\operatorname{int} A \neq \varnothing$. Если в каждой точке границы множества A существует опорная гиперплоскость, то A выпукло.*

Доказательство. Зафиксируем $x \in \operatorname{int} A$. Рассуждая от противного, допустим, что найдутся точки $y,\ z \in A$ и $a \in [y,z]$, но $a \notin A$. Так как $x \in \operatorname{int} A$, а $a \notin A$, то отрезок $[x,a]$ пересекает границу ∂A хотя бы в одной точке $u \in \partial A$.

Пусть $H_p(\alpha)$ — опорная гиперплоскость к A в точке u, т. е. $\alpha = \langle p,u\rangle$. Так как $x \in \operatorname{int} A$, то $x \notin H_p(\alpha)$, откуда $\operatorname{aff}\{x,y,z\} \not\subset H_p(\alpha)$. Очевидно, что $\dim \operatorname{aff}\{x,y,z\} = 2$, так как иначе при $\dim \operatorname{aff}\{x,y,z\} = 1$ получили бы, что из того, что $\langle p,u\rangle = s(p,A)$, $u \in [y,z]$, а $H_p(\alpha)$ — опорная гиперплоскость к A в точке u, следует, что $\langle p,y\rangle = \langle p,u\rangle = \langle p,z\rangle$. Поэтому $\langle p,x\rangle = \langle p,u\rangle$, т. е. $x \in H_p(\alpha)$, что противоречит тому, что $x \in \operatorname{int} A$.

Следовательно, гиперплоскость $H_p(\alpha)$ пересекает плоскость $\operatorname{aff}\{x,y,z\}$ по прямой, проходящей через точку u. Но точка u является внутренней точкой треугольника xyz в плоскости $\operatorname{aff}\{x,y,z\}$, поэтому указанная выше прямая разделяет либо точки x и y, либо y и z, что невозможно. $\square$

Отметим, что в теореме 1.9.7 требование $\operatorname{int} A \neq \varnothing$ существенно, что показывает пример дуги окружности в $\mathbb{R}^2$, для которой выполнены все условия теоремы 1.9.7, кроме условия непустоты внутренности множества, и данное множество, очевидно, не является выпуклым множеством.

Отметим, что теорема 1.9.7 верна в более общем случае для множеств из банахова пространства, если для множества A потребовать, чтобы на плотном подмножестве границы множества A существовали опорные гиперплоскости. Доказательство не очень сильно отличается от доказательства теоремы 1.9.7 и предоставляется читателю в качестве упражнения.

Теорема 1.9.8 (Т. Моцкин [158]). *Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто и для любой точки $z_0 \in \mathbb{R}^n$ существует единственная точка $x_0 \in A$, ближайшая к z_0, т. е. $x_0 = P_A z_0$. Тогда множество A является выпуклым.*

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Допустим, что множество A не выпукло. Тогда найдутся точки x_1 и x_2 из A и $y \in [x_1, x_2]$ такое, что $y \notin A$. В силу замкнутости множества A существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$B_\varepsilon(y) \cap A = \varnothing. \tag{1.9.8}$$

Рассмотрим множество Ω, состоящее из всех замкнутых шаров $B_\varrho(z)$ таких, что $B_\varepsilon(y) \subset B_\varrho(z)$ и $B_\varrho^\circ(z) \cap A = \varnothing$. Отметим, что $\Omega \neq \varnothing$, так как $B_\varepsilon(y) \in \Omega$.

Покажем, что из условия $x_1, x_2 \notin B_\varrho^\circ(z)$ $\forall\, B_\varrho(z) \in \Omega$ следует, что числовое множество $\{\varrho\}_\Omega$, составленное из значений радиусов шаров из Ω, ограничено.

Пусть $\delta = \|x_1 - x_2\|$ и $B_\varrho(z) \in \Omega$. Без ограничения общности считаем, что $z \neq y$ и величина угла $x_1 y z$ лежит в промежутке $[\pi/2, \pi)$. Тогда $\|y - z\| \leqslant \varrho - \varepsilon$, $\|z - x_2\| \geqslant \varrho$, $\|y - x_2\| < \delta$ и (так как угол $x_2 y z$ острый)

$$\|y - z\|^2 + \|y - x_2\|^2 \geqslant \|x_2 - z\|^2,$$

т. е.

$$\varrho^2 - 2\varepsilon\varrho + \varepsilon^2 + \|y - x_2\|^2 \geqslant \varrho^2,$$

откуда $\varrho_0 \leqslant \dfrac{\delta^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon}$, где $\varrho_0 = \sup\{\varrho \mid B_\varrho(z) \in \Omega\}$.

Так как все шары из Ω содержат $B_\varepsilon(y)$, то множество точек $\{z\}_\Omega$, составленное из центров шаров из Ω, также ограничено и содержится в шаре $B_{\varrho_0}(y)$. Следовательно, найдется максимизирующая последовательность шаров $\{B_{\varrho_k}(z_k)\} \subset \Omega$ такая, что $\varrho_k \to \varrho_0 - 0$, $z_k \to z_0$, т. е. $h(B_{\varrho_k}(z_k), B_{\varrho_0}(z_0)) \to 0$.

Покажем, что для шара $B_{\varrho_0}(z_0)$ выполняется включение

$$B_\varepsilon(y) \subset B_{\varrho_0}(z_0). \tag{1.9.9}$$

Действительно, если включение (1.9.9) не выполнено, то найдется точка $x \in B_\varepsilon(y) \backslash B_{\varrho_0}(z_0)$ такая, что $\varrho(x, B_{\varrho_0}(z_0)) = \gamma > 0$. Тогда в силу оценки (см. упр. 1.3.1)

$$|\varrho(x, B_{\varrho_0}(z_0)) - \varrho(x, B_{\varrho_k}(z_k))| \leqslant h(B_{\varrho_k}(z_k), B_{\varrho_0}(z_0))$$

получаем, что для достаточно больших k, при которых справедливо неравенство $h(B_{\varrho_k}(z_k), B_{\varrho_0}(z_0)) < \gamma/2$, выполнено $\varrho(x, B_{\varrho_k}(z_k)) \geqslant$ $\geqslant \gamma/2$, что невозможно, так как $x \in B_\varepsilon(y) \subset B_{\varrho_k}(z_k)$.

Аналогично включению (1.9.9) доказывается соотношение

$$B^\circ_{\varrho_0}(z_0) \cap A = \varnothing. \tag{1.9.10}$$

Покажем, что $B_{\varrho_0}(z_0) \cap A \neq \varnothing$. Если бы это было не так, то в силу компактности шара $B_{\varrho_0}(z_0)$ и замкнутости множества A по теореме 1.1.8 нашлось бы число $\delta > 0$ такое, что шар $B_{\varrho_0+\delta}(z_0)$ сохранял бы свойства (1.9.9) и (1.9.10). Но это означало бы, что $B_{\varrho_0+\delta}(z_0) \in \Omega$, т. е. противоречило бы определению числа ϱ_0.

Так как по условию проекция точки z_0 на множество A единственна, то определим точку

$$x_0 = \partial B_{\varrho_0}(z_0) \cap A. \tag{1.9.11}$$

В силу (1.9.8), (1.9.9) и (1.9.11) множество $\partial B_\varepsilon(y) \cap \partial B_{\varrho_0}(z_0)$ может быть: 1) либо пустым; 2) либо точкой $w \neq x_0$ (рис. 9).

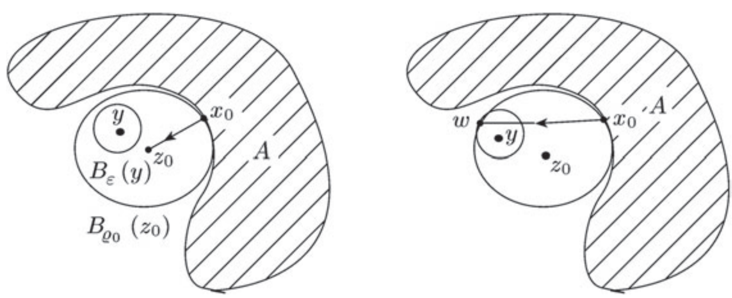


Рис. 9. *а* — случай 1); *б* — случай 2)

В случае 1) сдвинем (по теореме 1.1.8) шар $B_{\varrho_0}(z_0)$ на малое расстояние по вектору $z_0 - x_0$. В случае 2) сдвинем (по теореме 1.1.8) шар $B_{\varrho_0}(z_0)$ на малое расстояние по вектору $w - x_0$.

Касание шара $B_{\varrho_0}(z_0)$ с A исчезнет в обоих случаях, а сдвиг подберем столь малым, чтобы выполнялись условия (1.9.9) и (1.9.10). В результате сдвига шар $B_{\varrho_0}(z_0)$ перейдет в шар $B_{\varrho_0}(z_0')$. По теореме 1.1.8 радиус шара $B_{\varrho_0}(z_0')$ можно немного увеличить с сохранением свойств (1.9.9) и (1.9.10), что противоречит определению ϱ_0. $\square$

Упражнение 1.9.1. Доказать, что непустые множества A и B из банахова пространства E отделимы функционалом $p \in E^* \setminus \{0\}$ тогда и только тогда, когда справедливо неравенство

$$s(p, A) + s(-p, B) \leqslant 0.$$

Упражнение 1.9.2. Доказать, что непустые множества A и B из банахова пространства E сильно отделимы функционалом $p \in E^* \setminus \{0\}$ тогда и только тогда, когда справедливо неравенство

$$s(p, A) + s(-p, B) < 0.$$

Упражнение 1.9.3. Пусть A — выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства $\mathcal{H}$, $x, y \notin A$. Показать, что для проекций $P_A x$ и $P_A y$ точек x и y на A выполнено неравенство

$$\|P_A x - P_A y\| \leqslant \|x - y\|.$$

Упражнение 1.9.4. Доказать, что для того, чтобы выпуклые замкнутые множества A, B из гильбертова пространства $\mathcal{H}$ можно было отделить гиперплоскостью, необходимо и достаточно, чтобы

$$0 \notin \operatorname{int}(A + (-B)).$$

Упражнение 1.9.5. Доказать, что для того, чтобы выпуклые замкнутые множества A, B из гильбертова пространства $\mathcal{H}$ можно было сильно отделить гиперплоскостью, необходимо и достаточно, чтобы $0 \notin \overline{A + (-B)}$. Это эквивалентно тому, что $\inf\{\|x - y\| \mid x \in A,\ y \in B\} > 0$.

Упражнение 1.9.6. Опираясь на то, что для неограниченных замкнутых множеств возможно $A - B \neq \overline{A - B}$, предъявить два замкнутых выпуклых множества из $\mathbb{R}^2$, которые можно разделить строго, но нельзя сильно.

Упражнение 1.9.7. Показать, что в следствии 1.9.3 множества A и B можно разделить строго.

Упражнение 1.9.8. Найти несколько точек «гильбертова кирпича», через которые можно провести опорную гиперплоскость.

Упражнение 1.9.9. Показать, что если $A \subset \mathcal{H}$ — выпуклое замкнутое множество, то в ∂A существует плотное подмножество точек, через которые можно провести опорную гиперплоскость.

Упражнение 1.9.10. Пусть E — банахово пространство, $x_0 \in E$. Доказать, что найдется линейный функционал $p_0 \in E^*$, $\|p_0\|_* = 1$, такой, что $\langle p_0, x_0 \rangle = \|x_0\|$.

Упражнение 1.9.11. Пусть линейно связный компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ является локально выпуклым, т. е. $\forall x \in A \quad \exists \varepsilon(x) > 0$ такое, что каждое множество $B_{\varepsilon(x)}(x) \cap A$ выпукло. Доказать, что множество A выпукло.

Указание. Доказать, что без ограничения общности можно считать, что $0 \in A$ и в линейной оболочке множества A выполнены условия $\operatorname{int} A \neq \varnothing$ и $A = \overline{\operatorname{int} A}$. Далее воспользоваться следующим свойством выпуклых множеств: пусть C — выпуклое замкнутое ограниченное множество. Для любых $x \in \operatorname{int} C$ и $y \in \partial B_1(0)$ определим луч $l_x = \{x + \lambda y \mid \lambda \geqslant 0\}$ и точку $z = l_x \cap \partial C$. Тогда $\{z + \lambda y \mid \lambda > 0\} \cap \cap C = \varnothing$.

Решение упр. 1.9.11 другим методом для более общего случая можно найти в работе [6].

§ 1.10. Теорема Хелли

Для непосредственной демонстрации многочисленных приложений теорем об отделимости рассмотрим один из важнейших результатов комбинаторной геометрии — теорему Хелли [31].

Теорема 1.10.1 (Э. Хелли). *Пусть $\mathcal{F}$ — семейство выпуклых множеств из $\mathbb{R}^n$, мощность которого $|\mathcal{F}| > n + 1$. Пусть $\mathcal{F}$ удовлетворяет условиям*:

1) *любые $n + 1$ элементов из $\mathcal{F}$ имеют общую точку*;

2) *либо $|\mathcal{F}| < \infty$, либо все элементы семейства $\mathcal{F}$ являются компактами.*

Тогда пересечение всех элементов $\mathcal{F}$ непусто.

Доказательство. 1) Начнем со случая, когда $|\mathcal{F}| < \infty$ и все элементы $\mathcal{F}$ являются компактами. Используем индукцию по размерности k пространства. На прямой, т. е. при $k = 1$, утверждение теоремы очевидно. Допустим, что оно уже доказано для множеств из пространств размерностей $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Докажем его при $k = n$, т. е. для множеств из $\mathbb{R}^n$.

1, а) Пусть для начала семейство $\mathcal{F}$ таково, что $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots \ldots, A_{n+2}\}$ (т. е. $|\mathcal{F}| = n + 2$). Допустим, что утверждение теоремы неверно, т. е. $\bigcap\limits_{i=1}^{n+2} A_i = \varnothing$. Определим множество $A = \bigcap\limits_{i=1}^{n+1} A_i$. По условию теоремы $A \neq \varnothing$, а $A \cap A_{n+2} = \varnothing$. Так как множества A и A_{n+2} суть выпуклые компакты, то по следствию 1.9.2 существует гиперплоскость H, которая сильно разделяет множества A и A_{n+2}, при этом $H \cap A = \varnothing$ и $H \cap A_{n+2} = \varnothing$. В аффинном подпространстве $\operatorname{aff} H = H$ рассмотрим множества $\{H \cap A_i\}_{i=1}^{n+1}$. Так как произвольные n множеств из $\{A_i\}_{i=1}^{n+1}$ имеют непустые пересечения как с A_{n+2}, так и с A, то в силу выпуклости они имеют непустое пересечение с H, т. е. множества $\{H \cap A_i\}_{i=1}^{n+1}$ удовлетворяют условию 1) теоремы в аффинном пространстве H, причем $\dim H = n - 1$. По предположению индукции $H \cap A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1} \neq \varnothing$, что противоречит выбору H.

1, б) Допустим, что утверждение теоремы доказано для любого семейства мощности s при некотором $s > n + 1$ (в п. 1, а) оно доказано для случая $s = n + 2$). Докажем его для семейств мощности $s + 1$. Пусть семейство $\mathcal{F}$ таково, что $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i=1}^{s+1}$. Рассмотрим s множеств вида $A_i^* = A_i \cap A_{s+1}$, $1 \leqslant i \leqslant s$. В силу доказанного в п. 1, а) любые $n + 1$ из s множеств $\{A_i^*\}_{i=1}^{s}$ имеют непустое пересечение. Следовательно, по допущению $\bigcap\limits_{i=1}^{s} A_i^* \neq \varnothing$, т. е. $\bigcap\limits_{i=1}^{s+1} A_i \neq \varnothing$. Этим осуществляется шаг индукции по s и завершается доказательство п. 1).

2) Пусть $|\mathcal{F}| = \infty$ и все элементы семейства $\mathcal{F}$ являются компактами.

Допустим, что $A_1 \in \mathcal{F}$ и

$$\forall\, x \in A_1 \quad \exists\, A_x \in \mathcal{F}\colon\ x \notin A_x$$

(т. е. пересечение всех элементов семейства $\mathcal{F}$ пусто).

Тогда для произвольной точки $x \in A_1$ определим ее окрестность U_x такую, что $U_x \cap A_x = \varnothing$. Из покрытия компакта A_1 окрестностями $\{U_x\}_{x \in A_1}$ выделим конечное подпокрытие: $\{U_{x_i}\}_{i=1}^{m}$. Отсюда следует, что $A_1 \cap \left(\bigcap\limits_{i=1}^{m} A_{x_i} \right) = \varnothing$, т. е. получили противоречие с п. 1) доказательства.

3) Пусть теперь мощность семейства $\mathcal{F}$ конечна, но элементы семейства $\mathcal{F}$ не являются компактами.

Достаточно доказать утверждение для случая, когда $|\mathcal{F}| = n + 2$ (в общем случае, когда $|\mathcal{F}| > n + 2$, следует затем повторить рассуждения п. 1, б)).

Доказательство состоит в том, что мы найдем компактные выпуклые подмножества $K_i \subset A_i$ такие, что пересечение любых $n + 1$

множеств из нового семейства $\mathcal{F}_1 = \{K_1, K_2, \ldots, K_{n+2}\}$ непусто. Тогда из п. 1, а) будет следовать п. 3).

Для построения множества K_1 заметим, что по условию существуют точки $z_i \in \bigcap\limits_{j=1,\ j\neq i}^{n+2} A_j$ при каждом $i = 2, \ldots, n+2$. Определим множество $K_1 = \operatorname{co}\{z_2, \ldots, z_{n+2}\}$. Заметим, что справедливо включение $K_1 \subset A_1$ и семейство множеств $\{K_1, A_2, \ldots, A_{n+2}\}$ удовлетворяет условию 1) теоремы, так как $z_i \in K_1 \cap \bigcap\limits_{j=2,\ j\neq i}^{n+2} A_j$ для всех $i \in \overline{2, n+2}$. Аналогично для семейства $\{K_1, A_2, \ldots, A_{n+2}\}$ строится компакт K_2. И так далее. $\square$

Отметим, что на произвольные бесконечные системы неограниченных выпуклых множеств теорема Хелли не распространяется. Примером служит семейство $\{[n, +\infty)\}_{n=1}^{\infty}$ на числовой прямой, для которого $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [n, +\infty) = \varnothing$.

Существуют многочисленные приложения теоремы Хелли в задачах выпуклой и комбинаторной геометрии (см., например, [29, 31]). В качестве одного из таких примеров мы рассмотрим теорему Дворецкого о сечениях выпуклого множества.

Теорема 1.10.2 (А. Дворецкий). *Пусть* $A \subset \mathbb{R}^n$ — *выпуклый компакт*, $\operatorname{int} A \neq \varnothing$. *Тогда найдется хотя бы одна точка* $a \in A$ *такая, что для любых точек* $u \in \partial A$ *и* $v \in \partial A$ *таких, что* u, v *лежат на одной прямой, проходящей через точку* a, *выполнено неравенство*

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{\|u - a\|}{\|v - a\|} \leqslant n.$$

Доказательство. Заметим для начала, что приведенная в теореме оценка неулучшаема, она достигается в случае, когда A является правильным симплексом в $\mathbb{R}^n$.

Для любой точки $x \in A$ определим множество $A_x = \frac{1}{n+1} x + \frac{n}{n+1} A$. Выберем произвольный набор точек $\{x_i\}_{i=1}^{n+1} \subset A$. Определим точку y, зависящую от набора $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$, по формуле $y = \frac{1}{n+1} \sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i$. Тогда для каждого номера $i \in \overline{1, n+1}$ получаем

$$y = \frac{1}{n+1} x_i + \frac{n}{n+1} \left(\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n+1} \frac{1}{n} x_j \right) \subset \frac{1}{n+1} x_i + \frac{n}{n+1} A = A_{x_i},$$

т. е. любые $n+1$ множеств семейства $\{A_x\}$ имеют непустое пересечение. По теореме Хелли существует точка $a \in \bigcap\limits_{x\in A} A_x$. Покажем, что a — искомая точка.

Пусть $[u,v]$ — любая хорда множества A, проходящая через точку a. Тогда $a \in \frac{1}{n+1}u + \frac{n}{n+1}A$, следовательно, $a-u \in \frac{n}{n+1} \times (A-u)$, а с учетом того, что $a-u \in [0, v-u]$, получаем, что $a-u \in \frac{n}{n+1}[0, v-u]$, т. е. $\frac{\|a-u\|}{\|u-v\|} \leqslant \frac{n}{n+1}$, откуда $\frac{\|a-u\|}{\|a-v\|} \leqslant n$. Меняя u и v местами, аналогично получаем неравенство $\frac{\|a-v\|}{\|a-u\|} \leqslant n$. □

Упражнение 1.10.1. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ — аффинно независимые точки из $\mathbb{R}^n$. Показать, что семейство ограниченных множеств, зависящих от натурального параметра m,

$$S_m = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1,\ 1 - \frac{1}{m} \leqslant \lambda_1 < 1,\ \lambda_i \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n+1 \right\}$$

таково, что $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} S_m = \varnothing$, но для любого натурального k выполнено $\bigcap\limits_{m=1}^{k} S_m \neq \varnothing$.

Упражнение 1.10.2. Показать, что теорема 1.10.1 верна и в случае, когда $|\mathcal{F}| = \infty$, но все множества замкнуты и среди множеств семейства $\mathcal{F}$ есть компакт (остальные условия теоремы 1.10.1, естественно, выполнены).

Упражнение 1.10.3. Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ состоит не менее чем из $n+1$ точек, A — выпуклый компакт и для любого подмножества $S \subset X$, состоящего из $n+1$ точек найдется такой вектор $a_S \in \mathbb{R}^n$, что $S \subset A + a_S$. Доказать, что найдется вектор $a \in \mathbb{R}^n$ такой, что $X \subset A + a$.

Упражнение 1.10.4. В $\mathbb{R}^2$ расположено конечное семейство параллельных отрезков, через любые три из которых можно провести общую секущую. Доказать, что через все отрезки можно провести общую секущую.

Указание. Выбрать декартову прямоугольную систему координат с осью $0y$, параллельной отрезкам. Исключив тривиальный случай, когда все отрезки лежат на одной прямой, рассмотреть для каждого отрезка I множество $I' = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \alpha x + \beta$ пересекает $I\}$. Применить к семейству множеств I' теорему Хелли.

§ 1.11. Сопряженные функции

В этом параграфе опишем основополагающее свойство выпуклых пн. сн. функций — возможность их двойственного описания как своими надграфиками, так и через верхние грани аффинных функций, их не превосходящих. Пусть E — банахово пространство.

Теорема 1.11.1. *Собственную выпуклую пн. сн. функцию* $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ *можно представить как поточечный супремум совокупности всех аффинных функций вида* $h(x) = \langle p, x\rangle + \mu$, *где* $p \in E^*$, $\mu \in \mathbb{R}$, *таких, что* $h \leqslant f$ *на* E.

Доказательство. Так как f — собственная выпуклая пн. сн. функция, то по теореме 1.5.1 множество $\operatorname{epi} f$ является замкнутым и выпуклым. По следствию 1.9.5 надграфик $\operatorname{epi} f$ есть пересечение всех замкнутых полупространств, содержащих $\operatorname{epi} f$. Эти полупространства мы будем делить на вертикальные, т. е. вида $\{(x, \mu) \in E \times \mathbb{R} \mid \langle p, x\rangle \leqslant \beta\}$, и верхние, т. е. вида $\{(x, \mu) \in E \times \mathbb{R} \mid \langle p, x\rangle - \beta \leqslant \mu\}$.

Если бы все полупространства, образующие в пересечении $\operatorname{epi} f$, были вертикальными, для любой точки $x_0 \in \operatorname{dom} f$ множество $\{(x_0, \mu) \in E \times \mathbb{R} \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ лежало бы в $\operatorname{epi} f$, что противоречит тому, что $f > -\infty$.

Итак, найдутся и верхние полупространства. Это значит, что существует по крайней мере одна аффинная функция $h_0(x) = \langle p_0, x\rangle - \beta_0$ такая, что $h_0 \leqslant f$.

Покажем, что пересечение всех замкнутых полупространств, содержащих $\operatorname{epi} f$, можно заменить пересечением только верхних полупространств, содержащих $\operatorname{epi} f$. Это завершит доказательство теоремы.

Рассмотрим произвольное вертикальное полупространство $P = \{(x, \mu) \mid h_1(x) = \langle p_1, x\rangle - \beta_1 \leqslant 0\}$, содержащее $\operatorname{epi} f$. Это значит, что $h_1(x) \leqslant 0$ для любого $x \in \operatorname{dom} f$.

Выберем произвольную точку $(x_0, \mu_0) \notin P$, тогда $h_1(x_0) > 0$. Покажем, что найдется аффинная функция h такая, что $h \leqslant f$ и $\mu_0 < h(x_0)$.

Определим функцию $\widetilde{h}_\lambda(x) = \lambda h_1(x) + h_0(x)$, где $\lambda > 0$. Для любых $\lambda > 0$ и $x \in \operatorname{dom} f$ справедливо неравенство $\widetilde{h}_\lambda(x) \leqslant f(x)$. Это же неравенство выполнено и для любого $x \notin \operatorname{dom} f$, так как тогда $f(x) = +\infty$. Так как $h_1(x_0) > 0$, то при достаточно большом значении $\lambda_0 > 0$ мы получим неравенство $\widetilde{h}_{\lambda_0}(x_0) > \mu_0$. $\square$

В силу теоремы 1.11.1 любую выпуклую пн. сн. функцию f на E можно описать еще одним способом: через множество $F^* \subset E^* \times \mathbb{R}$ таких пар (p, μ), для которых аффинная функция вида $h(x) = \langle p, x\rangle - \mu$ мажорирует снизу функцию f. Поскольку

$$h(x) \leqslant f(x) \ \forall\, x \quad \Leftrightarrow \quad \mu \geqslant \sup_{x\in E} \left(\langle p, x\rangle - f(x)\right),$$

то множество F^* имеет смысл надграфика некоторой новой функции $f^*\colon E^* \to \overline{\mathbb{R}}$. Из последнего выражения приходим к ее определению.

Определение 1.11.1. *Преобразованием Лежандра–Юнга–Фенхеля* собственной функции $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ или *сопряженной с f функцией* называется функция $f^*\colon E^* \to \overline{\mathbb{R}}$, определяемая равенством

$$f^*(p) = \sup_{x\in E} \left(\langle p, x\rangle - f(x)\right). \tag{1.11.1}$$

Итак, функция f^* есть поточечная верхняя грань аффинных функций $g(p) = \langle p, x\rangle - \mu$ по всем $(x, \mu) \in \operatorname{epi} f$; следовательно, функция f^* выпукла и пн. сн. В свою очередь, так как в силу теоремы 1.11.1 выпуклая пн. сн. функция f есть поточечная верхняя грань аффинных функций $h(x) = \langle p, x\rangle - \mu^*$ по всем $(p, \mu^*) \in \operatorname{epi} f^* = F^*$, то $f(x) = f^{**}(x)$, где *вторая сопряженная с f функция* определяется равенством

$$f^{**}(x) = \sup_{p\in E^*} \left(\langle p, x\rangle - f^*(p)\right). \tag{1.11.2}$$

Отсюда следует

Теорема 1.11.2 (В. Фенхель, Дж. Моро). *Собственная функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ выпукла и пн. сн. тогда и только тогда, когда справедливо равенство $f^{**} = f$.*

Из определения 1.11.1 немедленно следует *неравенство Фенхеля*

$$\langle p, x\rangle \leqslant f(x) + f^*(p) \quad \forall\, x \in E, \quad p \in E^*. \tag{1.11.3}$$

Для невыпуклой функции f также имеет смысл рассмотрение функции f^* по формуле (1.11.1) и функции f^{**} по формуле (1.11.2). При этом геометрический смысл $\operatorname{epi} f^*$ тот же, что и для выпуклой функции: для любого $(p; \mu^*) \in \operatorname{epi} f^*$ справедливы неравенства $\langle p, x\rangle - \mu^* \leqslant f(x)$ для всех x. Из формулы для второй сопряженной функции (1.11.2) следует, что $\operatorname{epi} f^{**}$ есть пересечение всех верхних полупространств, содержащих $\operatorname{epi} f$. Как следует из доказательства теоремы 1.11.1, это пересечение совпадает с пересечением всех полупространств, содержащих $\operatorname{epi} f$. Отсюда следует

Следствие 1.11.1. *Если функция f такова, что $\overline{\mathrm{co}}\, f$ есть собственная функция, то справедливо равенство $f^{**} = \overline{\mathrm{co}}\, f$.*

Отметим связь индикаторной и опорной функций множества.

Лемма 1.11.1. *Справедливо равенство $\delta^*(p, A) = s(p, A)$.*

Доказательство. В самом деле,

$$\delta^*(p, A) = \sup_{x\in E}\left(\langle p, x\rangle - \delta(x, A)\right) = \sup_{x\in A}\langle p, x\rangle = s(p, A). \ \square$$

Пример 1.11.1. Пусть φ — четная выпуклая собственная функция на $\mathbb{R}$, φ^* — ее сопряженная. Определим функции $f(x) = \varphi(\|x\|)$, $g(p) = \varphi^*(\|p\|_*)$, где $\|\cdot\|$ — норма в E, а $\|\cdot\|_*$ — норма в сопряженном пространстве E^*. Покажем, что $f^* = g$ (и соответственно $g^* = f$):

$$\begin{aligned} f^*(p) = \sup_{x\in E}\left(\langle p, x\rangle - \varphi(\|x\|)\right) = \\ = \sup_{t\geqslant 0}\sup_{\|x\|=t}\left(\langle p, x\rangle - \varphi(\|x\|)\right) = \sup_{t\geqslant 0}\left(t\|p\|_* - \varphi(t)\right) = \\ = \sup_{t\in\mathbf{R}}\left(t\|p\|_* - \varphi(t)\right) = \varphi^*(\|p\|_*). \end{aligned}$$

Для дальнейшего изучения свойств сопряженных функций рассмотрим операцию инфимальной конволюции выпуклых функций.

Определение 1.11.2. Пусть $f_1,\ f_2\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ — собственные выпуклые функции. Тогда *инфимальной конволюцией* функций f_1 и f_2 называется функция

$$(f_1 \oplus f_2)(x) = \inf_{x_1+x_2=x}\left(f_1(x_1) + f_2(x_2)\right).$$

Определение инфимальной конволюции имеет следующий геометрический смысл.

Предложение 1.11.1. *Справедливо равенство*

$$\overline{\mathrm{epi}}(f_1 \oplus f_2) = \overline{\mathrm{epi}\, f_1 + \mathrm{epi}\, f_2}$$

Покажем, что операции инфимальной конволюции и обычной суммы функций двойственны друг другу.

Теорема 1.11.3. *Пусть $f_1,\ f_2\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклые собственные полунепрерывные снизу функции. Тогда*

$$(f_1 \oplus f_2)^* = f_1^* + f_2^*, \tag{1.11.4}$$

$$(f_1 + f_2)^* = \overline{f_1^* \oplus f_2^*}. \tag{1.11.5}$$

Если дополнительно имеем $(\operatorname{int}\operatorname{dom} f_1) \cap \operatorname{dom} f_2 \neq \varnothing$, *то замыкание в формуле* (1.11.5) *можно убрать, т. е. справедливо равенство*

$$(f_1 + f_2)^*(p) = \inf_{p_1+p_2=p} (f_1^*(p_1) + f_2^*(p_2)), \tag{1.11.6}$$

причем нижняя грань в (1.11.6) *достигается для любого* $p \in \operatorname{dom}(f_1 + f_2)^*$.

Доказательство. По определениям 1.11.1 и 1.11.2

$$\begin{aligned}(f_1 \oplus f_2)^*(p) &= \sup_x(\langle p, x\rangle - \inf_{x_1+x_2=x}\{f_1(x_1) + f_2(x_2)\}) = \\ &= \sup_x \sup_{x_1+x_2=x} \{\langle p, x\rangle - f_1(x_1) - f_2(x_2)\} = \\ &= \sup_{x_1,\, x_2} \{\langle p, x_1\rangle - f_1(x_1) + \langle p, x_2\rangle - f_2(x_2)\} = f_1^*(p) + f_2^*(p).\end{aligned}$$

Формула (1.11.4) доказана. Аналогично, с помощью теоремы 1.11.2 получаем

$$(f_1^* \oplus f_2^*)^* = f_1^{**} + f_2^{**} = f_1 + f_2,$$

откуда

$$(f_1 + f_2)^* = (f_1^* \oplus f_2^*)^{**} = \overline{f_1^* \oplus f_2^*},$$

т. е. получаем формулу (1.11.5).

В случае, когда $p \notin \operatorname{dom}(f_1 + f_2)^*$, из неравенства $f_1^* \oplus f_2^* \geqslant (f_1 + f_2)^*$ (полученного из формулы (1.11.5)) следует равенство $(f_1^* \oplus f_2^*)(p) = (f_1 + f_2)^*(p) = +\infty$.

В случае, когда $p \in \operatorname{dom}(f_1 + f_2)^*$, имеем $(f_1 + f_2)^*(p) = \mu_0 < +\infty$. По условию найдется точка $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2$ (т. е. это точка непрерывности функции f_1). Это, в частности, значит, что $\operatorname{dom}(f_1 + f_2) \neq \varnothing$, откуда следует, что $(f_1 + f_2)^* > -\infty$ всюду, поэтому $\mu_0 > -\infty$.

Определим множество

$$A = \{(x, \mu) \in E \times \mathbb{R} \mid \mu \leqslant \langle p, x\rangle - f_2(x) - \mu_0\}.$$

Легко убедиться, что множество A выпукло. Покажем, что множество

$$A \cap (\operatorname{int}\operatorname{epi} f_1) = A \cap \{(x, \mu) \in E \times \mathbb{R} \mid x \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f_1,\ \mu > f_1(x)\}$$

пусто.

Если предположить, что существует точка $(x, \mu) \in A \cap (\operatorname{int}\operatorname{epi} f_1)$, то

$$f_1(x) < \mu \leqslant \langle p, x\rangle - f_2(x) - \mu_0,$$

т. е.

$$\mu_0 < \langle p, x\rangle - f_1(x) - f_2(x) \leqslant (f_1 + f_2)^*(p) = \mu_0,$$

что невозможно.

По теореме 1.9.3 об отделимости найдется вектор $(p_0, \alpha) \in E^* \times \mathbb{R}$, $(p_0, \alpha) \neq (0, 0)$, разделяющий множества A и $\operatorname{int} \operatorname{epi} f_1$, т. е. такой, что

$$\sup\{\langle p_0, x\rangle + \alpha\mu \,|\, (x, \mu) \in \operatorname{epi} f_1\} \leqslant \inf\{\langle p_0, x\rangle + \alpha\mu \,|\, (x, \mu) \in A\}. \tag{1.11.7}$$

Из неравенства (1.11.7) легко увидеть, что $\alpha \leqslant 0$. Если допустить, что $\alpha = 0$, то получаем, что вектор $p_0 \neq 0$ (в силу $(p_0, \alpha) \neq (0, 0)$) разделяет $\operatorname{dom} f_1$ и $\operatorname{dom} f_2$, что противоречит условию о том, что $\operatorname{int} \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2 \neq \varnothing$. Итак, $\alpha < 0$.

Разделим обе части неравенства (1.11.7) на $|\alpha|$ и, обозначив $p_1 = p_0/|\alpha|$, получим

$$\begin{aligned} f_1^*(p_1) &= \sup_{x\in E}(\langle p_1, x\rangle - f_1(x)) = \\ &= \sup\{\langle p_1, x\rangle - \mu \,|\, (x, \mu) \in \operatorname{epi} f_1\} \leqslant \inf\{\langle p_1, x\rangle - \mu \,|\, (x, \mu) \in A\} = \\ &= \inf\{\langle p_1 - p, x\rangle + f_2(x) \,|\, x \in \operatorname{dom} f_2\} + \mu_0 = -f_2^*(p - p_1) + \mu_0. \end{aligned}$$

Из этого соотношения получаем

$$(f_1^* \oplus f_2^*)(p) \leqslant f_1^*(p_1) + f_2^*(p - p_1) \leqslant \mu_0 = (f_1 + f_2)^*(p),$$

что и доказывает теорему. □

Рассмотрим еще одну пару двойственных операций.

Пусть $T\colon E_1 \to E_2$ — непрерывный линейный оператор. Определим

$$(f \circ T)(x) = f(Tx)$$

и

$$(T \circ f)(y) = \inf\{f(x) \,|\, Tx = y\}.$$

Теорема 1.11.4. *Пусть $T\colon E_1 \to E_2$ — непрерывный линейный оператор. Если g — функция на E_1, а f — функция на E_2, то справедливы выражения*

$$(T \circ g)^* = g^* \circ T^*, \tag{1.11.8}$$

$$(f \circ T)^* \leqslant T^* \circ f^*. \tag{1.11.9}$$

Если $f\colon E_2 \to \mathbb{R}$ — собственная выпуклая функция, непрерывная в некоторой точке из образа $\operatorname{Im} T$, то

$$(f \circ T)^* = T^* \circ f^*, \tag{1.11.10}$$

и, более того, для любого $p \in \operatorname{dom}(f \circ T)^*$ *найдется* $q \in E_2^*$ *такое, что* $p = T^*q$, $(f \circ T)^*(p) = f^*(q)$.

Доказательство. Равенство (1.11.8) вытекает из определений, неравенство (1.11.9) — из неравенства Фенхеля (1.11.3). Остается доказать неравенство $(T^* \circ f^*)(p) \leqslant (f \circ T)^*(p)$ и тогда получим (1.11.10) (в предположении, что $\exists\, x_0 \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{Im} T$, где f непрерывна в точке x_0).

Положим $\mu_0 = (f \circ T)^*(p)$. Так как $(\operatorname{int}\operatorname{dom} f) \cap \operatorname{Im} T \neq \varnothing$, то функция $f \circ T$ принимает конечные значения, следовательно, $(f \circ T)^*$ всюду больше $-\infty$, т. е. $\mu_0 \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим в $E_2 \times \mathbb{R}$ аффинное множество

$$L = \{(y, \mu) \in E_2 \times \mathbb{R} \,|\, \exists\, x \in E_1\colon\ \mu = \langle p, x\rangle - \mu_0,\ y = Tx\}.$$

Множество L не пересекает $\operatorname{int}\operatorname{epi} f$, иначе для некоторого $x \in E_1$ было бы

$$f(Tx) < \langle p, x\rangle - \mu_0,$$

т. е.

$$\mu_0 < \langle p, x\rangle - f(Tx) \leqslant (f \circ T)^*(p) = \mu_0.$$

По теореме 1.9.3 об отделимости множества L и $\operatorname{epi} f$ можно разделить: существует $(q, \alpha) \in (E_2^* \times \mathbb{R}) \backslash \{(0, 0)\}$:

$$\sup\{\langle q, y\rangle + \alpha\mu \,|\, (y, \mu) \in \operatorname{epi} f\} \leqslant \inf\{\langle q, y\rangle + \alpha\mu \,|\, (y, \mu) \in L\}. \quad (1.11.11)$$

Как и в теореме 1.11.3, легко показать, что $\alpha \leqslant 0$. Если $\alpha = 0$, то из неравенства (1.11.11) получаем, что функционал $q \neq 0$ разделяет множества $\operatorname{dom} f$ и $\operatorname{Im} T$, вопреки условию теоремы $(\operatorname{int}\operatorname{dom} f) \cap {}$ $\cap \operatorname{Im} T \neq \varnothing$. Следовательно, $\alpha < 0$.

Разделив обе части неравенства (1.11.11) на $|\alpha|$ и положив $q_0 = {}$ $= q/|\alpha|$, получаем

$$f^*(q_0) \leqslant \inf\{\langle q_0, y\rangle - \mu \,|\, (y, \mu) \in L\} = \inf\{\langle q_0, Tx\rangle - \langle p, x\rangle + \mu_0 \,|\, x \in E_1\}.$$

Так как $f^*(q) > -\infty\ \ \forall\, q$, то $p = T^*q_0$, так как в противном случае

$$\inf_x\,(\langle q_0, Tx\rangle - \langle p, x\rangle) = \inf_x\,\langle T^*q_0 - p, x\rangle = -\infty.$$

Таким образом, $p \in \operatorname{Im} T^*$, $p = T^*q_0$ и

$$(T^* \circ f^*)(p) \leqslant f^*(q_0) \leqslant \mu_0 = (f \circ T)^*(p). \ \square$$

Воспользуемся теоремой отделимости и свойствами сопряженных функций для описания множеств с помощью их опорных функций.

Лемма 1.11.2. *Пусть $A \subset E$. Тогда справедливо равенство*

$$\overline{\text{co}}\, A = \bigcap_{p \in E^*} \{x \in E \mid \langle p, x \rangle \leqslant s(p, A)\}. \tag{1.11.12}$$

Доказательство. Пусть $x \in A$. Тогда в силу определения опорной функции для любого $p \in E^*$: $\langle p, x \rangle \leqslant s(p, A)$, т. е. справедливо включение

$$A \subset \bigcap_{p \in E^*} \{x \in E \mid \langle p, x \rangle \leqslant s(p, A)\}.$$

Так как справа стоит выпуклое замкнутое множество, то $\overline{\text{co}}\, A$ содержится в этом множестве.

Докажем, что множество из правой части (1.11.2) содержится в $\overline{\text{co}}\, A$.

Допустим, $x_0 \notin \overline{\text{co}}\, A$. Тогда по теореме об отделимости найдутся $p_0 \in \partial B_1^*(0)$ и $\varepsilon > 0$, такие, что $\langle p_0, x_0 \rangle > \langle p_0, x \rangle + \varepsilon \;\; \forall\, x \in A$. Отсюда получаем, что $\langle p_0, x_0 \rangle \geqslant s(p_0, A) + \varepsilon$, т. е. $x_0 \notin \{x \in E \mid \langle p, x \rangle \leqslant \leqslant s(p, A) \;\forall\, p \in E^*\}$. $\square$

В силу положительной однородности опорной функции в формуле (1.11.12) E^* можно заменить на $\partial B_1^*(0)$.

Лемма 1.11.3. *Пусть множество $A \subset E$ определено по формуле*

$$A = \bigcap_{p \in E^*} \{x \in E \mid \langle p, x \rangle \leqslant f(p)\},$$

где функция $f\colon E^* \to \overline{\mathbb{R}}$ есть собственная положительно однородная функция. Если $\overline{\text{co}}\, f$ также является собственной функцией, то множество A непусто и справедливо равенство $s(p, A) = \overline{\text{co}}\, f(p)$ для всех $p \in E^*$.

Доказательство. Если $x \in A$, то $\langle p, x \rangle - f(p) \leqslant 0 \;\; \forall\, p \in E^*$, следовательно,

$$\sup_{p \in E^*} (\langle p, x \rangle - f(p)) = 0,$$

так как равенство нулю достигается при $p = 0$.

Если $x \notin A$, то существует функционал $p_0 \in \partial B_1^*(0)$ такой, что $\langle p_0, x \rangle > f(p_0)$, следовательно,

$$\sup_{p \in E^*} (\langle p, x \rangle - f(p)) \geqslant \sup_{\lambda \geqslant 0} (\langle \lambda p_0, x \rangle - f(\lambda p_0)) = +\infty.$$

Итак, $f^*(x) = \delta(x, A)$. Значит, по лемме 1.11.1 и следствию 1.11.1 $\overline{\text{co}}\, f(p) = f^{**}(p) = \delta^*(x, A) = s(p, A)$. Поскольку по условию функция $\overline{\mathrm{co}}\, f$ собственная, то $\overline{\mathrm{co}}\, f(p) = s(p, A) \neq -\infty$ для всех $p \in E^*$, следовательно, $A \neq \varnothing$. $\square$

Приведем важное следствие леммы 1.11.3.

С л е д с т в и е 1.11.2. *Собственная выпуклая положительно однородная функция* $f\colon E^* \to \overline{\mathbb{R}}$ *полунепрерывна снизу тогда и только тогда, когда найдется непустое выпуклое замкнутое множество* $A \subset E$ *такое, что* $f(p) = s(p, A)$ *для всех* $p \in E^*$.

Таким образом, всякому замкнутому выпуклому множеству соответствует выпуклая пн. сн. положительно однородная функция, и наоборот, всякой выпуклой положительно однородной пн. сн. функции соответствует выпуклое замкнутое множество.

Эта замечательная двойственность позволяет сводить многие задачи о выпуклых замкнутых множествах к изучению выпуклых замкнутых положительно однородных функций, и наоборот.

Рассмотрим, как с помощью опорных функций можно описать некоторые операции с множествами. Пусть A и B — выпуклые замкнутые множества из банахова пространства E, пусть также семейство A_α есть произвольное семейство выпуклых замкнутых подмножеств E. Тогда имеют место следующие формулы

$$\overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) = \bigcap_{p \in E^*} \bigl\{x \in E \mid \langle p, x\rangle \leqslant \sup_\alpha s(p, A_\alpha)\bigr\}, \tag{1.11.13}$$

$$\bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcap_{p \in E^*} \bigl\{x \in E \mid \langle p, x\rangle \leqslant \inf_\alpha s(p, A_\alpha)\bigr\}, \tag{1.11.14}$$

$$A \overset{*}{-} B = \bigcap_{p \in E^*} \bigl\{x \in E \mid \langle p, x\rangle \leqslant s(p, A) - s(p, B)\bigr\}. \tag{1.11.15}$$

Докажем формулу (1.11.15). Пусть $C = A \overset{*}{-} B$, а множество в правой части формулы (1.11.15) обозначим через X. Так как $C + B \subset A$, то для всех $p \in E^*$ выполнено неравенство $s(p, C) + s(p, B) \leqslant s(p, A)$, откуда $s(p, C) \leqslant s(p, A) - s(p, B)$ для всех p и, значит, $C \subset X$. Если же $x_0 \in X$, то для любого $p \in E^*$ выполнено неравенство $\langle p, x_0\rangle + s(p, B) = s(p, x_0 + B) \leqslant s(p, A)$, откуда в силу выпуклости и замкнутости A и B получаем, что $x_0 + B \subset A$, т. е. $x_0 \in C$. Остальные формулы доказываются аналогично.

Из формул (1.11.13)–(1.11.15) по лемме 1.11.3 получаем следующие формулы для опорных функций:

$$s\left(p, \bigcup_\alpha A_\alpha\right) = s\left(p, \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)\right) = \sup_\alpha s(p, A_\alpha), \tag{1.11.16}$$

$$s\Bigl(p, \bigcap_\alpha A_\alpha\Bigr) = \overline{\mathrm{co}}\,\bigl(\inf_\alpha s(p, A_\alpha)\bigr), \tag{1.11.17}$$

$$s(p,\, A \overset{*}{-} B) = \overline{\mathrm{co}}\,(s(p, A) - s(p, B)). \tag{1.11.18}$$

Полученные выше равенства достаточно формальны, так как для их использования требуется находить вторую сопряженную функцию (т. е. выпуклую оболочку функции), что, как правило, бывает очень трудно реализовать на практике. Впоследствии в ряде конкретных случаев, в частности, в случае, когда пространство E является пространством $\mathbb{R}^n$, мы сможем указать некоторые достаточно простые методы вычисления второй сопряженной функции.

Лемма 1.11.4. *Пусть $A, B \subset E$ суть выпуклые замкнутые ограниченные подмножества. Тогда хаусдорфово расстояние между множествами A и B можно вычислять по формуле*

$$h(A, B) = \sup_{\|p\|_* = 1} |s(p, A) - s(p, B)|. \tag{1.11.19}$$

Доказательство. Обозначим выражение в правой части формулы (1.11.19) через f, а $h(A, B)$ через h.

Так как для любого $t > 1$ справедливо включение $A \subset B + B_{th}(0)$, то справедливо неравенство $s(p, A) \leqslant s(p, B) + th$ для любого p, причем $\|p\|_* = 1$. Аналогичное неравенство верно с заменой A на B, откуда $f \leqslant th$ для любого $t > 1$, т. е. $f \leqslant h$.

Поскольку $s(p, A) \leqslant s(p, B) + f\|p\|_* = s(p, \overline{B + B_f(0)})$ для всех p, $\|p\|_* = 1$, то справедливо включение $A \subset \overline{B + B_f(0)}$, откуда $A \subset B + B_{f+\varepsilon}(0)$ для любого $\varepsilon > 0$. Аналогичное включение верно с заменой A на B, откуда $h \leqslant \inf\{f + \varepsilon \mid \varepsilon > 0\} = f$. $\square$

В дальнейшем нам потребуется исследовать множества в сопряженном пространстве E^*.

Пусть $A^* \subset E^*$ — выпуклое замкнутое множество в сопряженном пространстве E^* со слабой* топологией. Аналогично (1.6.5) опорная функция множества A^* определяется по формуле

$$s(x, A^*) = \sup\{\langle x, p\rangle \mid p \in A^*\}, \quad \text{где} \quad x \in E.$$

Отметим, что все свойства опорных функций для множеств из банахова пространства E, рассмотренные ранее, переносятся на случай опорной функции $s(x, A^*)$ в пространстве E^* со слабой* топологией. Докажем, например, формулу представления выпуклого замкнутого множества A^* из E^*:

$$A^* = \bigcap_{x \in E} \{p \in E^* \mid \langle x, p\rangle \leqslant s(x, A^*)\}. \tag{1.11.20}$$

Множество в правой части (1.11.20) обозначим через P. Включение $A^* \subset P$ очевидно.

Допустим, $p_0 \notin A^*$. Тогда по теореме 1.9.3 об отделимости (для случая локально выпуклого топологического пространства E^* со слабой* топологией) найдутся точка $x_0 \in \partial B_1(0) \subset E$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $\langle x_0, p_0\rangle > \langle x_0, p\rangle + \varepsilon \quad \forall\, p \in A^*$. Отсюда получаем, что $\langle x_0, p_0\rangle \geqslant s(x_0, A^*) + \varepsilon$, т. е. $p_0 \notin P$. $\square$

Если $A^*, B^* \subset E^*$ суть выпуклые замкнутые ограниченные подмножества, то для расстояния между ними по Хаусдорфу, т. е.

$$h(A^*, B^*) = \inf \{r > 0 \mid A^* \subset B^* + B_r^*(0),\ B^* \subset A^* + B_r^*(0)\},$$

справедлива формула

$$h(A^*, B^*) = \sup_{\|x\|=1} |s(x, A^*) - s(x, B^*)|. \tag{1.11.21}$$

Доказательство равенства (1.11.21) проводится аналогично доказательству равенства (1.11.19) в лемме 1.11.4.

Упражнение 1.11.1. Показать, что для функции $\varphi(t) = (1/\alpha)|t|^\alpha$ функция $\varphi^*(t) = (1/\beta)|t|^\beta$, где $(1/\alpha) + (1/\beta) = 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, является сопряженной.

Упражнение 1.11.2. Показать справедливость неравенства Фенхеля

$$\langle p, x\rangle \leqslant f(x) + f^*(p) \quad \forall\, x \in E, \quad p \in E^*.$$

Упражнение 1.11.3. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, $x(\cdot)\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда выполнено неравенство Иенсена для интеграла

$$\int_a^b f(x(t))\, dt \geqslant (b - a) f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b x(t)\, dt\right).$$

Указание. Проинтегрировать неравенство Фенхеля $f(x(t)) \geqslant \langle y, x(t)\rangle - f^*(y)$.

Упражнение 1.11.4. Показать, что если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выпукла и $\operatorname{int}\operatorname{dom} f \neq \varnothing$, то справедливо равенство

$$f^*(p) = \sup_{x \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f} (\langle p, x\rangle - f(x)).$$

Упражнение 1.11.5. Показать, что в гильбертовом пространстве равенство $f^* = f$ возможно лишь для функции $f(x) = \|x\|^2/2$.

Упражнение 1.11.6. Показать, что для выпуклой собственной пн. сн. функции f справедливо равенство $\inf\limits_{x \in E} f(x) = -f^*(0)$.

Упражнение 1.11.7. Найти f^* для функций:

1) $f(x_1, x_2) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$; 2) $f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|$;

3) $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + 1}$.

Упражнение 1.11.8. Доказать, что $s(p, A) = s(p, \operatorname{co} A)$.

Упражнение 1.11.9. Показать, что если $s(p, A) \leqslant s(p, B)$ $\forall\, p$, то $A \subset \overline{\operatorname{co}}\, B$.

Упражнение 1.11.10. Показать, что $s\left(p, \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha\right) = \sup\limits_{\alpha} s(p, A_\alpha)$.

Упражнение 1.11.11. Множество A замкнуто и $x \in \operatorname{int} \operatorname{co} A$. Доказать, что $s(p, A) > \langle p, x\rangle$ $\forall\, p \in E^* \backslash \{0\}$.

Упражнение 1.11.12. Множества A, D замкнуты, а множество B ограничено, выпукло и замкнуто. Доказать, что из включения $A + B \subset B + D$ следует включение $A \subset \overline{\operatorname{co}}\, D$.

Упражнение 1.11.13. Доказать формулы (1.11.13), (1.11.14), (1.11.16)–(1.11.18).

Упражнение 1.11.14. Пусть непустое ограниченное множество A задано выражением

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leqslant 1\},$$

где функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является аналитической относительно переменных $(x_1, \ldots, x_n)$, причем в любой граничной точке x_0 множества A градиент $\nabla f(x_0) \neq 0$, а для любого направления $l \in \mathbb{R}^n$, $l \neq 0$, справедливо неравенство

$$\frac{\partial^2 f}{\partial l^2}\,(x_0) > 0.$$

Доказать, что множество A является строго выпуклым множеством.

Указание. Показать, что в каждой граничной точке множества A существует опорная (касательная) гиперплоскость и что множество $A \cap B_\varepsilon(x_0)$ содержится в опорном полупространстве. Далее воспользоваться упр. 1.9.11.

§ 1.12. Двойственность Минковского

Следуя Минковскому (см. [153]), проанализируем опорную функцию ограниченного выпуклого множества A, у которого $0 \in \operatorname{int} A$, и замечаем, что эта опорная функция $s(p, A)$ строго положительна при $p \neq 0$ и поэтому обладает теми же свойствами, что и функция Минковского (сравните пп. 1), 2), 3) в леммах 1.6.1 и 1.6.2).

Следовательно, опорную функцию $s(p, A)$ можно рассматривать как функцию Минковского некоторого другого (полярного) множества A°. Это множество A° состоит из точек p, удовлетворяющих неравенству $s(p, A) \leqslant 1$. В результате мы пришли к следующим определениям и утверждениям.

Определение 1.12.1. *Полярой* (или *сопряженным множеством*) *множества* A из банахова пространства E называется множество из сопряженного пространства E^* вида

$$A^\circ = \{p \in E^* \mid \langle p, x\rangle \leqslant 1 \ \ \forall\, x \in A\}.$$

Полярой множества $B \subset E^*$ называется множество из пространства E (а не из пространства E^{**}) вида

$$B^\circ = \{x \in E \mid \langle p, x\rangle \leqslant 1 \ \ \forall\, p \in B\}.$$

Биполярой (или *вторым сопряженным множеством*) ко множеству $A \subset E$ называется множество из пространства E вида $A^{\circ\circ} = (A^\circ)^\circ = \{x \in E \mid \langle p, x\rangle \leqslant 1 \ \ \forall\, p \in A^\circ\}$.

Лемма 1.12.1. *Пусть множество* $A \subset E$ *непусто. Тогда его поляра* A° *выпукла, замкнута и содержит точку* 0, *при этом справедливы соотношения*:

$$(\operatorname{co} A)^\circ = A^\circ; \quad (\overline{A})^\circ = A^\circ;$$

$$\textit{если} \quad \lambda > 0, \quad \textit{то} \quad (\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda}\, A^\circ;$$

$$\textit{если} \quad A \subset B, \quad \textit{то} \quad B^\circ \subset A^\circ;$$

$$A^\circ = \{p \in E^* \mid s(p, A) \leqslant 1\} = \{p \in E^* \mid \mu(p, A^\circ) \leqslant 1\}. \tag{1.12.1}$$

Доказательство легко следует из определения поляры и свойств опорной функции.

Пример 1.12.1. Легко проверить равенство $(B_r(0))^\circ = \frac{1}{r}\, B_1^*(0)$.

Пример 1.12.2. Пусть $p_0 \in E^* \setminus \{0\}$, $\mu_0 > 0$, $A = \{x \in E \mid \langle p_0, x\rangle - \mu_0 \leqslant 0\}$ — полупространство в E. Тогда $A^\circ = [0, p_0/\mu_0]$, т. е. A° есть отрезок из E^*, один конец которого — точка 0.

Докажем это. Непосредственной проверкой легко убедиться, что $s(p_0, A) = \mu_0$, т. е. $s(\lambda p_0, A) \leqslant 1$ при $\lambda \in [0, 1/\mu_0]$. Поэтому $[0, p_0/\mu_0] \subset A^\circ$ и для любых $\lambda > 1/\mu_0$ или $\lambda < 0$ выполняется $\lambda p_0 \notin A^\circ$.

Допустим, что найдется функционал $p_1 \neq 0$ такой, что $p_1 \in A^\circ$ и функционалы p_1, p_0 линейно независимы. Тогда $\ker p_1 \not\supset \ker p_0$, следовательно, найдется $x_0 \in E$ такой, что $\langle p_0, x_0\rangle = 0$, а $\langle p_1, x_0\rangle = 1$. Но тогда $\lambda x_0 \in A$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, поэтому условие $\langle p_1, \lambda x_0\rangle = \lambda\langle p_1, x_0\rangle \leqslant 1$

может выполняться для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ только в случае, когда $p_1 = 0$. Итак, $A^\circ = [0, p_0/\mu_0]$.

Лемма 1.12.2. *Пусть $A \subset E$ — множество с непустой внутренностью, причем $0 \in \operatorname{int} A$. Тогда справедливо равенство*

$$\mu(p, A^\circ) = s(p, A) \quad \forall\, p \in E^* \backslash \{0\}.$$

Доказательство. Равенство следует из замкнутости A°, леммы 1.6.1 и формулы (1.12.1).

1) Пусть $p \in E^* \backslash \{0\}$ таков, что $t = \mu(p, A^\circ) < +\infty$. Так как $0 \in A^\circ$, то $t \geqslant 0$. Так как $0 \in \operatorname{int} A$, то существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(0) \subset A$. Следовательно, по лемме 1.12.1 справедливо включение $A^\circ \subset \frac{1}{\varepsilon} B_1^*(0)$. Таким образом, множество A° ограничено, откуда следует, что $t > 0$. Тогда $p/t \in A^\circ$, т. е. $s(p/t, A) \leqslant 1$, откуда $s(p, A) \leqslant t$.

2) Пусть $p \in E^* \backslash \{0\}$ таков, что $\tau = s(p, A) < +\infty$. Так как $0 \in \operatorname{int} A$, то $\tau > 0$. Тогда $s(p/\tau, A) \leqslant 1$, откуда получаем, что $p/\tau \in A^\circ$, т. е. $\mu(p, A^\circ) \leqslant \tau$.

3) Пусть p таков, что $s(p, A) = +\infty$, отсюда в силу 1) следует $\mu(p, A^\circ) = +\infty$. Наоборот, если p таков, что $\mu(p, A^\circ) = +\infty$, то отсюда в силу 2) получаем $s(p, A) = +\infty$. $\square$

Следствие 1.12.1. *Пусть A — выпуклое множество, причем $0 \in \operatorname{int} A$. Тогда справедливо равенство $\mu(x, A) = s(x, A^\circ) \quad \forall\, x \in E$ и функция $\mu(x, A)$ является липшицевой функцией.*

Доказательство. Первое утверждение следует из предыдущей леммы, леммы 1.6.1 и того, что

$$s(x, A^\circ) = \mu(x, A^{\circ\circ}) = \mu(x, \overline{A}) = \mu(x, A).$$

Из включения $0 \in \operatorname{int} A$, как показали при доказательстве леммы 1.12.2 в п. 1), следует, что множество A° ограничено $\big($т. е. $A^\circ \subset \frac{1}{\varepsilon} B_1^*(0)\big)$, откуда получаем, что функция $s(x, A^\circ)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L = \sup\{\|p\|_* \mid p \in A^\circ\} \leqslant 1/\varepsilon$. В силу первого утверждения и функция $\mu(x, A)$ удовлетворяет условию Липшица с той же константой L. $\square$

Теорема 1.12.1. *Пусть $A \subset E$ — непустое множество. Тогда*

$$A^{\circ\circ} = \overline{\operatorname{co}}\,(A \cup \{0\}). \tag{1.12.2}$$

Доказательство. Во-первых, по лемме 1.12.1 имеем $0 \in A^{\circ\circ}$. Для всякого $x_0 \in A$ по определению A° получаем $\langle p, x_0 \rangle \leqslant 1 \quad \forall\, p \in A^\circ$, откуда следует, что $x_0 \in A^{\circ\circ}$. Итак, $A \cup \{0\} \subset A^{\circ\circ}$. Поскольку $A^{\circ\circ}$ замкнуто и выпукло, то $\overline{\text{co}}\,(A \cup \{0\}) \subset A^{\circ\circ}$.

Пусть $x_0 \notin \overline{\text{co}}\,(A \cup \{0\})$. Покажем, что $x_0 \notin A^{\circ\circ}$.

По теореме 1.9.3 (об отделимости) найдется функционал $p \in \in \partial B_1^*(0)$ такой, что

$$\langle p, x_0 \rangle > s\,(p, \overline{\text{co}}\,(A \cup \{0\})) \geqslant 0.$$

Если $s\,(p, \overline{\text{co}}\,(A \cup \{0\})) = 0$, то $\langle p, x \rangle \leqslant 0 \quad \forall\, x \in A$ и $\langle p, x_0 \rangle > 0$, т. е. найдется число $\alpha > 0$ такое, что $\langle \alpha p, x_0 \rangle > 1$ и $\langle \alpha p, x \rangle \leqslant 0 \ \ \forall\, x \in A$, т. е. $\alpha p \in A^\circ$ и $x_0 \notin A^{\circ\circ}$.

Если $s\,(p, \overline{\text{co}}\,(A \cup \{0\})) > 0$, то подберем число $\alpha > 0$ так, чтобы выполнялось равенство $\alpha \cdot s\,(p, \overline{\text{co}}\,(A \cup \{0\})) = 1$. Тогда для αp получаем $\langle \alpha p, x_0 \rangle > s\,(\alpha p, \overline{\text{co}}\,(A \cup \{0\})) = 1$. Следовательно, $\alpha p \in A^\circ$ (так как $\langle \alpha p, x \rangle \leqslant 1 \quad \forall\, x \in A$), а $x_0 \notin A^{\circ\circ}$ (так как $\langle \alpha p, x_0 \rangle > 1$). $\square$

Следствие 1.12.2. *Если множество $A \subset E$ выпукло, замкнуто и $0 \in A$, то справедливо равенство $A^{\circ\circ} = A$.*

Лемма 1.12.3. *Пусть $\{A_\alpha\}$ — семейство непустых подмножеств из E. Тогда*

$$\left(\text{co} \bigcup_\alpha A_\alpha\right)^\circ = \bigcap_\alpha A_\alpha^\circ. \tag{1.12.3}$$

При дополнительном предположении, что все множества A_α замкнуты, выпуклы и $0 \in A_\alpha \ \forall\, \alpha$, справедлива следующая формула:

$$\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right)^\circ = \overline{\text{co}} \bigcup_\alpha A_\alpha^\circ. \tag{1.12.4}$$

Доказательство. Докажем (1.12.3). Применяя лемму 1.12.1, получаем

$$\left(\text{co} \bigcup_\alpha A_\alpha\right)^\circ = \left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)^\circ = \left\{p \,\middle|\, s\left(p, \bigcup_\alpha A_\alpha\right) \leqslant 1\right\} =$$
$$= \{p \mid \sup_\alpha s(p, A_\alpha) \leqslant 1\} = \bigcap_\alpha \{p \mid s(p, A_\alpha) \leqslant 1\} = \bigcap_\alpha A_\alpha^\circ.$$

Формулу (1.12.4) получим в силу равенств (1.12.3) и (1.12.2) и леммы 1.12.1 из следующей цепочки равенств:

$$\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right)^\circ = \left(\bigcap_\alpha (A_\alpha^\circ)^\circ\right)^\circ = \left(\text{co}\left(\bigcup_\alpha A_\alpha^\circ\right)\right)^{\circ\circ} =$$
$$= \overline{\text{co}}\left(\overline{\text{co}}\left(\bigcup_\alpha A_\alpha^\circ\right) \bigcup \{0\}\right) = \overline{\text{co}} \bigcup_\alpha A_\alpha^\circ. \ \square$$

Далее в этом параграфе рассмотрим свойства поляр в случае, когда исходные множества являются конусами. Прежде всего отметим очевидное утверждение.

Лемма 1.12.4. *Поляра конуса K_1 из банахова пространства E и поляра конуса K_2 из сопряженного пространства E^* являются замкнутыми выпуклыми конусами, удовлетворяющими равенствам*

$$K_1^\circ = \{p \in E^* \,|\, \langle p, x\rangle \leqslant 0 \ \ \forall\, x \in K_1\},$$

$$K_2^\circ = \{x \in E \,|\, \langle p, x\rangle \leqslant 0 \ \ \forall\, p \in K_2\}.$$

Лемма 1.12.5. *Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_m$ — выпуклые конусы в пространстве E (или в E^*). Тогда справедливо равенство*

$$(K_1 + \ldots + K_m)^\circ = K_1^\circ \cap \ldots \cap K_m^\circ.$$

Доказательство. Как отмечалось в лемме 1.4.3, справедливо равенство

$$K_1 + \ldots + K_m = \mathrm{co}\,(K_1 \cup \ldots \cup K_m)\,,$$

из которого с использованием леммы 1.12.3 получаем требуемое равенство. □

Лемма 1.12.6. *Пусть $K_1, \ldots, K_m$ — замкнутые выпуклые конусы в пространстве E (или в E^*). Тогда справедливо равенство*

$$(K_1 \cap \ldots \cap K_m)^\circ = \overline{K_1^\circ + \ldots + K_m^\circ}.$$

Доказательство. В силу того, что равенство $K^{\circ\circ} = \overline{K}$ справедливо для любого выпуклого конуса, и в силу леммы 1.12.5 получаем равенства

$$(K_1 \cap \ldots \cap K_m)^\circ = (K_1^{\circ\circ} \cap \ldots \cap K_m^{\circ\circ})^\circ = ((K_1^\circ + \ldots + K_m^\circ)^\circ)^\circ = \\ = (K_1^\circ + \ldots + K_m^\circ)^{\circ\circ} = \overline{K_1^\circ + \ldots + K_m^\circ}. \ \square$$

В дополнение к введенному в § 1.4 понятию касательного конуса ко множеству введем понятие нормального конуса ко множеству A в точке $a \in \overline{A}$, опираясь на понятие опорного функционала (см. определение 1.9.2).

Определение 1.12.2. *Нормальным конусом* ко множеству $A \subset E$ в точке $a \in \overline{A}$ называется множество в сопряженном пространстве E^*, состоящее из всех опорных функционалов ко множеству A в данной точке a, т. е.

$$N(A; a) = \{p \in E^* | \, s(p, A) \leqslant \langle p, a\rangle\}. \tag{1.12.5}$$

Условия, при которых нормальный конус содержит больше одной точки нуль, описаны в теоремах 1.9.5 и 1.9.6.

Заметим, что в случае, когда множество A является выпуклым конусом, из леммы 1.12.4 и определения 1.12.2 следует, что его поляра совпадает с нормальным конусом ко множеству A в точке 0, т. е. $A^\circ = N(A;0)$. В связи с этим получаем следующую лемму.

Л е м м а 1.12.7. *Нормальный конус ко множеству $A \subset E$ в точке $a \in \overline{A}$ совпадает с полярой конической оболочки ко множеству $A - a$, т. е.*

$$N(A;a) = (\operatorname{cone}(A-a))^\circ . \tag{1.12.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p \in N(A;a)$. Это значит, что справедливо неравенство $\langle p, x-a\rangle \leqslant 0 \quad \forall x \in A$. В свою очередь для любого вектора $v \in \operatorname{cone}(A-a)$, $v \neq 0$, по лемме 1.4.1 существует число $\mu > 0$ такое, что справедливо включение $a + \mu v \in \operatorname{co} A$. Следовательно, $\langle p, \mu v\rangle \leqslant 0$. Итак, показали, что $\langle p, v\rangle \leqslant 0 \quad \forall v \in \operatorname{cone}(A-a)$, т. е. $p \in (\operatorname{cone}(A-a))^\circ$.

Обратно: допустим, что $p \in (\operatorname{cone}(A-a))^\circ$. Тогда из того, что для любого $x \in A$ справедливо включение $x - a \in \operatorname{cone}(A-a)$, и в силу леммы 1.12.4 условие на p влечет неравенство $\langle p, x-a\rangle \leqslant 0 \;\; \forall x \in A$, т. е. $p \in N(A;a)$. $\square$

П р и м е р 1.12.3. Пусть непустое многогранное множество A из пространства $\mathbb{R}^n$ задано с помощью линейных равенств и неравенств вида

$$A = \bigcap_{i=1}^{r} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_i, x\rangle \leqslant \gamma_i\} \bigcap_{i=r+1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_i, x\rangle = \gamma_i\},$$

где определены числа r, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant r \leqslant m$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ и векторы $p_i \in \mathbb{R}^n$, $\|p_i\| = 1$.

Требуется найти касательный и нормальный конусы ко множеству A в некоторой точке $x_0 \in A$.

Допустим, что точка x_0 такова, что при каждом номере $i \in \overline{1,s}$ справедливы равенства $\langle p_i, x_0\rangle = \gamma_i$, а при каждом $i \in \overline{s+1,\, r}$ справедливы неравенства $\alpha_i > 0$, где $\alpha_i = \gamma_i - \langle p_i, x_0\rangle$ (при этом одно из множеств индексов $\overline{1,s}$ или $\overline{s+1,\, r}$ может оказаться пустым, т. е. $s \in \overline{0,r}$).

Очевидной проверкой легко убедиться в справедливости равенства

$$A - x_0 = \bigcap_{i=1}^{s} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_i, x\rangle \leqslant 0\} \bigcap_{i=s+1}^{r} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_i, x\rangle \leqslant \alpha_i\} \times \\ \times \bigcap_{i=r+1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_i, x\rangle = 0\}.$$

Отсюда, учитывая, что точка 0 является внутренней точкой каждого полупространства $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_i, x\rangle \leqslant \alpha_i\}$ при $i \in \overline{s+1,\, r}$, получаем окончательное выражение для касательного конуса в примере 1.12.3

$$\overline{\operatorname{cone}}\,(A - x_0) = \bigcap_{i=1}^{s}\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_i, x\rangle \leqslant 0\} \bigcap_{i=r+1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_i, x\rangle = 0\}. \tag{1.12.8}$$

Покажем, что в примере 1.12.3 нормальным конус представим в виде

$$N(A; x_0) = \left\{p \in \mathbb{R}^n \mid p = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i, \text{ где } \lambda_i \geqslant 0 \right.$$
$$\left. \text{и} \quad \lambda_i(\gamma_i - \langle p_i, x_0\rangle) = 0 \text{ при } \forall\, i \in \overline{1, r}\right\}. \tag{1.12.9}$$

Обозначим множество, стоящее в правой части доказываемого равенства (1.12.9), через K. Очевидно, что множество K является выпуклым замкнутым конусом.

Пусть $p = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i p_i \in K$, причем из определения множества K следует, что для любого $i \in \overline{s+1,\, r}$ (т. е. когда $\gamma_i - \langle p_i, x_0\rangle > 0$) справедливо равенство $\lambda_i = 0$. Отсюда получаем равенство

$$\langle p, x_0\rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle p_i, x_0\rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \gamma_i\,,$$

при этом для произвольного вектора $x \in A$ справедливо неравенство

$$\langle p, x\rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle p_i, x\rangle \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \gamma_i\,.$$

Сравнивая последние соотношения, получаем неравенство $\langle p, x - x_0\rangle \leqslant$ $\leqslant 0$ для всех $x \in A$, т. е. $p \in N(A; x_0)$. Таким образом, доказали включение $K \subset N(A; x_0)$.

Допустим теперь, что существует вектор $p_0 \in N(A; x_0)$ такой, что $p_0 \notin K$. По теореме об отделимости найдется вектор $y_0 \neq 0$ такой, что

$$\langle p_0, y_0\rangle > s(y_0, K). \tag{1.12.10}$$

Из полученного в (1.12.10) условия ограниченности сверху опорной функции выпуклого конуса K, очевидно, следует, что $s(y_0, K) = 0$, откуда получаем, что $\langle p_0, y_0\rangle > 0$. В свою очередь в силу определения множества K, выбирая для каждого индекса $i \in \overline{1, m}$ значения $\lambda_j = 0$ при всех $j \neq i$, из равенства $s(y_0, K) = 0$ получаем равенства

$$\max_{\lambda_i} \lambda_i \langle p_i, y_0\rangle = 0 \quad \forall\, i \in \overline{1, m}.$$

Из этих равенств для различных групп индексов получаем:

1) при $i \in \overline{1, s}$ (т. е. при $\lambda_i > 0$) справедливо неравенство
$$\langle p_i, y_0 \rangle \leqslant 0;$$

2) при $i \in \overline{s+1, r}$ (т. е. при $\lambda_i = 0$) значение $\langle p_i, y_0 \rangle$ любое;

3) при $i \in \overline{r+1, m}$ (т. е. при $\lambda_i \in \mathbb{R}$) справедливо равенство
$$\langle p_i, y_0 \rangle = 0.$$

Отсюда и из формулы (1.12.8) получаем включение $y_0 \in \overline{\operatorname{cone}}\,(A - x_0)$. В силу леммы 1.12.7 о представлении нормального конуса в виде поляры от конической оболочки и из включения $p_0 \in N(A; x_0)$ следует неравенство $\langle p_0, y_0 \rangle \leqslant 0$, которое противоречит неравенству (1.12.10). Полученное противоречие доказывает, что справедливо равенство (1.12.9).

Упражнение 1.12.1. Пусть непустое множество A из $\mathbb{R}^n$ задано в виде
$$A = \bigcap_{k=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_k, x \rangle \leqslant \alpha_k\},$$
где $\|p_k\| = 1$ для всех $k \in \overline{1, m}$. Доказать, что множество A есть многогранник тогда и только тогда, когда
$$0 \in \operatorname{int}\left(\operatorname{co} \bigcup_{k=1}^{m} \{p_k\}\right).$$

§ 1.13. Барьерный и рецессивный конусы

Напомним, что для всякого множества A из банахова пространства при каждом функционале $p \in E^*$ была определена *опорная функция* множества A вида $s(p, A) = \sup\{\langle p, x \rangle \mid x \in A\}$.

Определение 1.13.1. Для выпуклого множества $A \subset E$ *барьерным конусом* $b(A) \subset E^*$ называется множество
$$b(A) = \{p \in E^* \mid s(p, A) < +\infty\}.$$

Очевидно, что это выпуклый конус. Он в некотором смысле является мерой <ограниченности> множества A: чем больше барьерный конус, тем меньше A в бесконечности.

Для выпуклого замкнутого множества $A \subset E$ и для ненулевого функционала $p \in b(A)$ определим *опорное множество*
$$A(p) = \{x \in A \mid \langle p, x \rangle = s(p, A)\}.$$

Если множество $A(p)$ оказалось непустым, то через x_p^A будем обозначать произвольный элемент множества $A(p)$.

Уточним некоторые свойства барьерного конуса $b(A)$ неограниченного выпуклого множества $A \subset E$.

Лемма 1.13.1. *Пусть даны множества A, B из банахова пространства. Тогда выполнены утверждения*:

1) $b(A) = b(\overline{A})$;

2) *если* $A \subset B$, *то* $b(A) \supset b(B)$;

3) $b(A + B) = b(A) \cap b(B)$;

4) *если множества* $A, B \subset E$ *замкнуты и выпуклы, причем* $(\operatorname{int} A) \cap B \neq \varnothing$, *то* $b(A \cap B) = b(A) + b(B)$.

Доказательство. Свойства 1)–3) легко следуют из определения барьерного конуса. Докажем свойство 4).

Возьмем индикаторные функции $f_1(x) = \delta(x, A)$ и $f_2(x) = \delta(x, B)$. Отметим, что $(\operatorname{int} \operatorname{dom} f_1) \cap \operatorname{dom} f_2 = (\operatorname{int} A) \cap B \neq \varnothing$. Имеем с учетом леммы 1.11.1

$$(\delta(x, A) + \delta(x, B))^* = (\delta(x,\, A \cap B))^* = s(p,\, A \cap B).$$

С другой стороны, по теореме 1.11.3 получаем, что

$$(f_1(x) + f_2(x))^*(p) = \inf_{p_1 + p_2 = p} (s(p_1, A) + s(p_2, B)),$$

причем нижняя грань достигается, т. е. для любого $p \in b(A \cap B)$ найдутся $p_1 \in b(A)$ и $p_2 \in b(B)$, такие, что $p = p_1 + p_2$ и $s(p, A \cap B) = s(p_1, A) + s(p_2, B)$. Отсюда $b(A \cap B) \subset b(A) + b(B)$. Обратное включение $b(A) + b(B) \subset b(A \cap B)$ очевидно. □

Замечание 1.13.1. Условие п. 4) леммы 1.13.1 можно ослабить: вместо условия $(\operatorname{int} A) \cap B \neq \varnothing$ достаточно потребовать условие $0 \in \operatorname{int}(A + (-B))$ (см. [68]).

Лемма 1.13.2. *Пусть A — замкнутое выпуклое множество из рефлексивного банахова пространства E. Тогда для любого $p \in \operatorname{int} b(A)$ и для любого $\varepsilon \geqslant 0$ множество $A(p, \varepsilon) = \{x \in A \mid \langle p, x \rangle \geqslant s(p, A) - \varepsilon\}$ есть непустое замкнутое выпуклое ограниченное подмножество множества A.*

Доказательство. Зафиксируем $p \in \operatorname{int} b(A)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $s(p, A) < +\infty$. Определим множество $A_1 = A(p, \varepsilon)$. В силу определения опорной функции через супремум, множество A_1 непусто, выпукло и замкнуто, причем $s(p, A_1) = s(p, A)$. Покажем, что $s(q, A_1) < +\infty$ для всех $q \in E^*$, т. е. $b(A_1) = E^*$. В самом деле, $A_1 = A \cap H_p^+(\alpha)$, где $H_p^+(\alpha) = \{x \in E \mid \langle p, x \rangle \geqslant \alpha\}$ и $\alpha = s(p, A) - \varepsilon$. Следовательно,

$-p \in b(H_p^+(\alpha))$, $\operatorname{int} H_p^+(\alpha) \neq \varnothing$ и $(\operatorname{int} H_p^+(\alpha)) \bigcap A \neq \varnothing$. По свойству 4) леммы 1.13.1 получаем $b(A_1) = b(A \cap H_p^+(\alpha)) = b(A) + b(H_p^+(\alpha))$.

Из условия $p \in \operatorname{int} b(A)$ для некоторого $\delta > 0$ справедливо включение $p + B_\delta^*(0) \subset b(A)$, поэтому $B_\delta^*(0) \subset b(A) + b(H_p^+(\alpha))$, т. е. $b(A) + b(H_p^+(\alpha)) = E^*$.

Отсюда следует, что множество A_1 слабо ограничено, а следовательно, по теореме 1.1.4 и сильно ограничено.

Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{a_k\} \subset A$ такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} \langle p, a_k\rangle = s(p, A)$. Для любого числа $\varepsilon > 0$ в силу определения множества $A(p,\varepsilon)$ найдется такой номер $K(\varepsilon)$, что при всех $k \geqslant K(\varepsilon)$ справедливо включение $\{a_k\} \subset A(p,\varepsilon)$, откуда в силу слабой компактности множества $A(p,\varepsilon)$ можем считать, что $\{a_k\}$ сходится слабо к некоторой точке a. Так как множество $A(p,\varepsilon)$ замкнуто и выпукло, то оно слабо замкнуто, и поэтому $a \in A(p,\varepsilon)$. Так как последнее включение справедливо при любом числе $\varepsilon > 0$, то $a \in A(p)$. $\square$

Замечание 1.13.2. Если даны замкнутое выпуклое множество B и ограниченное замкнутое выпуклое множество A из рефлексивного банахова пространства E (т. е. $b(A) = E^*$), то по теореме 1.13.2 множество $A + B$ замкнуто, а по лемме 1.13.2 множества $A(p)$ непусты при всех $p \in E^*$, $p \neq 0$.

Как следствие теорем об отделимости получим следующее предложение.

Предложение 1.13.1. *Пусть A — выпуклое замкнутое подмножество банахова пространства E и $\operatorname{int} b(A) \neq \varnothing$. Тогда*

$$A = \bigcap_{\|p\|_*=1,\, p\in \operatorname{int} b(A)} H_p^-, \tag{1.13.2}$$

где

$$H_p^- = \{x \in E \mid \langle p, x\rangle \leqslant s(p, A)\}. \tag{1.13.3}$$

Доказательство. Обозначим правую часть в (1.13.2) через $\widetilde{A}$. Очевидно, что $\widetilde{A} \supset A$ и $\widetilde{A}$ есть выпуклое замкнутое множество. Допустим, $\widetilde{A} \neq A$, т. е. существует такая точка $x_0 \in \widetilde{A}$, что $x_0 \notin A$. По теореме 1.9.3 об отделимости существует $p_0 \in E^*$, для которого справедливо неравенство $s(p_0, A) < \langle p_0, x_0\rangle$. В силу определения $\widetilde{A}$ это возможно лишь при $p_0 \in b(A) \setminus \operatorname{int} b(A)$.

Рассмотрим $f(p) = s(p, A) - \langle p, x_0\rangle$, $p \in E^*$. Это собственная выпуклая функция, причем $f(p) \geqslant 0$ $\forall\, p \in \operatorname{int} b(A)$ и $f(p_0) < 0$. Пусть $p_1 \in \operatorname{int} b(A)$. Тогда $p_\lambda = (1-\lambda)p_0 + \lambda p_1 \in \operatorname{int} b(A)$ для всех $\lambda \in (0,1]$, т. е. $f(p_\lambda) \geqslant 0$ $\forall\, \lambda \in (0,1]$. С другой стороны, так как $f(p)$ выпукла на E^*, то $f(p_\lambda) \leqslant (1-\lambda)f(p_0) + \lambda f(p_1)$, т.е. $f(p_\lambda) < 0$ при $\lambda \in$ $\in \left(0, \dfrac{|f(p_0)|}{f(p_1) + |f(p_0)|}\right)$. Противоречие. $\square$

Замечание 1.13.3. Из доказательства следует, что в случае, когда $E = \mathbb{R}^n$, формулу (1.13.2) можно усилить, заменив в ней $\operatorname{int} b(A)$ на относительную внутренность $\operatorname{ri} b(A)$ (т.е. на внутренность в аффинной оболочке множества A) и отказавшись в предложении 1.13.1 от условия, что $\operatorname{int} b(A)$ непусто.

Определение 1.13.2. Для выпуклого множества $A \subset E$ *рецессивный конус* $b(A)^- \subset E$ определяется по формуле

$$b(A)^- = \{x \in E \,|\, \langle p, x\rangle \leqslant 0 \quad \forall\, p \in b(A)\}.$$

Отметим, что рецессивный конус $b(A)^-$ является полярой конуса $b(A)$.

Лемма 1.13.3. *Для любого замкнутого выпуклого множества $A \subset E$ и для любого $a \in A$ справедливо равенство*

$$b(A)^- = \bigcap_{\lambda > 0} \lambda(A - a). \tag{1.13.4}$$

Доказательство. Для доказательства формулы (1.13.4) зафиксируем точку $a \in A$.

Пусть $x \in b(A)^-$. Допустим, что существует число $\lambda > 0$ такое, что $x \notin \lambda(A - a)$. По теореме 1.9.3 об отделимости найдется функционал $p \in E^*$, $\|p\|_* = 1$, такой, что

$$\langle p, x\rangle > \lambda(s(p, A) - \langle p, a\rangle) \geqslant 0.$$

Отсюда $p \in b(A)$ и $\langle p, x\rangle > 0$, что противоречит определению $b(A)$.

Пусть $x \in \bigcap\limits_{\lambda>0} \lambda(A - a)$. Тогда для любого $p \in b(A)$ получаем $\langle p, x\rangle \leqslant \lambda(s(p, A) - \langle p, a\rangle)$ для всех $\lambda > 0$, откуда следует, что $\langle p, x\rangle \leqslant$ $\leqslant 0$ для всех $p \in b(A)$; следовательно, $x \in b(A)^-$. $\square$

Лемма 1.13.4. *Пусть A и M — непустые выпуклые замкнутые множества из E, причем $A = \bigcap\limits_{x \in X} (M + x)$ при некотором X. Тогда справедливы формулы*

$$b(M)^- = M \overset{*}{-} M, \tag{1.13.5}$$

$$b(A)^- = b(M)^-, \tag{1.13.6}$$

$$\overline{b(A)} = \overline{b(M)}, \quad \operatorname{int} b(A) = \operatorname{int} b(M). \tag{1.13.7}$$

Доказательство. Докажем равенство (1.13.5). Из леммы 1.13.3 следует, что $b(M)^- \subset M - x \ \ \forall x \in M$, т.е. $b(M)^- \subset M \overset{*}{-} M$. Легко показать, что множество $M \overset{*}{-} M$ есть выпуклый конус. Действительно, пусть $\forall m \in M \quad m + x \in M$, отсюда для любого натурального $n \quad m + nx \in M$, откуда и следует, что $nx \in M \overset{*}{-} M$ для любого натурального n, т.е. $M \overset{*}{-} M$ — конус. Выпуклость есть следствие выпуклости M.

Допустим, что найдется точка $x_0 \in M \overset{*}{-} M$ такая, что $x_0 \notin b(M)^-$. Тогда по теореме об отделимости существует вектор $p_0 \in E^*$, $p_0 \neq 0$, такой, что $\langle p_0, x_0 \rangle > s(p_0, b(M)^-)$. Это означает, что $\langle p_0, x \rangle \leqslant 0 \ \ \forall x \in b(M)^-$, т.е. $p_0 \in \overline{b(M)}$. С другой стороны, это означает, что $\langle p_0, x_0 \rangle > 0$, и так как x_0 принадлежит конусу $M \overset{*}{-} M$, то $p_0 \in \operatorname{int}(E^* \setminus b(M))$. Противоречие доказывает (1.13.5).

Докажем равенство (1.13.6). Из включения $A \subset M + x$ следует, что $b(A) \supset b(M)$, откуда в свою очередь следует включение $b(A)^- \subset b(M)^-$. Пусть $x \in b(M)^-$; тогда из равенства (1.13.5) получаем включение $x + M \subset M$, т.е. $x + M + y \subset M + y$ для каждого $y \in X$, следовательно, справедливо $\bigcap\limits_{y \in X} (x + M + y) \subset \bigcap\limits_{y \in X} (M + y)$, т.е. $x + A \subset A$, откуда в силу равенства (1.13.5) получаем включение $x \in b(A)^-$.

Левое равенство в (1.13.7) следует из равенства (1.13.6) как прямое следствие определения, правое из левого в силу свойств выпуклых множеств (см. теорему 1.2.1). □

Лемма 1.13.5. *Пусть E — банахово пространство, $A \subset E$ — выпуклое замкнутое множество. Тогда справедливо равенство*

$$b(A)^- = O^+ A.$$

Доказательство. Пусть $x \in b(A)^-$. Тогда по определению для любого $p \in b(A)$ имеем $\langle p, x \rangle \leqslant 0$. Выберем произвольные точку $a \in A$ и число $\lambda > 0$. Для любого $p \in b(A)$ из неравенств $\langle p, x \rangle \leqslant 0$ и $s(p, A) \geqslant \langle p, a \rangle$ получаем неравенство

$$s(p, A) \geqslant \langle p, a \rangle + \lambda \langle p, x \rangle \quad \forall p \in b(A).$$

Отсюда следует, что $a + \lambda x \in A$, т.е. $x \in O^+ A$.

Обратно, пусть $x \in O^+ A$. Тогда для любых точки $a \in A$ и числа $\lambda > 0$ выполнено включение $a + \lambda x \in A$, и для любого $p \in b(A)$ получаем

$$\langle p, a + \lambda x \rangle = \langle p, a \rangle + \lambda \langle p, x \rangle \leqslant s(p, A),$$

откуда следует, что $\langle p, x\rangle \leqslant 0$. Поскольку последнее неравенство верно для любого $p \in b(A)$, то $x \in b(A)^{-}$. $\square$

Л е м м а 1.13.6. *Пусть A, B и M — такие выпуклые замкнутые множества из рефлексивного банахова пространства E, что $\operatorname{int} b(M) \neq \varnothing$ и $A+B=M$. Тогда для любого $p \in \operatorname{int} b(M)$ справедливо равенство опорных множеств $A(p)+B(p)=M(p)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 1.13.2, леммы 1.13.4 и свойства 2) из леммы 1.13.1 для любого $p \in \operatorname{int} b(M)$ опорные множества $A(p)$, $B(p)$, $M(p)$ непусты.

1. Пусть выбраны точки $a \in A(p)$ и $b \in B(p)$. Тогда $a+b \in M$ и справедливо равенство

$$\langle p, a+b\rangle = s(p, A) + s(p, B) = s(p, M),$$

т. е. $a+b \in M(p)$, откуда следует $A(p)+B(p) \subset M(p)$.

2. Пусть теперь $z \in M(p)$; тогда найдутся точки $a \in A$ и $b \in B$ такие, что $z=a+b$. Допустим, что $a \notin A(p)$. Тогда

$$s(p, M) = \langle p, z\rangle = \langle p, a+b\rangle < s(p, A) + s(p, B) = s(p, M);$$

получили противоречие. Следовательно, справедливо включение $A(p)+B(p) \supset M(p)$. $\square$

Ранее (в упр. 1.2.9) мы отмечали, что сумма компакта и замкнутого множества замкнута. В общем случае сумма двух замкнутых (даже выпуклых) множеств не обязана быть замкнутой. Выделим некоторые случаи, когда сумма двух выпуклых замкнутых множеств замкнута. Мы рассмотрим вопрос сначала в $\mathbb{R}^n$, а затем в рефлексивном банаховом пространстве E.

Для этого нам потребуются следующие лемма и теорема.

Л е м м а 1.13.7. *Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ выпукло и замкнуто. Пусть последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset A$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|a_k\| = +\infty$. Тогда, если существует $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{\|a_k\|} = z$, то $z \in O^{+}A$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $x \in A$ и $\lambda > 0$. Покажем, что $x + \lambda z \in A$.

Отметим, что в силу $\lim\limits_{k\to\infty} \|a_k\| = +\infty$, очевидно, следует

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k - x}{\|a_k - x\|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{a_k}{\|a_k\|} - \dfrac{x}{\|a_k\|}}{\left\| \dfrac{a_k}{\|a_k\|} - \dfrac{x}{\|a_k\|} \right\|} = z. \tag{1.13.8}$$

Пусть число k_0 таково, что $\forall\, k > k_0$ выполнено неравенство $\|a_k - x\| > \lambda$.

Определим $\mu_k = \dfrac{\|a_k - x\| - \lambda}{\|a_k - x\|}$. Очевидно, что $\mu_k \in (0;1)$, откуда в силу выпуклости множества A получаем

$$x + \lambda\,\frac{a_k - x}{\|a_k - x\|} = \mu_k x + (1-\mu_k)a_k \in A.$$

Определим $z_k = \dfrac{a_k - x}{\|a_k - x\|} - z$. В силу (1.13.8) $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$. Поэтому

$$x + \lambda\,\frac{a_k - x}{\|a_k - x\|} = x + \lambda z + \lambda z_k \to x + \lambda z \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

откуда и в силу замкнутости A получаем, что $x + \lambda z \in A$. $\square$

Теорема 1.13.1. *Пусть даны выпуклое и замкнутое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ и линейный оператор $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ такие, что*

$$O^+A \cap \ker T = \{0\}. \tag{1.13.9}$$

Тогда множество TA замкнуто в $\mathbb{R}^m$.

Доказательство. Пусть последовательность точек $\{x_k\} \subset TA$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$; выберем точки $a_k \in A$ такие, что $Ta_k = x_k$.

Если последовательность $\{a_k\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность, то в силу непрерывности T получаем, что $x \in TA$.

Допустим (с целью получить противоречие), что последовательность $\{a_k\}$ бесконечно большая, т. е. $\lim \|a_k\| = +\infty$. В силу компактности в $\mathbb{R}^n$ единичной сферы выделим из последовательности $\{a_k\}$ подпоследовательность (которую снова обозначим $\{a_k\}$), для которой последовательность $a_k/\|a_k\|$ сходится к некоторой точке z. Отметим, что $\|z\| = 1$.

В лемме 1.13.7 показали, что $z \in O^+A$. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{\|a_k\|} = \lim_{k\to\infty} T\left(\frac{a_k}{\|a_k\|}\right) = Tz.$$

Так как предел последовательности $\{x_k/\|a_k\|\}$, очевидно, равен нулю, то $Tz = 0$, т. е. $z \in \ker T$, что противоречит условию (1.13.9). $\square$

Следствие 1.13.1. *Пусть A и B из $\mathbb{R}^n$ — выпуклые замкнутые множества, не имеющие противоположных направлений в асимптотических конусах* (*т. е.* $\forall\, a \in O^+A,\ \forall\, b \in O^+B,\ a \neq 0,\ b \neq 0$ *следует, что* $a + b \neq 0$). *Тогда* $A + B = \overline{A + B}$.

Доказательство. Определим линейный оператор $T\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ по формуле $T(x_1; x_2) = x_1 + x_2$, где $x_i \in \mathbb{R}^n$. Так как O^+A

и O^+B не имеют противоположных асимптотических направлений, то $T(a;b) = a + b \neq 0 \ \ \forall (a;b) \in O^+(A \times B) = O^+A \times O^+B$ (последнее равенство — простое следствие определений). По теореме 1.13.1 множество $T(A \times B) = A + B$ замкнуто. $\square$

Рассмотрим теперь случай, когда пространство E является бесконечномерным рефлексивным банаховым пространством.

Теорема 1.13.2. *Пусть A и B — замкнутые выпуклые множества из рефлексивного банахова пространства E, удовлетворяющие условию* $0 \in \operatorname{int}(b(A) - b(B))$. *Тогда множество $A + B$ также замкнуто.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{c_k\} \subset A + B$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = c$ в E. Тогда существуют последовательности $\{a_k\} \subset A$ и $\{b_k\} \subset B$ такие, что $c_k = a_k + b_k$ для всех k. В силу условия леммы для любого $p \in E^*$, $p \neq 0$, существуют $\lambda > 0$, $p_1 \in b(A)$ и $p_2 \in b(B)$ такие, что $p = \lambda(p_1 - p_2)$. Поэтому

$$\langle p, a_k\rangle = \lambda\langle p_1 - p_2, a_k\rangle = \lambda\langle p_1, a_k\rangle + \lambda\langle p_2, b_k\rangle - \lambda\langle p_2, c_k\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \lambda(s(p_1, A) + s(p_2, B)) + \lambda(\|c\| + 1)\|p_2\|_*,$$

т. е. $\sup\limits_k \langle p, a_k\rangle < +\infty$ для любого $p \in E^*$.

По теореме 1.1.4 последовательность точек $\{a_k\}$ ограничена. Поэтому она относительно слабо компактна в E, т. е. существует подпоследовательность $\{a_{km}\}$, которая слабо сходится к a, при этом подпоследовательность $b_{km} \subset B$ слабо сходится к $c - a$. Так как A и B выпуклы и замкнуты, то они слабо замкнуты, т. е. $a \in A$, $c - a \in B$, поэтому $c \in A + B$. $\square$

Упражнение 1.13.1. Пусть A — выпуклое замкнутое множество, а K — выпуклый конус. Доказать, что $b(A + K) = b(A) \cap K^\circ$.

§ 1.14. Представление выпуклых множеств и функций в $\mathbb{R}^n$

В теореме 1.2.2 мы доказали, что выпуклая оболочка множества состоит из всевозможных выпуклых комбинаций элементов этого множества. Оказывается, в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$ этот результат может быть существенно усилен.

Теорема 1.14.1 (К. Каратеодори). *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\operatorname{co} A = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \;\middle|\; \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1,\ x_i \in A,\ 1 \leqslant i \leqslant n+1 \right\}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что если $x \in \operatorname{co} A$ представлен в виде выпуклой комбинации $x = \sum\limits_{i=1}^{r+1} \lambda_i x_i$ совокупности $r+1$ векторов x_i из A, где $r > n$, то x может также быть представлен в виде выпуклой комбинации некоторых r векторов из A. (Таким образом осуществится спуск до $r = n$.)

Без ограничения общности можем считать, что при этом все $\lambda_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant r+1$. Так как $r > n$, то векторы $(x_i, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $1 \leqslant i \leqslant r+1$, линейно зависимы, следовательно, существуют числа $\{\alpha_i\}_{i=1}^{r+1}$, не все равные нулю, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{r+1} \alpha_i (x_i, 1) = 0$, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{r+1} \alpha_i x_i = 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{r+1} \alpha_i = 0$.

Выберем номер m, $1 \leqslant m \leqslant r+1$, так, чтобы для всех i от 1 до $r+1$ выполнялось неравенство $\left|\dfrac{\alpha_i}{\lambda_i}\right| \leqslant \left|\dfrac{\alpha_m}{\lambda_m}\right|$. Пусть $\gamma_i = \lambda_i - \dfrac{\alpha_i}{\alpha_m} \lambda_m$. Тогда очевидно, что $\gamma_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{r+1} \gamma_i = \sum\limits_{i=1}^{r+1} \lambda_i = 1$ и $x = \sum\limits_{i=1}^{r+1} \gamma_i x_i$, причем $\gamma_m = 0$. Следовательно, $r+1$ можно заменить на r. $\square$

Отметим, что число $n+1$ в теореме Каратеодори в общем случае нельзя заменить меньшим, что показывает пример множества A, являющегося вершинами правильного симплекса в $\mathbb{R}^n$. Однако в ряде случаев число $n+1$ может быть уменьшено. Ниже мы увидим это на примере конусов. Другой пример дается в упр. 1.14.1.

Следствие 1.14.1. *Выпуклая оболочка компакта из $\mathbb{R}^n$ есть компакт.*

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — компакт. Определим множество

$$S_n = \left\{ a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \alpha_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n+1 \right\}. \tag{1.14.1}$$

Очевидно, что множество S_n является компактом (точнее, симплексом) из $\mathbb{R}^{n+1}$. Рассмотрим отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^{n+1} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \mathbb{R}^n}_{n+1 \text{ раз}} \to \mathbb{R}^n$, определяемое по формуле

$$\varphi(a, x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i. \tag{1.14.2}$$

Отображение φ непрерывно, $S_n \times \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n+1 \text{ раз}}$ — компакт, следовательно, и образ $\varphi(S_n \times \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n+1 \text{ раз}})$ — компакт. Но по теореме Каратеодори последнее множество есть $\operatorname{co} A$. $\square$

Теорема 1.14.2. *Пусть компакты A_i, $i = 1, \ldots, n$, из линейного топологического пространства E таковы, что $\overline{\operatorname{co}}\, A_i$, $i = 1, \ldots, n$, также компакты. Тогда выпуклая оболочка объединения выпуклых компактов $\overline{\operatorname{co}}\, A_i$ компактна и справедлива формула*

$$\operatorname{co}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{\operatorname{co}}\, A_i\right) = \overline{\operatorname{co}}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right). \tag{1.14.3}$$

Доказательство. Рассмотрим симплекс S_{n-1} из $\mathbb{R}^n$, определенный формулой (1.14.1), и отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^n \times \overline{\operatorname{co}}\, A_1 \times \ldots \times \overline{\operatorname{co}}\, A_n \to E$, определяемое формулой

$$\varphi(\lambda, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i,$$

где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Отображение φ является непрерывным, и поэтому образом компакта $K = S_{n-1} \times \overline{\operatorname{co}}\, A_1 \times \ldots \times \overline{\operatorname{co}}\, A_n$ является компакт $\varphi(K)$, причем в силу определения $\varphi(K) \subset \operatorname{co}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{\operatorname{co}}\, A_i\right)$. Множество $\varphi(K)$ является выпуклым множеством. В самом деле, допустим $x, y \in \varphi(K)$ и $\mu \in (0, 1)$. Тогда найдутся $\lambda, \nu \in S_{n-1}$, $x_i, y_i \in \overline{\operatorname{co}}\, A_i$ такие, что $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \nu_i y_i$. Рассмотрим $z = \mu x + (1-\mu) y$. Тогда

$$z = \sum_{i=1}^{n} (\mu\lambda_i + (1-\mu)\nu_i) \left(\frac{\mu\lambda_i}{\mu\lambda_i + (1-\mu)\nu_i}\, x_i + \frac{(1-\mu)\nu_i}{\mu\lambda_i + (1-\mu)\nu_i}\, y_i\right),$$

т. е.

$$z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i,$$

где $\alpha_i = \mu\lambda_i + (1-\mu)\nu_i$, т. е. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_{n-1}$ и $z_i \in \overline{\operatorname{co}}\, A_i$. Это означает, что $z \in \varphi(K)$.

Так как $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{\operatorname{co}}\, A_i \subset \varphi(K)$, то $\overline{\operatorname{co}}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \subset \overline{\operatorname{co}}\, \varphi(K) = \varphi(K)$. В свою очередь $A_i \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$ для всех i, т. е. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{\operatorname{co}}\, A_i \subset$

$\subset \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)$. В итоге отсюда следует включение

$$\mathrm{co}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{co}}\, A_i\right) \subset \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \subset \varphi(K) \subset \mathrm{co}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{co}}\, A_i\right),$$

откуда следует равенство (1.14.3) и требуемое утверждение. □

Следствие 1.14.2. *Выпуклая оболочка объединения конечного числа выпуклых компактов из* $\mathbb{R}^n$ *компактна.*

Приведем следствие теоремы Каратеодори для функций из $\mathbb{R}^n$, уточняющее предложение 1.6.3, п. 1).

Теорема 1.14.3. *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ — *собственная функция. Тогда ее выпуклая оболочка может быть вычислена по формуле*

$$\mathrm{co}\, f(x) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i) \,\middle|\, x_i \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1,\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = x \right\}.$$

В частности, если функция f пн. сн., а $\mathrm{dom}\, f$ есть ограниченное множество, то функция $\mathrm{co}\, f$ также будет пн. сн., т. е. справедливо равенство $f^{**} = \mathrm{co}\, f$.

Доказательство. По теореме Каратеодори для множества $\mathrm{epi}\, f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и из равенства $\mathrm{co}\,\mathrm{epi}\, f = \mathrm{epi}\,\mathrm{co}\, f$ в любой точке $x \in \mathrm{co}\,\mathrm{dom}\, f$ имеем

$$\mathrm{co}\, f(x) = \inf\{\mu \in \mathbb{R} \mid (x,\mu) \in \mathrm{co}\ \mathrm{epi}\, f\} = \inf\Bigg\{\mu \in \mathbb{R} \,\Bigg|\, (x,\mu) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i (x_i,\mu_i),\ (x_i,\mu_i) \in \mathrm{epi}\, f,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i = 1\Bigg\} = \inf\Bigg\{\mu \in \mathbb{R} \,\Bigg|\, x =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i x_i,\ \mu = \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i \mu_i,\ \mu_i \geqslant f(x_i),\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i = 1\Bigg\} =$$

$$= \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i f(x_i) \,\middle|\, x = \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Зафиксируем точки $x_i \in \mathrm{dom}\, f$, $1 \leqslant i \leqslant n+2$, и $x \in \mathbb{R}^n$ так, чтобы $x \in \mathrm{co}\{x_1, \ldots, x_{n+2}\}$, и рассмотрим задачу: минимизировать функцию $\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+2}) = \sum\limits_{i=1}^{n+2} \lambda_i f(x_i)$ при условии $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n+2} \lambda_i = 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n+2} \lambda_i x_i = x$. Решение задачи существует, так как минимизируемая функция линейна, а множество ограничений компактно. Покажем, что найдется такое решение задачи, у которого $\lambda_{i_0} = 0$ для некоторого i_0.

Допустим, что $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+2})$ — решение, у которого все λ_i строго больше нуля. По теореме Каратеодори для множества $\operatorname{co}\{x_1, \ldots \ldots, x_{n+2}\} \subset \mathbb{R}^n$ можно выбрать числа $\alpha_1 \geqslant 0, \ \ldots, \ \alpha_{n+2} \geqslant 0$, среди которых не более $n+1$ отличны от нуля, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{n+2} \alpha_i = 1$ и $\sum\limits_{i=1}^{n+2} \alpha_i x_i = x$. Если $\sum\limits_{i=1}^{n+2} \alpha_i f(x_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n+2} \lambda_i f(x_i)$, то доказательство закончено.

Предположим, что последнее неравенство неверно. Введем $\beta_i = \lambda_i - \alpha_i$. Имеем $\sum\limits_{i=1}^{n+2} \beta_i = 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n+2} \beta_i x_i = 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n+2} \beta_i f(x_i) < 0$. Выберем столь малое положительное λ, чтобы выполнялось $\lambda_i + \lambda\beta_i \geqslant 0$ для всех i. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n+2} (\lambda_i + \lambda\beta_i) = 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n+2} (\lambda_i + \lambda\beta_i) x_i = x$ и

$$\sum_{i=1}^{n+2} (\lambda_i + \lambda\beta_i) f(x_i) < \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i f(x_i).$$

Но это противоречит тому, что набор чисел $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+2})$ есть решение задачи на минимум.

Докажем вторую часть теоремы. Если $x \in \operatorname{dom} f^{**}$, то из равенства $f^{**} = \overline{\operatorname{co}}\, f$ следует, что найдутся $\{(\alpha_{1m}, \ldots, \alpha_{n+1,\,m})\}_{m=1}^{\infty}$ и точки $\{(x_{1m}, \ldots, x_{n+1,\,m})\}_{m=1}^{\infty}$ такие, что $\alpha_{im} \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_{im} = 1$ для всех m, $x_{im} \in \operatorname{dom} f$, $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_{im} x_{im} \to x$ и $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_{im} f(x_{im}) \to f^{**}(x)$ при $m \to \infty$ (два последних предела следуют из замкнутости $\operatorname{epi} f^{**}$).

Так как последовательности $\{\alpha_{im}\}$ и $\{x_{im}\} \subset \operatorname{dom} f$ ограничены по условию на $\operatorname{dom} f$, то можно считать, что $\alpha_{im} \to \alpha_i$, $x_{im} \to x_i$ при $m \to \infty$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Ясно, что $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = x$.

Если $f(x_{im}) \to +\infty$ при $m \to \infty$ для некоторого номера i, то так как f ограничена снизу, $\alpha_{im} \to 0$ и $\liminf\limits_{m\to\infty} \alpha_{im} f(x_{im}) \geqslant 0$ для этого i. Полагаем, что для этого i справедливо равенство $\alpha_i f(x_i) = 0$.

Если же для некоторого номера i имеем $\liminf\limits_{m\to\infty} f(x_{im}) < +\infty$, то из полунепрерывности снизу функции f получаем, что $f(x_i) \leqslant \liminf\limits_{m\to\infty} f(x_{im}) < +\infty$. Поэтому

$$f^{**}(x) = \overline{\operatorname{co}}\, f(x) \leqslant \operatorname{co} f(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \liminf_{m\to\infty} \alpha_{im} f(x_{im}) \leqslant \liminf_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{im} f(x_{im}) = f^{**}(x),$$

т. е. $f^{**} = \operatorname{co} f$. □

Лемма 1.14.1. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — конус. Тогда справедлива формула*

$$\operatorname{co} A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,\middle|\, x_i \in A,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{co} A$, $x \neq 0$. По теореме Каратеодори $x = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i p_i$, $p_i \in A$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$. Если одно из $\alpha_i = 0$, то все доказано. Считаем, что все $\alpha_i > 0$.

Найдутся числа $\{\beta_i\}_{i=1}^{n+1}$, не все равные нулю, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \beta_i p_i = 0$. Выберем номер m, $1 \leqslant m \leqslant n+1$, из условия $|\beta_i|/|\alpha_i| \leqslant |\beta_m|/|\alpha_m|$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Перенумеровав точки p_i, можно считать, что $m = n+1$.

Пусть $\gamma_i = \alpha_i - \alpha_{n+1}\beta_i/\beta_{n+1}$. Тогда очевидно, что $\gamma_i \geqslant 0$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \gamma_i p_i$ и $\gamma_{n+1} = 0$. Пусть $\gamma = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i$; очевидно, что $\gamma > 0$ и $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\gamma} (\gamma p_i)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\gamma} = 1$. Так как A — конус, то, выбирая $x_i = \gamma p_i \in A$ и $\lambda_i = \gamma_i/\gamma$, получим требуемое утверждение. □

Следствие 1.14.3. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — положительно однородная функция (т. е.* $\operatorname{epi} f$ *— конус). Тогда*

$$\operatorname{co} f(p) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} f(p_i) \,\middle|\, p_i \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = p \right\}. \qquad (1.14.4)$$

Доказательство. Повторяя доказательство теоремы 1.14.3, с учетом леммы 1.14.1 получаем, что

$$\operatorname{co} f(p) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \,\middle|\, \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = p \right\}.$$

Пользуясь положительной однородностью функции f, введем переменные $p_i = \lambda_i x_i$ и перепишем предыдущую формулу в виде

$$\operatorname{co} f(p) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} f(p_i) \,\middle|\, p_i \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = p \right\}.$$

Это и есть утверждение леммы. □

Из теоремы 1.14.3 и следствия 1.14.3 видно, что операция вычисления выпуклой оболочки функции очень сложна. Она имеет характер глобального экстремума (точки x_i или p_i надо выбирать из всего эффективного множества f) и, кроме того, точная нижняя грань в операции взятия выпуклой оболочки может не достигаться. (Рассмотрите пример нахождения выпуклой оболочки функции $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ при $x \in \mathbb{R}$, в котором очевидно, что $\operatorname{co} f \equiv 0$.) В следующей теореме мы укажем некоторые достаточные условия, при которых точная нижняя грань при взятии выпуклой оболочки положительно однородной функции достигается.

Теорема 1.14.4 (Е.С. Половинкин [71]). *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ — *собственная пн. сн. положительно однородная функция. Пусть выполнено условие Слейтера для функции* f, *т. е. существуют точка* $x \in \mathbb{R}^n$ *и число* $r > 0$ *такие, что выполнено неравенство*

$$\langle p, x\rangle + r\|p\| \leqslant f(p) \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^n. \tag{1.14.5}$$

Тогда точную нижнюю грань в операции нахождения выпуклой оболочки функции f (*см.* (1.14.4)) *можно заменить на минимум.*

Доказательство. Зафиксируем точку $p \in \mathbb{R}^n$. Пусть выбраны точки $\{p_{im}\}_{i=1}^n$ из пространства $\mathbb{R}^n$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^n p_{im} = p$ для всех m, и пусть p_{im} — минимизирующая последовательность для нахождении точной нижней грани при вычислении выпуклой оболочки функции f в точке p по формуле (1.14.4). Из условия Слейтера (1.14.5) получаем, что

$$\langle p, x\rangle + r\sum_{i=1}^n \|p_{im}\| \leqslant \sum_{i=1}^n f(p_{im}) \to \operatorname{co} f(p) \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

откуда следует, что при каждом $i \in \overline{1,n}$ последовательность точек $\{p_{im}\}$ ограничена. Без ограничения общности считаем, что эта последовательность p_{im} сходится к некоторой точке p_i при $m \to \infty$. Используя пн. сн. функции f, имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{co} f(p) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^n f(p_{im}) \geqslant \liminf_{m\to\infty} \sum_{i=1}^n f(p_{im}) \geqslant \\ \geqslant \sum_{i=1}^n \liminf_{m\to\infty} f(p_{im}) \geqslant \sum_{i=1}^n f(p_i) \geqslant \operatorname{co} f(p),\end{aligned}$$

т. е. $\operatorname{co} f(p) = \sum\limits_{i=1}^n f(p_i)$. $\square$

Упражнение 1.14.1. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ линейно связно. Доказать, что справедливо следующее выражение для $\operatorname{co} A$:

$$\operatorname{co} A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,\middle|\, \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ x_i \in A,\ 1 \leqslant i \leqslant n \right\}.$$

Указание. Зафиксируем точку $x \in \operatorname{co} A$. По теореме Каратеодори существуют точки $\{x_i\}_{i=1}^{n+1} \subset A$ такие, что $x = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$. В силу линейной связности множества A соединим точки x_1 и x_{n+1} непрерывной кривой $\{x(t) \mid t \in [0,1]\} \subset A$, где $x(0) = x_1$, $x(1) = x_{n+1}$. Докажите, что будет выполнено включение $x \in \partial \operatorname{co} \left\{ \bigcup\limits_{i=2}^{n} \{x_i\} \cup \{x(t)\} \right\}$ для некоторого t.

Упражнение 1.14.2. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — липшицевая функция с константой $L > 0$, а функция $\operatorname{co} f$ собственная. Доказать, что функция $\operatorname{co} f$ также является липшицевой с той же константой L.

Упражнение 1.14.3. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — строго выпуклый компакт (т. е. граница M не содержит отрезков) и компакт $A \subset M$ таков, что $M \overset{*}{-} A = \{0\}$ (напомним, что последнее означает, что нельзя сдвинуть компакт A на некоторый вектор $a \neq 0$ так, чтобы этот сдвиг $A + a$ также содержался в M). Доказать, что найдутся точки $\{a_i\}_{i=1}^{k} \subset A$, $2 \leqslant k \leqslant n+1$, такие, что $M \overset{*}{-} \bigcup\limits_{i=1}^{k} \{a_i\} = \{0\}$. Выяснить, будет ли это утверждение верно в случае, когда выпуклый компакт не является строго выпуклым (например, многогранник).

Упражнение 1.14.4. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \operatorname{int} \operatorname{co} A$. Доказать, что найдутся точки $\{a_i\}_{i=1}^{k} \subset A$, где $k \leqslant 2n$, такие, что $x \in \operatorname{int} \operatorname{co} \bigcup\limits_{i=1}^{k} \{a_i\}$.

§ 1.15. Производная по направлениям

Напомним некоторые определения, связанные с одним из классических понятий производной функции, определенной на банаховом пространстве E. Исследуем свойства таких производных в случае, когда функция является выпуклой. В результате обобщения класса выпуклых функций придем к изучению свойств производных по направлениям для выпуклых функций.

Обозначим, как обычно, через $B_r(x_0) = \{x \in E \mid \|x - x_0\| \leqslant r\}$ замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке x_0.

Рассмотрим одно из самых слабых понятий классической дифференцируемости функций.

Определение 1.15.1. Функция $f\colon B_r(x_0)\to\mathbb{R}$ называется *дифференцируемой по Гато* в точке $x_0\in E$, если существует непрерывный линейный функционал $p\in E^*$ такой, что справедливо равенство

$$f(x_0+\lambda y)=f(x_0)+\lambda\langle p,y\rangle+o_y(\lambda)\quad\forall\,\lambda\in[-r,r],\quad y\in B_1(0),$$

где функции $o_y(\lambda)$ таковы, что $\lim\limits_{\lambda\to 0}(o_y(\lambda)/\lambda)=0$ для любого $y\in$ $\in B_1(0)$. Линейный функционал $p\in E^*$ называется *производной Гато* функции f в точке x_0 и обозначается через $f'(x_0)$.

Теорема 1.15.1. *Если выпуклая функция $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ дифференцируема по Гато в некоторой точке $x\in\operatorname{dom}f$, то справедливо неравенство*

$$f(z)-f(x)\geqslant\langle f'(x),\,z-x\rangle\quad\forall\,z\in E.\tag{1.15.1}$$

Если же собственная функция $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ дифференцируема по Гато на выпуклом множестве $\operatorname{dom}f$, то она выпукла тогда и только тогда, когда неравенство (1.15.1) выполняется при всех $x\in\operatorname{dom}f$.

Доказательство. 1. Пусть функция f выпукла и дифференцируемая по Гато в точке $x\in\operatorname{dom}f$. Запишем неравенство выпуклости (1.6.1) функции f в виде

$$f(x+\lambda(z-x))-f(x)\leqslant\lambda(f(z)-f(x))\quad\forall\,\lambda\in(0,1],\quad\forall\,z\in E.$$

Учитывая то, что функция f дифференцируема по Гато, и заменяя левую часть неравенства в силу определения 1.15.1, получим

$$\langle f'(x),\,\lambda(z-x)\rangle+o_{(z-x)}(\lambda)\leqslant\lambda(f(z)-f(x)).$$

Деля обе части неравенства на $\lambda>0$ и устремляя $\lambda\to 0$, получаем неравенство (1.15.1)

2. Пусть теперь функция f дифференцируема по Гато на непустом выпуклом множестве $\operatorname{dom}f$ и выполнено неравенство (1.15.1) при всех $z\in E$. Покажем, что функция f выпукла. Возьмем произвольные точки $x,\,z\in\operatorname{dom}f$ и число $\lambda\in[0,1]$. Определим точку $x_\lambda=\lambda z+(1-\lambda)x$. По условию $x_\lambda\in\operatorname{dom}f$. Из неравенства (1.15.1) получаем неравенства

$$f(z)-f(x_\lambda)\geqslant\langle f'(x_\lambda),\,z-x_\lambda\rangle,\quad f(x)-f(x_\lambda)\geqslant\langle f'(x_\lambda),\,x-x_\lambda\rangle.$$

Умножая первое из этих неравенств на λ, а второе на $1-\lambda$, а затем складывая, получаем

$$\lambda f(z)+(1-\lambda)f(x)-f(x_\lambda)\geqslant\langle f'(x_\lambda),\,x_\lambda-x_\lambda\rangle=0,$$

что равносильно неравенству (1.6.1), т.е. функция f выпукла. □

Рассмотрим теперь общий случай выпуклой функции, не обязательно дифференцируемой по Гато. Прежде всего покажем, что условия выпуклости функции достаточно для существования более слабой производной — производной по направлениям.

Определение 1.15.2. Пусть даны точки $x,\, y \in E$ и функция $f\colon [x,\, x+y] \to \mathbb{R}$. *Производной* функции f в точке x по направлению y называется предел (если он существует) вида

$$f'(x;y) = \lim_{\lambda\to+0} \frac{f(x+\lambda y) - f(x)}{\lambda}.$$

Из этого определения, в частности, следует, что $f'(x;0) = 0$, а также следующее

Предложение 1.15.1. *Пусть функция $f\colon B_r(x_0) \to \mathbb{R}$ дифференцируема по Гато в точке x_0 (причем $f'(x_0)$ — ее производная). Тогда для любого $y \in E$ существует ее производная $f'(x_0;y)$ по направлениям, которая линейна по y, и справедливо равенство*

$$f'(x_0;y) = \langle f'(x_0),\, y\rangle \quad \forall\, y \in E.$$

Теорема 1.15.2. *Пусть функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ выпукла и точка $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Тогда существует (конечная или бесконечная) производная $f'(x_0;\,\cdot\,)$ по направлениям, которая является положительно однородной и выпуклой на E, причем справедливо равенство*

$$f'(x_0;y) = \inf_{\lambda>0} \frac{f(x_0+\lambda y) - f(x_0)}{\lambda}. \tag{1.15.3}$$

Доказательство. Если $x_0 + \lambda y \notin \operatorname{dom} f$ при всех $\lambda > 0$, т. е. $f(x_0 + \lambda y) = +\infty$, то и $f'(x_0;y) = +\infty$.

Если $x_0 + \lambda y \in \operatorname{dom} f$ при всех $\lambda \in (0, \lambda_0]$, то для доказательства формулы (1.15.3) достаточно показать, что функция $g(\lambda) = (f(x_0 + {}$ ${}+ \lambda y) - f(x_0))/\lambda$ не убывает по $\lambda \in (0, \lambda_0]$.

Пусть λ_1 и λ_2 таковы, что $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_0$.

Так как $x_0 + \lambda_1 y = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\,(x_0 + \lambda_2 y) + \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2}\, x_0$, то в силу выпуклости функции f имеем

$$f(x_0 + \lambda_1 y) - f(x_0) \leqslant \\ \leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,(f(x_0 + \lambda_2 y) - f(x_0)) + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2}\,(f(x_0) - f(x_0)),$$

откуда $g(\lambda_1) \leqslant g(\lambda_2)$. Таким образом, предел в определении производной по направлению можно заменить на нижнюю грань.

Покажем положительную однородность функции $f'(x_0;\,\cdot\,)$. Зафиксируем число $\alpha > 0$. Тогда

$$f'(x_0; \alpha y) = \lim_{\lambda \to +0} \frac{f(x_0 + \alpha\lambda y) - f(x_0)}{\lambda} =$$
$$= \lim_{\lambda \to +0} \alpha \frac{f(x_0 + \alpha\lambda y) - f(x_0)}{\alpha\lambda} = \alpha \lim_{\beta \to +0} \frac{f(x_0 + \beta y) - f(x_0)}{\beta} = \alpha f'(x_0; y).$$

Выпуклость функции $f'(x_0;\cdot)$ получаем из выпуклости функции f следующим образом. Пусть $\alpha \in (0,1)$. Тогда

$$f'(x_0; \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2) = \lim_{\lambda \to +0} \frac{f(x_0 + \lambda\alpha y_1 + \lambda(1-\alpha) y_2) - f(x_0)}{\lambda} \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{\lambda \to +0} \frac{\alpha(f(x_0 + \lambda y_1) - f(x_0)) + (1-\alpha)(f(x_0 + \lambda y_2) - f(x_0))}{\lambda} =$$
$$= \alpha f'(x_0; y_1) + (1-\alpha) f'(x_0; y_2). \ \square$$

Следствие 1.15.1. *Пусть* $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ *— выпуклая функция, непрерывная в точке* x_0. *Тогда функция* $f'(x_0;\,\cdot\,)$ *является непрерывной.*

Доказательство. Выберем согласно теореме 1.7.1 число $\eta > 0$ так, чтобы выполнялось включение $B_\eta(x_0) \subset \operatorname{int}\operatorname{dom} f$ и функция f удовлетворяла на шаре $B_\eta(x_0)$ условию Липшица с некоторой константой $L > 0$.

Тогда в силу равенства (1.15.3) для любых $y \in B_\eta(0)$, $\lambda \in (0,1)$

$$f'(x_0; y) \leqslant \frac{f(x_0 + \lambda y) - f(x_0)}{\lambda} \leqslant L\|y\|.$$

В свою очередь, так как $0 = f'(x_0; 0) \leqslant f'(x_0; y) + f'(x_0; -y)$, то

$$f'(x_0; y) \geqslant -f'(x_0; -y) \geqslant -\frac{f(x_0 - \lambda y) - f(x_0)}{\lambda} \geqslant -L\|y\|.$$

В итоге $|f'(x_0; y)| \leqslant L\|y\|$. $\square$

Итак, если $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f$, то $f'(x_0; y)$ конечна и непрерывна для $\forall\, y \in E$. Если $x_0 + \lambda y \notin \operatorname{dom} f$ $\forall\, \lambda > 0$, то $f'(x_0; y) = +\infty$.

Следствие 1.15.2. *Если выпуклая функция* $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ *такова, что* $[x_0 - \varepsilon y,\, x_0 + \varepsilon y] \subset \operatorname{dom} f$ *при некотором* $\varepsilon > 0$, *то* $f'(x_0; y)$ *есть конечная величина.*

Доказательство. В силу формулы (1.15.3) имеем

$$f'(x_0; y) \leqslant \frac{f(x_0 + \varepsilon y) - f(x_0)}{\varepsilon} < +\infty,$$

$$f'(x_0; y) \geqslant -f'(x_0; -y) \geqslant -\frac{f(x_0 - \varepsilon y) - f(x_0)}{\varepsilon} > -\infty. \ \square$$

Пример 1.15.1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ множество $C = \mathrm{co}\,(A \cup B)$, где $A = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leqslant 1,\ x_3 \geqslant 0\}$ и $B = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 \geqslant 1\}$. Определим функцию $f\colon \mathbb{R}^2(x_1, x_2) \to \mathbb{R}^1(x_3)$ через ее надграфик: $\mathrm{epi}\, f = C$. Производная по направлению $y = (y_1, y_2)$ функции f в точке $0 = (0, 0)$ принимает вид

$$f'(0; y) = \begin{cases} 0, & y_2 > 0 \quad \text{или} \quad y_1 = y_2 = 0, \\ y_1, & y_1 > 0, \quad y_2 = 0, \\ +\infty & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, получили, что функция $f'(0; y)$ не является пн. сн. в точках вида $y = (y_1, 0)$, $y_1 > 0$.

Установим связь производной по направлениям от опорной функции множества с опорной функцией опорного множества.

Теорема 1.15.3. *Пусть A — замкнутое выпуклое множество из рефлексивного банахова пространства E, причем $\mathrm{int}\, b(A) \neq \varnothing$. Пусть выбраны функционал $p_0 \in \mathrm{int}\, b(A)$ и $A(p_0) = \{x \in A \,|\, \langle p_0, x\rangle = s(p_0, A)\}$ — опорное множество. Обозначим через $g(q) = s(q, A)$ опорную функцию множества A. Тогда справедлива формула*

$$s(q, A(p_0)) = g'(p_0; q) \quad \forall\, q \in E^*. \tag{1.15.4}$$

Доказательство. При выполнении условий теоремы в силу леммы 1.13.2 множество $A(p_0)$ есть непустое ограниченное выпуклое и замкнутое множество. Вычислим производную по направлениям $g'(p_0; q)$. В силу положительной однородности выпуклой функции g и теоремы 1.15.2 получаем ($\lambda > 0$)

$$g'(p_0; q) \leqslant \frac{g(p_0 + \lambda q) - g(p_0)}{\lambda} \leqslant \frac{g(\lambda q)}{\lambda} = g(q) \quad \forall\, q \in E^*. \tag{1.15.5}$$

Так как функция $g'(p_0; \cdot\,)$ по теореме 1.15.2 и следствию 1.15.1 является выпуклой непрерывной положительно однородной функцией, то по следствию 1.11.2 существует непустое выпуклое замкнутое множество $B \subset E$ такое, что его опорная функция $s(q, B) = g'(p_0; q)$ $\forall\, q \in E^*$.

Из неравенства (1.15.5) и упр. 1.11.9 получаем, что $B \subset A$.

Для любой точки $x \in A(p_0)$, любого $q \in E^*$ и $\lambda > 0$ получаем

$$s(p_0, A) + \lambda\langle x, q\rangle = \langle x, p_0 + \lambda q\rangle \leqslant s(p_0 + \lambda q, A),$$

т. е.

$$\langle x, q\rangle \leqslant \frac{s(p_0 + \lambda q, A) - s(p_0, A)}{\lambda},$$

откуда при $\lambda \to +0$ получаем, что $\langle x, q\rangle \leqslant g'(p_0; q) \quad \forall\, q \in E^*$, т. е. $A(p_0) \subset B$. В свою очередь в силу положительной однородности функции $g'(p_0;\,\cdot\,)$ получаем

$$g'(p_0; p_0) = \inf_{\lambda>0} \frac{g(p_0+\lambda p_0) - g(p_0)}{\lambda} = g(p_0),$$

$$g'(p_0; -p_0) = \inf_{\lambda>0} \frac{g(p_0-\lambda p_0) - g(p_0)}{\lambda} = -g(p_0),$$

откуда следует, что $B \subset H_{p_0} = \{x \in E \mid \langle p_0, x\rangle = s(p_0, A)\}$, т. е. $B = A(p_0)$. $\square$

Геометрический смысл производной по направлениям выпуклой функции показан в следующей теореме, в которой установлена связь надграфика производной с касательным конусом (см. § 1.4) надграфика функции.

Т е о р е м а 1.15.4. *Пусть $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ — собственная выпуклая пн. сн. функция. Тогда для любой точки $x_0 \in \operatorname{dom} f$ справедливо равенство*

$$T_{\text{н}}(\operatorname{epi} f;\ (x_0, f(x_0))) = \overline{\operatorname{epi}}\, f'(x_0;\,\cdot\,). \tag{1.15.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(y, \alpha) \in \operatorname{epi} f'(x_0;\,\cdot\,)$. Это значит, что справедливо неравенство $\alpha \geqslant f'(x_0; y)$. Так как по определению 1.15.2 производной по направлениям справедливо равенство

$$f(x_0+\lambda y) = f(x_0) + \lambda f'(x_0; y) + o(\lambda) \quad \forall\, \lambda \in (0, \lambda_0)$$

$\Bigl($где функция $o(\lambda)$ такова, что $\lim\limits_{\lambda\to+0} \dfrac{o(\lambda)}{\lambda} = 0\Bigr)$, то из него следует включение

$$(x_0+\lambda y, f(x_0) + \lambda\alpha + o(\lambda)) \in \operatorname{epi} f \quad \forall\, \lambda \in (0, \lambda_0),$$

которое означает, что

$$(y, \alpha) \in \frac{1}{\lambda}\,(\operatorname{epi} f - (x_0, f(x_0)) - \left(0,\ \frac{o(\lambda)}{\lambda}\right) \quad \forall\, \lambda \in (0, \lambda_0),$$

что и означает справедливость включения $(y, \alpha) \in T_{\text{н}}(\operatorname{epi} f;\ (x_0, f(x_0)))$.

Докажем обратное включение. В силу равенства конусов $T_{\text{н}}(\operatorname{epi} f;$ $(x_0,\ f(x_0))) = \overline{\operatorname{cone}}\,(\operatorname{epi} f - (x_0,\ f(x_0)))$, доказанного в предложении 1.4.6, достаточно рассмотреть случай, когда $(y, \alpha) \in \operatorname{cone}(\operatorname{epi} f - (x_0, f(x_0)))$. Это включение означает, что существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что справедливо включение $\lambda_0(y, \alpha) \in (\operatorname{epi} f - (x_0, f(x_0)))$.

Отсюда следует, что $(x_0 + \lambda_0 y, f(x_0) + \lambda_0 \alpha) \in \operatorname{epi} f$. В силу определения множества $\operatorname{epi} f$ из последнего включения следует неравенство $f(x_0 + \lambda_0 y) \leqslant f(x_0) + \lambda_0 \alpha$. Из этого неравенства и в силу выпуклости функции f получаем включение $[x_0, x_0 + \lambda_0 y] \subset \operatorname{dom} f$, а также в силу теоремы 1.15.2 получаем выражение

$$f'(x_0; y) = \inf_{\lambda > 0} \frac{f(x_0 + \lambda y) - f(x_0)}{\lambda} \leqslant \frac{f(x_0 + \lambda_0 y) - f(x_0)}{\lambda_0} \leqslant \alpha,$$

т. е. $(y, \alpha) \in \operatorname{epi} f'(x_0; \cdot)$. $\square$

Упражнение 1.15.1. Привести в $\mathbb{R}^2$ пример функции разрывной в точке, но дифференцируемой по Гато в этой точке.

Упражнение 1.15.2. Пусть A — выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$, причем $0 \in \operatorname{int} A$, пусть $\mu(x, A)$ — его функция Минковского и пусть $\mu'(x_0, A)(y)$ — ее производная в точке x_0 по направлению y. Доказать, что для любой точки $x_0 \in \partial A$ справедливо равенство

$$T_{\text{н}}(A, x_0) = \{y \mid \mu'(x_0, A)(y - x_0) \leqslant 0\}.$$

§ 1.16. Субдифференциал выпуклой функции

Опираясь на результат теоремы 1.15.1, введем следующее обобщение понятия производной для выпуклых функций.

Определение 1.16.1. Линейный функционал $p \in E^*$ называется *субградиентом* собственной выпуклой функции $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ в точке x_0, если справедливо неравенство $f(z) - f(x_0) \geqslant \langle p, z - x_0 \rangle$ $\forall z \in E$.

Определение 1.16.1. *Субдифференциалом* собственной выпуклой функции $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ в точке x_0 называется множество (обозначаемое $\partial f(x_0)$), состоящее из всех субградиентов функции f в точке x_0, т. е.

$$\partial f(x_0) = \{p \in E^* \mid f(z) - f(x_0) \geqslant \langle p, z - x_0 \rangle \quad \forall z \in E\}. \tag{1.16.1}$$

Замечание 1.16.1. Геометрический смысл субградиента $p \in \partial f(x_0)$ следующий: аффинная функция $h(z) = f(x_0) + \langle p, z - x_0 \rangle$ задает гиперплоскость, опорную ко множеству $\operatorname{epi} f$ в точке $(x_0, f(x_0))$ (рис. 10). Например, в случае, когда выполнено условие $\operatorname{int} \operatorname{dom} f \neq \varnothing$, выполнено условие $\operatorname{int} \operatorname{epi} f \neq \varnothing$. По теореме 1.9.3 любую точку $(x, f(x))$, где $x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f$, можно отделить от $\operatorname{epi} f$ невертикальной гиперплоскостью, откуда получаем, что $\partial f(x) \neq \varnothing$ при всех $x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f$. Если $x \notin \operatorname{dom} f$, т. е. $f(x) = +\infty$, то для любого $p \in E^*$

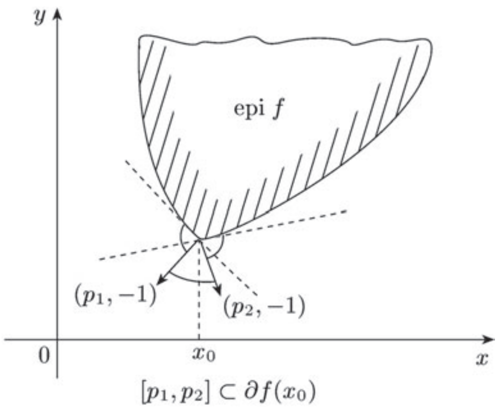


Рис. 10

при $z \in \operatorname{dom} f$ неравенство в определении 1.16.1 не выполняется, и поэтому $\partial f(x) = \varnothing$.

Пример 1.16.1. Пусть $f(x) = \|x\|$ в E. Найдем $\partial f(0)$. Субградиентное неравенство (1.16.1) принимает вид $\|z\| \geqslant \langle p, z\rangle$, откуда

$$\partial f(0) = \{p \in E^* \mid \langle p, z\rangle \leqslant \|z\| \quad \forall\, z \in B_1(0)\},$$

т. е. $\partial f(0)$ есть единичный шар $B_1^*(0)$ из сопряженного пространства E^*.

Пример 1.16.2. Пусть $g\colon E \to \mathbb{R}$ — положительно однородная выпуклая непрерывная функция. Аналогично примеру 1.16.1 можно найти ее субдифференциал в нуле:

$$\partial g(0) = \{p \in E^* \mid \langle p, z\rangle \leqslant g(z) \quad \forall\, z \in E\}.$$

Пусть $x \in E\backslash\{0\}$. Тогда $p \in \partial g(x)$, если

$$g(z) - g(x) \geqslant \langle p, z - x\rangle$$

для любого $z \in E$. Полагая $z = 0$, а затем $z = 2x$, получаем, что $g(x) = \langle p, x\rangle$. Далее, для любого $y \in E$, полагая $z = x + \lambda y$, $\lambda > 0$, получаем, что $g(x + \lambda y) - g(x) \geqslant \langle p, \lambda y\rangle$ или

$$g(\lambda^{-1}x + y) - g(\lambda^{-1}x) \geqslant \langle p, y\rangle.$$

При $\lambda \to +\infty$ получаем, что $g(y) \geqslant \langle p, y\rangle$, т. е. $p \in \partial g(0)$. Обратно, пусть $p \in \partial g(0)$ и $g(x) = \langle p, x\rangle$. Тогда $g(z) - g(x) \geqslant \langle p,\, z - x\rangle \ \forall\, z \in E$, т. е. $p \in \partial g(x)$. В итоге для любого $x \in E$ справедливо равенство

$$\partial g(x) = \{p \in E^* \mid p \in \partial g(0),\ \langle p, x\rangle = g(x)\}. \tag{1.16.2}$$

В частности, в примере 1.16.1 для $x \neq 0$ получаем равенство

$$\partial \|x\|_E = \{p \in E^* \mid \|p\|_{E^*} = 1, \ \langle p, x\rangle = \|x\|_E\}.$$

Пример 1.16.3. Пусть $f(x) = \delta(x, A)$ — индикаторная функция выпуклого множества A. Запишем субградиентное неравенство (1.16.1):

$$\delta(z, A) \geqslant \delta(x, A) + \langle p, \, z - x\rangle.$$

Если $x \in A$, то последнее неравенство равносильно $\langle p, \, z - x\rangle \leqslant 0$ $\forall\, z \in A$, откуда

$$\partial f(x) = \{p \in E^* \mid \langle p, \, z - x\rangle \leqslant 0 \quad \forall\, z \in A\} = \{p \in E^* \mid \langle p, x\rangle = s(p, A)\},$$

т. е. это нормальный конус $N(A, x)$ (см. определение 1.12.2), состоящий из всех опорных функционалов ко множеству A в точке x. Если $x \notin A$, то $f(x) = +\infty$ и $\partial f(x) = \varnothing$.

Отметим, что если $A = L$ — подпространство в E, то $\partial f(x) = \{p \in E^* \mid \langle p, z\rangle = 0 \quad \forall\, z \in L\} = L^{\perp}$ — аннулятор L.

Рассмотрим простейшую задачу на экстремум функции вида

$$\min\{f(x) \mid x \in E\}. \tag{1.16.3}$$

Теорема 1.16.1 (аналог теоремы Ферма). *Пусть* $f \colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ — *собственная выпуклая функция. Для того чтобы точка* $x_0 \in E$ *была минимумом в задаче* (1.16.3), *необходимо и достаточно, чтобы* $0 \in \partial f(x_0)$.

Доказательство. Точка $x_0 \in E$ является минимумом тогда и только тогда, когда $f(x) - f(x_0) \geqslant 0 = \langle 0, \, x - x_0\rangle$ для всех $x \in E$, что равносильно включению $0 \in \partial f(x_0)$. □

Лемма 1.16.1. *Пусть функция* $f \colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ *выпукла и конечна в точке* $x_0 \in E$. *Обозначим* $g(x) = f'(x_0; x)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\partial f(x_0) = \partial g(0).$$

Доказательство. Пусть $p \in \partial f(x_0)$. Тогда для любых $z \in E$ и $\lambda > 0$ имеем $\langle p, z\rangle = \lambda^{-1}\langle p, \lambda z\rangle \leqslant \lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda z) - f(x_0))$. Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получаем, что $\langle p, z\rangle \leqslant f'(x_0; z)$, т. е. $p \in \partial g(0)$. Обратно, если $p \in \partial g(0)$, то в силу (1.15.3) при $\lambda = 1$ получаем $\langle p, z\rangle \leqslant f'(x_0; z) \leqslant f(x_0 + z) - f(x_0)$, т. е. $p \in \partial f(x_0)$. □

Рассмотрим, как еще связан субдифференциал выпуклой функции в точке с производной по направлению в этой же точке.

Лемма 1.16.2. *Собственная выпуклая функция* $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ *имеет в точке* $x_0 \in E$ *непустой субдифференциал тогда и только тогда, когда ее производная по направлению* $f'(x_0;\,\cdot\,)$ *есть собственная пн. сн. в нуле функция.*

Если субдифференциал непуст, то он является выпуклым и замкнутым множеством.

Доказательство. Пусть $\partial f(x_0) \neq \varnothing$. Зафиксируем произвольный элемент $p \in \partial f(x_0)$. Тогда для любого $y \in E$ в силу определения субградиента и теоремы 1.15.2 имеет место неравенство $f'(x_0; y) \geqslant \langle p, y\rangle$. Переходя в этом неравенстве к нижнему пределу при $y \to 0$, получаем, что $\liminf\limits_{y \to 0} f'(x_0; y) \geqslant 0 = f'(x_0; 0)$, т. е. имеет место пн. сн. функции $f'(x_0;\,\cdot\,)$ в нуле.

Если функция $f'(x_0; y)$ пн. сн. в точке $y = 0$, то это условие может быть записано так:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall\, y \in B_{\delta_\varepsilon}(0), \quad f'(x_0; y) \geqslant -\varepsilon.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и соответствующее $\delta = \delta_\varepsilon > 0$. Из положительной однородности функции $f'(x_0;\,\cdot\,)$ имеем $f'(x_0; y/\delta) \geqslant -\varepsilon/\delta$ для всех $y \in \partial B_\delta(0)$, откуда получаем, что $f'(x_0; y) \geqslant -\frac{\varepsilon}{\delta}\,\|y\|$ для всех $y \in E$. Отсюда следует, что замыкание $\overline{f}'(x_0; y)$ есть собственная положительно однородная выпуклая функция, т. е. по следствию 1.11.2 это есть опорная функция непустого множества, каким, очевидно, является $\partial f(x_0)$.

Покажем выпуклость $\partial f(x_0)$. Пусть $p_1,\, p_2 \in \partial f(x_0)$, т. е.

$$f(z) \geqslant f(x_0) + \langle p_i,\, z - x_0\rangle \quad \forall\, z \in E, \quad i = 1, 2.$$

Пусть $\lambda \in (0, 1)$. Умножая неравенство с $i = 1$ на λ, а неравенство с $i = 2$ на $1 - \lambda$ и складывая их, получаем

$$f(z) \geqslant f(x_0) + \langle \lambda p_1 + (1-\lambda) p_2,\, z - x_0\rangle \quad \forall\, z \in E,$$

т. е. $\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2 \in \partial f(x_0) \quad \forall\, \lambda \in (0, 1)$, что и означает выпуклость $\partial f(x_0)$.

Покажем замкнутость $\partial f(x_0)$. Пусть $p_k \in \partial f(x_0)$ такие, что $\lim\limits_{k \in \infty} p_k = p_0$ (сходимость по норме пространства E^*). Переходя в неравенстве

$$f(z) \geqslant f(x_0) + \langle p_k, z - x_0\rangle \quad \forall\, z \in E$$

к пределу по $k \to \infty$, получаем

$$f(z) \geqslant f(x_0) + \langle p_0, z - x_0\rangle \quad \forall\, z \in E,$$

т. е. $p_0 \in \partial f(x_0)$. $\square$

Следствие 1.16.1. *Из доказательства лемм* 1.16.1 *и* 1.16.2 *следует, что линейный функционал* p *тогда и только тогда является субградиентом функции* f *в точке* x_0, *когда неравенство* $\langle p, y\rangle \leqslant \leqslant f'(x_0; y)$ *выполнено для всех* $y \in E$. *Таким образом, в силу того, что функция* $f'(x_0; \cdot)$ *является выпуклой и положительно однородной, ее замыкание* $\overline{f}'(x_0; \cdot)$ *совпадает в силу леммы* 1.11.3 *с опорной функцией множества* $\partial f(x_0)$. *Итак, получили равенство*

$$\overline{f}'(x_0; y) = s(y, \partial f(x_0)). \tag{1.16.4}$$

Отметим, что утверждения следствия 1.16.1 и леммы 1.16.2 не могут быть усилены.

Теорема 1.16.2. *Пусть* $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ *выпукла и непрерывна в точке* $x_0 \in E$. *Тогда* $\partial f(x_0)$ *есть непустое замкнутое выпуклое ограниченное множество.*

Доказательство. В силу леммы 1.16.2 достаточно доказать ограниченность субдифференциала. В силу следствия 1.15.1 из непрерывности f в точке x_0 следует непрерывность $f'(x_0; \cdot)$, что в силу следствия 1.16.1 влечет непустоту множества $\partial f(x_0)$ и равенство $\overline{f}'(x_0; y) = f'(x_0; y) = s(y, \partial f(x_0))$. В силу следствия 1.15.1 получаем, что

$$s(y, \partial f(x_0)) = f'(x_0; y) \leqslant L\|y\| = s(y, B_L^*(0)),$$

т. е. $\partial f(x_0) \subset B_L^*(0)$. $\square$

Замечание 1.16.2. Отметим, что А. Бренстед и Р. Рокафеллар (см. [123]) показали, что субдифференциал собственной выпуклой пн. сн. функции, определенной на банаховом пространстве, непуст не только в точках непрерывности функции, он непуст на некотором плотном подмножестве из $\operatorname{dom} f$. (Доказательство см. в теореме 2.10.2.)

Следствие 1.16.2. *Отметим, что множество* $\partial f(x_0)$ *при условиях теоремы* 1.16.2 *является слабо* компактным по теореме* 1.1.6.

Геометрический смысл субдифференциала и некоторых полученных выше его свойств можно увидеть из следующего простого утверждения.

Предложение 1.16.1. *Пусть даны выпуклая собственная функция* $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ *и точка* $x_0 \in \operatorname{dom} f$. *Нормальный конус* $N(\operatorname{epi} f; (x_0, f(x_0)))$ *к надграфику* $\operatorname{epi} f$ *имеет непустое пересечение с линейным многообразием* $L = \{(p, \alpha) \in E^* \times \mathbb{R} \mid \alpha = -1\}$ *тогда и только* *тогда, когда субдифференциал $\partial f(x_0)$ есть непустое множество. При этом справедливо равенство*

$$N(\operatorname{epi} f;\, (x_0, f(x_0))) = \overline{\operatorname{cone}}\,\{(p,-1) \,|\, p \in \partial f(x_0)\}. \tag{1.16.5}$$

Доказательство. Пусть субдифференциал $\partial f(x_0)$ есть непустое множество, и пусть $p \in \partial f(x_0)$. По определению субдифференциала это значит, что для любого $x \in \operatorname{dom} f$ и любого числа $\alpha \geqslant f(x)$ справедливо неравенство $\langle p, x - x_0\rangle \leqslant \alpha - f(x_0)$. Это эквивалентно неравенству $\langle (p,-1),\, (x,\alpha)\rangle \leqslant \langle (p,-1),\, (x_0, f(x_0))\rangle$ для любого значения $(x,\alpha) \in \operatorname{epi} f$, т.е. $(p,-1) \in N(\operatorname{epi} f;\, (x_0, f(x_0)))$. Отсюда следует, что $\overline{\operatorname{cone}}\,\{(p,-1)\,|\, p \in \partial f(x_0)\} \subset N(\operatorname{epi} f;\, (x_0, f(x_0)))$.

Пусть теперь существует вектор $(p,-1) \in N(\operatorname{epi} f;\, (x_0, f(x_0)))$. По определению нормального конуса это означает, что $\langle (p,-1),\, (x,\alpha)\rangle \leqslant \langle (p,-1),\, (x_0, f(x_0))\rangle$ для любого значения $(x,\alpha) \in \operatorname{epi} f$, откуда следует при $\alpha = f(x)$, что $\langle p, x - x_0\rangle \leqslant f(x) - f(x_0)$, т.е. $p \in \partial f(x_0)$, что и доказывает равенство (1.16.5). □

Лемма 1.16.3. *Пусть E — банахово пространство, f_1, $f_2\colon E \to \mathbb{R}$ — непрерывные положительно однородные выпуклые функции. Тогда*

$$\partial\left(\max\{f_1(0), f_2(0)\}\right) = \operatorname{co}\left(\partial f_1(0) \cup \partial f_2(0)\right).$$

Доказательство. Если $p \in \operatorname{co}\left(\partial f_1(0) \cup \partial f_2(0)\right)$, т.е. $p = \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2$, $p_i \in \partial f_i(0)$, $i \in \overline{1,2}$, $\lambda \in [0,1]$, то с учетом примера 1.16.2 и леммы 1.11.3 для любого $x \in E$ имеем

$$\langle p, x\rangle = \lambda\langle p_1, x\rangle + (1-\lambda)\langle p_2, x\rangle \leqslant \\ \leqslant \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_2(x) \leqslant \max\{f_1(x), f_2(x)\},$$

т.е. $p \in \partial(\max\{f_1(0), f_2(0)\})$ и

$$\partial\left(\max\{f_1(0), f_2(0)\}\right) \supset \operatorname{co}\left(\partial f_1(0) \cup \partial f_2(0)\right).$$

Допустим, что существует функционал

$$p_0 \in \partial\left(\max\{f_1(0), f_2(0)\}\right) \setminus \operatorname{co}\left(\partial f_1(0) \cup \partial f_2(0)\right).$$

В силу непрерывности функций f_1 и f_2 множества $\partial f_1(0)$ и $\partial f_2(0)$ компактны в слабой* топологии (см. следствие 1.16.2) и, следовательно, выпуклая оболочка $\operatorname{co}\left(\partial f_1(0) \cup \partial f_2(0)\right)$ есть слабый* компакт по теореме 1.14.2. По теореме 1.9.3 об отделимости (п. 2) в пространстве E^* со слабой* топологией получаем, что найдется вектор $x_0 \in E \setminus \{0\}$ такой, что

$$\alpha = \sup\left\{\langle x_0, \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2\rangle \,|\, \lambda \in [0,1],\, p_i \in \partial f_i(0),\, i \in \overline{1,2}\right\} < \langle p_0, x_0\rangle.$$

Из примера 1.16.2 и леммы 1.11.3 следует, что

$$\alpha = \sup_{\lambda \in [0,1]} (\lambda s(x_0, \partial f_1(0)) + (1-\lambda) s(x_0, \partial f_2(0))) =$$
$$= \sup_{\lambda \in [0,1]} (\lambda f_1(x_0) + (1-\lambda) f_2(x_0)) = \max\{f_1(x_0), f_2(x_0)\},$$

что противоречит включению $p_0 \in \partial(\max\{f_1(0), f_2(0)\})$. $\square$

Теорема 1.16.3 (А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин). *Пусть выпуклые функции* $f_1, f_2 \colon E \to \mathbb{R}$ *непрерывны в точке* $x \in E$ *и* $f_1(x) = f_2(x)$. *Тогда*

$$\partial(\max\{f_1(x), f_2(x)\}) = \operatorname{co}(\partial f_1(x) \cup \partial f_2(x)).$$

Доказательство. По лемме 1.16.1 $\partial f_i(x) = \partial_y f_i'(x;0)$, где $i \in \overline{1,2}$. Покажем, что

$$\partial_y (\max\{f_1'(x;0), f_2'(x;0)\}) = \partial_x \max\{f_1(x), f_2(x)\}.$$

Пусть $p \in \partial_x \max\{f_1(x), f_2(x)\}$. Для любого $y \in E$ существуют номер $i = 1, 2$ и последовательность $\lambda_k \to +0$ такие, что $f_i(x + \lambda_k y) \geqslant f_i(x) + \lambda_k \langle p, y \rangle$. Переходя к пределу по $\lambda_k \to +0$, получаем, что $f_i'(x;y) \geqslant \langle p, y \rangle$. Отсюда $\max\{f_1'(x;y), f_2'(x;y)\} \geqslant \langle p, y \rangle$, для всех y, что и означает включение $p \in \partial_y (\max\{f_1'(x;0), f_2'(x;0)\})$.

Обратно, пусть $p \in \partial_y (\max\{f_1'(x;0), f_2'(x;0)\})$. Тогда $\max\{f_1'(x;y), f_2'(x;y)\} \geqslant \langle p, y \rangle$, откуда в силу теоремы 1.15.2 получаем, что

$$\max\{f_1(x+y), f_2(x+y)\} - f_1(x) \geqslant \max\{f_1'(x;y), f_2'(x;y)\} \geqslant \langle p, y \rangle,$$

т. е. для любого $y \in E$

$$\max\{f_1(x+y), f_2(x+y)\} \geqslant f_1(x) + \langle p, y \rangle,$$

что и означает (в силу равенства $f_1(x) = f_2(x)$), что $p \in \partial_x \max\{f_1(x), f_2(x)\}$.

Осталось применить лемму 1.16.3, согласно которой

$$\partial_y (\max\{f_1'(x;0), f_2'(x;0)\}) = \operatorname{co}(\partial_y f_1'(x;0) \cup \partial_y f_2'(x;0)). \ \square$$

Отметим, что теорема 1.16.3 распространяется на любое конечное число выпуклых функций, что доказывается по индукции.

Ниже мы обобщим утверждение теоремы 1.16.3 на бесконечное семейство функций. (Подробности см. в теореме 1.17.3.)

Предложение 1.16.2. *Пусть функция* $f \colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ *выпукла и непрерывна в точке* $x_0 \in \operatorname{dom} f$. *Она дифференцируема по Гато в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда* $\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$.

Доказательство. 1. Пусть функция f имеет производную по Гато $f'(x_0)$ в точке x_0. Из теоремы 1.15.1 и определения субдифференциала следует, что $f'(x_0) \in \partial f(x_0)$.

Покажем, что $\partial f(x_0)$ состоит из одной точки $f'(x_0)$. Допустим, что $p \in \partial f(x_0)$. В силу следствия 1.16.1 имеем $\langle p, y\rangle \leqslant f'(x_0; y) = \langle f'(x_0), y\rangle$, откуда в силу произвольности $y \in E$ следует, что $p = f'(x_0)$.

2. Пусть $\partial f(x_0) = \{p_0\}$. Тогда $f'(x_0; y) \geqslant \langle p_0, y\rangle$, и в силу формулы (1.16.4) и пн. сн. функции $\langle p_0, y\rangle$ получаем, что $\overline{f}'(x_0; y) = s(y, \partial f(x_0)) = \langle p_0, y\rangle$. Следовательно, $\operatorname{dom} f'(x_0; \cdot\,) = E$, т. е. функция $f'(x_0; \cdot\,)$ непрерывна, и поэтому $f'(x_0; y) = \langle p_0, y\rangle$. По определению производной по направлению получаем неравенства $\langle p_0, y\rangle \leqslant \dfrac{f(x_0 + \lambda y) - f(x_0)}{\lambda} \leqslant \langle p_0, y\rangle + \delta(\lambda)$, где $\delta(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$. Отсюда, обозначая $\alpha(\lambda) = f(x_0 + \lambda y) - f(x_0) - \langle p_0, \lambda y\rangle$, получаем, что $0 \leqslant \alpha(\lambda) \leqslant \lambda\delta(\lambda)$, т. е. $p_0 = f'(x_0)$.$\square$

Отметим, что лемма 1.11.3 и следствие 1.11.2 в субдифференциальной форме приобретают следующий вид.

Предложение 1.16.3. 1. Собственная выпуклая положительно однородная функция $f\colon E^* \to \overline{\mathbb{R}}$ пн. сн. тогда и только тогда, когда $f(p) = s(p, \partial f(0))\ \forall\, p \in E^*$.

2. *Непустое множество $A \subset E$ выпукло и замкнуто тогда и только тогда, когда $A = \partial s(0, A)$.*

Доказательство. 1. В силу леммы 1.11.3 и следствия 1.11.2 условие леммы эквивалентно равенству $f(p) = s(p, A)\ \ \forall\, p$, где $A = \{x \in E \mid \langle p, x\rangle \leqslant f(p)\ \forall\, p \in E^*\}$, т. е. $A = \partial f(0)$.

2. В силу леммы 1.11.3 условие $\overline{\operatorname{co}}\, A = A$ эквивалентно, как и в п. 1 равенству $A = \{x \in E \mid \langle p, x\rangle \leqslant s(p, A)\ \forall\, p \in E^*\} = \partial s(0, A)$. $\square$

Теорема 1.16.4. *Пусть дана собственная выпуклая пн. сн. функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. Тогда следующие условия равносильны*:

1) $p \in \partial f(x)$;

2) $\langle p, z\rangle - f(z)$ *достигает максимума по z в точке $z = x$*;

3) $f(x) + f^*(p) = \langle p, x\rangle$;

4) $x \in \partial f^*(p)$;

5) $\langle q, x\rangle - f^*(q)$ *достигает максимума по q в точке $q = p$.*

Доказательство. Из условия 1) следует, что $\langle p, x\rangle - f(x) \geqslant \langle p, z\rangle - f(z)$ для всех $z \in E$, что эквивалентно условию 2). Так как верхняя грань в условии 2) по определению совпадает с $f^*(p)$, то из условия 2) следует условие 3). Условие 2) следует из условия 3), и определения функции f^*, т. е. условия 2) и 3), равносильны.

Применяя те же рассуждения к функции f^*, получаем эквивалентность условий 3)–5), получая вместо условия 3) равенство $f^{**}(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle$ и используя равенство $f^{**} = f$. $\square$

Теорема 1.16.5 (Дж. Моро, Р.Т. Рокафеллар). *Пусть f_1 и f_2: $E \to \overline{\mathbb{R}}$ — собственные выпуклые пн. сн. функции. Тогда*

$$\partial (f_1 + f_2)(x) \supset \partial f_1(x) + \partial f_2(x). \tag{1.16.6}$$

Если же существует точка $x_0 \in \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2$, в которой одна из функций (например, f_1) непрерывна, то справедливо равенство

$$\partial (f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x) \quad \forall\, x \in E. \tag{1.16.7}$$

Доказательство. Включение (1.16.6) следует из определения субдифференциала. Докажем равенство (1.16.7).

Если $x \notin \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2$, то $x \notin \operatorname{dom}(f_1 + f_2)$, поэтому $\partial (f_1 + f_2)(x) = \varnothing$, т. е. равенство (1.16.7) выполняется как равенство пустых множеств. Пусть $x \in \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2$, и пусть $p \in \partial(f_1 + f_2)(x)$. Покажем, что $p \in \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$. Определим функции $g_1(y) = f_1(x+y) - f_1(x) - \langle p, y\rangle$ и $g_2(y) = f_2(x+y) - f_2(x)$. Эти функции, очевидно, являются выпуклыми собственными пн. сн. функциями, при этом справедливы равенства $\partial f_1(x) = \partial g_1(0) + \{p\}$ и $\partial f_2(x) = \partial g_2(0)$. Таким образом, свели задачу к задаче для функций g_i в точке $x = 0$, где $g_1(0) = g_2(0) = 0$, при выполнении условия $0 \in \partial (g_1 + g_2)(0)$. Для доказательства теоремы нужно показать, что в $\partial g_1(0)$ и $\partial g_2(0)$ есть противоположные элементы.

Условие $0 \in \partial (g_1 + g_2)(0)$ означает, что в точке 0 выполнено условие минимума выпуклой функции, т. е.

$$\min_z (g_1 + g_2)(z) = g_1(0) + g_2(0) = 0. \tag{1.16.8}$$

Определим множества $A_1 = \{(z, \mu) \in E \times \mathbb{R} \mid \mu \geqslant g_1(z)\} = \operatorname{epi} g_1$ и $A_2 = \{(z, \mu) \in E \times \mathbb{R} \mid \mu \leqslant -g_2(z)\}$. В силу выпуклости функций g_1 и g_2 множества A_1 и A_2 также выпуклы. Как следует из условия теоремы, в точке $z_0 = x_0 - x$ функция g_1 непрерывна, т. е. существует окрестность $B_\delta(z_0)$ точки z_0 такая, что $|g_1(z) - g_1(z_0)| < \varepsilon$ при любом $z \in B_\delta(z_0)$. Поэтому множество $\{(z, \alpha) \in E \times \mathbb{R} \mid \alpha > g_1(z_0) + \varepsilon,$ $|z - z_0| < \delta\}$ открыто и содержится во множестве A_1, т. е. множество $\operatorname{int} A_1 = \operatorname{int} \operatorname{epi} g_1 = \{(z, \mu) \in E \times \mathbb{R} \mid z \in \operatorname{int} \operatorname{dom} g_1,\ \mu > g_1(z)\}$ непусто. При этом пересечение множеств $\operatorname{int} A_1$ и A_2 пусто, так как в противном случае в некоторой их общей точке (z_1, μ_1) выполнялось бы неравенство $g_1(z_1) < \mu_1 \leqslant -g_2(z_1)$, т. е. $g_1(z_1) + g_2(z_1) < 0$, что противоречит утверждению (1.16.8). По теореме 1.9.3 (об отделимости) множества $\operatorname{int} A_1$ и A_2 можно разделить некоторой гиперплоскостью $H \subset E \times \mathbb{R}$.

Покажем, что гиперплоскость H не параллельна прямой $\{0\} \times \times \mathbb{R}$. Если допустить, что H вертикальна, то гиперплоскость $G = H \cap (E \times \{0\}) \subset E$ разделяет множества $\operatorname{int} \operatorname{dom} g_1$ и $\operatorname{dom} g_2$, что невозможно, так как по условию теоремы точка z_0 лежит во множестве $\operatorname{int} \operatorname{dom} g_1 \cap \operatorname{dom} g_2$.

Итак, гиперплоскость H не вертикальна, следовательно, существуют функционал $q \in E^*$ и число $\beta \in \mathbb{R}$ такие, что гиперплоскость H задается уравнением $H = \{(z, \mu) \,|\, \mu = \langle q, z \rangle - \beta\}$. Поскольку точка $(0, 0) \in E \times \mathbb{R}$ лежит в пересечении множеств A_1 и A_2, то $(0, 0) \in H$, откуда следует, что $\beta = 0$.

Из того, что гиперплоскость H разделяет множества $\operatorname{int} A_1$ и A_2, следуют неравенства $\mu \geqslant \langle q, z \rangle \quad \forall\, (z, \mu) \in A_1$, и $\mu \leqslant \langle q, z \rangle \quad \forall\, (z, \mu) \in \in A_2$. В силу определений множеств A_1 и A_2 неравенства можно переписать в виде $g_1(z) \geqslant g_1(0) + \langle q,\, z - 0 \rangle$ и $g_2(z) \geqslant g_2(0) + \langle -q,\, z - 0 \rangle$. Это означает, что $q \in \partial g_1(0)$, а $-q \in \partial g_2(0)$. $\square$

З а м е ч а н и е 1.16.3. Теорема Моро–Рокафеллара по индукции распространяется на любой конечный набор собственных выпуклых функций $f_1, \ldots, f_m$. При этом для доказательства равенства надо предположить, что в некоторой точке $x_0 \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} \operatorname{dom} f_i$ все функции, кроме одной, например, f_1, непрерывны (или, что равносильно, множество $\bigcap\limits_{i=2}^{m} (\operatorname{int} \operatorname{dom} f_i) \cap \operatorname{dom} f_1$ непусто). Тогда справедливо равенство

$$\partial\, (f_1 + \ldots + f_m)(x) = \partial f_1(x) + \ldots + \partial f_m(x).$$

Т е о р е м а 1.16.6. *Пусть $T\colon E_1 \to E_2$ — непрерывный линейный оператор, действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, пусть $f\colon E_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая пн. сн. функция. Тогда справедливо включение $\partial\, (f \circ T)(x) \supset T^* \, \partial(f(Tx))$. Если существует точка $x_0 \in E_1$ такая, что f конечна и непрерывна в точке Tx_0, то $\partial\, (f \circ T)(x) = T^* \, \partial(f(Tx))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем точку $x \in E_1$. Пусть $p \in \in \partial f(Tx)$. По определению субдифференциала это значит, что

$$\forall\, z \in E_2: \quad \langle p,\, z - Tx \rangle + f(Tx) \leqslant f(z).$$

Следовательно, для любого $y \in E_1$, выбирая $z = Ty$, получаем

$$\langle p,\, Ty - Tx\rangle + (f\circ T)(x) \leqslant (f\circ T)(y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \langle T^*p,\, y - x\rangle + (f\circ T)(x) \leqslant (f\circ T)(y),$$

а значит, $T^*p \in \partial(f\circ T)(x)$, что и доказывает первое включение.

Пусть теперь $p \in \partial(f\circ T)(x)$. Это значит, что

$$\forall\, y \in E_1\colon\ \langle p, y - x\rangle + (f\circ T)(x) \leqslant (f\circ T)(y). \tag{1.16.9}$$

Рассмотрим аффинное множество в $E_2 \times \mathbb{R}$ вида

$$L = \{(Ty,\, \langle p, y - x\rangle + (f\circ T)(x)) \,|\, y \in E_1\}.$$

Неравенство (1.16.9) показывает, что выпуклые множества L и $\operatorname{epi} f$ могут иметь общими только граничные точки. В самом деле, пусть $(z_0, \mu_0) \in L \cap \operatorname{epi} f$. По определению L это значит, что существует точка $y_0 \in E_1$ такая, что $z_0 = Ty_0$ и $\mu_0 = \langle p, y_0 - x\rangle + (f\circ T)(x)$. По определению $\operatorname{epi} f$ это значит, что $\mu_0 \geqslant f(z_0) = (f\circ T)(y_0)$. Из неравенства (1.16.9) следует, что $\mu_0 \leqslant (f\circ T)(y_0)$. В итоге получили, что $\mu_0 = (f\circ T)(y_0)$, т. е. точка (z_0, μ_0) есть граничная точка множеств L и $\operatorname{epi} f$.

Поскольку функция f выпукла и непрерывна в точке Tx_0, то $\operatorname{int}\operatorname{epi} f \neq \varnothing$, и по теореме 1.9.3 об отделимости найдется невертикальная гиперплоскость H, содержащая L и не пересекающаяся с $\operatorname{int}\operatorname{epi} f$; H задается аффинной функцией $h(z)$ вида

$$h(z) = \langle q, z\rangle + \alpha, \quad \text{где} \quad q \in E_2^*, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Поскольку гиперплоскость H содержит множество L, получаем, что

$$\forall\, y \in E_1\colon\ \langle q, Ty\rangle + \alpha = \langle p, y - x\rangle + (f\circ T)(x),$$

т. е.

$$\alpha = (f\circ T)(x) - \langle p, x\rangle, \tag{1.16.10}$$
$$\forall\, y \in E_1\colon\ \langle q, Ty\rangle = \langle p, y\rangle. \tag{1.16.11}$$

Значит, $p = T^*q$. В силу того, что H не пересекается с $\operatorname{int}\operatorname{epi} f$, имеем

$$\forall\, z \in E_2\colon\ \langle q, z\rangle + (f\circ T)(x) - \langle T^*q, x\rangle \leqslant f(z),$$

т. е.

$$\forall\, z \in E_2\colon\ \langle q, z - Tx\rangle + f(Tx) \leqslant f(z).$$

Отсюда следует, что $q \in \partial f(Tx)$, откуда $p = T^*q \in T^*\,\partial f(Tx)$. $\square$

П р е д л о ж е н и е 1.16.4. *Пусть E — банахово пространство, $\{A_i\}_{i=0}^m \subset E$ — конечная совокупность выпуклых замкнутых множеств, причем $A_0 \cap \operatorname{int} A_1 \cap \ldots \cap \operatorname{int} A_m \neq \varnothing$. Пусть $A = \bigcap\limits_{i=0}^{m} A_i$.*

Тогда для всякой точки $a \in A$ справедливо равенство

$$N(A;a) = \sum_{i=0}^{m} N(A_i;a),$$

где $N(A;a)$ есть нормальный конус ко множеству A в точке $a \in A$ (*см. определение* 1.12.2).

Доказательство. Определим выпуклые полунепрерывные снизу индикаторные функции $f_i(x) = \delta(x, A_i)$, где $0 \leqslant i \leqslant m$, и функцию $f(x) = \delta(x, A)$. Отметим, что отсюда и из определения множества A следует равенство $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} f_i(x)$, и для каждого номера $i = \overline{1,m}$ функция f_i непрерывна на множестве $\operatorname{int} A_i$. Отсюда в силу замечания к теореме 1.16.5 в любой точке $a \in A$ справедливо равенство

$$\partial f(a) = \sum_{i=0}^{m} \partial f_i(a).$$

Из этого равенства следует утверждение теоремы, поскольку для индикаторных функций (см. пример 1.16.3) справедливы равенства $\partial f(a) = N(A;a)$ и $\partial f_i(a) = N(A_i;a)$ при любом значении $a \in A$. $\square$

Пример 1.16.4. Рассмотрим задачу: найти необходимые и достаточные условия того, что в точке $x_0 \in A$ достигается $\min\{f(x) \mid x \in A\}$, где множество A выпукло, замкнуто и $A \neq E$, а выпуклая функция f непрерывна на множестве A.

Перепишем эту задачу об условном экстремуме в виде следующей задачи на безусловный экстремум: найти $\min\{(f(x) + \delta(x, A)) \mid x \in E\}$. Очевидно, что новая задача эквивалентна исходной. По теореме 1.16.1 необходимое и достаточное условие того, что точка x_0 является решением этой задачи, имеет вид $0 \in \partial\,(f(x_0) + \delta(x_0, A))$. Из теоремы Моро–Рокафеллара и примера 1.16.3 получаем равенство

$$\partial\,(f(x_0) + \delta(x_0, A)) = \partial f(x_0) + \partial\,\delta(x_0, A) = \partial f(x_0) + N(A;x_0).$$

Поэтому необходимое и достаточное условие решения исходной задачи принимает следующий вид:

$$\partial f(x_0) \cap (-N(A;x_0)) \neq \varnothing. \tag{1.16.12}$$

Пример 1.16.5. Пусть непустое множество A из банахова пространства E задано в виде

$$A = \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in E \mid f_i(x) \leqslant 0\}, \tag{1.16.13}$$

где число $m \in \mathbb{N}$, а собственные функции $f_i\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ выпуклы и непрерывны на A. Пусть существует точка $x_1 \in E$ такая, что выполняются строгие неравенства $f_i(x_1) < 0$ при всех $i \in \overline{1,m}$. Требуется найти касательный и нормальный конусы ко множеству A в некоторой точке $x_0 \in A$.

По условию множество A (см. формулу (1.16.13)) непусто, выпукло, замкнуто и представимо в виде

$$A = \bigcap_{i=1}^{m} A_i, \quad \text{где} \quad A_i = \{x \in E \mid f_i(x) \leqslant 0\}.$$

Для простоты полагаем, что функции f_i пронумерованы так, что для данной в условии точки $x_0 \in A$ существует номер $r \in \overline{0,m}$ такой, что при каждом номере $i \in \overline{1,r}$ справедливы равенства $f_i(x_0) = 0$, а при каждом $i \in \overline{r+1,\, m}$ справедливы неравенства $f_i(x_0) < 0$. При каждом $i \in \overline{r+1,\, m}$ в силу непрерывности функции f_i получаем включение $x_0 \in \operatorname{int} A_i$, откуда следует равенство $\operatorname{cone}(A_i - x_0) = E$.

Таким образом, в силу выражения касательного конуса для пересечения множеств (см. лемму 1.4.2) получаем:

1) если $r = 0$, то $\operatorname{cone}(A - x_0) = E$;

2) если же $r \geqslant 1$, то получаем формулу

$$\operatorname{cone}(A - x_0) = \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{cone}(A_i - x_0).$$

Опишем один из конусов $\operatorname{cone}(A_i - x_0)$ при $i \in \overline{1,r}$, например, конус $\operatorname{cone}(A_1 - x_0)$.

По условию $f_1(x_0) = 0$, и поэтому $x_0 \neq x_1$. Следовательно, точка $y_0 = x_1 - x_0 \neq 0$ такова, что $y_0 \in A - x_0$. Таким образом, $\operatorname{cone}(A_1 - x_0) \neq \{0\}$.

Пусть $y \in \operatorname{cone}(A_1 - x_0)$, $y \neq 0$. Тогда существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что $\lambda_0 y \in A_1 - x_0$. Следовательно, $f_1(x_0 + \lambda_0 y) \leqslant 0$. Поэтому производная функции f по направлению y в силу теоремы 1.15.2 удовлетворяет неравенству

$$f_1'(x_0; y) \leqslant \frac{1}{\lambda_0}\,(f_1(x_0 + \lambda_0 y) - f_1(x_0)) \leqslant 0,$$

т. е. справедливо включение

$$\operatorname{cone}(A_1 - x_0) \subset \{y \in E \mid f_1'(x_0; y) \leqslant 0\}.$$

Докажем, что справедливо и обратное включение.

Пусть вектор $y \in E$ таков, что справедливо неравенство $f_1'(x_0; y) < 0$ (множество таких векторов y непусто, в чем легко убеждаемся, взяв вектор $y_0 = x_1 - x_0$ и записав соотношения $f_1'(x_0; y_0) \leqslant f_1(x_0 + y_0) - f_1(x_0) = f_1(x_1) < 0$).

В силу выбора вектора y и формулы (см. теорему 1.15.2)

$$f_1'(x_0; y) = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda}\,(f_1(x_0 + \lambda y) - f_1(x_0)),$$

существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что $\frac{1}{\lambda_0}\,(f_1(x_0 + \lambda_0 y) - f_1(x_0)) < 0$, т. е. $f(x_0 + \lambda_0 y) < 0$, откуда следует, что $x_0 + \lambda_0 y \in A_1$, т. е. $y \in \operatorname{cone}(A_1 - x_0)$. Беря замыкание множеств и воспользовавшись еще следствием 1.16.1, получаем равенство

$$\overline{\operatorname{cone}}\,(A_1 - x_0) = \{y \in E \mid f_1'(x_0; y) \leqslant 0\} = \\ = \{y \in E \mid s(y, \partial f_1(x_0) \leqslant 0\}. \quad (1.16.14)$$

В итоге для касательного конуса множества A из (1.16.13) в точке x_0 получаем формулу

$$\overline{\operatorname{cone}}\,(A - x_0) = \bigcap_{i=1}^{r} \{y \in E \mid f_i'(x_0; y) \leqslant 0\} = \\ = \bigcap_{i=1}^{r} \{y \in E \mid s(y, \partial f_i(x_0) \leqslant 0\}. \quad (1.16.15)$$

Для вычисления нормального конуса $N(A_1; x_0)$ воспользуемся леммой 1.12.7 о представлении нормального конуса в виде поляры от $\operatorname{cone}(A_1 - x_0)$. Отсюда и из формулы (1.16.14) получаем равенство

$$N(A_1; x_0) = \overline{\operatorname{cone}}\,(\partial f_1(x_0)).$$

Так как по условию $x_1 \in \operatorname{int} A$, т. е. $\operatorname{int} A \neq \varnothing$, то в силу предложения 1.16.4 нормальный конус множества A равен сумме нормальных конусов множеств A_i, т. е. справедлива общая формула

$$N(A; x_0) = \left\{ p \in E^* \;\middle|\; p = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i,\ \lambda_i \geqslant 0,\ p_i \in \partial f_i(x_0),\ \lambda_i f_i(x_0) = 0 \right\}. \quad (1.16.16)$$

Замечание 1.16.4. На основе разобранных примеров 1.16.4 и 1.16.5 сразу можно выписать субдифференциальную форму необходимых и достаточных условий в задаче на условный экстремум из примера 1.16.4 при множестве A из примера 1.16.5.

В силу этих условий (формул (1.16.12) и (1.16.16)) получаем, что существует вектор $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ такой, что $\lambda_i \geqslant 0$ и справедливы равенства $\lambda_i f_i(x_0) = 0$ при всех $i \in \overline{1, m}$, причем выпуклая функция $L(x,\lambda)$, определяемая по формуле $L(x,\lambda) = f_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$, достигает в точке x_0 своего безусловного минимума по x, так как в силу формул (1.16.12) и (1.16.16) для нее выполняются необходимые и достаточные условия минимума вида

$$0 \in \partial_x L(x_0, \lambda).$$

Определенная выше функция $L(x,\lambda)$ в теории экстремальных задач называется *функцией Лагранжа,* а соответственно метод перехода от задачи на условный экстремум к задачи на безусловный экстремум для функции Лагранжа называется *методом Лагранжа* и имеет широкие обобщения для многих гладко-выпуклых экстремальных задач (подробнее см., например, [7, 28, 50]).

К методу Лагранжа мы вернемся в гл. 2, когда будем рассматривать задачи выпуклого и линейного программирования.

Упражнение 1.16.1. Доказать лемму 1.13.6 с помощью теоремы Моро–Рокафеллара.

Упражнение 1.16.2. Показать (построив соответствующие примеры), что для различных точек границы $\partial\,\mathrm{dom}\, f$ эффективного множества функции f может оказаться, что $\partial f(x) \neq \varnothing$, так и $\partial f(x) = \varnothing$.

Упражнение 1.16.3. Найти субдифференциал функции

$$f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2| + 1 \quad \text{при всех } (x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Упражнение 1.16.4. Найти субдифференциал функции

$$f(x_1, x_2) = \max\Big\{|x_1| + |x_2|,\ 1{,}2 \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\Big\} \quad \text{в точке } (0,0).$$

Упражнение 1.16.5. Показать, что для того, чтобы субдифференциал функции f в точке x был непустым множеством, необходимо, чтобы функции f была полунепрерывна снизу в точке x. Показать, что это условие не является достаточным.

Упражнение 1.16.6. Какое множество описывает субдифференциал опорной функции $s(p, A)$ в точке $p \neq 0$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт? В каком случае субдифференциал опорной функции в каждой точке является одноточечным множеством? Каков геометрический смысл этого?

Упражнение 1.16.7. Докажите теорему Моро–Рокафеллара следующим образом. Сначала докажите, что если положительно однородные выпуклые функции f_1, f_2: $E \to \overline{\mathbb{R}}$ таковы, что функция f_1

непрерывна, а функция f_2 полунепрерывна снизу (замкнута), то справедливо равенство

$$\partial\,(f_1 + f_2)(0) = \partial f_1(0) + \partial f_2(0).$$

Далее воспользуйтесь леммой 1.16.1 для доказательства общего случая. Сравните с доказательством теоремы 1.16.3.

§ 1.17. Свойства субдифференциалов

Лемма 1.17.1. *Пусть U — выпуклое открытое множество из банахова пространства E, пусть последовательность собственных выпуклых функций $f_i\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, $i \in \mathbb{N}$, таких, что $U \subset \operatorname{dom} f_i$ $\forall\, i \in \mathbb{N}$, поточечно сходится на U к собственной выпуклой функции f и удовлетворяет условиям теоремы* 1.7.3. *Пусть последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset U$ и $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \subset E$ таковы, что $x_i \to x \in U$, $y_i \to y \in E$. Тогда*

$$\limsup_{i\to\infty} f_i'(x_i; y_i) \leqslant f'(x; y). \tag{1.17.1}$$

Доказательство. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. В силу теоремы 1.15.2 найдется число $\mu > 0$ такое, что

$$\frac{f(x+\mu y) - f(x)}{\mu} \leqslant f'(x; y) + \varepsilon.$$

Снова по теореме 1.15.2 имеем

$$f_i'(x_i; y_i) = \inf_{\lambda>0} \frac{f_i(x_i + \lambda y_i) - f_i(x_i)}{\lambda} \leqslant \frac{f_i(x_i + \mu y_i) - f_i(x_i)}{\mu} \quad \forall\, i.$$

По теореме 1.7.4 каждое слагаемое в правой части последнего неравенства сходится при $i \to \infty$, т. е. найдется i_0 такой, что для всех $i \geqslant i_0$

$$\frac{f_i(x_i + \mu y_i) - f_i(x_i)}{\mu} \leqslant \frac{f(x+\mu y) - f(x)}{\mu} + \varepsilon.$$

Следовательно, для всех $i \geqslant i_0$ получили

$$f_i'(x_i; y_i) \leqslant f'(x; y) + 2\varepsilon,$$

что и требовалось. $\square$

Теорема 1.17.1. *В условиях леммы* 1.17.1 *для любой слабой* окрестности нуля V вида*

$$V = \bigcap_{1\leqslant k\leqslant K} \{p \in E^* \mid |\langle p, y_k\rangle| \leqslant \varepsilon_k\} \tag{1.17.2}$$

найдется номер $i_0 \in \mathbb{N}$ *такой, что справедливо включение*

$$\partial f_i(x_i) \subset \partial f(x) + V \quad \forall\, i > i_0.$$

Доказательство. Докажем теорему в случае $E = \mathbb{R}^n$. Зафиксируем окрестность V вида (1.17.2). Пусть $\varepsilon > 0$ такое число, что $B_\varepsilon(0) \subset \subset V$. Выпуклые функции $f_i'(x_i;\cdot)$ и $f'(x;\cdot)$ в силу следствия 1.16.1 суть опорные функции непустых выпуклых компактов $\partial f_i(x_i)$ и $\partial f(x)$ соответственно. Поэтому они всюду конечны. По лемме 1.17.1 для любого $y \in \partial B_1(0)$

$$\limsup_{i\to\infty} f_i'(x_i;y) \leqslant f'(x;y).$$

Отсюда в силу теоремы 1.7.4 последовательность функций $g_i(y) = \max\{f_i'(x_i;y), f'(x;y)\}$ сходится на компакте $\partial B_1(0)$ к функции $y \mapsto \to f'(x;y)$ равномерно, т. е. найдется номер i_0 такой, что

$$f_i'(x_i;y) \leqslant f'(x;y) + \varepsilon, \qquad \forall y \in \partial B_1(0),\ \forall i > i_0.$$

Из последней формулы сразу следует включение

$$\partial f_i(x_i) \subset \partial f(x) + B_\varepsilon(0) \subset \partial f(x) + V,$$

что и требовалось доказать.

Для общего случая (т. е. для произвольного банахова пространства E) доказательство теоремы следует из приведенного ниже замечания. $\square$

Замечание 1.17.1. На самом деле при выполнении условий теоремы 1.17.1 имеет место более сильное утверждение: для любого слабо* открытого множества U, содержащего множество $\partial f(x)$, найдется номер i_0 такой, что для всех $i > i_0$ выполнено включение $\partial f_i(x_i) \subset U$.

Доказательство этого утверждения можно получить из следующей леммы, доказанной в [68, гл. 3, § 2, лемма 11]. Пусть A — слабый* компакт, который содержится в слабо* открытом множестве U. Тогда найдется слабая* окрестность множества A вида

$$\bigcap_{1\leqslant k\leqslant K} \{p \in E^* \mid \langle p, y_k\rangle < s(y_k, A) + \varepsilon\}, \quad \text{где} \quad K \in \mathbb{N}, \quad y_k \in E, \quad \varepsilon > 0,$$

которая целиком содержится в U.

Следствие 1.17.1. *Субдифференциал выпуклой пн. сн. функции* f *полунепрерывен сверху на* $\operatorname{int}\operatorname{dom} f$, *т. е. для любого* $x \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f$ *и любой последовательности точек* $\{x_i\} \subset \operatorname{int}\operatorname{dom} f$

такой, что $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$, *для любой слабой* окрестности* V *вида* (1.17.2) *существует номер* $i_0 \in \mathbb{N}$ *такой, что*

$$\partial f(x_i) \subset \partial f(x) + V \quad \forall\, i > i_0.$$

Следствие 1.17.2. *В случае, когда* $E = \mathbb{R}^n$, *утверждение теоремы* 1.17.1 *принимает вид включения*

$$\partial f_i(x_i) \subset \partial f(x) + B_\varepsilon(0) \quad \forall\, i > i_0.$$

Доказательство. Доказательство основано на том, что в случае конечномерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ во всякий шар $B_\varepsilon(0)$ можно вписать некоторую слабую окрестность нуля. В самом деле, выберем число $\varepsilon > 0$, семейство точек $\{p_k\}_{k=1}^K \subset \partial B_1(0)$ и слабую окрестность

$$V = \bigcap_{1\leqslant k\leqslant K} \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |\langle p_k, x\rangle| < \frac{\varepsilon}{2} \Big\}$$

так, чтобы $h(V, B^\circ_{\varepsilon/2}(0)) < \varepsilon/2$. Это возможно, так как шар $B_{\varepsilon/2}(0)$ в $\mathbb{R}^n$ можно с любой точностью в метрике Хаусдорфа приблизить снаружи многогранником (точное доказательство этого факта с оценками погрешности приближений будет дано в гл. 2). В итоге получаем включение

$$\partial f_i(x_i) \subset \partial f(x) + V \subset \partial f(x) + B_\varepsilon(0). \;\square$$

Следствие 1.17.3. *Если выпуклая пн. сн. функция* $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ *дифференцируема по Гато на открытом выпуклом множестве* $U \subset$ $\subset E$, *то ее производная Гато* f' *слабо* непрерывна на* U, *т. е. для любых точки* $x \in U$ *и последовательности* $\{x_i\} \subset U$ *таких, что* $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$, *и для любой слабой* окрестности* V *вида* (1.17.2) *найдется номер* $i_0 \in \mathbb{N}$ *такой, что*

$$f'(x_i) \in f'(x) + V \quad \forall\, i > i_0.$$

Доказательство, очевидно, следует из теоремы 1.17.1 и предложения 1.16.2.

Обозначим через t_w^* локальную базу нуля слабой* топологии в E^*.

Теорема 1.17.2. *Пусть* $U \subset E$ — *открытое выпуклое множество. Пусть последовательность собственных выпуклых пн. сн. на* U *функций* $f_i\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ *сходится к выпуклой функции* f, *которая дифференцируема по Гато на множестве* U. *Тогда последовательность субдифференциалов* $\{\partial f_i(x)\}$ *слабо* сходится к производной* $f'(x)$ *равномерно по* x *на всяком компакте* $A \subset U$, *т. е.*

$$\forall\, V \in t_w^* \quad \exists\, i_0 \quad \forall\, i > i_0, \quad \forall\, x \in A\colon \partial f_i(x) \subset f'(x) + V. \tag{1.17.3}$$

Доказательство. Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда, выделяя, если нужно, подпоследовательность, запишем

$$\exists\, V_0 \in t_w^*, \quad \exists\, \{x_i\} \subset A\colon\, \partial f_i(x_i) \not\subset f'(x_i) + V_0. \tag{1.17.4}$$

В силу компактности множества A найдется точка $x \in A$ такая, что $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$. В силу непрерывности производной по Гато выпуклой функции f (следствие 1.17.3) существует номер i_1, для которого

$$f'(x) \in f'(x_i) + \frac{1}{2}\, V_0 \quad \forall\, i > i_1.$$

В силу полунепрерывности сверху субдифференциала выпуклой функции (следствие 1.17.1) существует номер i_2, для которого

$$\partial f_i(x_i) \subset f'(x) + \frac{1}{2}\, V_0 \quad \forall\, i > i_2.$$

Отсюда для любого $i > \max\{i_1; i_2\}$ получаем, что

$$\partial f_i(x_i) \subset f'(x) + \frac{1}{2}\, V_0 \subset f'(x_i) + V_0.$$

Полученное включение противоречит формуле (1.17.4). $\square$

Отметим, что в теореме 1.17.2 из включения (1.17.3) немедленно следует включение

$$f'(x) \in \partial f_i(x) + V$$

в силу одноточечности множества $\{f'(x)\}$ и того, что $V = -V$.

Кроме того, в случае, когда $E = \mathbb{R}^n$, в теореме 1.17.2 слабую окрестность V можно заменить на сильную $B_\varepsilon(0)$ (так же, как это было сделано в следствии 1.17.2). В итоге в $\mathbb{R}^n$ получаем, что расстояние по Хаусдорфу $h(\partial f_i(x), \{f'(x)\})$ стремится к нулю при $i \to \infty$, причем равномерно по x на любом компакте $A \subset U$.

Пример 1.17.1. Отметим, что без требования дифференцируемости по Гато функции f теорема 1.17.2 неверна. Поясним это на примере. Пусть даны числа $\alpha_i > 1$ такие, что $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha_i = 1$. Пусть даны функция $f(x) = |x|$ и функции $f_i(x) = |x|^{\alpha_i}$ при $x \in [-1, 1]$ и $i \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что $\lim\limits_{i\to\infty} f_i(x) = f(x)$ на $[-1, 1]$, но $\partial f_i(0) = \{f_i'(0)\} = \{0\}$, а $\partial f(0) = [-1, 1]$. Ясно, что стационарная последовательность $\partial f_i(0) = \{0\}$ не сходится ко множеству $\partial f(0) = [-1, 1]$ в метрике Хаусдорфа.

Теорема 1.17.3. *Пусть S — компактное топологическое пространство, E — банахово пространство. Пусть функция $f\colon S \times E \to \mathbb{R}$ такова, что отображение $f(s, \cdot)\colon E \to \mathbb{R}$ выпукло для каждого $s \in S$, а отображение $f(\,\cdot\,, x)\colon S \to \mathbb{R}$ полунепрерывно сверху для каждого $x \in E$. Определим функции $f_s(x) = f(s, x)$, $\widehat{f}(x) =$*

$= \sup\limits_{s\in S} f(s,x)$ *и множество* $S_0(x) = \{s \in S \mid f(s,x) = \widehat{f}(x)\}$.

Тогда для любого $x \in \operatorname{dom} \widehat{f}$ *справедливо включение*

$$P(x) \subset \partial \widehat{f}(x), \tag{1.17.5}$$

где

$$P(x) = \overline{\operatorname{co}} \Bigl(\bigcup_{s\in S_0(x)} \partial f_s(x) \Bigr). \tag{1.17.6}$$

Если для каждого $s \in S$ *функция* $f(s,\,\cdot\,)$ *непрерывна в некоторой точке* $x_0 \in \operatorname{dom} \widehat{f}$, *то справедливо равенство*

$$P(x_0) = \partial \widehat{f}(x_0). \tag{1.17.7}$$

Доказательство. Из определения функции $\widehat{f}$ как точной верхней грани семейства выпуклых функций следует, что функция $\widehat{f}$ выпукла. Если $x \in \operatorname{dom} \widehat{f}$, то в силу полунепрерывности сверху отображения $f(\,\cdot\,,x)$ и компактности S следует, что множество $S_0(x)$ непусто. При этом для любых $s \in S_0(x)$ и $p \in \partial f_s(x)$ по определению субдифференциала получаем

$$\langle p, z - x\rangle \leqslant f_s(z) - f_s(x) \leqslant \widehat{f}(z) - \widehat{f}(x) \quad \forall\, z \in E,$$

следовательно, $p \in \partial \widehat{f}(x)$, откуда следует включение

$$\bigcup_{s\in S_0(x)} \partial f_s(x) \subset \partial \widehat{f}(x).$$

Взяв от обеих частей последнего включения замкнутую выпуклую оболочку, в силу выпуклости и замкнутости множества $\partial \widehat{f}(x)$ получаем включение (1.17.5).

Перейдем к доказательству равенства (1.17.7). Из непрерывности функций $f(s,\,\cdot\,)$ в точке x_0 (при каждом $s \in S$) и из теоремы 1.16.2 следует, что множества $\partial f_s(x_0)$ непусты. Поэтому $P(x_0) \neq \varnothing$ и в силу включения (1.17.5) $\partial \widehat{f}(x_0) \neq \varnothing$. Тогда по лемме 1.16.2 получаем, что множество $\partial \widehat{f}(x_0)$ есть замкнутое выпуклое множество.

Допустим, что $P(x_0) \neq \partial \widehat{f}(x_0)$, следовательно, найдется $p_0 \in \partial \widehat{f}(x_0)$ такой, что $p_0 \notin P(x_0)$. По теореме 1.9.3 об отделимости найдутся число $\varepsilon > 0$ и точка $x_1 \in E$, $x_1 \neq 0$, такие, что

$$\langle p_0, x_1\rangle \geqslant \sup_{p\in P(x_0)} \langle p, x_1\rangle + \varepsilon. \tag{1.17.8}$$

Покажем, что без ограничения общности можно считать $\widehat{f}(x_0 + x_1) < +\infty$. В самом деле, так как для каждого $s \in S$ функция $f_s(x)$ непрерывна в точке x_0, то найдется $\lambda(s) > 0$ такое, что $f_s(x_0 +$

$+\lambda(s)x_1) \leqslant f_s(x_0)+1$. В силу пн. св. отображения $f(\,\cdot\,,x)$, множества вида

$$U(s)=\{\xi\in S\,|\,f(\xi,x_0+\lambda(s)x_1)<\widehat{f}(x_0)+2\}=\\ =S\backslash\{\xi\in S\,|\,f(\xi,x_0+\lambda(s)x_1)\geqslant\widehat{f}(x_0)+2\}$$

суть открытые подмножества S, содержащие s, и поэтому $\bigcup\limits_{s\in S}U(s)=$ $=S$, откуда в силу компактности S можем выделить конечное подпокрытие $\{U(s_i)\}_{i=1}^n$ пространства S, т. е.

$$S\subset\bigcup_{i=1}^n U(s_i),\quad s_i\in S.$$

Пусть $\lambda=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda(s_i)$. Тогда в силу выпуклости функций $f(s,\,\cdot)$ получаем, что $f(s,\,x_0+\lambda x_1)<\widehat{f}(x_0)+2<+\infty\ \ \forall\, s\in S$. Заменяя, если нужно, x_1 на $\lambda^{-1}x_1$, а ε на $\lambda^{-1}\varepsilon$, получаем, что при этом сохраняется отделимость (1.17.8) и $f(x_0+x_1)<+\infty$.

Пусть $0<t<1$. Тогда в силу выпуклости $\widehat{f}$ имеем $x_0+tx_1\in$ $\in\operatorname{dom}\widehat{f}$. Выберем $s_t\in S$ так, чтобы $f(s_t,x_0+tx_1)=\widehat{f}(x_0+tx_1)$. Такое s_t существует в силу пн. св. отображения $f(\,\cdot\,,x)$. В силу включения $p_0\in\partial\widehat{f}(x_0)$ имеем

$$\frac{\widehat{f}(x_0+tx_1)-\widehat{f}(x_0)}{t}\geqslant\langle p_0,x_1\rangle. \tag{1.17.9}$$

Из неравенства выпуклости

$$(1-t)f(s_t,x_0)+tf(s_t,x_0+x_1)\geqslant f(s_t,x_0+tx_1)=\widehat{f}(x_0+tx_1)$$

и из неравенства (1.17.9) получаем

$$(1-t)\widehat{f}(x_0)\geqslant(1-t)f(s_t,x_0)\geqslant\widehat{f}(x_0+tx_1)-tf(s_t,x_0+x_1)\geqslant\\ \geqslant\widehat{f}(x_0+tx_1)-t\widehat{f}(x_0+x_1)\geqslant\widehat{f}(x_0)+t(\langle p_0,x_1\rangle-\widehat{f}(x_0+x_1)).$$

Отсюда при $t\to0$ получаем, что

$$\widehat{f}(x_0)\geqslant\lim_{t\to0}f(s_t,x_0)\geqslant\widehat{f}(x_0),$$

т. е. существует

$$\lim_{t\to0}f(s_t,x_0)=\widehat{f}(x_0). \tag{1.17.10}$$

Пусть s_0 — предельная точка множества $\{s_t\}$. Тогда в силу полунепрерывности сверху отображения $f(\,\cdot\,,x)$ получаем равенство

$$f(s_0,x_0)=\widehat{f}(x_0). \tag{1.17.11}$$

Отсюда в силу отделимости (1.17.8) и неравенства (1.17.9) получаем

$$\frac{f(s_t,\, x_0 + tx_1) - f(s_t, x_0)}{t} \geqslant \frac{\widehat{f}(x_0 + tx_1) - \widehat{f}(x_0)}{t} \geqslant \langle p_0, x_1\rangle \geqslant \\ \geqslant \sup_{p\in\partial f_{s_0}(x_0)} \langle p, x_1\rangle + \varepsilon = f'_{s_0}(x_0; x_1) + \varepsilon. \quad (1.17.12)$$

В силу определения производной по направлению выпуклой функции $f_{s_0}(\,\cdot\,)$ найдется такое число $\tau \in (0,1)$, что справедливо неравенство

$$\frac{f(s_0,\, x_0 + \tau x_1) - f(s_0, x_0)}{\tau} \leqslant f'_{s_0}(x_0; x_1) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.17.13)$$

Тогда при всех $t \in (0,\tau)$ в силу неравенства выпуклости и неравенств (1.17.12) и (1.17.13) получаем

$$\frac{t}{\tau}\, f(s_t,\, x_0 + \tau x_1) + \Big(1 - \frac{t}{\tau}\Big) f(s_t, x_0) \geqslant \\ \geqslant f(s_t,\, x_0 + tx_1) \geqslant f(s_t, x_0) + t(f'_{s_0}(x_0; x_1) + \varepsilon) \geqslant \\ \geqslant f(s_t, x_0) + t\Big(\frac{f(s_0,\, x_0 + \tau x_1) - f(s_0, x_0)}{\tau} + \frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

Отсюда (слева и справа убирая $f(s_t, x_0)$ и затем умножая на дробь τ/t) получаем

$$f(s_t,\, x_0 + \tau x_1) \geqslant f(s_0,\, x_0 + \tau x_1) + f(s_t, x_0) - f(s_0, x_0) + \tau\varepsilon/2,$$

откуда в силу равенств (1.17.10) и (1.17.11) следует неравенство

$$\limsup_{t\to 0} f(s_t,\, x_0 + \tau x_1) \geqslant f(s_0,\, x_0 + \tau x_1) + \tau\varepsilon/2,$$

которое противоречит полунепрерывности сверху отображения $f(\,\cdot\,, x_0 + \tau x_1)$ в точке $s = s_0$. Следовательно, допущение о том, что $P \neq \partial f(x_0)$ неверно. $\square$

Рассмотрим некоторые следствия теоремы 1.17.3.

Следствие 1.17.4. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1.17.3, *кроме компактности S. Вместо этого считаем, что множество S является выпуклым замкнутым множеством в линейном метрическом пространстве (X, ϱ), причем множества*

$$S_r(x) = \{s \in S \mid \varrho(s, S_0(x)) \leqslant r\} \quad \forall\, r > 0 \quad (1.17.14)$$

являются компактами. Кроме того, считаем, что для каждого $x \in E$ функция $f(\,\cdot\,, x)\colon S \to \mathbb{R}$ вогнута, а также существуют точка x_0 и число $r_0 > 0$ такие, что функции $f(s, \cdot)\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке x_0 равномерно по параметру s на множестве $S_{r_0}(x_0)$.

Тогда справедливо равенство (1.17.6), (1.17.7).

Доказательство. Будем считать, что S не ограничено (иначе из условий (1.17.14) следует, что S — компакт, т.е. случай теоремы 1.17.3). Без ограничения общности для удобства положим $x_0 = 0$. Определим множество

$$G_{r_0}(0) = \{s \in S \mid r_0/2 \leqslant \varrho(s, S_0(0)) \leqslant r_0\}.$$

Множество $G_{r_0}(0)$ замкнуто и является подмножеством компакта $S_{r_0}(0)$, т.е. также компактно, причем $\widehat{f}(0) > \max\limits_{s \in G_{r_0}(0)} f(s, 0)$. Так как $S_0(0) \cup G_{r_0}(0) \subset S_{r_0}(0)$, то, пользуясь равномерной по $s \in S_{r_0}(0)$ непрерывностью семейства функций $f(s, \cdot)$ в точке $x = 0$ и приведенным выше строгим неравенством, получаем при некоторых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$

$$\min_{s \in S_0(0)} f(s, x) > \widehat{f}(0) - \varepsilon > \max_{s \in G_{r_0}(0)} f(s, x) \quad \forall\, x \in B_\delta(0). \tag{1.17.15}$$

Покажем, что для любого $x \in B_\delta(0)$ и для любого $s_1 \in S \setminus S_{r_0/2}(0)$ имеет место неравенство

$$f(s_1, x) < \max_{s \in S_{r_0}(0)} f(s, x). \tag{1.17.16}$$

При $s_1 \in G_{r_0}(0)$ неравенство (1.17.16), очевидно, следует из неравенства (1.17.15).

Пусть $s_1 \notin S_{r_0}(0)$. Возьмем $s_2 \in S_0(0)$ и на отрезке $[s_1, s_2]$, пересекающем множество $G_{r_0}(0)$, выберем точку $s_0 \in G_{r_0}(0)$. Найдется число $\lambda \in (0, 1)$ такое, что $s_0 = \lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2$. В силу неравенства (1.17.15) получаем неравенство $f(s_2, x) > f(s_0, x)$, и в силу вогнутости функции $f(\cdot, x)$ на отрезке $[s_1, s_2]$ получаем

$$f(s_0, x) \geqslant \lambda f(s_1, x) + (1 - \lambda) f(s_2, x),$$

откуда $0 > f(s_0, x) - f(s_2, x) \geqslant \lambda(f(s_1, x) - f(s_2, x))$. Следовательно, $f(s_2, x) > f(s_1, x)$, откуда и следует неравенство (1.17.16).

Из неравенства (1.17.16) получаем для любого $x \in B_\delta(0)$ равенство $\widehat{f}(x) = \widetilde{f}(x)$, где $\widetilde{f}(x) = \max\limits_{s \in S_{r_0/2}(0)} f(s, x)$. Поэтому $\partial \widehat{f}(0) = \partial \widetilde{f}(0)$, и остается применить теорему 1.17.3 к функции $\widetilde{f}(x)$ и компакту $S_{r_0/2}(0)$. $\square$

Замечание 1.17.2. В отличие от функций $\widehat{f}(x)$, представимых в виде $\sup\limits_{s \in S} f(s, x)$ от некоторого семейства выпуклых функций $f(s, \cdot)\colon E \to \mathbb{R}$ и в силу этого также являющихся выпуклыми функциями (см. теорему 1.17.3), функции вида $\inf\limits_{s\in S} f(s,x)$, как правило, не являются выпуклыми.

Исключение составляет случай, когда при выпуклом множестве S функция $f\colon S\times E\to\mathbb{R}$ является выпуклой по совокупности переменных (s,x), т.е. для любого числа $\lambda\in(0,1)$ и любых s_1, $s_2\in S$, x_1, $x_2\in E$ справедливо неравенство

$$f(\lambda s_1+(1-\lambda)s_2,\ \lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(s_1,x_1)+(1-\lambda)f(s_2,x_2).$$

Покажем, что в указанном случае функция $\widehat{f}(x)=\inf\limits_{s\in S} f(s,x)$ является выпуклой функцией. Для произвольных точек x_1, $x_2\in E$ существуют минимизирующие последовательности $\{s_1^k\}$, $\{s_2^k\}\subset S$ такие, что

$$\widehat{f}(x_i)=\lim_{k\to\infty} f(s_i^k,x_i),\quad i=1,2.$$

Поэтому для любого числа $\lambda\in(0,1)$ справедливы включение $\lambda s_1^k+(1-\lambda)s_2^k\in S$ и неравенство

$$\widehat{f}(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant f(\lambda s_1^k+(1-\lambda)s_2^k,\ \lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant \\ \leqslant\lambda f(s_1^k,x_1)+(1-\lambda)f(s_2^k,x_2).$$

Переходя в правой части последнего неравенства к пределу при $k\to\infty$, получаем неравенство Иенсена для функции $\widehat{f}$.

В заключение докажем теорему об очистке, которая является уточнением теоремы 1.17.3 в случае, когда $E=\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.17.4 (об очистке). *Если в условиях теоремы* 1.17.3 *рассмотрен случай конечномерного пространства* $E=\mathbb{R}^n$, *то каждый элемент* $p\in\partial\widehat{f}(x_0)$ *можно представить в виде*

$$p=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i p_i, \tag{1.17.17}$$

где $m\leqslant n+1$, $\lambda_i>0$, $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i=1$, $p_i\in\partial f_{s_i}(x_0)$, $s_i\in S_0(x)$, $1\leqslant i\leqslant m$.

Доказательство. Покажем, что множество

$$P(x_0)=\bigcup_{s\in S_0(x_0)}\partial f_s(x_0)$$

ограничено и замкнуто, т.е. компактно. Тогда в силу следствия 1.14.1 получаем, что $\overline{\mathrm{co}}\,P(x_0)=\mathrm{co}\,P(x_0)$, а формула (1.17.17) следует из теоремы Каратеодори.

Из доказательства теоремы 1.17.3 следует, что для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ найдется число $\lambda > 0$ такое, что $x_0 + \lambda x \in \operatorname{dom} \widehat{f}$, поэтому в силу выпуклости множества $\operatorname{dom} \widehat{f}$ точка x_0 является внутренней точкой множества $\operatorname{dom} \widehat{f}$ (см. упр. 1.2.8). Таким образом, $\operatorname{dom} \widehat{f}'(x_0, \cdot\,) = \mathbb{R}^n$ и $\widehat{f}'(x_0, y) = s(y, \partial \widehat{f}(x_0))$ для всех $y \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, множество $\partial \widehat{f}(x_0)$ ограничено, значит, и множество $P(x_0)$ ограничено, так как $P(x_0) \subset \partial \widehat{f}(x_0)$. Осталось проверить замкнутость множества $P(x_0)$, что и завершит доказательство.

Пусть последовательность точек $\{p_k\}_{k=1}^{\infty} \subset P(x_0)$ сходится к некоторой точке p_0, причем $p_k \in \partial f_{s_k}(x_0)$, $s_k \in S_0(x_0)$. Так как множество $S_0(x_0)$ компактно, то последовательность $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет предельную точку $s_0 \in S_0(x_0)$. Без ограничения общности будем считать, что $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = s_0$. Поскольку для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ функция $f(\cdot\,, x)$ пн. св., а по определению множества $S_0(x_0)$ имеют место равенства $f(s_k, x_0) = f(s_0, x_0) = \widehat{f}(x_0)$, то для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ получаем

$$
\begin{aligned}
f(s_0, x) - f(s_0, x_0) = f(s_0, x) - \widehat{f}(x_0) \geqslant \\
\geqslant \limsup_{k\to\infty} f(s_k, x) - \widehat{f}(x_0) = \limsup_{k\to\infty} [f(s_k, x) - f(s_k, x_0)] \geqslant \\
\geqslant \lim_{k\to\infty} \langle p_k, x - x_0 \rangle = \langle p_0, x - x_0 \rangle,
\end{aligned}
$$

т. е. $p_0 \in \partial f_{s_0}(x_0) \subset P(x_0)$. $\square$

В качестве приложения теоремы 1.17.4 об очистке мы докажем еще одну теорему. Для этого введем определение.

Определение 1.17.1. *Описанным шаром* около компакта $A \subset \mathbb{R}^n$ называют замкнутый шар минимального радиуса, содержащий множество A.

Как покажем позже (в § 2.1 о чебышевском центре), такой шар существует и является единственным. Тот факт, что такой шар однозначно определен, очевидно, следует из того, что пересечение в $\mathbb{R}^n$ шаров одинаковых радиусов содержится в шаре меньшего радиуса.

Теорема 1.17.5 (Г. Юнг [140]). *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — компакт. Пусть $D(A) = \operatorname{diam} A$ — диаметр множества A, а $R(A)$ — радиус описанного около компакта A шара. Тогда найдется набор точек $\{a_k\}_{k=1}^{m} \subset A$, где $2 \leqslant m \leqslant n+1$, такой, что описанные шары для множества A и множества* $\operatorname{co} \bigcup\limits_{k=1}^{m} \{a_k\}$ *совпадают, а числа $D(A)$ и $R(A)$ связаны соотношением*

$$
R(A) \leqslant \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}\, D(A), \tag{1.17.18}
$$

причем равенство достигается в случае, когда множество A содержит правильный симплекс с длиной ребра $D(A)$.

Доказательство. Покажем, что для того, чтобы шар был описан около множества A, состоящего более чем из одной точки, необходимо и достаточно, чтобы он был описан около некоторого симплекса с вершинами из множества A.

Определим функцию $f(x) = \max\limits_{a \in A} \|x - a\|$. Легко видеть, что функция f выпукла на $\mathbb{R}^n$ и $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Поэтому найдется точка x_0, в которой выполнены необходимое и достаточное условия минимума выпуклой функции, т. е.

$$0 \in \partial f(x_0), \tag{1.17.19}$$

при этом очевидно, что $f(x_0) = R(A)$ — радиус описанного около множества A шара, а x_0 — центр этого шара.

Воспользуемся теперь теоремой 1.17.4 об очистке. В силу этой теоремы и в силу условия (1.17.19) существуют точки $p_i \in \mathbb{R}^n$, $a_i \in A$ и числа $\lambda_i > 0$, где $1 \leqslant i \leqslant m$, $m \leqslant n + 1$, такие, что

$$\begin{gathered} p_i \in \partial_x \|x_0 - a_i\|, \quad \|x_0 - a_i\| = R(A), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i = 0. \end{gathered} \tag{1.17.20}$$

Так как множество A состоит более чем из одной точки, то $R(A) = f(x_0) = \|x_0 - a_i\| > 0$ и, следовательно, $\partial_x \|x_0 - a_i\| = \{p_i\}$. Непосредственным вычислением получаем, что $\partial_x \|x_0 - a_i\| = \dfrac{x_0 - a_i}{\|x_0 - a_i\|}$, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{x_0 - a_i}{\|x_0 - a_i\|} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{x_0 - a_i}{R(A)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i. \tag{1.17.21}$$

Точки $\{a_i\}_{i=1}^m$ суть вершины симплекса в $\mathbb{R}^n$. Если решать задачу об описанном шаре около этого симплекса $\operatorname{co} \bigcup\limits_{i=1}^{m} \{a_i\}$, то центром описанного около него шара также будет точка x_0, поскольку уравнение (1.17.21) в сочетании с равенствами из (1.17.20) дает достаточное условие минимума. Итак, в качестве множеств A достаточно рассматривать симплексы из $\mathbb{R}^n$.

Докажем оценку (1.17.18) в случае k-мерного симплекса $A = \operatorname{co} \bigcup\limits_{i=1}^{k+1} \{a_i\}$. Пусть, как и прежде, x_0 — центр описанного около A

шара. Тогда справедливы соотношения

$$x_0 = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i a_i, \quad \lambda_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1,$$

$$\|x_0 - a_i\| = R(A), \quad 1 \leqslant i \leqslant k+1,$$

$$D^2(A) = \max\{\|a_i - a_j\|^2 \mid 1 \leqslant i,\ j \leqslant k+1\}.$$

Из свойств скалярного произведения получаем оценку

$$\|a_i - a_j\|^2 = \|a_i - x_0\|^2 + \|a_j - x_0\|^2 - 2\langle a_i - x_0, a_j - x_0\rangle = \\ = 2R^2(A) - 2\langle a_i - x_0, a_j - x_0\rangle.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \|a_i - a_j\|^2 = 2R^2(A) - 2\left\langle \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i a_i - x_0,\ a_j - x_0 \right\rangle = 2R^2(A),$$

значит,

$$\sum_{i,j=1}^{k+1} \lambda_i \lambda_j \|a_i - a_j\|^2 = \sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{k+1} \lambda_i \lambda_j \|a_i - a_j\|^2 = 2R^2(A).$$

С другой стороны, учитывая известное неравенство о средних

$$\frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \leqslant \sqrt{\frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i^2}\ ,$$

получаем

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{k+1} \lambda_i \lambda_j = \left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i^2 \leqslant 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}.$$

Таким образом,

$$2R^2(A) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{k+1} \lambda_i \lambda_j \|a_i - a_j\|^2 \leqslant \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{k+1} \lambda_i \lambda_j\right) D^2(A) \leqslant \frac{k}{k+1}\, D^2(A),$$

и поскольку $\dfrac{k+1}{k} \geqslant \dfrac{n+1}{n}$ при $k \leqslant n$, получаем неравенство (1.17.18).

То, что неравенство обращается в равенство в случае правильного симплекса, предоставляем проверить читателю. $\square$

Отметим, что некоторое обобщение теоремы Юнга содержится в упр. 1.14.4.

Упражнение 1.17.1. Для выпуклого компакта $A \subset \mathbb{R}^n$ и вектора $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$, обозначим через $A(p)$ опорное множество вида $A(p) = \{x \in A \mid \langle p, x\rangle = s(p, A)\}$. В соответствии с введенным обозначением для выпуклых компактов A и B определим функцию

$$\rho(A, B) = \sup_{\|p\|=1} h(A(p), B(p)). \tag{1.17.22}$$

Показать, что в пространстве выпуклых компактов определенная выше функция ρ задает метрику, при этом метрическое пространство выпуклых компактов с метрикой ρ является полным пространством. Показать, что также полно пространство строго выпуклых компактов с метрикой ρ. Для сравнения показать, что пространство строго выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа не является полным.

Упражнение 1.17.2. Пусть последовательность выпуклых компактов $\{A_i\}$ из $\mathbb{R}^n$ такова, что $\lim\limits_{i\to\infty} h(A_i, A) = 0$, где A есть строго выпуклый компакт. Доказать, что для функции (1.17.22) справедливо равенство $\lim\limits_{i\to\infty} \rho(A_i, A) = 0$.

Указание. Воспользоваться теоремой 1.17.2.

Упражнение 1.17.3. Показать, что семейство всех выпуклых компактов, содержащихся в некотором выпуклом компактном подмножестве из $\mathbb{R}^n$, не компактно в топологии, порожденной метрикой ρ из (1.17.22).

Упражнение 1.17.4. Показать, что точную верхнюю грань в определении метрики ρ (1.17.22) нельзя заменить на максимум.

§ 1.18. Крайние точки и лучи

Точка выпуклого множества называется *крайней* или *экстремальной*, если она не является внутренней точкой никакого принадлежащего множеству отрезка. Таким образом, каждая крайняя точка является граничной точкой множества, но не обратно.

Понятие крайней точки и ее свойства, в частности, о том, что каждая точка выпуклого тела из $\mathbb{R}^n$ принадлежит симплексу, вершины которого являются крайними точками этого тела, впервые были изучены Г. Минковским (см., например, [154]). В настоящее время более известно обобщение этого результата Минковского на случай банаховых пространств.

В этом параграфе будем считать, что пространство E является локально выпуклым линейным топологическим пространством, т.е. в пространстве E существует выпуклая локальная база нуля. Отметим, что в этом случае, как следует из замечания 1.9.2, для любых различных точек x и y из E найдется функционал $p \in E^*$ такой, что $\langle p, x\rangle \neq \langle p, y\rangle$.

Переходим к строгим определения и формулировкам.

Определение 1.18.1. Пусть A — непустое множество из пространства E. Непустое подмножество $S \subset A$ называется *крайним* подмножеством множества A, если для любой точки $x \in S$ и любых точек $y, z \in A$ таких, что $x \neq y \neq z \neq x$ и $x \in \mathrm{co}\,\{y; z\}$, следует, что $y \in S$ и $z \in S$. Иначе говоря, никакая точка из множества S не является внутренней точкой отрезка с концами, принадлежащими множеству A, но не принадлежащими множеству S.

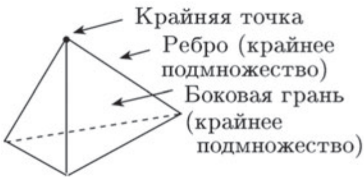


Рис. 11

Определение 1.18.2. Одноточечное крайнее подмножество множества A называется *крайней точкой* множества A (рис. 11).

Будем обозначать совокупность всех крайних точек множества A через $\mathrm{extr}\, A$, а замыкание множества крайних точек через $\overline{\mathrm{extr}}\, A$.

Отметим, что геометрический смысл крайней точки в случае выпуклого множества A состоит в том, что если точка $x \in \mathrm{extr}\, A$, то множество $A \backslash \{x\}$ все еще остается выпуклым множеством.

Например, вершины треугольника на плоскости являются его крайними точками, а стороны — крайними подмножествами. Прямая на плоскости не имеет крайних точек и сама является своим единственным крайним подмножеством. Открытый круг на плоскости не имеет крайних точек.

Следующая теорема обобщает теорему Минковского с $\mathbb{R}^n$ на топологические пространства о том, что для описания некоторых классов выпуклых множеств достаточно иметь информацию об их крайних точках.

Теорема 1.18.1 (М.Г. Крейн, Д.П. Мильман [143]). *Пусть E — локально выпуклое линейное топологическое пространство. Тогда для любого компакта $A \subset E$ справедливо включение $A \subset \overline{\mathrm{co}}\, \mathrm{extr}\, A$.*

Доказательство. Обозначим через Ω совокупность всех компактных крайних подмножеств множества A. Так как множество A само является своим крайним подмножеством, то $\Omega \neq \varnothing$.

Сформулируем два утверждения.

(i) Любое непустое пересечение множеств из Ω принадлежит Ω.

(ii) Для любого $S \in \Omega$ и любого $p \in E^* \backslash \{0\}$ опорное множество $S_p = \{x \in S \mid \langle p, x \rangle = s(p, S)\}$ также принадлежит Ω.

Доказательство утверждения (i) очевидно. Докажем утверждение (ii). Из компактности множества S, очевидно, следует компактность множества S_p. Пусть $\alpha = s(p, S)$. Предположим, что существуют точки $x \in A$, $y \in A$ и число $\lambda \in (0, 1)$ такие, что $\lambda x + (1 - \lambda) y = z \in S_p$. Так как точка $z \in S$ и множество $S \in \Omega$, то по определению крайнего множества справедливы включения $x \in S$ и $y \in S$. Поэтому справедливы неравенства $\langle p, x \rangle \leqslant \alpha$, $\langle p, y \rangle \leqslant \alpha$. Поскольку $\langle p, z \rangle = \alpha$, а функционал p линеен, то отсюда следует, что $\langle p, x \rangle = \alpha = \langle p, y \rangle$, т. е. x, $y \in S_p$. Следовательно, справедливо включение $S_p \in \Omega$.

Зафиксируем произвольное крайнее множество $S \in \Omega$ и покажем, что оно содержит по крайней мере одну крайнюю точку.

Обозначим через Ω' все компактные подмножества множества S, входящие в Ω. Так как $S \in \Omega'$, то $\Omega' \neq \varnothing$.

Для множеств из Ω' определим отношение порядка, т. е. скажем, что справедливо неравенство $A \leqslant B$ для множеств A, $B \in \Omega'$, если справедливо включение $A \subset B$. По теореме Хаусдорфа (теорема 6 § 1 гл. 1 из [30]) в Ω' существует максимальное линейно упорядоченное подмножество множеств, которое обозначим $\mathcal{P}$. Для любых A_1, $A_2 \in \mathcal{P}$ либо $A_1 \subset A_2$, либо $A_2 \subset A_1$, и это множество $\mathcal{P}$ нельзя дополнить никаким подмножеством из Ω', не нарушая линейную упорядоченность.

Пусть M — пересечение всех множеств, входящих в $\mathcal{P}$. В силу линейной упорядоченности совокупность множеств $\mathcal{P}$ является центрированной системой компактов, и поэтому в силу известного свойства непустоты центрированных систем компактов (см. теорему 1.1.1) множество M непусто.

Из утверждения (i) следует, что множество $M \in \Omega$. Из максимальности совокупности множеств $\mathcal{P}$ следует, что никакое собственное подмножество M не входит в $\Omega' \subset \Omega$. Поэтому в силу (ii) всякий непрерывный функционал постоянен на M. Отсюда (так как любые две точки из E могут быть разделены функционалом из E^*) следует, что множество M является одноточечным множеством, т. е. доказали существование крайней точки множества A, содержащейся во множестве S.

Предположим, что существует точка $x_0 \in A$ такая, что $x_0 \notin \overline{\mathrm{co}}\,(\operatorname{extr} A)$. Тогда по теореме 1.9.3 об отделимости точку x_0 можно сильно отделить от множества $\overline{\mathrm{co}}\,(\operatorname{extr} A)$ некоторым функционалом p, а именно: найдутся функционал $p \neq 0$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $\langle p, x\rangle \leqslant \langle p, x_0\rangle - \varepsilon$ для всех $x \in \overline{\mathrm{co}}\,(\operatorname{extr} A)$. Получили, что множество $\overline{\mathrm{co}}\,(\operatorname{extr} A)$ не пересекается с опорным множеством $A_p = \{x \in A \,|\, \langle p, x\rangle = \langle p, x_0\rangle\}$. Но, с другой стороны, как показано в утверждении (ii), множество A_p является крайним подмножеством множества A, и по доказанному выше оно должно содержать крайнюю точку множества A, т. е. $A_p \cap \operatorname{extr} A \neq \varnothing$. Противоречие. □

Из доказанной теоремы немедленно получаем следствие.

Следствие 1.18.1. *Выпуклый компакт из локально выпуклого пространства совпадает с замыканием выпуклой оболочки его крайних точек.*

Теорема 1.18.2. *Пусть A — компакт в локально выпуклом линейном топологическом пространстве E и $\overline{\mathrm{co}}\,A$ — также компакт. Тогда крайние точки множества $\overline{\mathrm{co}}\,A$ принадлежат компакту A и являются его крайними точками.*

Доказательство. Допустим, что существует точка $x \in \operatorname{extr}(\overline{\mathrm{co}}\,A)\backslash A$. По предложению 1.1.8 найдется выпуклая окрестность нуля V такая, что $(x+V)\bigcap A = \varnothing$. В силу непрерывности сложения найдется также такая выпуклая окрестность нуля U, что $U - U \subset V$. Тогда $(x+U)\bigcap(A+U) = \varnothing$ и $x \notin \overline{A+U}$.

Семейство множеств $\{y+U\}_{y\in A}$ есть открытое покрытие компакта A; пусть $\{y_i+U\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ — конечное подпокрытие компакта A. Определим множества $A_i = \overline{\mathrm{co}}\left(\overline{(y_i+U)} \cap A\right) \subset y_i + U, \quad i = 1, \ldots, n$. Тогда A_i и $\overline{\mathrm{co}}\,A_i$ — замкнутые подмножества компактов A и $\overline{\mathrm{co}}\,A$, т. е. компакты, причем в силу построения множеств A_i выполнены включения $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subset \overline{\mathrm{co}}\,A$. С учетом предложения 1.14.2 получаем

$$\overline{\mathrm{co}}\,A = \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathrm{co}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{co}}\,A_i\right).$$

Поэтому из того, что $x \in \overline{\mathrm{co}}\,A$, следует, что $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$, где $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $a_i \in \overline{\mathrm{co}}\,A_i \subset \overline{\mathrm{co}}\,A$. Но так как x — крайняя точка $\overline{\mathrm{co}}\,A$, то существует номер $i_0 \in \overline{1,n}$ такой, что $x = a_{i_0}$, т. е. $x \in \overline{\mathrm{co}}\,A_{i_0}$. Следовательно, $x \in \overline{y_{i_0}+U} \subset \overline{A+U}$. Но это противоречит тому, что по построению $x \notin \overline{A+U}$. Таким образом, допущение о существовании точки $x \in \operatorname{extr}(\overline{\mathrm{co}}\,A)\backslash A$ неверно.

То, что из включений $x \in \operatorname{extr}(\overline{\operatorname{co}} A)$ и $x \in A$ следует включение $x \in \operatorname{extr} A$, доказывается элементарно от противного. $\square$

Теорема 1.18.3 (Г.М. Минковский [154]). *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — компакт. Тогда*

$$\operatorname{co} A = \operatorname{co}(\operatorname{extr} A). \tag{1.18.1}$$

Доказательство. Включение $\operatorname{co}(\operatorname{extr} A) \subset \operatorname{co} A$ очевидно. Из того, что A — компакт в $\mathbb{R}^n$, следует, что и $\operatorname{co} A$ — тоже компакт в $\mathbb{R}^n$, т. е. $\operatorname{co} A = \overline{\operatorname{co}} A$ (следствие 1.14.1).

Докажем обратное включение индукцией по размерности пространства n.

В случае, когда пространство одномерно (т. е. $n = 1$), компакт A имеет минимальный (точка a) и максимальный (точка b) элементы, которые суть его крайние точки. При этом $\operatorname{co} A = [a, b]$ и $\operatorname{co} \operatorname{extr} A = [a, b]$, т. е. утверждение верно.

Допустим, что включение $\operatorname{co} A \subset \operatorname{co}(\operatorname{extr} A)$ доказано в пространствах размерности от 1 до $n-1$. Докажем его в $\mathbb{R}^n$.

Зафиксируем точку $x \in \operatorname{co} A \subset \mathbb{R}^n$. Поскольку по теореме 1.18.2 $\operatorname{extr}(\operatorname{co} A) \subset \operatorname{extr} A$, то если $x \in \operatorname{extr}(\operatorname{co} A)$, то $x \in \operatorname{co}(\operatorname{extr} A)$.

Пусть теперь точка $x \in \operatorname{co} A$ не является крайней точкой множества $\operatorname{co} A$. Выберем некоторую точку $a_1 \in \operatorname{extr}(\operatorname{co} A)$. Проведем прямую $l = \operatorname{aff}\{x, a_1\}$; тогда $l \cap \operatorname{co} A = [y, a_1] \supset [x, a_1]$, где $y \in \partial \operatorname{co} A$. Через точку y проведем гиперплоскость H, опорную ко множеству $\operatorname{co} A$. При доказательстве теоремы 1.18.1 было показано, что $H \cap (\operatorname{co} A)$ есть крайнее подмножество множества $\operatorname{co} A$, причем по п. (ii) теоремы 1.18.1 и по теореме 1.18.2 справедливы включения $\operatorname{extr}(H \cap \operatorname{co} A) \subset \operatorname{extr}(\operatorname{co} A) \subset A$. По предположению индукции найдется набор точек $\{a_i\}_{i=2}^{n+1} \subset \operatorname{extr}(H \cap \operatorname{co} A)$ такой, что $y \in \operatorname{co} \bigcup\limits_{i=2}^{n+1} \{a_i\}$. В итоге получаем, что

$$x \in \operatorname{co}\{a_1, y\} \subset \operatorname{co} \bigcup_{i=1}^{n+1} \{a_i\} \subset \operatorname{co}(\operatorname{extr} A). \ \square$$

Перейдем к обобщению теорем о крайних точках на случай, когда выпуклое замкнутое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ является неограниченным множеством. В первую очередь отметим, что утверждение теоремы 1.18.3 может оказаться неверным. Например, конус $\{(x, y, z) \mid z^2 \geqslant x^2 + y^2,\ z \geqslant 0\}$ имеет единственную крайнюю точку 0, т. е. равенство (1.18.1) не имеет места.

Определение 1.18.3. Пусть A — неограниченное выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$, а O^+A — его асимптотический конус (см. определение 1.4.5). Пусть точка $x \in A$ и вектор $y \in O^+A \backslash \{0\}$. Множество $l(x,y) = \{x + \lambda y \,|\, \lambda \geqslant 0\}$ назовем *крайним лучом* множества A, если множество $A \backslash l(x,y)$ выпукло и $x + \lambda y \notin A \ \ \forall \lambda < 0$. Совокупность всех крайних лучей множества A обозначим через $\operatorname{rext} A$.

Отметим, что в определении 1.18.3 точка x есть вершина крайнего луча $l(x,y)$, поэтому точка x является крайней точкой множества A.

Лемма 1.18.1. *Пусть H — некоторая опорная гиперплоскость к выпуклому замкнутому множеству $A \subset \mathbb{R}^n$, причем $\operatorname{extr}(A \cap H) \neq \varnothing$. Тогда множество $\operatorname{extr} A$ непусто и справедливы равенства*

$$\operatorname{extr}(A \cap H) = (\operatorname{extr} A) \cap H, \quad \operatorname{rext}(A \cap H) = (\operatorname{rext} A) \cap H. \tag{1.18.2}$$

Доказательство. По определению опорной гиперплоскости H существует вектор $p \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ такой, что $H = \{a \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle p, a \rangle = s(p,A)\}$, и поэтому выполнено включение $A \subset \{a \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle p, a \rangle \leqslant s(p,A)\}$. Пусть выбрана точка

$$x \in \operatorname{extr}(A \cap H). \tag{1.18.3}$$

Из включения (1.18.3) следует, что точка $x \in H$.

Допустим, что точка $x \notin \operatorname{extr} A$. Тогда найдутся точки y, z из A $(y \neq z)$ и число $\lambda \in (0,1)$ такие, что $x = \lambda y + (1-\lambda) z$, причем в силу (1.18.3) одна из точек (например, y) не лежит в H. Отсюда $\langle p, y \rangle < s(p,A)$, $\langle p, z \rangle \leqslant s(p,A)$, что влечет

$$s(p,A) = \langle p, x \rangle = \lambda \langle p, y \rangle + (1-\lambda) \langle p, z \rangle < s(p,A).$$

Получили противоречие, которое показывает, что $x \in \operatorname{extr} A$.

Итак, мы показали, что $\operatorname{extr} A \neq \varnothing$ и справедливо включение $\operatorname{extr}(A \cap H) \subset (\operatorname{extr} A) \cap H$.

Если точка $x \in (A \cap H) \backslash \operatorname{extr}(A \cap H)$, то найдется отрезок, принадлежащий множеству $A \cap H$ и содержащий точку x внутри себя, следовательно, этот отрезок содержится в A, т. е. $x \notin \operatorname{extr} A$. Отсюда следует включение $(\operatorname{extr} A) \cap H \subset \operatorname{extr}(A \cap H)$. Первое равенство в (1.18.2) доказано.

Пусть выбран луч $l = \{x_0 + \lambda y_0 \,|\, \lambda \geqslant 0, \ \ y_0 \neq 0\} \subset A$ такой, что $x_0 + \lambda y_0 \notin A$ для любого $\lambda < 0$.

Если $l \subset (A \cap H) \backslash \operatorname{rext}(A \cap H)$, то $l \not\subset \operatorname{rext} A$ (это легко показать от противного). Отсюда следует включение

$$(\operatorname{rext} A) \cap H \subset \operatorname{rext}(A \cap H).$$

Пусть луч $l \subset \operatorname{rext}(A \bigcap H)$. Следовательно, $l \subset H$. Если допустить, что луч $l \not\subset \operatorname{rext} A$, то найдутся точка $x \in l$ и точки y, z из A $(y \neq z)$, а также число $\lambda \in (0,1)$ такие, что $x = \lambda y + (1-\lambda)z$. При этом одна из точек (например, y) не принадлежать H, так как в противном случае это означает, что $l \notin \operatorname{rext}(A \cap H)$. Отсюда $\langle p, y\rangle < s(p,A)$, $\langle p, z\rangle \leqslant s(p,A)$. Как и при доказательстве первого равенства, получаем

$$s(p,A) = \langle p, x\rangle = \lambda\langle p, y\rangle + (1-\lambda)\langle p, z\rangle < s(p,A),$$

что приводит к противоречию. Отсюда следует включение $l \subset \operatorname{rext} A$, т. е. $l \subset (\operatorname{rext} A) \cap H$. $\square$

Лемма 1.18.2. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое выпуклое множество с непустой внутренностью. Пусть граница ∂A множества A есть непустое выпуклое множество. Тогда A есть замкнутое полупространство, а ∂A — его граничная гиперплоскость.*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по размерности пространства n. При $n = 1$ и $n = 2$ утверждение очевидно. Пусть оно верно в пространствах $\mathbb{R}^k$ при любом $k = 1, \ldots, n-1$. Покажем, что оно верно и в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим точку $x \in \partial A$ и проходящую через x опорную ко множеству A гиперплоскость H_0, пусть $\overline{H}_0$ — замкнутое полупространство с границей H_0, содержащее множество A.

Зафиксируем точку $y \in \operatorname{int} A$. Рассмотрим произвольную гиперплоскость H_1, проходящую через точки x и y.

Множество $A \cap H_1$ замкнуто и выпукло в гиперплоскости H_1, причем относительная внутренность множества $A \cap H_1$ в H_1 непуста. Обозначим ее $\operatorname{int}_{H_1}(A \cap H_1)$. Кроме того, опорной гиперплоскостью ко множеству $A \cap H_1$ в точке x в гиперплоскости H_1 является $H_0 \cap \cap H_1$, а границей множества $A \cap H_1$ в H_1 является множество $(A \cap H_1) \setminus \operatorname{int}_{H_1}(A \cap H_1)$.

Легко видеть, что $\operatorname{int}_{H_1}(A \cap H_1) \supset (\operatorname{int} A) \cap H_1$. Покажем обратное включение.

Для любого $z \in \operatorname{int}_{H_1}(A \cap H_1)$ отрезок $[y, z]$ можно продолжить за точку z, оставаясь в $A \cap H_1$, откуда в силу теоремы 1.2.1 и включения $y \in \operatorname{int} A$ получаем, что $z \in \operatorname{int} A$.

Следовательно, $\operatorname{int}_{H_1}(A \cap H_1) = (\operatorname{int} A) \cap H_1$, откуда получаем равенство множеств

$$(A \cap H_1) \setminus \operatorname{int}_{H_1}(A \cap H_1) = (A \cap H_1) \setminus (\operatorname{int} A \cap H_1) = \partial A \cap H_1,$$

т. е. левое множество выпукло, так как множества ∂A и H_1 по условию выпуклы.

По предположению индукции отсюда следует, что множество $A \cap \cap H_1$ является замкнутым полупространством в H_1 с опорной гиперплоскостью $H_0 \cap H_1$, т. е.

$$A \cap H_1 = \overline{H}_0 \cap H_1, \quad \partial A \cap H_1 = H_0 \cap H_1.$$

Рассмотрев всевозможные гиперплоскости H_1, проходящие через точки x и y, получаем, что $A = \overline{H}_0$ и $\partial A = H_0$. □

Теорема 1.18.4 (В. Кли [142]). *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое множество, не содержащее прямых (т. е. одномерных аффинных подмножеств). Тогда $\operatorname{extr} A \neq \varnothing$ и справедливо равенство*

$$A = \operatorname{co}\left(\operatorname{extr} A \cup \operatorname{rext} A\right). \tag{1.18.4}$$

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по размерности пространства. На прямой $\mathbb{R}$ равенство (1.18.4), очевидно, имеет место, и множество $\operatorname{extr} A$ непусто.

Допустим, что $\operatorname{extr} A \neq \varnothing$ и равенство (1.18.4) верно в пространствах $\mathbb{R}^k$ при любом $k = 1, \ldots, n-1$. Покажем, что эти соотношения верны и в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим множество $A \subset \mathbb{R}^n$, у которого $\operatorname{int} A \neq \varnothing$ (в противном случае получили бы задачу меньшей размерности, переходя в аффинное подпространство, порожденное множеством A; в этом подпространстве по индуктивному предположению утверждение теоремы справедливо).

Граница ∂A данного множества не выпукла, так как в противном случае по лемме 1.18.2 множество A было бы полупространством, что противоречит условию теоремы: множество A не содержит прямых. Следовательно, существуют точки y_0, $z_0 \in \partial A$ и точка $x_0 \in \operatorname{int} A$ такие, что $x_0 \in [y_0, z_0]$. Пусть l_0 — прямая, проходящая через точки y_0 и z_0, т. е. $l_0 = \operatorname{aff}\{y_0, z_0\}$. Тогда (см. указание к упр. 1.9.11) справедливо равенство

$$l_0 \cap A = [y_0, z_0]. \tag{1.18.5}$$

Пусть x — произвольная точка из множества A и l — прямая, проходящая через точку x параллельно прямой l_0.

Тогда прямая l в пересечении со множеством A дает некоторый отрезок $[y, z]$ и $x \in [y, z]$ (при этом возможно равенство $y = z$). Действительно, если бы некоторый луч вида $l(x, a)$, параллельный прямой l_0, принадлежал множеству A, то в силу выпуклости и замкнутости множества A некоторый луч прямой l_0 также принадлежал бы множеству A, что противоречит равенству (1.18.5).

Обозначим через H_y и H_z опорные гиперплоскости ко множеству A, проходящие через точки y и z соответственно. Тогда с учетом леммы 1.18.1 и равенства (1.18.4) (верного по предположению индукции в гиперплоскостях H_y и H_z) получаем

$$x \in [y, z],$$
$$y \in \operatorname{co}\,(\operatorname{extr}(A \cap H_y) \cup \operatorname{rext}(A \cap H_y)) = (\operatorname{co}(\operatorname{extr} A \cup \operatorname{rext} A)) \cap H_y,$$
$$z \in \operatorname{co}\,(\operatorname{extr}(A \cap H_z) \cup \operatorname{rext}(A \cap H_z)) = (\operatorname{co}(\operatorname{extr} A \cup \operatorname{rext} A)) \cap H_z,$$

откуда $x \in \operatorname{co}(\operatorname{extr} A \cup \operatorname{rext} A)$. Поэтому в силу произвольности выбора точки $x \in A$ получаем включение $A \subset \operatorname{co}(\operatorname{extr} A \cup \operatorname{rext} A)$. Обратное включение $A \supset \operatorname{co}(\operatorname{extr} A \cup \operatorname{rext} A)$ очевидно. □

Отметим важное следствие теоремы 1.18.4.

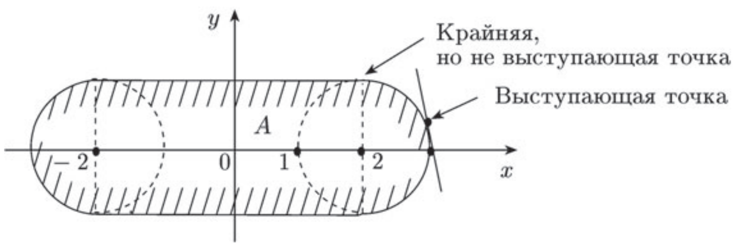
Следствие 1.18.2. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — непустое выпуклое замкнутое множество, не содержащее прямых. Тогда* $\operatorname{extr} A \neq \varnothing$.

Определим теперь понятие выступающей точки.

Определение 1.18.4. Пусть A — множество из E. Точка $x \in A$ называется *выступающей точкой* множества A, если существует опорная гиперплоскость H ко множеству A в точке x (т. е. $H = \{z \mid \langle p, z\rangle = s(p, A)\}$, $p \in E^* \backslash \{0\}$), причем такая, что имеет место равенство $H \cap A = \{x\}$.

Будем обозначать множество выступающих точек множества A через $\exp A$, а замыкание множества выступающих точек через $\overline{\exp} A$.

Очевидно, что каждая выступающая точка является крайней точкой. Обратное в общем случае неверно, например, у множества $A = \operatorname{co}\{B_1((-2, 0)) \cup B_1((2, 0))\} \subset \mathbb{R}^2$ точка $(2, 1)$ крайняя, но не выступающая точка. Таким образом, справедливо включение $\exp A \subset \operatorname{extr} A$ (рис. 12).



$A = B_1(0) + [(-2, 0), (2, 0)]$

Рис. 12

Теорема 1.18.5 (С. Страшевич [168]). *Для любого замкнутого выпуклого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ справедливо равенство* $\overline{\exp} A = \overline{\operatorname{extr}} A$.

Доказательство. Если точка x является крайней (или выступающей) точкой множества A и $\|x\| < \delta$, то она является крайней (или выступающей) точкой множества $A \cap B_\delta(0)$. Поэтому достаточно доказать теорему для случая, когда A есть выпуклый компакт.

Покажем, что любая крайняя точка выпуклого компакта A лежит во множестве $\overline{\exp}\, A$.

Предположим противное, что существует точка $x \in \operatorname{extr} A \setminus \overline{\exp}\, A$, т. е. $\varrho(x, \exp A) > 0$. Если допустить, что $x \in \operatorname{co} \overline{\exp}\, A$, то из того, что $x \in \operatorname{extr} A$ и $\overline{\exp}\, A \subset A$, следует, что $x \in \overline{\exp}\, A$, т. е. $\varrho(x, \exp A) = 0$ (противоречие с допущением). Итак, $x \notin \operatorname{co} \overline{\exp}\, A$, и поэтому существует гиперплоскость H, сильно разделяющая точку x и выпуклый компакт $\operatorname{co} \overline{\exp}\, A$, причем такая, что $x \notin H$ и $H \cap \operatorname{co} \overline{\exp}\, A = \varnothing$. Пусть H_1 — замкнутое полупространство с границей H, в котором лежит точка x, а H_2 — замкнутое полупространство с границей H, в котором лежит $\operatorname{co} \overline{\exp}\, A$.

Покажем, что существует точка $a \in (\exp A) \cap H_1$, что противоречит включению $\exp A \subset \operatorname{int} H_2$, и завершим доказательство.

Пусть p — единичная нормаль к гиперплоскости H, направленная в H_1, т. е. $H = \{z \mid \langle p, z\rangle = \alpha\}$, $H_1 = \{z \mid \langle p, z\rangle \geqslant \alpha\}$, $H_2 = \{z \mid \langle p, z\rangle \leqslant \leqslant \alpha\}$. Пусть ε — наибольшее положительное число такое, что $x - \varepsilon p \in H_1$. Определим число $\lambda > \varepsilon$ и точку $y = y(\lambda) = x - \lambda p$.

Рассмотрим шар $B_\lambda(y)$. По построению $x \in \partial B_\lambda(y)$. По теореме Пифагора получаем, что расстояние от точек полупространства H_2, не принадлежащих шару $B_\lambda(y)$, до точки x более чем $\sqrt{2\varepsilon\lambda}$.

Определим число $r = \sup\limits_{z \in A \cap H_2} \|z - x\|$. Уточним число λ так, чтобы $\sqrt{2\varepsilon\lambda} > r$. Тогда хотя множество A и содержит точки, отстоящие от точки y не менее чем на λ (такова, например, точка x), в то же время множество $A \cap H_2$ содержится внутри шара $B_\lambda(y)$. Выберем точку $a \in A$ так, чтобы $\|a - y\| = \max\limits_{z \in A} \|z - y\|$. Так как $\|a - y\| \geqslant \geqslant \lambda$, то $a \notin H_2$. По построению шар $B_{\|a-y\|}(y)$ содержит множество A, точка $a \in \partial B_{\|a-y\|}(y)$. Поэтому касательная плоскость к шару $B_{\|a-y\|}(y)$ в точке a в пересечении со множеством A содержит лишь одну точку a, т. е. $a \in \exp A$, что противоречит включению $\overline{\exp}\, A \subset \subset \operatorname{int} H_2$. $\square$

Упражнение 1.18.1. Доказать, что у выпуклого компакта из $\mathbb{R}^2$ множество крайних точек замкнуто. Показать, что у произвольного (не выпуклого) компакта из $\mathbb{R}^2$ множество крайних точек может быть не замкнуто.

Упражнение 1.18.2. Привести пример выпуклого компакта из $\mathbb{R}^3$, у которого множество крайних точек не замкнуто («состыкуйте» два подходящих конуса).

Упражнение 1.18.3. Показать, что если выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$ содержит в качестве подмножества прямую (т. е. одномерное аффинное подмножество), то оно не содержит крайних точек.

Упражнение 1.18.4. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — компакт. Доказать, что для любой точки $x \in \partial \operatorname{co} A$ существуют точки $\{x_i\}_{i=1}^k \subset A$, где $k \leqslant n$, такие, что $x \in \operatorname{co} \bigcup\limits_{i=1}^{k} \{x_i\}$.

Упражнение 1.18.5. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, $B \subset \operatorname{co} A$ — компакт и $x \in \operatorname{extr} A \backslash B$. Доказать, что $x \notin \operatorname{co} B$.

Упражнение 1.18.6. Показать, что замкнутый единичный шар в пространстве суммируемых функций $L_1([0,1])$ не имеет крайних точек.

Упражнение 1.18.7. Показать, что шар в пространстве непрерывных функций над вещественным полем скаляров $C([0,1])$ имеет только две крайние точки — функции-константы -1 и 1.

Упражнение 1.18.8. С помощью теоремы Банаха–Алаоглу и теоремы Крейна–Мильмана доказать, что не существует банахова пространства, сопряженным к которому является пространство $L_1([0,1])$ или пространство $C([0,1])$.

§ 1.19. Выпуклость функции и гладкость ее сопряженной

В данном параграфе мы рассмотрим некоторые специальные типы выпуклости функций в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и их свойства.

Определение 1.19.1. Собственная выпуклая функция $f\colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *строго выпуклой*, если для любых $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$ таких, что $x_1 \neq x_2$, и для любого $\lambda \in (0,1)$ справедливо строгое неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2). \tag{1.19.1}$$

Определение 1.19.2. Собственная выпуклая функция $f\colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *сильно выпуклой* с константой сильной выпуклости $\varkappa > 0$, если для любых $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$ и для любого $\lambda \in (0,1)$ справедливо неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - \frac{\varkappa}{2} \lambda(1-\lambda)\|x_1 - x_2\|^2. \tag{1.19.2}$$

Отметим, что всякая сильно выпуклая функция является строго выпуклой.

Лемма 1.19.1. *Функция f сильно выпукла с константой $\varkappa > 0$ тогда и только тогда, когда функция $f(x) - \frac{\varkappa}{2}\|x\|^2$ выпукла.*

Доказательство. Записав неравенство выпуклости для функции $f(x) - \frac{\varkappa}{2}\|x\|^2$ и воспользовавшись очевидным равенством ($\lambda \in \in (0,1)$)

$$\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\|^2 = \lambda\|x_1\|^2 + (1-\lambda)\|x_2\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x_1 - x_2\|^2,$$

получаем неравенство (1.19.2). $\square$

Определение 1.19.3. Выпуклая функция $f\colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *субдифференцируемой* на множестве U, если в любой точке $x \in U$ ее субдифференциал $\partial f(x)$ непуст.

Собственная выпуклая функция f называется *субдифференцируемой*, если ее субдифференциал непуст на множестве $\operatorname{dom} f$.

Лемма 1.19.2. *Необходимые и достаточные условия* а) *строгой и* б) *сильной с константой $\varkappa > 0$ выпуклости субдифференцируемой функции $f\colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ следующие: для любых различных точек x_1, $x_2 \in \in \operatorname{dom} f$ и любого элемента $p_1 \in \partial f(x_1)$ справедливо неравенство:*

а) $f(x_2) > f(x_1) + \langle p_1, x_2 - x_1\rangle;$ (1.19.3)

б) $f(x_2) \geqslant f(x_1) + \langle p_1, x_2 - x_1\rangle + \frac{\varkappa}{2}\|x_2 - x_1\|^2.$ (1.19.4)

Доказательство. а) Пусть функция f строго выпукла. Допустим, что неравенство (1.19.3) неверно, т. е. нашлись различные точки x_1, $x_2 \in \operatorname{dom} f$ и элемент $p_1 \in \partial f(x_1)$ такие, что в силу определения субдифференциала справедливо равенство

$$f(x_2) = \langle p_1, x_2 - x_1\rangle + f(x_1). \tag{1.19.5}$$

Выбрав $\lambda \in (0,1)$, определим точку $y = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_1$. Из неравенства выпуклости и равенства (1.19.5) получаем

$$f(y) \leqslant f(x_1) + \lambda(f(x_2) - f(x_1)) = f(x_1) + \lambda\langle p_1, x_2 - x_1\rangle.$$

По определению субдифференциала имеем

$$f(y) \geqslant f(x_1) + \langle p_1, y - x_1\rangle = f(x_1) + \langle p_1, \lambda x_2 + (1-\lambda)x_1 - x_1\rangle =$$
$$= f(x_1) + \lambda\langle p_1, x_2 - x_1\rangle.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$f(y) = f(x_1) + \lambda\langle p_1, x_2 - x_1\rangle = \lambda f(x_2) + (1-\lambda)f(x_1) = \\ = f(x_1) + \lambda(f(x_2) - f(x_1)),$$

что противоречит строгой выпуклости функции f.

Пусть теперь выполнено (1.19.3). Выберем $y = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, где $\lambda \in (0,1)$; согласно неравенству (1.19.3) при $q \in \partial f(y)$ имеем

$$f(x_2) > f(y) + \langle q, x_2 - y\rangle = f(y) + \langle q, (1-\lambda)(x_2 - x_1)\rangle,$$

$$f(x_1) > f(y) + \langle q, x_1 - y\rangle = f(y) + \langle q, \lambda(x_2 - x_1)\rangle.$$

Умножая первое неравенство на λ, а второе — на $1-\lambda$ и складывая их, получаем

$$\lambda f(x_2) + (1-\lambda)f(x_1) > f(y),$$

т. е. функция f строго выпукла.

б) Пусть функция f сильно выпукла с константой $\varkappa$ и $p_1 \in \partial f(x_1)$. Докажем неравенство (1.19.4). По определению субдифференциала из неравенства (1.19.2) получаем

$$\langle p_1, x_2 - x_1\rangle \leqslant \frac{f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) - f(x_1)}{\lambda} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\lambda}\Big((1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) - \frac{\varkappa}{2}\lambda(1-\lambda)\|x_2 - x_1\|^2 - f(x_1)\Big) = \\ = f(x_2) - f(x_1) - \frac{\varkappa}{2}(1-\lambda)\|x_2 - x_1\|^2.$$

Устремляя λ к нулю, получаем неравенство (1.19.4).

Пусть для функции f выполняется условие (1.19.4). Определим $y = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, где $\lambda \in (0,1)$, и пусть $q \in \partial f(y)$. В силу неравенства (1.19.4) получаем

$$f(x_1) \geqslant f(y) + \langle q, x_1 - y\rangle + \frac{\varkappa}{2}\|x_1 - y\|^2,$$

$$f(x_2) \geqslant f(y) + \langle q, x_2 - y\rangle + \frac{\varkappa}{2}\|x_2 - y\|^2.$$

Умножая первое неравенство на $1-\lambda$, а второе — на λ и складывая, получаем

$$(1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \geqslant \\ \geqslant f(y) + \frac{\varkappa}{2}\lambda^2(1-\lambda)\|x_2 - x_1\|^2 + \frac{\varkappa}{2}(1-\lambda)^2\lambda\|x_2 - x_1\|^2 = \\ = f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) + \frac{\varkappa}{2}\lambda(1-\lambda)\|x_1 - x_2\|^2. \ \square$$

Лемма 1.19.3. *Необходимые и достаточные условия* а) *строгой и* б) *сильной с константой* $\varkappa$ *выпуклости субдифференцируемой функции* $f\colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ *соответственно следующие: для любых различных* $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$ *и любых* $p_1 \in \partial f(x_1)$, $p_2 \in \partial f(x_2)$ *выполнено неравенство*:

$$\text{а) } \langle p_2 - p_1, x_2 - x_1 \rangle > 0; \tag{1.19.6}$$

$$\text{б) } \langle p_2 - p_1, x_2 - x_1 \rangle \geqslant \varkappa \|x_2 - x_1\|^2. \tag{1.19.7}$$

Доказательство. Необходимость условий а) строгой и б) сильной выпуклости функции проверяется аналогично. Проверим, например, необходимость сильной выпуклости. По лемме 1.19.2 имеем

$$f(x_2) \geqslant f(x_1) + \langle p_1, x_2 - x_1 \rangle + \frac{\varkappa}{2} \|x_2 - x_1\|^2,$$
$$f(x_1) \geqslant f(x_2) + \langle p_2, x_1 - x_2 \rangle + \frac{\varkappa}{2} \|x_2 - x_1\|^2.$$

Складывая два последних неравенства, получаем (1.19.7).

Докажем достаточность неравенства (1.19.6). Допустим, что неравенство (1.19.6) справедливо, но функция f не является строго выпуклой. Тогда в силу леммы 1.19.2 найдутся различные точки x_1, x_2 и $p_1 \in \partial f(x_1)$ такие, что $f(x_2) = f(x_1) + \langle p_1, x_2 - x_1 \rangle$. Так как в силу определения субдифференциала имеет место неравенство $f(z) \geqslant f(x_1) + \langle p_1, z - x_1 \rangle \quad \forall z$, то, вычитая из него приведенное выше равенство, получаем $f(z) - f(x_2) \geqslant \langle p_1, z - x_2 \rangle \quad \forall z$, т. е. $p_1 \in \partial f(x_2)$, что влечет нарушение строгого неравенства (1.19.6). Противоречие.

Докажем достаточность неравенства (1.19.7). Определим k точек

$$x(i) = x_1 + \frac{i-1}{k}(x_2 - x_1), \quad i \in \overline{1,k}.$$

Выберем точки $p(i) \in \partial f(x(i))$. Из определения субградиента следует

$$f(x_2) - f(x_1) = (f(x_2) - f(x(k))) + (f(x(k)) - f(x(k-1))) + \ldots$$
$$\ldots + (f(x(2)) - f(x_1)) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \left\langle p(i), \frac{x_2 - x_1}{k} \right\rangle. \tag{1.19.8}$$

В силу неравенства (1.19.7) имеем

$$\langle p(i) - p_1, x(i) - x_1 \rangle \geqslant \varkappa \|x(i) - x_1\|^2, \quad i \in \overline{1,k}.$$

Делая замену $x(i) - x_1 = \dfrac{i-1}{k}(x_2 - x_1)$, получаем

$$\langle p(i), x_2 - x_1 \rangle \geqslant \langle p_1, x_2 - x_1 \rangle + \frac{i-1}{k} \varkappa \|x_2 - x_1\|^2, \quad i \in \overline{1,k}. \tag{1.19.9}$$

В итоге из (1.19.8) и (1.19.9) получаем

$$f(x_2) - f(x_1) \geqslant \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \langle p(i),\, x_2 - x_1 \rangle \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \Big(\langle p_1,\, x_2 - x_1 \rangle + \frac{i-1}{k}\, \varkappa \|x_2 - x_1\|^2 \Big) =$$

$$= \langle p_1,\, x_2 - x_1 \rangle + \varkappa\, \frac{k-1}{2k}\, \|x_2 - x_1\|^2.$$

Устремляя число точек разбиения отрезка k к бесконечности, получаем неравенство (1.19.4). □

Т е о р е м а 1.19.1 (Е.Г. Гольштейн [28]). *Пусть* $f\colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ — *собственная субдифференцируемая выпуклая функция и* $\operatorname{int}\operatorname{dom} f^* \neq \varnothing$. *Тогда дифференцируемость по Гато сопряженной функции* f^* *на множестве* $\operatorname{int}\operatorname{dom} f^*$ *и пустота ее субдифференциала на границе множества* $\operatorname{dom} f^*$ *эквивалентны строгой выпуклости функции* f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Покажем, что из дифференцируемости по Гато функции f^* на $\operatorname{int}\operatorname{dom} f^*$ и пустоты ее субдифференциала на границе $\operatorname{dom} f^*$ следует строгая выпуклость функции f. Допустим, что функция f не строго выпукла. По лемме 1.19.2 найдутся различные точки x_1, x_2 из $\operatorname{dom} f$ и $p_1 \in \partial f(x_1)$ такие, что $f(x_2) = f(x_1) + \langle p_1,\, x_2 - x_1 \rangle$. Отсюда следует включение $p_1 \in \partial f(x_2)$. Поскольку субдифференцируемая функция f полунепрерывна снизу, то по теореме 1.16.4 имеем $\{x_1,\, x_2\} \subset \partial f^*(p_1)$. Но это противоречит условию, что на множестве $\operatorname{dom} f^*$ функция f^* дифференцируема по Гато во внутренних точках (т. е. ∂f^* — одноточечное множество) и $\partial f^* = \varnothing$ на границе.

2) Покажем, что из строгой выпуклости функции f следует дифференцируемость по Гато сопряженной функции f^*. Как было показано в замечании 1.16.1, выпуклая функция $f^*\colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ субдифференцируема на внутренности своего эффективного множества, следовательно, для любого $p \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f^*$ имеем $\partial f^*(p) \neq \varnothing$. Если предположить, что существуют две различные точки $\{x_1,\, x_2\} \subset \partial f^*(p)$, то в силу теоремы 1.16.4 имеем $p \in \partial f(x_i)$, $i = 1, 2$, т. е. $f(x_2) = f(x_1) + \langle p,\, x_2 - x_1 \rangle$, что по лемме 1.19.2 противоречит строгой выпуклости функции f.

Если $p \in \partial \operatorname{dom} f^* \setminus \operatorname{dom} f^*$, то очевидно, что $\partial f^*(p) = \varnothing$. Если $p \in \partial \operatorname{dom} f^* \cap \operatorname{dom} f^*$, то по теореме об отделимости найдется опорная гиперплоскость, разделяющая точку p и множество $\operatorname{int}\operatorname{dom} f^*$; пусть q — ее внешний нормальный вектор. Тогда ее производная по направлению равна $(f^*)'(p; q) = +\infty$, и, следовательно, множество $\partial f^*(p)$ либо пусто, либо неограничено. Во втором случае во множестве $\partial f^*(p)$ найдутся по крайней мере два разных элемента x_1, x_2, т. е. $p \in \partial f(x_1)$ и $p \in \partial f(x_2)$, что в силу леммы 1.19.3 противоречит строгой выпуклости функции f. $\square$

Замечание 1.19.1. Если в теореме 1.19.1. выбрано пространство $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$, то выполнения условия $\operatorname{int} \operatorname{dom} f^* \neq \varnothing$ в теореме требовать не нужно, так как оно следует из строгой выпуклости функции f.

Действительно, если $\partial f^*(p)$ — одноточечное множество x_0, то для любого $q \in \mathbb{R}^n$ имеем $(f^*)'(p;q) = \langle q, x_0 \rangle < +\infty$, следовательно точка p является C-внутренней точкой множества $\operatorname{dom} f^*$ (определение C-внутренней точки см. в упр. 1.2.7), а в силу выпуклости множества $\operatorname{dom} f^*$ из упр. 1.2.8 следует, что она является внутренней точкой.

Приведем еще один пример, когда выполнены условия теоремы 1.19.1, точнее, когда $\operatorname{dom} f^* = \mathcal{H}$. Это пример, когда функция f является коэрцитивной. Функция $f\colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *коэрцитивной*, если она удовлетворяет условию

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty.$$

В этом случае для любого вектора $p \in \mathcal{H}$ найдется число $\delta_p > 0$ такое, что

$$\left(\left\langle p, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle - \frac{f(x)}{\|x\|}\right) < 0 \quad \text{при любом } x, \ \|x\| \geqslant \delta_p,$$

и также очевидно, что

$$\sup_{\|x\| \leqslant \delta_p} \|x\| \left(\left\langle p, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle - \frac{f(x)}{\|x\|}\right) < +\infty,$$

откуда следует, что функция $f^*(p) = \sup\limits_{x \in \mathcal{H}} (\langle p, x \rangle - f(x)) < +\infty$, т. е. $\operatorname{dom} f^* = \mathcal{H}$.

Лемма 1.19.4. *Пусть $U \subset \mathcal{H}$ — открытое выпуклое множество. Если функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ дифференцируема по Гато и для любых $x_1, x_2 \in U$ справедливо неравенство $\langle f'(x_1) - f'(x_2), x_1 - x_2 \rangle \geqslant$ $\geqslant 0$, то функция f выпукла.*

Доказательство. Зафиксируем точки $x_1, x_2 \in U$, $x_1 \neq x_2$. Рассмотрим

$$\varphi(\lambda) = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) - \lambda f(x_1) - (1 - \lambda) f(x_2),$$

$$x_\lambda = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2.$$

Выпуклость функции f эквивалентна неположительности функции φ

при $\lambda \in [0,1]$, поэтому будем доказывать последнее. Имеем

$$\varphi'(\lambda) = \langle f'(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2), x_1 - x_2\rangle + f(x_2) - f(x_1).$$

Для разных чисел λ_1, $\lambda_2 \in [0,1]$ получаем

$$\varphi'(\lambda_1) - \varphi'(\lambda_2) = \frac{\langle f'(x_{\lambda_1}) - f'(x_{\lambda_2}), x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2}\rangle}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

т. е. по условию леммы $\varphi'(\lambda_1) - \varphi'(\lambda_2) \geqslant 0$ при $\lambda_1 > \lambda_2$. Если найдется число $\lambda_0 \in (0,1)$ такое, что $\varphi(\lambda_0) > 0$, то в силу условий $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ по теореме Лагранжа о промежуточных значениях получаем, что найдутся $\mu_1 \in (0, \lambda_0)$ и $\mu_2 \in (\lambda_0, 1)$ такие, что $\varphi'(\mu_1) > 0$, а $\varphi'(\mu_2) < 0$. Это противоречит доказанной монотонности производной φ'. $\square$

Лемма 1.19.5. *Пусть функция $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ дифференцируема по Гато на $\mathcal{H}$. Для того чтобы функция f была выпуклой, а ее производная по Гато f' удовлетворяла на $\mathcal{H}$ условию Липшица с константой $L > 0$, т. е.*

(i) $\|f'(x_1) - f'(x_2)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1,\, x_2 \in \mathcal{H}$,

необходимо и достаточно выполнения одного из двух условий:

(ii) $f(x_1) \geqslant f(x_2) + \langle f'(x_2),\, x_1 - x_2\rangle + \dfrac{1}{2L}\,\|f'(x_1) - f'(x_2)\|^2 \quad \forall x_1,\, x_2 \in \mathcal{H}$;

(iii) $\langle f'(x_1) - f'(x_2),\, x_1 - x_2\rangle \geqslant \dfrac{1}{L}\,\|f'(x_1) - f'(x_2)\|^2 \quad \forall x_1,\, x_2 \in \mathcal{H}$.

Доказательство. 1. Пусть функция f выпукла и выполнено условие Липшица (i). Для зафиксированных точек x_1, x_2 из $\mathcal{H}$ определим точку $x(\lambda) = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ и функцию $\varphi(\lambda) = f(x(\lambda))$. Так как ее производная $\varphi'(\lambda) = \langle f'(x(\lambda)),\, x_2 - x_1\rangle$, то по формуле Ньютона–Лейбница получаем

$$\varphi(1) - \varphi(0) = f(x_2) - f(x_1) = \int_0^1 \langle f'(x(\lambda)),\, x_2 - x_1\rangle\, d\lambda.$$

Отсюда

$$f(x_2) = f(x_1) + \langle f'(x_1),\, x_2 - x_1\rangle + \int_0^1 \langle f'(x(\lambda)) - f'(x_1),\, x_2 - x_1\rangle\, d\lambda.$$

Оценим подынтегральное выражение, используя условие Липшица (i):

$$\langle f'(x(\lambda)) - f'(x_1),\, x_2 - x_1\rangle \leqslant \|f'(x(\lambda)) - f'(x_1)\|\|x_2 - x_1\| \leqslant$$
$$\leqslant L\|x(\lambda) - x_1\|\|x_2 - x_1\| = L\lambda\|x_2 - x_1\|^2.$$

Следовательно,

$$f(x_2) \leqslant f(x_1) + \langle f'(x_1),\, x_2 - x_1\rangle + \frac{L}{2}\, \|x_2 - x_1\|^2.$$

Выберем точку $x_2 = x_1 - \dfrac{1}{L}\, f'(x_1)$. Тогда

$$f(x_2) = f\Big(x_1 - \frac{1}{L}\, f'(x_1)\Big) \leqslant f(x_1) - \frac{1}{2L}\, \|f'(x_1)\|^2.$$

Отметим, что если функция f ограничена снизу, т. е. $f_0 = \inf\limits_{x\in\mathcal{H}} f(x) > > -\infty$, то $f_0 \leqslant f(x_1) - \dfrac{1}{2L}\, \|f'(x_1)\|^2$, следовательно,

$$f(x_1) \geqslant f_0 + \frac{1}{2L}\, \|f'(x_1)\|^2. \tag{1.19.10}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$g(x) = f(x) - f(x_2) - \langle f'(x_2),\, x - x_2\rangle.$$

Функция g выпукла и ее производная g' удовлетворяет условию Липшица (i), причем $g'(x_2) = 0$, следовательно, x_2 — глобальный минимум функции g на $\mathcal{H}$, причем $g(x_2) = 0$. Воспользовавшись неравенством (1.19.10), запишем

$$g(x) \geqslant \frac{1}{2L}\, \|g'(x)\|^2.$$

Положив в предыдущей формуле $x = x_1$, получим

$$f(x_1) - f(x_2) - \langle f'(x_2),\, x_1 - x_2\rangle \geqslant \frac{1}{2L}\, \|f'(x_1) - f'(x_2)\|^2,$$

т. е. выполнено условие (ii).

2. Покажем, что из неравенства (ii) следует неравенство (iii). В самом деле, складывая неравенства

$$f(x_1) \geqslant f(x_2) + \langle f'(x_2),\, x_1 - x_2\rangle + \frac{1}{2L}\, \|f'(x_1) - f'(x_2)\|^2$$

и

$$f(x_2) \geqslant f(x_1) + \langle f'(x_1),\, x_2 - x_1\rangle + \frac{1}{2L}\, \|f'(x_1) - f'(x_2)\|^2$$

и сокращая на $f(x_1) + f(x_2)$, получаем неравенство (iii).

3. Покажем, что из неравенства (iii) следует выпуклость функции f и условие (i). Из неравенства (iii) следует, что $\langle f'(x_1) - f'(x_2),$ $x_1 - x_2\rangle \geqslant 0$, т. е. по лемме 1.19.4 функция f выпукла. Далее, из неравенства (iii) получаем неравенство

$$\frac{1}{L}\, \|f'(x_1) - f'(x_2)\|^2 \leqslant \|f'(x_1) - f'(x_2)\|\|x_1 - x_2\|,$$

которое дает условие Липшица (i). $\square$

Теорема 1.19.2 (Е.Г. Гольштейн [28]). *Пусть* $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}^n$ — *собственная выпуклая субдифференцируемая функция. Для того чтобы выполнялось равенство* $\operatorname{dom} f^* = \mathcal{H}$, *а сопряженная функция* f^* *была дифференцируема по Гато, причем ее производная* $(f^*)'$ *удовлетворял бы условию Липшица с константой* $L > 0$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* f *была сильно выпуклой с константой* $\varkappa = 1/L$.

Доказательство. Необходимость. Из условия Липшица и леммы 1.19.5 имеем

$$\langle (f^*)'(p_1) - (f^*)'(p_2),\, p_1 - p_2 \rangle \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{L}\,\|(f^*)'(p_1) - (f^*)'(p_2)\|^2 \qquad \forall\, p_1,\ p_2 \in \mathcal{H}.$$

В силу теоремы 1.16.4 перепишем последнее неравенство в виде

$$\langle x_1 - x_2, p_1 - p_2 \rangle \geqslant \frac{1}{L}\,\|x_1 - x_2\|^2,$$

где x_1 и x_2 — точки из множества $\operatorname{dom} f$ такие, что $p_i \in \partial f(x_i)$ при $i = 1, 2$. По лемме 1.19.3 отсюда следует сильная выпуклость функции f с константой $\varkappa = 1/L$.

Достаточность. Пусть функция f сильно выпукла с константой $\varkappa = 1/L$. По лемме 1.19.3 это значит, что для всех точек x_1, x_2 из множества $\operatorname{dom} f$ и для любых векторов $p_i \in \partial f(x_i)$, $i = 1, 2$, выполнено неравенство

$$\langle x_1 - x_2,\, p_1 - p_2 \rangle \geqslant \frac{1}{L}\,\|x_1 - x_2\|^2. \tag{1.19.11}$$

По теореме 1.16.4 справедливы включения $x_i \in \partial f^*(p_i)$, $i = 1, 2$, и в силу неравенства (1.19.11) из условия $x_1 \neq x_2$ следует, что $p_1 \neq p_2$, т. е. $\partial f^*(p_i) = \{x_i\}$. Это значит, что функция f^* дифференцируема по Гато, а из неравенства (1.19.11) и леммы 1.19.5 следует, что ее производная удовлетворяет условию Липшица.

Осталось доказать равенство $\operatorname{dom} f^* = \mathcal{H}$. По лемме 1.19.2 из неравенства (1.19.4) получаем (взяв $x_2 = x$ и $x_1 = 0$, $p_0 \in \partial f(0)$) неравенство

$$f(x) \geqslant f(0) + \langle p_0, x \rangle + \frac{\varkappa}{2}\,\|x\|^2,$$

откуда следует, что

$$f(x) - \langle p, x \rangle \geqslant f(0) + \langle p_0 - p, x \rangle + \frac{\varkappa}{2}\,\|x\|^2 \geqslant f(0)$$

при $\|x\| \geqslant \delta_p = \dfrac{2}{\varkappa}\,\|p_0 - p\|$. Поэтому для любого вектора $p \in \mathcal{H}$ нашли число $\delta_p > 0$ такое, что

$$f^*(p) = \sup_{x\in\mathcal{H}}(\langle p, x\rangle - f(x)) = \sup_{\|x\|\leqslant\delta_p}(\langle p, x\rangle - f(x)),$$

т. е. $f^*(p) < +\infty$. $\square$

Рассмотрим свойства лебеговых множеств сильно выпуклой функции, удовлетворяющей условию Липшица.

Напомним, что лебегово множество функции f уровня $\beta \in \mathbb{R}$ определяется по формуле

$$L_\beta(f) = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) \leqslant \beta\}.$$

Прежде всего отметим, что каждое лебегово множество выпуклой функции является выпуклым множеством (быть может, пустым).

В случае, когда собственная функция $f\colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ субдифференцируема и сильно выпукла с константой $\varkappa$, то для любого числа β множество $L_\beta(f)$ либо пусто, либо ограничено. В самом деле, если $L_\beta(f)$ не пусто, то по лемме 1.19.2 из неравенства (1.19.4) получаем для любой точки $x_1 \in L_\beta(f)$ и любого элемента $p_1 \in \partial f(x_1)$ для всех точек $x \in L_\beta(f)$ справедливость неравенства

$$\beta \geqslant f(x) \geqslant f(x_1) + \langle p_1, x - x_1\rangle + \frac{\varkappa}{2}\|x - x_1\|^2,$$

из которого следует, что

$$\left\| x - x_1 + \frac{1}{\varkappa}p_1 \right\|^2 \leqslant \frac{2}{\varkappa}\Big(\frac{1}{2\varkappa}\|p_1\|^2 + \beta - f(x_1)\Big),$$

т. е. ограниченность множества $L_\beta(f)$.

Поскольку субдифференцируемая функция f пн. сн., то множество $L_\beta(f)$ замкнуто.

Напомним (см. определение 1.12.2), что нормальным конусом ко множеству $A \subset \mathcal{H}$ в точке $a \in A$ называется множество

$$N(A, a) = \{p \in \mathcal{H} \mid \langle p,\, a - x\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, x \in A\}.$$

Лемма 1.19.6. *Пусть точка x_0 является граничной точкой лебегова множества $L_\beta(f)$, пусть вектор $p_0 \in \partial f(x_0)$. Тогда справедливо включение*

$$p_0 \in N(L_\beta(f), x_0). \tag{1.19.12}$$

Доказательство. По определению субдифференциала $\partial f(x_0)$ функции f для любой точки $x \in \mathcal{H}$ имеем

$$f(x) \geqslant f(x_0) + \langle p_0,\, x - x_0\rangle.$$

Так как $f(x_0) = \beta$, то отсюда следует неравенство

$$\langle p_0,\, x - x_0\rangle \leqslant 0 \quad \forall\, x \in L_\beta(f),$$

что и означает включение (1.19.12). $\square$

Лемма 1.19.7. *Пусть $U \subset \mathcal{H}$ — открытое выпуклое множество. Пусть функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ сильно выпукла с константой $\varkappa$ и удовлетворяет условию Липшица с константой L на U. Определим константу*

$$R = \frac{L}{\varkappa}. \tag{1.19.13}$$

Пусть $L_\beta(f)$ — лебегово множество функции f, содержащееся во множестве U.

Тогда для любых точек x_1, x_2, принадлежащих границе множества $L_\beta(f)$, и для любых векторов $p_i \in \partial f(x_i)$, $i = 1, 2$, справедливо неравенство

$$\|x_1 - x_2\| \leqslant R\|e_1 - e_2\|, \tag{1.19.14}$$

где $e_i = p_i/\|p_i\|$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что всякая выпуклая функция, непрерывная на открытом множестве, субдифференцируема на этом множестве, т. е. f субдифференцируема на U.

Выберем две точки $x_i \in \partial L_\beta(f)$ и векторы $p_i \in \partial f(x_i)$, $i = 1, 2$. Покажем, что справедливо неравенство $\|p_i\| \leqslant L$, $i = 1, 2$. По определению субдифференциала из $p_1 \in \partial f(x_1)$ имеем

$$f(x) - f(x_1) \geqslant \langle p_1,\, x - x_1\rangle.$$

В силу открытости множества U можем выбрать точку $x \in U$ так, чтобы $x - x_1 = \lambda p_1$ для некоторого малого $\lambda > 0$. Тогда

$$\lambda\|p_1\|^2 = \langle p_1,\, x - x_1\rangle \leqslant f(x) - f(x_1) \leqslant L\|x - x_1\| \leqslant \lambda L\|p_1\|.$$

Отсюда получаем, что $\|p_1\| \leqslant L$. Аналогично проверяется неравенство $\|p_2\| \leqslant L$.

Зададим числа $\alpha = 1/\|p_1\| \geqslant 1/L$ и $\gamma = 1/\|p_2\| \geqslant 1/L$. По лемме 1.19.2 из неравенства (1.19.4) получаем

$$\alpha f(x_2) \geqslant \alpha f(x_1) + \langle \alpha p_1,\, x_2 - x_1\rangle + \alpha\, \frac{\varkappa}{2}\, \|x_2 - x_1\|^2,$$

$$\gamma f(x_1) \geqslant \gamma f(x_2) + \langle \gamma p_2,\, x_1 - x_2\rangle + \gamma\, \frac{\varkappa}{2}\, \|x_2 - x_1\|^2.$$

Учитывая, что $f(x_1) = f(x_2) = \beta$, сложим два последних неравенства и получим

$$(\alpha+\gamma)\beta \geqslant (\alpha+\gamma)\beta - \langle \alpha p_1 - \gamma p_2,\, x_1 - x_2\rangle + (\alpha+\gamma)\,\frac{\varkappa}{2}\,\|x_2 - x_1\|^2.$$

Отсюда следует, что

$$\langle e_1 - e_2,\, x_1 - x_2\rangle \geqslant (\alpha+\gamma)\,\frac{\varkappa}{2}\,\|x_2 - x_1\|^2,$$

следовательно,

$$\|e_1 - e_2\| \geqslant (\alpha+\gamma)\,\frac{\varkappa}{2}\,\|x_2 - x_1\| \geqslant \frac{\varkappa}{L}\|x_2 - x_1\|,$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 1.19.8. *Пусть даны числа $\beta_1 < \beta_2$ такие, что функция $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ непрерывна на лебеговом множестве $L_{\beta_2}(f)$, а множество $L_{\beta_1}(f)$ непусто. Тогда справедливо включение $L_{\beta_1}(f) \subset \subset \operatorname{int} L_{\beta_2}(f)$.*

Доказательство. Из условия следует включение множеств

$$L_{\beta_1}(f) = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) \leqslant \beta_1\} \subset \left\{x \in \mathcal{H} \,\middle|\, f(x) < \frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right\},$$

причем правое множество а нем открыто в силу непрерывности функции f и содержится во множестве $L_{\beta_2}(f)$. □

Лемма 1.19.9. *Пусть функция $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ сильно выпукла с константой $\varkappa$ и непрерывна на лебеговом множестве $L_{\beta_2}(f)$, $\beta_1 < \beta_2$, а множество $L_{\beta_1}(f)$ непусто. Тогда справедлива оценка*

$$h(L_{\beta_1}(f),\, L_{\beta_2}(f)) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\varkappa}\,(\beta_2 - \beta_1)}\,. \tag{1.19.15}$$

В частности,

$$\lim_{n\to\infty} h(L_{\beta_2 - 1/n}(f),\, L_{\beta_2}(f)) = 0. \tag{1.19.16}$$

Доказательство. Формула (1.19.16) сразу следует из неравенства (1.19.15). Докажем неравенство (1.19.15).

Очевидно, что в силу условий леммы множества $L_{\beta_1}(f)$ и $L_{\beta_2}(f)$ выпуклы и замкнуты.

Зафиксируем граничную точку $x \in \partial L_{\beta_2}(f)$. Пусть точка x_1 — проекция точки x на выпуклое множество $L_{\beta_1}(f)$. По лемме 1.9.1 точка x_1 определяется точкой x однозначно, что запишем как $x_1 = x_1(\beta_1, x)$.

Для доказательства неравенства (1.19.15) достаточно показать, что

$$\forall\, x \in \partial L_{\beta_2}(f) \quad \|x - x_1(\beta_1, x)\| \leqslant \varepsilon, \quad \text{где} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{2}{\varkappa}(\beta_2 - \beta_1)}\,, \tag{1.19.17}$$

откуда и последует требуемое неравенство (1.19.15). Действительно, по определению лебеговых множеств справедливо включение

$$L_{\beta_1}(f) \subset L_{\beta_2}(f). \tag{1.19.18}$$

В свою очередь, если выполнено свойство (1.19.17), то справедливо включение

$$\partial L_{\beta_2}(f) \subset L_{\beta_1}(f) + B_\varepsilon(0),$$

откуда после взятия выпуклых оболочек множеств слева и справа получаем включение

$$L_{\beta_2}(f) \subset L_{\beta_1}(f) + B_\varepsilon(0),$$

т. е. $h(L_{\beta_1}(f),\, L_{\beta_2}(f)) \leqslant \varepsilon$.

Докажем (1.19.17) для некоторой граничной точки $x \in \partial L_{\beta_2}(f)$ и ее проекции $x_1 = x_1(\beta_1, x) \in L_{\beta_1}(f)$. Определим функцию

$$g(y) = \begin{cases} f(y), & y \in \operatorname{aff}\{x, x_1\}, \\ +\infty, & y \notin \operatorname{aff}\{x, x_1\}. \end{cases}$$

Очевидно, что полученная функция $g(y)$ сильно выпукла с константой $\varkappa$ и непрерывна на одномерном множестве $\operatorname{dom} g = \operatorname{aff}\{x, x_1\}$. Так как выпуклая на одномерном множестве $\operatorname{dom} g$ функция g субдифференцируема во внутренних точках множества $\operatorname{dom} g$, то существует субградиент p_1 функции g в точке x_1, причем такой, для которого найдется число $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $p_1 = \lambda(x - x_1)$ (т. е. p_1 есть субградиент сужения функции g на одномерное аффинное множество $\operatorname{aff}\{x, x_1\}$ в точке x_1). Покажем, что $\lambda \geqslant 0$.

В силу свойств проекции точки на выпуклое множество (см. теорему 1.9.1) $x - x_1 \in N(L_{\beta_1}(f),\, x_1)$, т. е. для любого $y \in L_{\beta_1}(f) \cap \operatorname{dom} g$ выполнено неравенство $\langle x - x_1, y - x_1\rangle \leqslant 0$. Из определения субградиента $p_1 = \lambda(x - x_1) \in \partial g(x_1)$ получаем

$$\lambda\langle x - x_1,\, y - x_1\rangle \leqslant g(y) - g(x_1)$$

для любой точки $y \in L_{\beta_1}(f) \cap \operatorname{dom} g$. Поскольку в этом случае $g(y) \leqslant$ $\leqslant \beta_1$, а $g(x_1) = \beta_1$, то отсюда получаем неравенство

$$\lambda\langle x - x_1,\, y - x_1\rangle \leqslant 0. \tag{1.19.19}$$

Если $L_{\beta_1}(f) \cap \operatorname{dom} g = \{x_1\}$, то x_1 — глобальный минимум функции g, что по теореме 1.16.1 влечет включение $0 \in \partial g(x_1)$, т. е. $\lambda = 0$.

Если множество $L_{\beta_1}(f) \cap \operatorname{dom} g$ содержит более одной точки, то взяв $y \neq x_1$, $y \in L_{\beta_1}(f) \cap \operatorname{dom} g$, получим, что $\langle x - x_1, y - x_1 \rangle < 0$, и в силу (1.19.19) $\lambda \geqslant 0$.

Запишем условие субдифференцируемости сильно выпуклой функции g (см. лемму 1.19.2):

$$\beta_2 = g(x) \geqslant g(x_1) + \langle \lambda(x - x_1), x - x_1 \rangle + \frac{\varkappa}{2}\, \|x - x_1\|^2,$$

и используя то, что $g(x_1) = \beta_1$, получаем

$$\beta_2 - \beta_1 \geqslant \lambda \|x - x_1\|^2 + \frac{\varkappa}{2}\, \|x - x_1\|^2,$$

откуда $\|x - x_1\| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\varkappa}\,(\beta_2 - \beta_1)}$. $\square$

В заключение параграфа докажем теорему об устойчивости решения задачи минимизации функции при замене ее на сильно выпуклую функцию, приближающую данную.

Теорема 1.19.3. *Пусть A_1, $A_2 \subset \mathcal{H}$ — выпуклые замкнутые ограниченные множества. Пусть даны две функции f_1, $f_2 \colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие на множестве $A = \overline{\operatorname{co}}\,\{A_1 \cup A_2\}$ условиям:*

1) *$f_1 \colon A \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$;*

2) *$f_2 : A \to \mathbb{R}$ сильно выпукла с константой $\varkappa > 0$;*

3) *существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $|f_1(x) - f_2(x)| \leqslant \varepsilon \ \ \forall\, x \in A$.*

Пусть u_i — решение задачи $\min\limits_{x \in A_i} f_i(x)$ при $i = 1, 2$.
Тогда справедлива оценка

$$\|u_1 - u_2\| \leqslant \sqrt{\frac{2Lh(A_1, A_2) + 4\varepsilon}{\varkappa}} + h(A_1, A_2). \tag{1.19.20}$$

Доказательство. Обозначим $h = h(A_1, A_2)$. По определению расстояния по Хаусдорфу для каждого $t > 1$ найдется точка $x_2 \in A_2$ такая, что $\|x_2 - u_1\| \leqslant th$. Определим функцию

$$g(x) = \begin{cases} f_2(x), & x \in A_2, \\ +\infty, & x \notin A_2. \end{cases}$$

Очевидно, что функция g является сильно выпуклой с константой $\varkappa$ и точка u_2 является решением задачи $\min\limits_{x \in A_2} g(x)$.

По теореме 1.16.1 необходимое и достаточное условие того, что точка u_2 есть решение, имеет вид $0 \in \partial g(u_2)$.

В силу леммы 1.19.2 из неравенства (1.19.4) получаем неравенство

$$g(x_2) \geqslant g(u_2) + \frac{\varkappa}{2}\,\|x_2 - u_2\|^2,$$

откуда

$$\frac{\varkappa}{2}\,\|x_2 - u_2\|^2 \leqslant g(x_2) - g(u_2) = f_2(x_2) - f_2(u_2).$$

Так как в силу условия 3) имеем

$$f_2(x_2) - f_2(u_2) \leqslant f_1(x_2) - f_1(u_1) + 2\varepsilon,$$

а в силу условия 1) имеем

$$f_1(x_2) - f_1(u_1) \leqslant L\|x_2 - u_1\| \leqslant Lth,$$

то получаем

$$\|x_2 - u_2\| \leqslant \sqrt{\frac{2Lth + 4\varepsilon}{\varkappa}}\,,$$

откуда

$$\|u_1 - u_2\| \leqslant \|u_1 - x_2\| + \|x_2 - u_2\| \leqslant th + \sqrt{\frac{2Lth + 4\varepsilon}{\varkappa}} \quad \forall\, t > 1.$$

Переходя к пределу по $t \to 1 + 0$, получаем оценку (1.19.20). □

В случае, когда $f_1 = f_2$, теорема 1.19.3 принимает следующий вид.

Следствие 1.19.1. *Пусть* A_1, $A_2 \subset \mathcal{H}$ *— выпуклые замкнутые ограниченные множества, т. е. существует число* $R > 0$ *такое, что* $A_i \subset B_R(0)$, $i = 1, 2$. *Пусть функция* $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *сильно выпукла с константой* $\varkappa > 0$ *и удовлетворяет на шаре* $B_R(0)$ *условию Липшица с константой* $L > 0$. *Пусть* $u_i \in A_i$ *— решение задачи минимизации* $f(u_i) = \min\limits_{x \in A_i} f(x)$, *где* $i = 1, 2$.

Тогда справедлива оценка

$$\|u_1 - u_2\| \leqslant \sqrt{\frac{2L}{\varkappa}\, h(A_1, A_2)} + h(A_1, A_2).$$

Глава 2

ПРИЛОЖЕНИЯ ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА

§ 2.1. Селекторы выпуклых множеств

Применим изученные нами свойства выпуклых множеств и функций к задаче нахождения однозначных выборок точек из множеств определенного класса, обладающих некоторыми заданными свойствами. Такие функции множеств принято называть *селекторами*. Понятно, что выборку можно осуществлять с различными целями. В данном разделе нас будет интересовать следующая задача. Пусть Ω — некоторый класс выпуклых замкнутых ограниченных множеств из гильбертова пространства $\mathcal{H}$ (или даже из $\mathbb{R}^n$). Требуется поставить в соответствие каждому множеству $A \in \Omega$ точку $z(A) \in A$ такую, чтобы для всякой последовательности $\{A_n\} \subset \Omega$, удовлетворяющей условию $h(A_n, A) \to 0$, имело место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \|z(A_n) - z(A)\| = 0$.

Всякий селектор, обладающий приведенным выше свойством будем называть *непрерывным*. Нас также будут интересовать случаи, когда некоторый селектор $z(A)$ удовлетворяет *условию Гёльдера* с показателем $\alpha \in (0, 1)$, т. е. существует число $L > 0$ такое, что для любых множеств A, B из Ω справедливо неравенство $\|z(A) - z(B)\| \leqslant L(h(A, B))^\alpha$. Скажем, что селектор удовлетворяет *условию Липшица* с константой $L > 0$, если для любых множеств A, B из Ω справедливо неравенство $\|z(A) - z(B)\| \leqslant Lh(A, B)$ (напомним, что $h(A, B)$ — расстояние Хаусдорфа между множествами A и B).

Рассмотрим несколько важных примеров.

1. Проекция нуля. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим семейство непустых замкнутых выпуклых множеств, содержащихся в шаре $B_R(0)$. Для всякого такого множества $A \subset B_R(0)$ обозначим проекцию нуля на множество A через $p(A)$. Ясно, что точка $p(A) \in A$ есть решение задачи минимизации $\min\limits_{x\in A} \|x\|^2$. Функция $f(x) = \|x\|^2$, очевидно, является сильно выпуклой с константой сильной выпуклости $\varkappa = 2$ (см. § 1.19) и удовлетворяет условию Липшица на шаре $B_R(0)$ с константой $L = 2R$. По следствию 1.19.1 для любых множеств A_1 и A_2 из выбранного семейства справедлива оценка

$$\|p(A_1) - p(A_2)\| \leqslant \sqrt{2Rh(A_1, A_2)} + h(A_1, A_2) \leqslant 2\sqrt{2R}\,(h(A_1, A_2))^{1/2}, \tag{2.1.1}$$

т. е. селектор $p(A)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1/2$.

Упражнение 2.1.1. Показать на примере (который можно построить в $\mathbb{R}^2$), что показатель $1/2$ в условии Гёльдера для проекции нуля не может быть улучшен (т. е. увеличен).

2. Чебышевский центр. Рассмотрим семейство непустых выпуклых замкнутых ограниченных множеств из гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Для всякого множества $A \subset \mathcal{H}$ из этого семейства определим функцию

$$\rho(A) = \inf\{r \geqslant 0 \mid \exists\, x \in \mathcal{H},\ A \subset x + B_r(0)\}. \tag{2.1.2}$$

Определение 2.1.1. *Чебышевским центром* множества A называют точку $c(A)$, которая удовлетворяет включению

$$A \subset c(A) + \rho(A)B_1(0). \tag{2.1.3}$$

Лемма 2.1.1. *Для всякого выпуклого замкнутого ограниченного множества A из гильбертова пространства $\mathcal{H}$ точка $c(A)$, удовлетворяющая включению* (2.1.3), *существует и единственна.*

Доказательство. Выберем последовательности чисел $r_i \in \mathbb{R}_+$ и точек $x_i \in \mathcal{H}$ такие, что $r_i \to \rho(A)$ при $i \to \infty$ и справедливы включения $A \subset x_i + r_i B_1(0)$. Отсюда для любого $p \in \mathcal{H}$ справедливы неравенства $s(p, A) \leqslant \langle p, x_i\rangle + r_i\|p\|$. Так как последовательность точек $\{x_i\}$, очевидно, ограничена, то в силу слабой компактности шара из гильбертова пространства она содержит слабо сходящуюся подпоследовательность, слабый предел которой обозначим через z_0. Отсюда для любого $p \in \mathcal{H}$ в пределе получаем неравенство $s(p, A) \leqslant \langle p, z_0\rangle + \rho(A)\|p\|$, что по свойству опорных функций влечет включение $A \subset z_0 + \rho(A)B_1(0)$.

Предположим, что существует другая точка z_1, для которой справедливо включение $A \subset z_1 + \rho(A)B_1(0)$. Тогда

$$A \subset B_\rho(z_0) \cap B_\rho(z_1) \subset B_{\rho_1}\Big(\frac{z_0 + z_1}{2}\Big),$$

где $\rho = \rho(A)$, $\rho_1 = \sqrt{\rho^2 - \frac{\|z_0 - z_1\|^2}{4}} < \rho$, что противоречит определению (2.1.2) значения $\rho = \rho(A)$, т. е. точка z_0 единственна. $\square$

Тот факт, что чебышевский центр $c(A)$ является селектором множества A, т. е. что верно включение $c(A) \in A$, будет следовать из дальнейшей леммы.

Лемма 2.1.2. *Чебышевский центр выпуклого замкнутого ограниченного множества $A \subset \mathcal{H}$ есть решение экстремальной задачи*

$$\min_{a \in A} g_A(a), \quad \text{где} \quad g_A(a) = \sup_{x \in A} \|x - a\|^2, \tag{2.1.4}$$

а также решение экстремальной задачи

$$\min_{a \in \mathcal{H}} g_A(a), \quad \text{где} \quad g_A(a) = \sup_{x \in A} \|x - a\|^2. \tag{2.1.5}$$

Доказательство. Отметим, что в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ всякая выпуклая полунепрерывная снизу функция слабо полунепрерывна снизу и по теореме Вейерштрасса 1.5.2 достигает минимума на слабом компакте, каковым является всякое выпуклое замкнутое ограниченное множества из $\mathcal{H}$.

Рассмотрим задачу (2.1.4). Функция g_A сильно выпукла как супремум семейства сильно выпуклых функций с одной и той же константой сильной выпуклости $\varkappa = 2$. Отсюда минимум функции g_A на выпуклом замкнутом множестве A достигается в единственной точке, которую обозначим через a_0. Определим $\rho = \sqrt{g_A(a_0)}$. Тогда для любой точки $x \in A$ справедливо неравенство $\|x - a_0\| \leqslant \rho$, т. е. $A \subset a_0 + \rho B_1(0)$, причем для любого $r < \rho$ найдется точка $x_r \in A$ такая, что $\|x_r - a_0\| > r$. Итак, доказали, что точка a_0 и число ρ удовлетворяют определению 2.1.3, т. е. $a_0 = c(A)$ и $\rho = \rho(A)$.

Покажем, что чебышевский центр $c(A)$ есть решение и задачи (2.1.5). Поскольку функция g_A строго выпукла и $\lim\limits_{\|a\| \to +\infty} g_A(a) = +\infty$, то решение задачи (2.1.5) существует и единственно. Пусть точка u — решение. Осталось показать, что $u \in A$.

Допустим противное, т. е. $u \notin A$. Обозначим через v проекцию точки u на множество A. Определим вектор $p = (u - v)/\|u - v\|$ — внешнюю нормаль к выпуклому множеству A в точке v. Зафиксируем произвольную точку $x \in A$. По теореме об отделимости это значит, что справедливо включение $A \subset \{z \in \mathcal{H} \mid \langle p, z - v\rangle \leqslant 0\}$. Из последнего включения получаем неравенство $\langle x - v, u - v\rangle \leqslant 0$, поэтому

$$\begin{aligned} \|x - u\|^2 = \|x - v - (u - v)\|^2 = \|x - v\|^2 - 2\langle x - v, u - v\rangle + \\ + \|u - v\|^2 \geqslant \|x - v\|^2 - \langle x - v, u - v\rangle + \|u - v\|^2 = \\ = \left\|x - v - \frac{u - v}{2}\right\|^2 + \frac{3}{4}\|u - v\|^2, \end{aligned}$$

т. е. $g_A(u) \geqslant g_A\left(\frac{u+v}{2}\right) + \frac{3}{4}\|u-v\|^2 > g_A\left(\frac{u+v}{2}\right)$, что противоречит тому, что точка u есть решение задачи (2.1.5). Итак, доказали, что $u \in A$, т. е. $u = c(A)$. □

Следствие 2.1.1. *Чебышевский центр выпуклого замкнутого ограниченного множества $A \subset \mathcal{H}$ есть решение экстремальной задачи*

$$\min_{a\in\mathcal{H}} \widetilde{g}_A(a), \quad \text{где} \quad \widetilde{g}_A(a) = \sup_{x\in A}\|x-a\|. \tag{2.1.6}$$

Доказательство следует из леммы 2.1.2 и равенства $\widetilde{g}_A(a) = \sqrt{g_A(a)}$.

Теорема 2.1.1. *Для произвольных выпуклых замкнутых множеств A_1 и A_2, содержащихся в шаре $B_R(0)$ из гильбертова пространства $\mathcal{H}$, справедлива оценка*

$$\|c(A_1) - c(A_2)\| \leqslant 2\sqrt{3Rh(A_1,A_2)} + h(A_1,A_2). \tag{2.1.7}$$

Доказательство. Обозначим $h = h(A_1,A_2)$, $g_i(a) = \sup\limits_{x\in A_i}\|x-a\|^2$, $u_i = \arg\min\limits_{a\in A_i} g_i(a)$, $i = 1,2$. По лемме 2.1.2 справедливы равенства $u_i = c(A_i)$. Исследуем свойства функций g_i.

Обе они являются собственными сильно выпуклыми функциями с константой $\varkappa = 2$ как супремумы семейств сильно выпуклых функций с общей константой $\varkappa = 2$.

Покажем, что функции g_1 и g_2 удовлетворяют условию Липшица на шаре $B_R(0)$ с константой Липшица $L = 4R$. Отметим, что для любой точки $x \in B_R(0)$ функция $a \to \|a-x\|^2$ удовлетворяет условию Липшица на $B_R(0)$ с константой $L = 4R$. В самом деле,

$$\|a_1-x\|^2 - \|a_2-x\|^2 = \\ = (\|a_1-x\| + \|a_2-x\|)(\|a_1-x\| - \|a_2-x\|) \leqslant 4R\|a_1-a_2\|.$$

Зафиксируем точки a_1 и a_2 из шара $B_R(0)$. Пусть последовательность $\{x_i^1\} \in A_1$ такова, что $\lim\limits_{i\to\infty}\|a_1-x_i^1\|^2 = g_1(a_1)$. Выделяя в $\{x_i^1\}$, если нужно, подпоследовательность, можно считать, что и числовая последовательность $\{\|a_2-x_i^1\|^2\}$ также сходится. Из определения функции g_1 следует, что ее предел не превосходит значения $g_1(a_2)$. Переходя к пределу по $i \to \infty$ в неравенстве

$$\|a_1-x_i^1\|^2 \leqslant \|a_2-x_i^1\|^2 + 4R\|a_1-a_2\|,$$

получаем, что

$$g_1(a_1) \leqslant \lim_{i\to\infty}\|a_2-x_i^1\|^2 + 4R\|a_1-a_2\| \leqslant g_1(a_2) + 4R\|a_1-a_2\|.$$

Аналогично показывается, что функция g_2 удовлетворяет условию Липшица с константой $L = 4R$.

Докажем неравенство

$$|g_1(a) - g_2(a)| \leqslant 4Rh \quad \forall\, a \in B_R(0). \tag{2.1.8}$$

Зафиксируем число $t > 1$ и точку $a \in B_R(0)$. Найдутся последовательности точек $\{x_i^1\} \subset A_1$ и $\{x_i^2\} \subset A_2$ такие, что $g_1(a) = \lim\limits_{i\to\infty} \|a - x_i^1\|^2$, а $\|x_i^1 - x_i^2\| \leqslant th$ для всех i.

Также без ограничения общности можем считать, что существует предел $\lim\limits_{i\to\infty} \|a - x_i^2\|^2$.

Переходя к пределу по $i \to \infty$ в неравенстве

$$\|a - x_i^1\|^2 \leqslant \|a - x_i^2\|^2 + 4R\|x_i^1 - x_i^2\| \leqslant \|a - x_i^2\|^2 + 4Rth,$$

получаем

$$g_1(a) \leqslant \lim_{i\to\infty} \|a - x_i^2\|^2 + 4Rth \leqslant g_2(a) + 4Rth.$$

Из аналогичных рассуждений, поменяв g_1 и g_2 местами, получаем

$$|g_1(a) - g_2(a)| \leqslant 4Rth \quad \forall\, a \in B_R(0), \quad \forall\, t > 1.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по $t \to 1 + 0$, получаем неравенство (2.1.8).

Применяя формулу (1.19.20) теоремы 1.19.3 для случая, когда $L = 4R$ и $\varepsilon = 4Rh$, получаем, что

$$\|c(A_1) - c(A_2)\| \leqslant 2\sqrt{3Rh(A_1, A_2)} + h(A_1, A_2). \square$$

В заключение разберем пример, показывающий, что оценку (2.1.7) нельзя существенно улучшить.

Пусть $R > 0$ и $\varepsilon \in (0, R)$. В евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ (с декартовой системой координат (x_1, x_2)) рассмотрим два множества A_1 и A_2, где $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x_2 \leqslant \varepsilon,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant R^2\}$, а множество A_2 симметрично множеству A_1 относительно прямой $x_2 = \varepsilon/2$. Легко видеть, что их чебышевские центры находятся в точках $c(A_1) = (0, 0)$, $c(A_2) = (0, \varepsilon)$, а хаусдорфово расстояние $h(A_1, A_2) = \sqrt{R^2 + \varepsilon^2} - R^2 \leqslant \varepsilon^2/2R$. Отсюда

$$\|c(A_1) - c(A_2)\| \geqslant \sqrt{2Rh(A_1, A_2)}\ .$$

В силу полученных оценок (2.1.1) и (2.1.7) видно, что рассмотренные выше два типа селекторов удовлетворяют условию Гёльдера с показателем 1/2, но, к сожалению, не удовлетворяют условию Липшица.

Перейдем к рассмотрению важного примера селектора выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию Липшица.

3. Центр Штейнера.

Определение 2.1.2. *Центром Штейнера выпуклого компакта* $A \subset \mathbb{R}^n$ называется точка

$$s(A) = \frac{1}{v_1} \int\limits_{\partial B_1(0)} s(p, A) p \, dp, \tag{2.1.9}$$

где через v_1 обозначен объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 2.1.3. *Для всякого выпуклого компакта* $A \subset \mathbb{R}^n$ *выполнено включение* $s(A) \in A$.

Доказательство. Зафиксируем произвольный вектор $q \in \in \partial B_1(0)$. Мы покажем, что для любого единичного вектора q справедливо неравенство $\langle q, s(A)\rangle \leqslant s(q, A)$ (из которого последует включение $s(A) \in A$).

Введем обозначения $\partial B_1^+(0) = \{x \in \partial B_1(0) \mid \langle q, x\rangle \geqslant 0\}$ и $\partial B_1^-(0) = \{x \in \partial B_1(0) \mid \langle q, x\rangle \leqslant 0\}$. Для всякого вектора p через $g(p)$ обозначим вектор, симметричный относительно гиперплоскости $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle q, x\rangle = 0\}$, т. е. $g(p) = p - 2\langle p, q\rangle q$. Отсюда для любого вектора $p \in \partial B_1^+(0)$ справедливо неравенство

$$s(p, A) \leqslant s(g(p), A) + 2\langle p, q\rangle s(q, A). \tag{2.1.10}$$

Разбивая в интеграле (2.1.9) сферу $\partial B_1(0)$ на две полусферы $\partial B_1^+(0)$ и $\partial B_1^-(0)$ и используя равенство $\langle g(p), q\rangle = -\langle p, q\rangle$ для всех $p \in \in \partial B_1^+(0)$, получаем

$$\langle q, s(A)\rangle = \frac{1}{v_1} \int\limits_{\partial B_1^+(0)} s(p, A)\langle p, q\rangle \, dp + \frac{1}{v_1} \int\limits_{\partial B_1^-(0)} s(p, A)\langle p, q\rangle \, dp =$$
$$= \frac{1}{v_1} \int\limits_{\partial B_1^+(0)} s(p, A)\langle p, q\rangle \, dp - \frac{1}{v_1} \int\limits_{\partial B_1^+(0)} s(g(p), A)\langle p, q\rangle \, dp.$$

Так как $\langle p, q\rangle \geqslant 0$ для всех $p \in \partial B_1^+(0)$, то в силу неравенства (2.1.10) получаем

$$\langle q, s(A)\rangle \leqslant \frac{1}{v_1} \int\limits_{\partial B_1^+(0)} s(p, A)\langle p, q\rangle \, dp - \frac{1}{v_1} \int\limits_{\partial B_1^+(0)} s(p, A)\langle p, q\rangle \, dp +$$
$$+ \frac{2}{v_1} \int\limits_{\partial B_1^+(0)} s(q, A)|\langle p, q\rangle|^2 \, dp = s(q, A)\, \frac{1}{v_1} \int\limits_{\partial B_1(0)} |\langle p, q\rangle|^2 \, dp.$$

Дополняя вектор q векторами $q_1, \ldots, q_{n-1}$ до ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$, в силу симметрии сферы получаем

$$\int\limits_{\partial B_1(0)} |\langle p, q\rangle|^2\, dp = \frac{1}{n} \int\limits_{\partial B_1(0)} \left(|\langle p, q\rangle|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} |\langle p, q_i\rangle|^2 \right) dp =$$

$$= \frac{1}{n} \int\limits_{\partial B_1(0)} \|p\|^2\, dp = \frac{1}{n} \int\limits_{\partial B_1(0)} dp = \frac{\mu_{n-1}(\partial B_1(0))}{n} = v_1$$

(где $\mu_{n-1}(\partial B_1(0))$ — площадь поверхности сферы $\partial B_1(0)$), т. е.

$$\frac{1}{v_1} \int\limits_{\partial B_1(0)} |\langle p, q\rangle|^2\, dp = 1.$$

В итоге получаем требуемое неравенство. $\square$

Лемма 2.1.4. *Центр Штейнера как функция выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица в стандартной метрике Хаусдорфа, а именно: для любых выпуклых компактов A_1 и A_2 из $\mathbb{R}^n$ имеет место оценка*

$$\|s(A_1) - s(A_2)\| \leqslant L_n h(A_1, A_2),$$

где

$$L_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}. \tag{2.1.11}$$

Константа L_n в формуле (2.1.11) *неулучшаема.*

Доказательство. Разобьем доказательство леммы на две части: сначала докажем, что выполнено условие Липшица с константой (2.1.11), а затем покажем ее неулучшаемость.

1. Вычисление константы. Пусть $s(A_1) \neq s(A_2)$. Определим вектор $a = (s(A_1) - s(A_2))/\|s(A_1) - s(A_2)\|$. Из определения 2.1.2 с помощью леммы 1.11.4 получаем

$$\|s(A_1) - s(A_2)\| = \langle a, s(A_1) - s(A_2)\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{v_1} \int\limits_{\partial B_1(0)} |s(p, A_1) - s(p, A_2)| |\langle p, a\rangle|\, dp \leqslant$$

$$\leqslant h(A_1, A_2) \frac{1}{v_1} \int\limits_{\partial B_1(0)} |\langle p, a\rangle|\, dp.$$

Таким образом, $L_n \leqslant \frac{1}{v_1} \int\limits_{\partial B_1(0)} |\langle p, a\rangle|\, dp = I$. Вычислим последний интеграл. Для этого приведем вспомогательные утверждения (i)–(iv), доказательства которых можно найти в учебниках по математическому анализу (см., например, [44]).

Напомним, что символ $k!!$ означает произведение всех натуральных чисел, меньших либо равных k и одной с ним четности.

(i) Объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$ равен

$$v_1 = \begin{cases} \dfrac{\pi^k}{k!}, & \text{если} \quad n = 2k, \\ \dfrac{2^{k+1}\pi^k}{(2k+1)!!}, & \text{если} \quad n = 2k+1. \end{cases}$$

(ii) $$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^k \varphi \, d\varphi = \begin{cases} \dfrac{(k-1)!!}{k!!}\dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad k \text{ четное}, \\ \dfrac{(k-1)!!}{k!!}, & \text{если} \quad k \text{ нечетное}. \end{cases}$$

(iii) В $\mathbb{R}^n$ сферические координаты $(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ связаны с декартовыми $(x_1, \ldots, x_n)$ формулами

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_{n-1} \ldots \cos \varphi_2 \cos \varphi_1, \\ x_2 &= r \cos \varphi_{n-1} \ldots \cos \varphi_2 \sin \varphi_1, \\ x_3 &= r \cos \varphi_{n-1} \ldots \sin \varphi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= r \cos \varphi_{n-1} \sin \varphi_{n-2}, \\ x_n &= r \sin \varphi_{n-1}. \end{aligned}$$

При этом $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$; $\varphi_i \in [-\pi/2, \pi/2]$, $2 \leqslant i \leqslant n-1$.

(iv) Корень из детерминанта первой квадратичной формы единичной сферы из $\mathbb{R}^n$ в сферических координатах равен

$$J = \cos^{n-2} \varphi_{n-1} \cos^{n-3} \varphi_{n-2} \ldots \cos^2 \varphi_3 \cos \varphi_2.$$

Выберем в пространстве $\mathbb{R}^n$ базис и декартову систему координат так, что вектор a имеет координаты $a = (0, \ldots, 0, 1)$. Тогда интеграл I принимает вид $I = \dfrac{1}{v_1} \displaystyle\int\limits_{\partial B_1(0)} |p_n| \, dp$. Переходя к сферическим координатам (iii) и учитывая (iv), получаем

$$I = \frac{1}{v_1} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi_2 \ldots \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(|\sin \varphi_{n-1}| \cos^{n-2} \varphi_{n-1} \ldots \cos \varphi_2 \big) \, d\varphi_{n-1} =$$

$$= \frac{2^{n-1}\pi}{v_1} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{n-2}\varphi \sin\varphi \, d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{n-3}\varphi \, d\varphi \, \ldots$$

$$\ldots \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2}\varphi \, d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi.$$

Учитывая равенство

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{n-2}\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \frac{1}{n-1},$$

перепишем интеграл I в виде

$$I = \frac{2^{n-1}\pi}{(n-1)v_1} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{n-3}\varphi \, d\varphi \, \ldots \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2}\varphi \, d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi.$$

Пусть $n = 2k$. Тогда по формулам (i) и (ii) получаем

$$I = \frac{2^{2k-1}\pi}{(2k-1)v_1} \left(\frac{(2k-4)!!}{(2k-3)!!}\right) \left(\frac{(2k-5)!!}{(2k-4)!!}\frac{\pi}{2}\right) \ldots =$$

$$= \frac{2^{2k-1}\pi^{k-1}}{2^{k-1}(2k-1)!!\, v_1} = \frac{k!}{\pi^k}\, \frac{2^k\pi^{k-1}}{(2k-1)!!} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, \frac{\Gamma\left(\frac{2k}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)} = L_{2k}.$$

Если $n = 2k+1$, то

$$I = \frac{2^{2k}\pi}{(2k)v_1} \left(\frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{(2k-4)!!}{(2k-3)!!}\right) \ldots =$$

$$= \frac{1}{v_1}\, \frac{2^{2k}\pi^k}{2^{2k-1}k!} = \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}\pi^k}\, \frac{2\pi^k}{k!} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, \frac{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+2}{2}\right)} = L_{2k+1}.$$

Первая часть леммы доказана.

2. Неулучшаемость константы L_n. Зафиксируем произвольный единичный вектор $a \in \mathbb{R}^n$ и определим множества A_1 и A_2, зависящие от вектора a и параметров $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$, по формулам

$$A_1 = \varepsilon \cdot \operatorname{co}\{B_1(0) \cup \{ma\}\}, \quad A_2 = \varepsilon \cdot \operatorname{co}\{B_1(ma) \cup \{0\}\}.$$

Достаточно очевидно, что при любых $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ расстояние по Хаусдорфу между множествами A_1 и A_2 равно ε. Мы оценим расстояние между точками $s(A_1)$ и $s(A_2)$ через величину $h(A_1, A_2) = \varepsilon$

снизу и покажем, что выбором соответствующего числа m при фиксированном значении $\varepsilon > 0$ эта оценка сколь угодно близка к величине $L_n h(A_1, A_2)$, где константа L_n определена по формуле (2.1.11).

Определим множества

$$\partial B_1^+(0) = \{p \in \partial B_1(0) \mid \langle p, a\rangle \geqslant 0\},$$

$$\partial B_1^-(0) = \{p \in \partial B_1(0) \mid \langle p, a\rangle \leqslant 0\},$$

$$S = \{p \in \partial B_1(0) \mid |\langle p, a\rangle| \geqslant 1/m\}.$$

1) Покажем, что для любого $p \in \partial B_1(0)$ справедливы неравенства

$$0 \leqslant (s(p, A_2) - s(p, A_1))\langle p, a\rangle \leqslant \varepsilon. \tag{2.1.12}$$

Действительно, если $p \in \partial B_1^+(0)$, то

$$s(p, A_2) = \langle p,\, m\varepsilon a + \varepsilon p\rangle = m\varepsilon\langle p, a\rangle + \varepsilon,$$

а

$$s(p, A_1) = \sup_{\lambda \in (0,1)}\ \sup_{x \in B_\varepsilon(0)} \langle p,\, \lambda x + (1-\lambda) m\varepsilon a\rangle = \\ = \sup_{\lambda \in (0,1)} (\lambda\varepsilon + (1-\lambda) m\varepsilon\langle p, a\rangle) \leqslant \varepsilon + m\varepsilon\langle p, a\rangle,$$

т. е. справедливо неравенство $s(p, A_2) \geqslant s(p, A_1)$ для любого вектора $p \in \partial B_1^+(0)$, откуда следует левое неравенство в (2.1.12).

Для $p \in \partial B_1^-(0)$ по аналогичным соображениям $s(p, A_2) \leqslant s(p, A_1)$, но и $\langle p, a\rangle \leqslant 0$, следовательно, опять справедливо левое неравенство в (2.1.12).

Поскольку $|s(p, A_2) - s(p, A_1)| \leqslant h(A_1, A_2) = \varepsilon$ для всех $p \in \partial B_1(0)$, то правое неравенство в (2.1.12) очевидно.

2) Покажем, что для любого $p \in S$ справедливо равенство

$$(s(p, A_2) - s(p, A_1))\langle p, a\rangle = \varepsilon|\langle p, a\rangle|. \tag{2.1.13}$$

Пусть вектор $p \in S$ такой, что $\langle p, a\rangle \geqslant 1/m$. Как показано в п. 1), справедливо равенство $s(p, A_2) = \varepsilon + m\varepsilon\langle p, a\rangle$. Кроме того,

$$s(p, A_1) = \sup_{\lambda \in [0,1]} (\lambda\varepsilon + (1-\lambda) m\varepsilon\langle p, a\rangle) = \varepsilon \cdot \max\{1, m\langle p, a\rangle\} = \varepsilon m\langle p, a\rangle.$$

В итоге получаем равенство $(s(p, A_2) - s(p, A_1))\langle p, a\rangle = \varepsilon\langle p, a\rangle = \varepsilon|\langle p, a\rangle|$. Доказательство для случая, когда вектор $p \in S$ такой, что $\langle p, a\rangle \leqslant -1/m$, делается аналогично.

Запишем оценку:

$$\|s(A_2)-s(A_1)\| \geqslant \langle a,\, s(A_2)-s(A_1)\rangle =$$
$$= \frac{1}{v_1}\int\limits_{\partial B_1(0)} (s(p,A_2)-s(p,A_1))\langle p,a\rangle\,dp =$$
$$= \frac{1}{v_1}\int\limits_{S} (s(p,A_2)-s(p,A_1))\langle p,a\rangle\,dp +$$
$$+ \frac{1}{v_1}\int\limits_{\partial B_1(0)\setminus S} (s(p,A_2)-s(p,A_1))\langle p,a\rangle\,dp.$$

Здесь второй интеграл в силу формулы (2.1.12) неотрицателен, а в силу формулы (2.1.13) в первом интеграле (для любого $p\in S$) подынтегральная функция равна $\varepsilon|\langle p,a\rangle|$. Следовательно, справедлива оценка

$$\|s(A_2)-s(A_1)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{v_1}\int\limits_{S} |\langle p,a\rangle|\,dp =$$
$$= \frac{\varepsilon}{v_1}\int\limits_{\partial B_1(0)} |\langle p,a\rangle|\,dp - \frac{\varepsilon}{v_1}\int\limits_{\partial B_1(0)\setminus S} |\langle p,a\rangle|\,dp \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon L_n - \frac{\varepsilon}{v_1}\int\limits_{\partial B_1(0)\setminus S} \frac{1}{m}\,dp \geqslant \varepsilon L_n - \frac{\varepsilon}{v_1 m}\,\mu_{n-1}(\partial B_1(0)) =$$
$$= \varepsilon L_n - \varepsilon\,\frac{n}{m} = \Bigl(L_n - \frac{n}{m}\Bigr)h(A_1,A_2).$$

Из последней оценки следует неулучшаемость константы L_n. $\square$

Из лемм 2.1.3 и 2.1.4 получаем следующее утверждение.

Теорема 2.1.2. *Центр Штейнера является липшицевым селектором выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой Хаусдорфа, а константа Липшица задается по формуле* (2.1.11).

Константа L_n удовлетворяет оценке $L_n \leqslant \sqrt{n}$ и ведет себя с ростом n примерно как $\sqrt{n}$.

В силу роста константы L_n с увеличением размерности n пространства центр Штейнера не может быть продолжен как липшицев селектор на случай бесконечномерного (даже гильбертова) пространства.

Во множестве выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$ можно задавать другие метрики, не эквивалентные метрике Хаусдорфа, в которых центр Штейнера как функция выпуклых компактов будет липшицевым селектором с константой Липшица 1.

Определение 2.1.3. На множестве выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$ определим *метрику* $\rho(A_1, A_2)$ по формуле

$$\rho(A_1, A_2) = \sup_{\|p\|=1} h(A_1(p),\, A_2(p)), \tag{2.1.14}$$

где $A(p) = \{x \in A \mid \langle p, x\rangle = s(p, A)\}$ — опорное множество выпуклого компакта A.

Некоторые свойства метрики ρ сформулированы в упр. 1.17.1–1.17.3. Здесь мы покажем, что центр Штейнера как селектор выпуклых компактов удовлетворяет условию Липшица в метрике ρ с константой Липшица 1.

Пусть для начала A — строго выпуклый компакт. У опорной функции $p \to s(p, A)$ строго выпуклого компакта A при каждом $p \neq 0$ существует градиент, который вычисляется по формуле (см. пример 1.16.2 и следствие 1.17.3)

$$\nabla s(p, A) = \arg\max_{x\in A} \langle p, x\rangle = A(p) \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},$$

причем этот градиент является непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ вектор-функцией.

Известно (это простое следствие теоремы Гаусса в $\mathbb{R}^n$, см. [108, т. 2]), что для любой дифференцируемой функции $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, градиент которой имеет разрывы в конечном числе точек и ограничен, имеет место равенство

$$\int\limits_{\partial B_1(0)} \varphi(p)p\, dp = \int\limits_{B_1(0)} \nabla\varphi(p)\, dp. \tag{2.1.15}$$

Из формул (2.1.9) и (2.1.15), полагая $\varphi(p) = s(p, A)$, получаем формулу для центра Штейнера строго выпуклого компакта A

$$s(A) = \frac{1}{v_1} \int\limits_{B_1(0)} \nabla s(p, A)\, dp. \tag{2.1.16}$$

Покажем, что соотношение, аналогичное формуле (2.1.16), справедливо для любых выпуклых компактов A из $\mathbb{R}^n$. Определим на шаре $B_1(0)$ функцию

$$\beta(p, A) = \begin{cases} \nabla s(p, A), & \text{если градиент существует,} \\ \quad 0, & \text{если градиент } \nabla s(p, A) \text{ не существует.} \end{cases}$$

Лемма 2.1.5. *Пусть A — выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$. Тогда справедлива формула*

$$s(A) = \frac{1}{v_1} \int\limits_{B_1(0)} \beta(p, A)\, dp, \tag{2.1.17}$$

где интеграл в (2.1.17) *понимается в смысле интеграла Лебега.*

Доказательство. Для случая строго выпуклого компакта A формула (2.1.17) следует из формулы (2.1.16).

Пусть A — произвольный выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим последовательность строго выпуклых компактов $\{A_m\}$ такую, что $A_m \to A$ в смысле хаусдорфовой метрики. В качестве множеств A_m можно, например, взять пересечение всех шаров радиуса m, содержащих A.

Так как выпуклая функция $p \to s(p, A)$ липшицева на множестве $B_1(0)$ с константой Липшица $\|A\|$, то она почти всюду дифференцируема (см. [56]), следовательно, градиент $\nabla s(p, A)$ существует на некотором измеримом множестве $U \subset B_1(0)$, причем мера Лебега множества $B_1(0) \backslash U$ равна нулю.

В силу доказанной в теореме 2.1.2 липшицевости центра Штейнера имеем $s(A_m) \to s(A)$ при $m \to \infty$. С другой стороны, в силу (2.1.16)

$$s(A_m) = \frac{1}{v_1} \int\limits_{B_1(0)} \beta(p, A_m)\, dp = \frac{1}{v_1} \int\limits_{U} \nabla s(p, A_m)\, dp \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Из свойства полунепрерывности сверху субдифференциала семейства выпуклых функций (см. следствие 1.17.2) получаем, что для любого $p \in U$ $\nabla s(p, A_m) = \beta(p, A_m) \to \beta(p, A) = \nabla s(p, A)$ при $m \to \infty$. В свою очередь функция $p \to \nabla s(p, A_m) = \beta(p, A_m)$ непрерывна на $B_1(0) \backslash \{0\}$ и существует число $C = \sup \{\{\|A_m\|\}, \|A\|\} < +\infty$, такое, что $\|\nabla s(p, A_m)\| \leqslant C$ для всех $p \in B_1(0) \backslash \{0\}$ и всех m. По теореме Лебега об ограниченной сходимости (см. [56]) получаем, что функция $p \to \nabla s(p, A)$ измерима на U (а это значит, что и функция $\beta(p, A)$ измерима на $B_1(0)$), причем

$$\lim_{m \to \infty} \int\limits_{U} \beta(p, A_m)\, dp = \int\limits_{U} \beta(p, A)\, dp = \int\limits_{B_1(0)} \beta(p, A)\, dp.$$

Отсюда следует формула (2.1.17). $\square$

Теорема 2.1.3. *Центр Штейнера выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$ является липшицевым селектором в метрике ρ* (2.1.14) *с константой Липшица* 1.

Доказательство. Пусть A_1 и A_2 — выпуклые компакты. Пусть U_1 и U_2 — множества полной меры из $B_1(0)$, на которых существуют градиенты $\nabla s(p, A_1)$ и $\nabla s(p, A_2)$ соответственно. Определим множество $U = U_1 \cap U_2$ которое, очевидно, также будет множеством полной меры.

Из леммы 2.1.5 (формулы (2.1.17)) и определения метрики ρ (формулы (2.1.14)) следует, что

$$\|s(A_1) - s(A_2)\| \leqslant \frac{1}{v_1} \int\limits_{B_1(0)} \|\beta(p, A_1) - \beta(p, A_2)\|\, dp =$$
$$= \frac{1}{v_1} \int\limits_{U} \|\beta(p, A_1) - \beta(p, A_2)\|\, dp \leqslant \rho(A_1, A_2)\, \frac{1}{v_1} \int\limits_{U} dp = \rho(A_1, A_2). \ \square$$

Рассмотрим случай, когда множество A является многогранником.

Обозначим через x_i вершины многогранника A (которые, очевидно, являются выступающими точками). Напомним, что нормальным конусом ко множеству A в точке x называется конус вида (см. определение 1.12.2)

$$N(A, x) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x\rangle \geqslant \langle p, y\rangle \ \ \forall\, y \in A\}.$$

Определим телесный размер нормального конуса $N(A, x_i)$ в вершине x_i многогранника A как следующую величину:

$$\lambda_i = \frac{\mu_{n-1}\,(N(A, x_i) \cap \partial B_1(0))}{\mu_{n-1}(\partial B_1(0))},$$

где μ_{n-1} — мера Лебега множеств, заданных на единичной сфере из $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.1.4. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — многогранник вида $A = \operatorname{co} \bigcup\limits_{i=1}^{N} \{x_i\}$. Тогда справедлива формула*

$$s(A) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i,$$

где λ_i — телесный размер нормального конуса $N(A, x_i)$.

Доказательство. Отметим, что если в формуле (2.1.17) сделать замену переменных $p = rq$, где $r \in [0, 1]$, а $q \in \partial B_1(0)$, и учесть, что в силу положительной однородности опорной функции $\beta(\lambda p, A) = \beta(p, A)$ для всех $\lambda > 0$, то получаем

$$s(A) = \frac{1}{v_1} \int\limits_0^1 r^{n-1}\, dr \int\limits_{\partial B_1(0)} \beta(q, A)\, dq = \frac{1}{S_1} \int\limits_{\partial B_1(0)} \beta(p, A)\, dp, \qquad (2.1.18)$$

где $S_1 = \int\limits_{\partial B_1(0)} dp$ — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$ (напомним, что справедливо равенство $nv_1 = S_1$).

В каждой вершине x_i пересекается по крайней мере n граней множества A ($(n-1)$-мерных гиперплоскостей) с внешними единичными нормалями $p_1(x_i), \ldots, p_n(x_i)$, поэтому $N(A, x_i) \supset \operatorname{co}\Big\{\{0\} \cup \cup \bigcup\limits_{j=1}^{n} \{p_j(x_i)\}\Big\}$. Внутренность симплекса $\operatorname{co}\Big\{\{0\} \cup \bigcup\limits_{j=1}^{n} \{p_j(x_i)\}\Big\}$ непуста, так как векторы $p_j(x_i)$ линейно независимы, поэтому $\operatorname{int} N(A, x_i) \neq \neq \varnothing$ для всех $i \in \overline{1, N}$.

Покажем, что справедливо равенство

$$\bigcup_{i=1}^{N} N(A, x_i) = \mathbb{R}^n. \tag{2.1.19}$$

Зафиксируем $p \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ (вектор 0 содержится в любом из конусов $N(A, x_i)$). Определим, как обычно, множество $A(p) = \{x \in A \mid \langle p, x\rangle = s(p, A)\}$. Так как множество $A(p)$ есть крайнее подмножество множества A, то из доказательства теоремы 1.18.1 Крейна–Мильмана следует, что $\operatorname{extr} A(p) \neq \varnothing$, т.е. найдется вершина $x_i \in A(p)$. Это значит, что справедливо включение $p \in N(A, x_i)$, и формула (2.1.19) доказана.

Так как для любого $i \in \overline{1, N}$ и для любого $p \in \operatorname{int} N(A, x_i)$ имеет место равенство $A(p) = \{x_i\}$, то в силу того, что $A(p) = \partial s(p, A)$ (см. пример 1.16.2), и следствия 1.17.3 в каждой точке $p \in \bigcup\limits_{i=1}^{N} \operatorname{int} N(A, x_i)$ существует градиент $\nabla s(p, A)$. Отметим, что множества $N(A, x_i) \cap \cap\, \partial B_1(0)$ и $(\operatorname{int} N(A, x_i)) \cap \partial B_1(0)$ измеримы и справедливо равенство

$$\mu_{n-1}(N(A, x_i) \cap \partial B_1(0)) = \mu_{n-1}((\operatorname{int} N(A, x_i)) \cap \partial B_1(0)).$$

Используя это, по формуле (2.1.18) получаем

$$S_1 \cdot s(A) = \int\limits_{\partial B_1(0)} \beta(p, A)\, dp = \int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{N} \operatorname{int} N(A, x_i) \cap \partial B_1(0)} \beta(p, A)\, dp =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\operatorname{int} N(A, x_i) \cap \partial B_1(0)} x_i\, dp = \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_{n-1}(\operatorname{int} N(A, x_i) \cap \partial B_1(0)) =$$

$$= S_1 \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i. \ \square$$

Упражнение 2.1.2. Еще одним примером нехаусдорфовой метрики на пространстве выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$ является метрика δ вида

$$\delta(A_1, A_2) = \sqrt{\frac{1}{S_1} \int\limits_{\partial B_1(0)} |s(p, A_1) - s(p, A_2)|^2 \, dp} \, .$$

Показать, что если рассматривать некоторое семейство ограниченных по полунорме выпуклых компактов (т. е. существует число $M > 0$ такое, что для любого компакта A из этого семейства справедливо неравенство $\|A\| = h(0, A) \leqslant M$), то сходимость последовательности выпуклых компактов из данного семейства в метрике Хаусдорфа эквивалентна ее сходимости в метрике δ. Кроме того, показать, что центр Штейнера является липшицевым селектором выпуклых компактов в метрике δ с константой Липшица 1.

§ 2.2. Параметризация многозначных отображений

Определение 2.2.1. Отображение F, ставящее в соответствие точкам пространства E_1 множества из пространства E_2 (быть может, пустые) будем называть *многозначным отображением*. Будем его обозначать $F\colon E_1 \to 2^{E_2}$.

Многозначные отображения возникают в различных разделах математического и функционального анализа, в математической теории управления, в теории дифференциальных игр. Для исследования многозначных отображений часто используют метод выделения в них однозначных функций, т. е. селекторов, о некоторых из которых говорилось в § 2.1. Более того, возникает потребность в исчерпывающем наборе селекторов, т. е. таком, что в совокупности объединение их значений в каждой точке области определения многозначного отображения дает значение многозначного отображения в этой точке, при этом каждый из селекторов обладает определенной гладкостью. Решение такой задачи ведет к задаче о параметризации многозначного отображения. То есть для многозначного отображения $F\colon E_1 \to 2^{E_2}$ найти однозначную функцию $f\colon E_1 \times U \to E_2$ такую, что справедливо равенство $f(x, U) = F(x)$ для всех $x \in E_1$, причем функция $f(x, u)$ имеет ту же гладкость по аргументу x, что и $F(x)$, и является достаточно гладкой по аргументу $u \in U$.

Определение 2.2.2. Будем говорить, что многозначное отображение F, действующее из метрического пространства (E_1, ϱ) в банахово пространство E_2, *удовлетворяет условию Липшица* (*непрерывно по Липшицу*) в метрике Хаусдорфа, если существует такая константа $L > 0$ (называемая константой Липшица), что для любых элементов x_1 и x_2 из E_1 выполнено неравенство $h(F(x_1), F(x_2)) \leqslant \leqslant L\varrho(x_1, x_2)$.

Напомним, что диаметр множества определяется по формуле $\operatorname{diam} A = \sup\{\|a - b\| \mid a, b \in A\}$.

Теорема 2.2.1 (Е.С. Половинкин [78]). *Пусть многозначные отображения F_1 и F_2, действующие из метрического пространства (E_1, ϱ) в банахово пространство E_2, имеют выпуклые замкнутые значения и удовлетворяют условию Липшица с константами Липшица L_1 и L_2 соответственно. Пусть $d(x) < +\infty$ для всех $x \in E_1$, где $d(x) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant 2} \operatorname{diam} F_i(x)$. Пусть существуют функция $\gamma\colon E_1 \to \mathbb{R}_+$ и число $\alpha > 0$ такие, что для всех $x \in E_1$ выполняются условия*

$$\gamma(x)B_1(0) \subset F_2(x) - F_1(x), \tag{2.2.1}$$

$$d(x) \leqslant \alpha\gamma(x). \tag{2.2.2}$$

Тогда многозначное отображение $G(x) = F_1(x) \cap F_2(x)$ удовлетворяет условию Липшица в метрике Хаусдорфа с константой Липшица L, вычисляемой по формуле

$$L = \max\{L_1, L_2\} + \alpha(L_1 + L_2). \tag{2.2.3}$$

Доказательство. Зафиксируем число $t > 1$.

Отметим, что в силу условия (2.2.1) справедливо включение $0 \in F_2(x) - F_1(x)$ для всех точек $x \in E_1$, следовательно, $G(x) \neq \varnothing$ при каждом $x \in E_1$.

Выберем точки x_1 и x_2 из E_1, $x_1 \neq x_2$, и произвольную точку $y_1 \in \in G(x_1)$. Покажем, что найдется точка $y_2 \in G(x_2)$ такая, что

$$\|y_1 - y_2\| \leqslant tL\varrho(x_1, x_2). \tag{2.2.4}$$

В силу выполнения условий Липшица для F_1 и F_2 получаем

$$y_1 \in F_1(x_2) + tL_1\varrho(x_1, x_2)B_1(0), \tag{2.2.5}$$

$$y_1 \in F_2(x_2) + tL_2\varrho(x_1, x_2)B_1(0). \tag{2.2.6}$$

Положим для определенности, что $d(x_2) = \operatorname{diam} F_1(x_2)$. В силу включения (2.2.5) найдется точка $y \in F_1(x_2)$ такая, что $\|y_1 - y\| \leqslant \leqslant tL_1\varrho(x_1, x_2)$. Отсюда в силу включения (2.2.6) получаем

$$y \in F_2(x_2) + t(L_1 + L_2)\varrho(x_1, x_2)B_1(0).$$

Определим число ϑ по формуле

$$\vartheta = \frac{\gamma(x_2)}{\gamma(x_2) + t(L_1 + L_2)\varrho(x_1, x_2)} \in [0, 1).$$

Из предыдущего включения получаем включение

$$\vartheta y \in \vartheta F_2(x_2) + \vartheta t(L_1 + L_2)\varrho(x_1, x_2)B_1(0).$$

Отсюда, учитывая равенство $\vartheta t(L_1 + L_2)\varrho(x_1, x_2) = (1 - \vartheta)\gamma(x_2)$, умножая обе части включения (2.2.1) в точке x_2 на $1 - \vartheta$, получаем выражения

$$(1 - \vartheta)\gamma(x_2)B_1(0) \subset (1 - \vartheta)F_2(x_2) - (1 - \vartheta)F_1(x_2),$$

$$\vartheta y \in \vartheta F_2(x_2) + (1 - \vartheta)F_2(x_2) - (1 - \vartheta)F_1(x_2) = F_2(x_2) - (1 - \vartheta)F_1(x_2),$$

следовательно, существует точка $z \in F_1(x_2)$ такая, что

$$\vartheta y + (1 - \vartheta)z \in F_2(x_2).$$

Определим точку $y_2 = \vartheta y + (1 - \vartheta)z \in F_2(x_2)$. Поскольку y и z принадлежат $F_1(x_2)$, то и $y_2 \in F_1(x_2)$. Поэтому $y_2 \in F_1(x_2) \cap F_2(x_2) = G(x_2)$.

Наконец, справедливо равенство $y_1 - y_2 = (y_1 - y) + (1 - \vartheta)(y - z)$, откуда получаем

$$\|y_1 - y_2\| \leqslant \|y_1 - y\| + (1 - \vartheta)\|y - z\| \leqslant tL_1\varrho(x_1, x_2) + (1 - \vartheta)d(x_2). \tag{2.2.7}$$

Если $\gamma(x_2) = 0$, то $d(x_2) = 0$ (условие (2.2.2)), откуда $\|y_1 - y_2\| \leqslant$ $\leqslant tL_1\varrho(x_1, x_2)$.

Если $\gamma(x_2) > 0$, то в силу определения числа ϑ и неравенства (2.2.2) получаем

$$(1 - \vartheta)d(x_2) \leqslant \frac{t(L_1 + L_2)\varrho(x_1, x_2)}{\gamma(x_2) + t(L_1 + L_2)\varrho(x_1, x_2)}\,\alpha\gamma(x_2) \leqslant t\alpha(L_1 + L_2)\varrho(x_1, x_2).$$

Поэтому из неравенства (2.2.7) получаем

$$\|y_1 - y_2\| \leqslant t(L_1 + \alpha(L_1 + L_2))\varrho(x_1, x_2).$$

Из свойств метрики Хаусдорфа следует, что

$$h(G(x_1),\, G(x_2)) \leqslant t(L_1 + \alpha(L_1 + L_2))\varrho(x_1, x_2) \quad \forall\, t > 1,$$

откуда (при $t \to 1 + 0$) получаем неравенство

$$h(G(x_1),\, G(x_2)) \leqslant (L_1 + \alpha(L_1 + L_2))\varrho(x_1, x_2).$$

Наконец, в общем случае в последнем неравенстве вместо слагаемого L_1 необходимо брать слагаемое $\max\{L_1, L_2\}$, так как могло оказаться, что $d(x_2) = \operatorname{diam} F_2(x_2)$. $\square$

В качестве следствия теоремы 2.2.1 докажем свойство непрерывности по Липшицу многозначной ε-проекции точки на выпуклое замкнутое множество в банаховом пространстве.

Определение 2.2.3. Пусть $\varepsilon \geqslant 0$, E — банахово пространство. *Многозначной ε-проекцией* точки $a \in E$ на выпуклое замкнутое множество $A \subset E$ называется множество

$$\pi_\varepsilon(A, a) = A \cap (a + (1+\varepsilon)\varrho(a, A)B_1(0)). \tag{2.2.8}$$

Здесь, как и прежде, $\varrho(a, A)$ есть расстояние от точки a до множества A, т. е. $\varrho(a, A) = \inf\limits_{x \in A} \|a - x\|$. Очевидно, что при любом $\varepsilon > 0$ множество $\pi_\varepsilon(A, a)$ непусто. При $\varepsilon = 0$ множество $\pi_\varepsilon(A, a)$ может оказаться пустым (попытайтесь привести соответствующий пример). Однако в случае, когда пространство E является гильбертовым пространством $\mathcal{H}$, при $\varepsilon = 0$ многозначная проекция также является непустым множеством и совпадает со значением обычной однозначной проекции точки a на множество A. Как было показано выше (§ 2.1), однозначная проекция точки на множество в гильбертовом пространстве удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1/2$ в метрике Хаусдорфа, но может не удовлетворять условию Липшица. Нашей целью является показать, что многозначная ε-проекция при $\varepsilon > 0$ всегда удовлетворяет условию Липшица по параметрам A и a.

Определим метрическое пространство (E_1, Dist), элементами которого являются пары (A, a), где $A \subset E$ — выпуклое замкнутое множество, а $a \in E$ — точка. Расстояние между элементами $(A, a) \in E_1$ и $(B, b) \in E_1$ определим по формуле

$$\mathrm{Dist}\,((A, a),\, (B, b)) = \|a - b\| + h(A, B).$$

Теорема 2.2.2. *Пусть E — банахово пространство и $\varepsilon > 0$. Для любых выпуклых замкнутых множеств A и B из E и точек a, $b \in E$ справедливо неравенство* (*условие Липшица*)

$$h(\pi_\varepsilon(A, a),\, \pi_\varepsilon(B, b)) \leqslant \left(10 + 3\varepsilon + \frac{6}{\varepsilon}\right) \mathrm{Dist}\,((A, a),\, (B, b)). \tag{2.2.9}$$

Доказательство. Рассмотрим два многозначных отображения из пространства (E_1, Dist) в E: $F_1(A, a) = A$ и $F_2(A, a) = a + (1+\varepsilon) \times$ $\times \varrho(a, A)B_1(0)$.

Очевидно, что многозначное отображение F_1 удовлетворяет условию Липшица с константой 1 в метрике Dist. Для отображения F_2 получаем

$$h(F_2(A,a),\, F_2(B,b)) \leqslant$$
$$\leqslant \|a-b\| + h((1+\varepsilon)\varrho(a,A)B_1(0),\, (1+\varepsilon)\varrho(b,B)B_1(0)) \leqslant$$
$$\leqslant \|a-b\| + (1+\varepsilon)\,|\varrho(a,A)-\varrho(b,B)| \leqslant$$
$$\leqslant (2+\varepsilon)\|a-b\| + (1+\varepsilon)h(A,B) \leqslant (2+\varepsilon)\,\mathrm{Dist}\,((A,a),\,(B,b)).$$

Таким образом, отображение F_2 также удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица $2+\varepsilon$ в метрике Dist.

Оценим внутренность множества

$$F_1(A,a) - F_2(A,a) = A - a + (1+\varepsilon)\varrho B_1(0),$$

где $\varrho = \varrho(a,A)$. По определению расстояния $\varrho = \varrho(a,A)$ для любого числа $\tau \in (1,\, 1+\varepsilon)$ существует точка $a_\tau \in A$ такая, что $\varrho \leqslant \|a_\tau - a\| \leqslant \leqslant \tau\varrho$. Отсюда для любого вектора $p \in E^*$, $\|p\|_* = 1$, получаем оценки опорных функций

$$s(p,\, A - a + (1+\varepsilon)\varrho B_1(0)) \geqslant \langle p,\, a_\tau - a\rangle + (1+\varepsilon)\varrho \geqslant$$
$$\geqslant -\tau\varrho + (1+\varepsilon)\varrho = s(p,\, B_{(1+\varepsilon-\tau)\varrho}(0)),$$

т. е. справедливо включение $B_{(1+\varepsilon-\tau)\varrho}(0) \subset F_1(A,a) - F_2(A,a)$. Заменяя параметр τ через параметр $t \in (0,1)$ по формуле $\tau = 1 + \varepsilon(1-t)$, получаем, что для любого $t \in (0,1)$ шар радиуса $t\varepsilon\varrho(a,A)$ с центром в нуле содержится во множестве $(F_1(A,a) - F_2(A,a))$, т. е. в теореме 2.2.1 условие (2.2.1) выполнено с $\gamma(A,a) = t\varepsilon\varrho(a,A)$.

Оценим величину $d(A,a) = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant 2} \mathrm{diam}\, F_i(A,a)$ из неравенства

$$d(A,a) \leqslant \mathrm{diam}\, F_2(A,a) = 2\varrho(a,A)(1+\varepsilon).$$

Подберем число $\alpha > 0$, удовлетворяющее условию (2.2.2) теоремы 2.2.1, т. е.

$$2\varrho(a,A)(1+\varepsilon) \leqslant \alpha\gamma(A,a) = \alpha t\varepsilon\varrho(a,A),$$

откуда получаем $\alpha = \dfrac{2(1+\varepsilon)}{t\varepsilon}$.

По теореме 2.2.1 получаем

$$h(\pi_\varepsilon(A,a),\, \pi_\varepsilon(B,b)) \leqslant$$
$$\leqslant \left[(2+\varepsilon) + \frac{2(1+\varepsilon)}{t\varepsilon}\,(1 + (2+\varepsilon))\right]\mathrm{Dist}\,((A,a),\,(B,b)),$$

откуда предельным переходом по $t \to 1-0$ получаем (2.2.9). $\square$

З а м е ч а н и е 2.2.1. Наименьшая константа Липшица в (2.2.9), очевидно, получается при $\varepsilon = \sqrt{2}$ и равняется $10 + 6\sqrt{2}$.

У п р а ж н е н и е 2.2.1. Пусть $A, B \subset E$ — выпуклые замкнутые множества в банаховом пространстве E, точки $a, b \in E$ и числа $\varepsilon > \delta > 0$. Показать, что

$$h(\pi_\varepsilon(A, a),\, \pi_\delta(B, b)) \leqslant \\ \leqslant \left(10 + 3\varepsilon + \frac{6}{\varepsilon}\right)\operatorname{Dist}\left((A, a),\, (B, b)\right) + \left(3 + \frac{2}{\delta}\right)\varrho(b, B)(\varepsilon - \delta).$$

У к а з а н и е. Используя неравенство

$$h(\pi_\varepsilon(A, a),\, \pi_\delta(B, b)) \leqslant h(\pi_\varepsilon(A, a),\, \pi_\varepsilon(B, b)) + h(\pi_\varepsilon(B, b),\, \pi_\delta(B, b)),$$

оцените каждое слагаемое в правой части отдельно.

Для оценки первого слагаемого воспользуйтесь теоремой 2.2.2. Для оценки второго слагаемого рассмотрите многозначные отображения $F_1(\lambda) = B$ (постоянное) и $F_2(\lambda) = b + (1 + \lambda)\varrho(b, B)B_1(0)$, где $\lambda \in (0, +\infty)$, и примените теорему 2.2.1.

Приведем теперь теорему о параметризации многозначных отображений. Этот результат впервые был получен (другим способом) в работе [159].

Т е о р е м а 2.2.3. *Пусть (E, ϱ) — метрическое пространство, а многозначное отображение $F\colon \mathbb{R} \times E \to 2^{\mathbb{R}^n}$ принимает выпуклые компактные значения из $\mathbb{R}^n$. Пусть отображение $F(\,\cdot\,, x)$ измеримо по Лебегу при каждом $x \in E$, а отображение $F(t,\,\cdot\,)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$ при почти всяком $t \in \mathbb{R}$, т. е.*

$$h(F(t, x),\, F(t, y)) \leqslant L\varrho(x, y), \quad \text{п.в. } t \in \mathbb{R} \quad \forall\, x, y \in E.$$

Пусть также существует число $M > 0$ такое, что

$$\|F(t, x)\| = h(\{0\},\, F(t, x)) \leqslant M, \quad \text{п.в. } t \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in E.$$

Тогда существует функция $f\colon \mathbb{R} \times E \times B_1(0) \to \mathbb{R}^n$, где $B_1(0)$ — единичный шар в $\mathbb{R}^n$, такая, что для всех $x \in E$ и для п.в. $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $F(t, x) = f(t, x, B_1(0))$, причем функция $f(t, \cdot, \cdot)$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица $C(L, M, n) = (10 + 6\sqrt{2}\,)\max\{2L, M\}L_n$ (здесь L_n из формулы (2.1.11)), *а функция $f(\,\cdot\,, x, u)$ измерима по Лебегу при каждом (x, u), где $x \in E$, $u \in B_1(0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем число $\varepsilon = \sqrt{2}$. Определим функцию $p(t, x) = \max\{1,\, \|F(t, x)\|\}$. Для всех точек x, y из метрического пространства E справедлива оценка

$$|p(t,x)-p(t,y)| \leqslant |\,\|F(t,x)\|-\|F(t,y)\|\,| =$$
$$= |h(\{0\},\, F(t,x)) - h(\{0\},\, F(t,y))| \leqslant h(F(t,x),\, F(t,y)) \leqslant L\varrho(x,y).$$

Следовательно, при почти каждом t функция $p(t,\,\cdot\,)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L. Также очевидно, что функция $p(\,\cdot\,,x)$ измерима.

Определим функцию $f\colon \mathbb{R}\times E\times B_1(0)\to\mathbb{R}^n$ вида

$$f(t,x,u) = s(\pi_\varepsilon(F(t,x),\, p(t,x)u)), \tag{2.2.10}$$

где $s(\,\cdot\,)$ — центр Штейнера, а $\pi_\varepsilon(A,a)$ определено формулой (2.2.8).

Покажем, что при почти каждом t функция $f(t,\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ удовлетворяет условию Липшица. В силу формулы (2.2.9) для любых $x,\,y\in E$ и $u,\,v\in B_1(0)$ получаем

$$h(\pi_\varepsilon(F(t,x),\, p(t,x)u),\, \pi_\varepsilon(F(t,y),\, p(t,y)v)) \leqslant$$
$$\leqslant (10+6\sqrt{2}\,)\,[\|p(t,x)u - p(t,y)v\| + h(F(t,x),\, F(t,y))] \leqslant$$
$$\leqslant (10+6\sqrt{2}\,)\,[|p(t,x)-p(t,y)|\,\|u\| + |p(t,y)|\,\|u-v\| + L\varrho(x,y)] \leqslant$$
$$\leqslant (10+6\sqrt{2}\,)[2L\varrho(x,y) + M\|u-v\|] \leqslant$$
$$\leqslant (10+6\sqrt{2}\,)\max\{2L, M\}[\varrho(x,y)+\|u-v\|]. \tag{2.2.11}$$

Так как центр Штейнера $s(\,\cdot\,)$ является липшицевым селектором выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$ с константой L_n (см. лемму 2.1.4), из формул (2.2.10) и (2.2.11) получаем

$$\|f(t,x,u) - f(t,y,v)\| \leqslant$$
$$\leqslant L_n h(\pi_\varepsilon(F(t,x),\, p(t,x)u),\, \pi_\varepsilon(F(t,y),\, p(t,y)v)) \leqslant$$
$$\leqslant C(L,M,n)[\|u-v\| + \varrho(x,y)].$$

Итак, функция $f(t,\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ удовлетворяет условию Липшица.

По построению $f(t,x,B_1(0))\subset F(t,x)$. Так как $p(t,x)B_1(0)\supset$ $\supset F(t,x)$, то для любой точки $y\in F(t,x)$ существует точка $u_y\in$ $\in B_1(0)$ такая, что $y=p(t,x)u_y$, т. е. $f(t,x,u_y)=y$. Следовательно, $f(t,x,B_1(0)) = F(t,x)$.

Из измеримости многозначного отображения $F(\,\cdot\,,x)$, как известно, следует измеримость функции $\|F(\,\cdot\,,x)\|$, а значит, и функции $p(\,\cdot\,,x)$, а пересечение множеств и непрерывная выборка не портят измеримости по t (см. [50, гл. 8]). Отсюда и из формулы

$$f(t,x,u) = s\,(F(t,x)\cap(p(t,x)u + (1+\varepsilon)\varrho(p(t,x)u,\, F(t,x))))$$

следует измеримость функции $f(\,\cdot\,,x,u)$. $\square$

§ 2.3. О максимумах выпуклых функций

Ранее мы рассмотрели задачу отыскания минимума выпуклой функции на выпуклом множестве (см. пример 1.16.4), изучили условие его существования и единственности. Однако можно рассматривать и задачу о максимуме выпуклой функции на выпуклом множестве.

В данном параграфе мы покажем, что при весьма общих условиях выпуклая функция в конечномерном пространстве достигает максимума на выпуклом замкнутом множестве в одной из крайних точек этого множества.

Прежде всего, отметим принцип максимума для выпуклых функций.

Лемма 2.3.1. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая собственная функция на и $A \subset \operatorname{dom} f$ — выпуклое множество с непустой внутренностью. Тогда если функция f достигает своей точной верхней грани на множестве A в некоторой внутренней точке этого множества A, то функция f постоянна на A.*

Доказательство. Пусть $\sup\limits_{x\in A} f(x) = f(x_0)$, причем точка $x_0 \in \operatorname{int} A \subset \operatorname{dom} f$.

Зафиксируем произвольную точку $x \in A$. Так как точка $x_0 \in \operatorname{int} A$, то найдется число $\mu > 1$ такое, что точка $y = (1-\mu)x + \mu x_0 \in A$. Положим $\lambda = \mu^{-1} \in (0,1)$. Тогда $x_0 = (1-\lambda)x + \lambda y$, и из выпуклости f получаем

$$f(x_0) \leqslant (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y).$$

Но по условию $f(x) \leqslant f(x_0)$ и $f(y) \leqslant f(x_0)$, поэтому $f(x_0) = f(x)$. В силу произвольности точки $x \in A$ получаем, что функция f постоянна на множестве A. $\square$

Лемма 2.3.2. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, а $A \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{x\in A} f(x) = \sup_{x\in \operatorname{co} A} f(x). \tag{2.3.1}$$

Доказательство. Из определения точной верхней грани получаем равенства

$$\sup_{x\in A} f(x) = \inf\{\alpha \mid A \subset \{x \mid f(x) \leqslant \alpha\}\} \tag{2.3.2}$$

и

$$\sup_{x\in \operatorname{co} A} f(x) = \inf\{\alpha \mid \operatorname{co} A \subset \{x \mid f(x) \leqslant \alpha\}\}. \tag{2.3.3}$$

В силу выпуклости функции f при каждом $\alpha \in \mathbb{R}$ множество уровня $\{x \mid f(x) \leqslant \alpha\}$ выпукло, откуда включение $A \subset \{x \mid f(x) \leqslant \alpha\}$ справедливо тогда и только тогда, когда справедливо включение $\operatorname{co} A \subset \{x \mid f(x) \leqslant \alpha\}$. В итоге из (2.3.2) и (2.3.3) следует равенство (2.3.1). $\square$

Теорема 2.3.1. *Пусть* $A \subset \mathbb{R}^n$ — *выпуклый компакт*, *а* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — *выпуклая собственная функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup_{x \in \operatorname{extr} A} f(x).$$

Доказательство, очевидно, следует из предыдущей леммы 2.3.2 и теоремы Крейна–Мильмана.

Лемма 2.3.3. *Пусть* $A \subset \mathbb{R}^n$ — *выпуклое замкнутое неограниченное множество*, *не содержащее прямых*, *пусть* O^+A — *асимптотический конус множества* A (*см. определение* 1.4.5). *Тогда справедливо равенство*

$$A = \operatorname{co} \operatorname{extr} A + O^+A. \tag{2.3.4}$$

Доказательство. По теореме 1.18.4 справедливо равенство

$$A = \operatorname{co}\,(\operatorname{extr} A \cup \operatorname{rext} A)\,.$$

Поэтому для доказательства формулы (2.3.4) достаточно доказать равенство

$$\operatorname{co}\,(\operatorname{extr} A \cup \operatorname{rext} A) = \operatorname{co} \operatorname{extr} A + O^+A. \tag{2.3.5}$$

Так как включение $A \supset \operatorname{co} \operatorname{extr} A + O^+A$, очевидно, справедливо, то для получения равенства (2.3.5) достаточно показать обратное включение.

Выберем произвольную точку $x \in \operatorname{co}\,(\operatorname{extr} A \cup \operatorname{rext} A)$. Это означает возможность представления точки x в виде

$$x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{M} \mu_j (b_j + y_j), \tag{2.3.6}$$

где числа λ_i, $\mu_j > 0$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i + \sum\limits_{j=1}^{M} \mu_j = 1$, точки a_i, $b_j \in \operatorname{extr} A$, а векторы y_j суть направления крайних лучей, задающих точку x. Очевидно, что $y_j \in O^+A$ для всех j.

Перепишем выражение (2.3.6) в виде

$$x = \left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{M} \mu_j b_j \right) + \sum_{j=1}^{M} \mu_j y_j.$$

Поскольку векторы $y_j \in O^+A$ и числа $\mu_j > 0$, то справедливо включение $\sum\limits_{j=1}^{M} \mu_j y_j \in O^+A$, а так как $\sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i a_i + \sum\limits_{j=1}^{M} \mu_j b_j \in \operatorname{co}\operatorname{extr} A$, то справедливо включение $x \in \operatorname{co}\operatorname{extr} A + O^+A$. В силу произвольности выбора точки x обратное включение для равенства (2.3.5) доказано. $\square$

Теорема 2.3.2. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое множество, не содержащее прямых, и $f\colon A \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, не возрастающая на асимптотических направлениях множества A, т. е. $\forall\, x \in A$, $\forall\, y \in O^+A$ справедливо неравенство $f(x+y) \leqslant f(x)$.*

Тогда если $\sup\limits_{x \in A} f(x)$ конечен и достигается, то он достигается в некоторой крайней точке множества A.

Доказательство. Пусть $\sup\limits_{x \in A} f(x) = f(a_0)$, где $a_0 \in A$. По лемме 2.3.3 найдутся положительные числа $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$, дающие в сумме 1, такие, что

$$a_0 = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_i + y, \quad a_i \in \operatorname{extr} A, \quad y \in O^+A. \tag{2.3.7}$$

Отсюда следует, что

$$f(a_0) = f\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (a_i + y)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f(a_i + y) \leqslant \leqslant \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f(a_i) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant N} f(a_i), \tag{2.3.8}$$

что и доказывает теорему. $\square$

Следствие 2.3.1. *Если в условиях предыдущей теоремы множество A — многогранное множество, не содержащее прямых, то функция f достигает своей точной верхней грани в некоторой крайней точке множества A.*

Доказательство. Полагая в доказательстве теоремы 2.3.2, что $\{a_i\}_{i=1}^N$ — все крайние точки множества A (множество $\operatorname{extr} A$ непусто и конечно в силу следствия 1.18.2), а точка $a_0 \in A$ произвольна, $\lambda_i \geqslant 0$, из формул (2.3.7) и (2.3.8) получаем утверждение следствия 2.3.1. $\square$

Упражнение 2.3.1. Привести пример выпуклого компакта $A \subset \mathbb{R}^2$ и выпуклой функции $f\colon A \to \mathbb{R}$ таких, что функция f не достигает своей точной верхней грани на компакте A.

§ 2.4. Задачи выпуклого и линейного программирования

В гл. 1 мы рассматривали задачу нахождения минимума выпуклой функции $f_0(x)$ при условии, что x принадлежит выпуклому множеству A_0. Мы показали, что необходимым и достаточным условием того, что точка $x_0 \in A_0$ является решением приведенной задачи, является включение $0 \in \partial f_0(x_0) + N(A_0, x_0)$.

1. Задача выпуклого программирования. Конкретизируя в приведенной выше задаче выпуклое множество A_0 с помощью равенств и неравенств, содержащих выпуклые функции, приходим к следующей задаче.

Пусть E — банахово пространство; $f_i\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, где $i \in \overline{0, m}$, — собственные выпуклые функции; $p_i \in E^*$, $\nu_i \in \mathbb{R}$ — заданные наборы функционалов и чисел; $A \subset E$ — выпуклое замкнутое множество с непустой внутренностью.

Определение 2.4.1. *Задачей выпуклого программирования* называется следующая задача

Найти $\min f_0(x)$ при условиях на x:

$$
\begin{aligned}
&1)\ f_i(x) \leqslant 0,\ \ i \in \overline{1, m} = I_1;\\
&2)\ f_i(x) = \langle p_i, x\rangle + \nu_i = 0,\ \ i \in \overline{m+1,\, N} = I_2;\\
&3)\ x \in A.
\end{aligned}
\tag{2.4.1}
$$

Точки, удовлетворяющие ограничениям 1)–3), называются *допустимыми точками* этой задачи. Далее мы будем считать, что в задаче (2.4.1) множество допустимых точек непусто. Допустимая точка x_0, в которой достигается минимум функции f_0, называется *решением задачи* (2.4.1).

Считаем, что векторы $\{p_i\}_{i=m+1}^{N}$ в условии 2) линейно независимы, так как в противном случае можно без ущерба для решений отбросить часть ограничений-равенств, получив эквивалентную задачу.

Будем говорить, что в задаче (2.4.1) выполнено *условие Слейтера*, если существует допустимая точка $\overline{x}$ такая, что $\overline{x} \in \operatorname{int} A$ и $f_i(\overline{x}) < 0$ при всех $i \in I_1$.

Для задачи (2.4.1) определим конус

$$K = \{\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid \lambda_i \geqslant 0,\ 0 \leqslant i \leqslant m\}.$$

Функцией Лагранжа для задачи (2.4.1) будем называть функцию L аргументов $x \in A$ и $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_N) \in K$ вида

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i f_i(x), \tag{2.4.2}$$

где вектор λ называется вектором множителей Лагранжа.

Седловой точкой функции Лагранжа (2.4.2) будем называть точку $(x_0, \overline{\lambda}) \in A \times K$, удовлетворяющую условию

$$L(x_0, \lambda) \leqslant L(x_0, \overline{\lambda}) \leqslant L(x, \overline{\lambda}) \quad \forall\, x \in A, \quad \forall\, \lambda \in K.$$

Очевидным следствием приведенного выше определения седловой точки является равенство

$$\min_{x \in A} L(x, \overline{\lambda}) = \max_{\lambda \in K} L(x_0, \lambda). \tag{2.4.3}$$

Теорема 2.4.1 (Г.В. Кун, А.В. Таккер). 1. *Если точка* x_0 — *решение задачи* (2.4.1), *то найдется ненулевой вектор множителей Лагранжа* $\overline{\lambda} \in K$ *такой, что выполняются*:

(i) *принцип минимума для функции Лагранжа*

$$\min_{x \in A} L(x, \overline{\lambda}) = L(x_0, \overline{\lambda}); \tag{2.4.4}$$

(ii) *условие дополняющей нежесткости*

$$\overline{\lambda}_i f_i(x_0) = 0 \quad \forall i \in I_1.$$

2. *Если для допустимой точки* x_0 *задачи* (2.4.1) *существует ненулевой вектор* $\overline{\lambda} \in K$ *такой, что для него выполнены условия* (i), (ii) *и* $\overline{\lambda}_0 \neq 0$, *то точка* x_0 — *решение задачи* (2.4.1), *а точка* $(x_0, \overline{\lambda})$ *является седловой точкой функции Лагранжа*.

3. *Если в задаче* (2.4.1) *выполнено условие Слейтера, а для допустимой точки* x_0 *существует ненулевой вектор* $\overline{\lambda} \in K$ *такой, что выполнены условия* (i) *и* (ii), *то точка* x_0 — *решение задачи* (2.4.1), *а* $(x_0, \overline{\lambda})$ — *седловая точка функции Лагранжа* $L(x, \lambda)$.

Доказательство. 1. Определим множество $B \subset \mathbb{R}^{N+1}$, состоящее из точек $\mu = (\mu_0, \ldots, \mu_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ таких, для каждой из которых найдется точка $x \in A$ такая, что выполнены неравенства

$$f_0(x) - f_0(x_0) < \mu_0; \quad f_i(x) \leqslant \mu_i,\ i \in I_1; \quad f_i(x) = \mu_i,\ i \in I_2.$$

Множество B есть непустое выпуклое множество. Всякая точка $\mu = (\mu_0, \ldots, \mu_m, 0, \ldots, 0)$, где $\mu_i > 0$, $i \in \overline{0, m}$, принадлежит множеству B, так как в качестве x можно выбрать x_0.

Докажем выпуклость множества B. Пусть точки $\overline{\mu}^1$ и $\overline{\mu}^2$ содержатся в B. Нужно доказать, что $\lambda\overline{\mu}^1 + (1-\lambda)\overline{\mu}^2 \in B$ для любого $\lambda \in (0,1)$. Так как $\overline{\mu}^1$ и $\overline{\mu}^2$ содержатся в B, то по определению множества B существуют точки x_1 и x_2 из A такие, что при $k = 1, 2$ справедливы выражения: $f_0(x_k) - f_0(x_0) < \overline{\mu}_0^k$; $f_i(x_k) \leqslant \overline{\mu}_i^k$, где $i \in \overline{1, m}$; $f_i(x_k) = \overline{\mu}_i^k$, где $i \in I_2$.

Определим точку $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Так как множество A выпукло, то $x_\lambda \in A$. В силу выпуклости функций f_i, где $i \in \overline{0, m}$, получаем

$$f_0(x_\lambda) - f_0(x_0) \leqslant \lambda(f_0(x_1) - f_0(x_0)) + (1-\lambda)(f_0(x_2) - f_0(x_0)) < \\ < \lambda\mu_0^1 + (1-\lambda)\mu_0^2,$$

$$f_i(x_\lambda) \leqslant \lambda f_i(x_1) + (1-\lambda)f_i(x_2) \leqslant \lambda\mu_i^1 + (1-\lambda)\mu_i^2.$$

При $i \in I_2$ в силу линейности функций f_i получаем равенство

$$f_i(x_\lambda) = \lambda f_i(x_1) + (1-\lambda)f_i(x_2) = \lambda\mu_i^1 + (1-\lambda)\mu_i^2.$$

Таким образом, $\lambda\overline{\mu}^1 + (1-\lambda)\overline{\mu}^2 \in B$.

Отметим, что $0 \notin B$. Действительно, в противном случае нашлась бы точка $x \in A$ такая, что $f_0(x) < f_0(x_0)$, $f_i(x) \leqslant 0$, $i \in I_1$, и $f_i(x) = 0$, $i \in I_2$. Это противоречит тому, что x_0 — решение задачи (2.4.1).

По теореме об отделимости существует ненулевой вектор $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_0, \ldots, \overline{\lambda}_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$, отделяющий множество B от точки 0, т. е.

$$\sum_{i=0}^{N} \overline{\lambda}_i \mu_i \geqslant 0 \quad \forall\, (\mu_0, \ldots, \mu_N) \in B. \tag{2.4.5}$$

Так как множество

$$\{(\mu_0, \ldots, \mu_m, 0, \ldots, 0) \mid \mu_0 > 0,\ \mu_i > 0,\ i \in I_1\}$$

содержится в B, то из (2.4.5) получаем, что $\overline{\lambda}_0 \geqslant 0$ и $\overline{\lambda}_i \geqslant 0$ $\forall i \in I_1$, т. е. $\overline{\lambda} \in K$.

Для каждой точки $x \in A$ выберем числа $\mu_i = f_i(x)$ при $i \in I_1 \cup I_2$ и число $\mu_0 = f_0(x) - f_0(x_0) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Из формулы (2.4.5) в пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем неравенство

$$\sum_{i=0}^{N} \overline{\lambda}_i f_i(x) \geqslant \overline{\lambda}_0 f_0(x_0) \quad \forall\, x \in A. \tag{2.4.6}$$

Если при некотором $i \in I_1$ справедливо строгое неравенство $f_i(x_0) < 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ множество B содержит точку вида $\mu_0 = \ldots = \mu_{i-1} = \mu_{i+1} = \ldots = \mu_m = \varepsilon$; $\mu_j = 0$, $j \in I_2$; $\mu_i = f_i(x_0)$. Подставляя эти значения в (2.4.5) и устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем, что $\overline{\lambda}_i f_i(x_0) \geqslant 0$, т. е. $\overline{\lambda}_i \leqslant 0$, следовательно, $\overline{\lambda}_i = 0$.

Итак, для всех $i \in I_1$ имеет место равенство $\overline{\lambda}_i f_i(x_0) = 0$.

С учетом последнего равенства перепишем неравенство (2.4.6) в виде

$$\sum_{i=0}^{N} \overline{\lambda}_i f_i(x) \geqslant \sum_{i=0}^{N} \overline{\lambda}_i f_i(x_0) \quad \forall\, x \in A, \tag{2.4.7}$$

т. е. в точке x_0 достигается минимум функции Лагранжа $x \to L(x, \overline{\lambda})$ на множестве A.

2. Из условий $\overline{\lambda}_0 \neq 0$ и $\overline{\lambda} \in K$ следует, что $\overline{\lambda}_0 > 0$. Разделив все компоненты вектора $(\overline{\lambda}_0, \ldots, \overline{\lambda}_N)$ на $\overline{\lambda}_0$, считаем без ограничения общности, что $\overline{\lambda}_0 = 1$.

Пусть x_0 — допустимая точка задачи (2.4.1), для которой выполнены условия (i)–(ii) теоремы. Тогда для любой точки $x \in A$ получаем

$$f_0(x_0) = f_0(x_0) + \sum_{i=1}^{N} \overline{\lambda}_i f_i(x_0) = L(x_0, \overline{\lambda}) \leqslant L(x, \overline{\lambda}) = \\ = f_0(x) + \sum_{i=1}^{N} \overline{\lambda}_i f_i(x). \tag{2.4.8}$$

В свою очередь для всякой допустимой точки x исходной задачи (2.4.1) в силу условий (i) и (ii) следует, что правая часть неравенства (2.4.8) не превосходит $f_0(x)$, т. е. $f_0(x_0) \leqslant f_0(x)$ для любой допустимой точки x.

3. Покажем, что если выполнено условие Слейтера (в некоторой точке $\overline{x}$), то из условий (i) и (ii) следует, что $\overline{\lambda}_0 > 0$, т. е. можно считать $\overline{\lambda}_0 = 1$. Допустим противное, т. е. $\overline{\lambda}_0 = 0$. Тогда из условия (ii) следует, что

$$\sum_{i=0}^{N} \overline{\lambda}_i f_i(x_0) = 0.$$

Если среди чисел $\overline{\lambda}_i$, $i \in I_1$, есть ненулевые, т. е. положительные, то в силу выполнения условия Слейтера в точке $\overline{x} \in A$ получаем

$$\sum_{i=0}^{N} \overline{\lambda}_i f_i(\overline{x}) < 0 = \sum_{i=0}^{N} \overline{\lambda}_i f_i(x_0),$$

что противоречит принципу минимума (i).

Допустим, что $\overline{\lambda}_i = 0$ при всех $i \in I_1$. Тогда, так как вектор $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_0, \ldots, \overline{\lambda}_N)$ по условию теоремы не равен нулю, то существуют компоненты $\overline{\lambda}_i$, $i \in I_2$, не равные нулю. Из принципа минимума (i) получаем, что

$$\sum_{i \in I_2} \overline{\lambda}_i f_i(x) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in A. \tag{2.4.9}$$

В силу определения f_i из (2.4.1) перепишем формулу (2.4.9) в виде $\sum\limits_{i \in I_2} \overline{\lambda}_i(\langle p_i, x\rangle + \nu_i) \geqslant 0$.

Так как по условию векторы $\{p_i\}_{i \in I_2}$ линейно независимы, то определим ненулевой вектор $p_0 = \sum\limits_{i \in I_2} \overline{\lambda}_i p_i$. Определим функцию

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{N} \overline{\lambda}_i f_i(x) = \sum_{i \in I_2} \overline{\lambda}_i(\langle p_i, x\rangle + \nu_i) = \langle p_0, x\rangle + \nu,$$

где $\nu = \sum\limits_{i \in I_2} \overline{\lambda}_i \nu_i$, и из неравенства (2.4.9) следует, что функция $\varphi(x)$ неотрицательна на множестве A, причем $\varphi(x)$ не равна тождественно нулю.

С другой стороны, так как $\varphi(\overline{x}) = 0$, $\overline{x} \in \operatorname{int} A$, а функция φ линейна и не является тождественно равной нулю, то найдутся точки в любой окрестности точки $\overline{x}$ (принадлежащие множеству A), в которых значения функции φ отрицательны. Противоречие.

Итак, $\overline{\lambda}_0 \neq 0$, а так как $\overline{\lambda}_0 \geqslant 0$, то $\overline{\lambda}_0 > 0$. Далее доказательство повторяет п. 2. $\square$

Следствие 2.4.1. *При выполнении условия Слейтера теорема* 2.4.1 *дает необходимые и достаточные условия решения задачи* (2.4.1).

Преобразуем условия теоремы 2.4.1 к субградиентной форме. Рассмотрим функцию

$$L_1(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i f_i(x) + \delta(x, A).$$

Теорема 2.4.1 утверждает, что если x_0 — решение задачи (2.4.1), то существует ненулевой вектор $\overline{\lambda} \in K$, при котором функция $x \to L_1(x, \overline{\lambda})$ достигает безусловного минимума в точке x_0. Из теоремы 1.16.1 следует, что $0 \in \partial L_1(x_0, \overline{\lambda})$, а в силу теоремы Моро–Рокафеллара влечет

$$0 \in \sum_{i=0}^{N} \overline{\lambda}_i\, \partial f_i(x_0) + N(A, x_0). \tag{2.4.10}$$

В случае, когда точка x_0 является допустимой, а для вектора $\overline{\lambda} \in K$ выполнены условие $\overline{\lambda}_0 = 1$ и условие дополняющей нежесткости (ii), включение (2.4.10) является как необходимым, так и достаточным условием того, что точка x_0 является решением задачи (2.4.1).

2. Задача линейного программирования. Рассмотрим следующий простейший случай задачи (2.4.1) выпуклого программирования, когда все функции f_i — линейные, а множество $A = \mathbb{R}^n$. Раздел математики, изучающий задачи об экстремуме линейной функции нескольких переменных при ограничениях типа равенств и неравенств, задаваемых также линейными функциями, получил специальное название *линейное программирование* (linear programming), принадлежащее Т. Купмансу. Начнем со следующей леммы.

Лемма 2.4.1. *Пусть множество A задано в виде $A = \bigcap\limits_{i=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_i, x\rangle \leqslant \alpha_i\}$, причем $\operatorname{int} A \neq \varnothing$. Тогда значение целевой функции в точке решения задачи нахождения максимума функции $x \to \langle p_0, x\rangle$ на множестве A совпадает со значением целевой функции в точке решения следующей задачи*:

$$\min_{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i$$

при условии на λ (2.4.11)

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i = p_0.$$

Доказательство. Отметим, что условие непустоты внутренности множества A влечет выполнение условия Слейтера в любой точке $\overline{x} \in \operatorname{int} A$.

Первая задача на максимум равносильна задаче на минимум функции $x \to \langle -p_0, x\rangle$ на том же множестве A.

Запишем функцию Лагранжа для первой задачи (причем отметим, что в силу теоремы 2.4.1 $\lambda = (1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in K$):

$$L(x, \lambda) = \langle -p_0, x\rangle + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\langle p_i, x\rangle - \alpha_i).$$

По теореме 2.4.1 точка x_0 является решением задачи тогда и только тогда, когда существует вектор $\overline{\lambda} = (1, \overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_m) \in K$, при котором справедливо включение

$$0 \in \partial L(x_0, \overline{\lambda}) = -p_0 + \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda}_i p_i,$$

т. е. выполнено равенство $\sum\limits_{i=1}^{m} \overline{\lambda}_i p_i = p_0$. Определим множество $\widetilde{K} =$

$= \left\{ (1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in K \,\middle|\, \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i p_i = p_0 \right\}$. Очевидно, что $\overline{\lambda} \in \widetilde{K}$. Из условия седловой точки (2.4.3) получаем

$$-\max_{x \in A} \langle p_0, x \rangle = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\langle -p_0, x \rangle + \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda}_i (\langle p_i, x \rangle - \alpha_i) \right) =$$
$$= \max_{\lambda \in K} \left(\langle -p_0, x_0 \rangle + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\langle p_i, x_0 \rangle - \alpha_i) \right) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overline{\lambda}_i = \max_{\lambda \in \widetilde{K}} \left(-\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i \right) = -\min_{\lambda \in \widetilde{K}} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i.$$

Таким образом, значение приведенной в лемме целевой функции задачи максимизации совпадает со значением целевой функции задачи (2.4.11). □

Для решения задачи вида (2.4.11) существует эффективный алгоритм, называемый *симплекс-методом*. Для его изложения нам потребуется преобразовать задачу (2.4.11) к различным видам, которые называются *задачами линейного программирования в канонической и нормальной формах*.

Определение 2.4.2. *Задачей линейного программирования в канонической форме* называется задача:

найти минимум функции $f(x) = \langle c, x \rangle$ на множестве

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geqslant 0,\ Tx = b\}. \tag{2.4.12}$$

Здесь заданы векторы $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ и матрица $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Неравенство $x \geqslant 0$ следует понимать покомпонентно, т. е. $x_i \geqslant 0$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Будем считать, что все компоненты вектора b также неотрицательны. Действительно, если существует $b_i < 0$, то, умножив i-е уравнение системы $Tx = b$ на -1, получим эквивалентную систему уравнений $\widetilde{T}x = \widetilde{b}$, но уже с $\widetilde{b}_i > 0$. Условимся также о том, что множество A непусто, а ранг матрицы T равен m (и поэтому $m \leqslant n$). Последнее легко обеспечить путем отбрасывания уравнений из системы $Tx = b$, не содержащих строк главного минора матрицы T, при котором непустое множество решений системы $Tx = b$ не меняется.

Определение 2.4.3. *Задачей линейного программирования в нормальной форме* называется задача:

найти минимум функции $f(x) = \langle c, x \rangle$ на множестве

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geqslant 0,\ Tx \leqslant b\}.$$

Теорема 2.4.2 (существования). *Если численное значение задачи линейного программирования в канонической форме конечно* (*т. е.* $\inf\limits_{x\in A}\langle c,x\rangle > -\infty$), *то ее решение существует и достигается в некоторой крайней точке множества* A (2.4.12).

Доказательство. Так как численное значение задачи конечно, то $A\neq\varnothing$. Из условия $\inf\limits_{x\in A}\langle c,x\rangle > -\infty$ следует, что для любого асимптотического направления $y\in O^+A$ выполнено неравенство $\langle c,y\rangle\geqslant 0$. Так как для любого $x\in A$ имеем $x\geqslant 0$, то множество A из (2.4.12) не содержит прямых, и по следствию 2.3.1 $\inf\limits_{x\in A}\langle c,x\rangle = -\sup\limits_{x\in A}\langle -c,x\rangle$ достигается в некоторой крайней точке многогранного множества A. $\square$

Исследуем свойства крайних точек непустого множества A из (2.4.12).

Теорема 2.4.3. *Пусть непустое множество* $A\subset\mathbb{R}^n$ *задано в виде* (2.4.12), *где* $n\geqslant m$ *и ранг матрицы* T *равен* m. *Точка* $x\in A$ *является крайней точкой множества* A *тогда и только тогда, когда можно так перенумеровать компоненты точки* $x=(x_1,\ldots,x_n)$, *что последние ее компоненты* $x_k=0$ *при* $k\in\overline{m+1,n}$, *а система* $Tx=b$ *принимает вид* $\sum\limits_{k=1}^{n} T_kx_k=b$, *где* T_k — *столбцы преобразованной матрицы* T, *причем ее первые* m *столбцов* $T_1,\ldots,T_m$ *линейно независимы.*

Доказательство. 1. Пусть точка $x\in A$, но $x\notin\operatorname{extr}A$. Тогда существуют вектор $y\neq 0$ и число $\varepsilon>0$ такие, что $x\pm\varepsilon y\in A$ (более того, $[x-\varepsilon y,x+\varepsilon y]\subset A$ в силу выпуклости множества A). Это значит, что $T(x\pm\varepsilon y)=Tx\pm\varepsilon Ty=b$, следовательно, $Ty=0$. Кроме того, по определению множества A справедливы неравенства $x\pm\varepsilon y\geqslant 0$.

Перенумеруем компоненты точки x так, чтобы первые r, $0\leqslant r\leqslant n$, компонент были больше нуля, т. е. $x_k>0$ при $k\in\overline{1,r}$, а при любом $k>r$ имеет место равенство $x_k=0$.

Если оказалось, что $r=0$, то $x=0$. Но точка 0 является выступающей точкой множества A (гиперплоскость H с нормальным вектором $(-1,\ldots,-1)$, проходящая через точку 0, дает $H\cap A=\{0\}$), а значит, и крайней точкой, что противоречит выбору точки x.

Следовательно, существует $x_k>0$, т. е. $1\leqslant r\leqslant n$. Так как $y\neq 0$, то найдутся номера k в интервале от 1 до n, для которых компоненты $y_k\neq 0$. Номера k, при которых $y_k\neq 0$, должны удовлетворять условию $k\leqslant r$, так как в противном случае либо $x_k+\varepsilon y_k$, либо $x_k - \varepsilon y_k$ оказались бы меньше нуля (поскольку $x_k = 0$ при $k > r$), что невозможно, так как $x \pm \varepsilon y \in A$.

Перепишем равенство $Ty = 0$ в виде

$$\sum_{k=1}^{r} T_k y_k = 0 \quad \text{при} \quad \sum_{k=1}^{r} |y_k| > 0.$$

Это означает, что столбцы $\{T_k\}_{k=1}^r$ линейно зависимы.

2. Пусть точка $x \in \operatorname{extr} A$. Если $x = 0$, то, взяв любые m линейно независимых столбцов матрицы T (ранг T равен m) в качестве $T_1, \ldots, T_m$, получаем требуемое условие.

Пусть точка $x \in \operatorname{extr} A \backslash \{0\}$. Перенумеруем компоненты точки x так, чтобы $x_1 > 0, \ldots, x_r > 0$, а $x_k = 0$ при любом k: $r + 1 \leqslant k \leqslant n$.

Покажем, что $r \leqslant m$ и после указанной перестановки компонент точки x и соответствующей перестановки столбцов матрицы T в выражении

$$Tx = \sum_{k=1}^{r} T_k x_k$$

столбцы $\{T_k\}_{k=1}^r$ будут линейно независимы. Это завершит доказательство теоремы.

Допустим, что столбцы $\{T_k\}_{k=1}^r$ линейно зависимы. Тогда найдется ненулевой вектор $a \in \mathbb{R}^n$ вида $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0)$ такой, что $\sum\limits_{k=1}^{r} T_k \alpha_k = 0$. Существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого номера k от 1 до r справедливы неравенства $x_k \pm \varepsilon \alpha_k \geqslant 0$. Тогда

$$T(x \pm \varepsilon a) = \sum_{k=1}^{r} T_k (x_k \pm \varepsilon \alpha_k) + \sum_{k=r+1}^{n} T_k x_k = \\ = \sum_{k=1}^{r} T_k x_k \pm \varepsilon \sum_{k=1}^{r} T_k \alpha_k = b,$$

следовательно, $[x - \varepsilon a, x + \varepsilon a] \subset A$, т.е. $x \notin \operatorname{extr} A$. Противоречие. $\square$

С помощью теоремы 2.4.3 можно при малых значениях m и n искать все крайние точки A как решения систем

$$\sum_{l=1}^{m} T_{k_l} x_{k_l} + \sum_{l=m+1}^{n} T_{k_l} x_{k_l} = b, \quad x_{k_l} \geqslant 0,$$

по всем перестановкам k_l, дающим линейно независимые наборы столбцов $\{T_{k_l}\}_{l=1}^m$. Легко видеть, что для этого надо решить порядка C_n^m линейных систем, поэтому при больших m и n такой алгоритм простого перебора бесперспективен с вычислительной точки зрения.

Однако оказалось, что можно так организовать целенаправленный перебор крайних точек множества A в канонической задаче, что получается быстро и эффективно работающий алгоритм даже при больших значениях m и n. Этот перебор, названный симплекс-методом, разрабатывался в конце 30-х годов в СССР Л.В. Канторовичем и в 40-х годах в США Дж. Данцигом. Данцигу принадлежит и так называемый вариант модифицированного симплекс-метода, рассмотрению которого посвящен § 2.5.

Первая задача — это поиск какой-либо крайней точки множества A из (2.4.12). Эту задачу можно решать с помощью вспомогательной задачи — так называемой *первой фазы симплекс-метода*. Приведем ее.

Пусть $u \in \mathbb{R}^m$. Рассмотрим для множеств (2.4.12) задачу в пространстве переменных $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ вида

$$\inf_{(x,u)} \sum_{i=1}^{m} u_i \ \text{ на множестве } \ C = \\ = \{(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,\ u + Tx = b,\ x \geqslant 0,\ u \geqslant 0\}. \quad (2.4.13)$$

В задаче (2.4.13) по теореме 2.4.3 легко указать крайнюю точку множества C, это точка $(x, u) = (0, b)$ (напомним, что в канонической задаче мы без ограничения общности считаем $b \geqslant 0$).

Допустим, что у нас имеется алгоритм, который с помощью целенаправленного перебора крайних точек множества C находит решение задачи (2.4.13) в некоторой крайней точки (x_0, u_0) этого множества.

Если множество $A = \{x \mid Tx = b,\ x \geqslant 0\}$ непусто, то очевидно, что $u_0 = 0$ и $x_0 \in \operatorname{extr} A$.

В самом деле, если предположить, что $x_0 \notin \operatorname{extr} A$, то найдутся число $\varepsilon > 0$ и точка $y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ такие, что $[x_0 - \varepsilon y, x_0 + \varepsilon y] \subset A$. Но тогда выполнено включение

$$[(x_0, 0) - \varepsilon(y, 0), (x_0, 0) + \varepsilon(y, 0)] \subset C,$$

т. е. точка $(x_0, 0)$ не является крайней точкой множества C. Противоречие показывает, что $x_0 \in \operatorname{extr} A$.

Если же при решении задачи (2.4.13) оказалось, что $u_0 \neq 0$, то это означает, что множество A пусто.

Замечание 2.4.1. Таким образом, задачу (2.4.13) можно использовать для выяснения непустоты множества A из (2.4.12) и нахождения по крайней мере одной крайней точки этого множества A.

§ 2.5. Симплекс-метод

Перейдем к описанию алгоритма целенаправленного перебора вершин многогранного множества A, заданного в виде (2.4.12), при котором на каждом шаге будет уменьшаться значение функции $\langle c, x\rangle$. Такой алгоритм принято называть *симплекс-методом*.

Мы сразу опишем так называемый *модифицированный алгоритм симплекс-метода*, при котором вычисления организованы более экономным способом, чем в простом симплекс-методе.

Предварительно введем ряд понятий и обозначений, используемых в методе решения. Обозначим через T_i i-й столбец матрицы T.

Допустим, что нам известна некоторая вершина $x \in \operatorname{extr} A$ (которую можно получить, например, в результате решения задачи (2.4.13)). В силу теоремы 2.4.3 найдутся m линейно независимых столбцов матрицы T таких, что координаты этой точки x, соответствующие другим оставшимся $n-m$ столбцам матрицы T, равны нулю. Эти m линейно независимых столбцов матрицы T будем называть базисными столбцами для точки x. Остальные $n-m$ столбцов матрицы T будем называть небазисными столбцами для точки x.

В соответствии с этим введем систему обозначений. Пусть

$$I_{б}(x) = \{i_1(x), i_2(x), \ldots, i_m(x)\}$$

— массив из m натуральных чисел из множества $\overline{1,n}$, состоящий из номеров базисных столбцов в матрице T для крайней точки x, при этом полагаем, что $(I_{б}(x))_k = i_k(x)$.

Через

$$I_{нб}(x) = \{j_1(x), j_2(x), \ldots, j_{n-m}(x)\}$$

обозначим массив из $n-m$ натуральных чисел из множества $\overline{1,n}$, состоящий из номеров небазисных столбцов в матрице T, полагая при этом, что $(I_{нб}(x))_k = j_k(x)$.

Обозначим через $T_{б}(x)$ (через $T_{нб}(x)$) — $m \times m$-матрицу ($m \times$ $\times\, (n-m)$-матрицу), составленную из базисных (небазисных) столбцов матрицы T, т. е. $T_{б}(x) = (T_i)_{i \in I_{б}(x)}$ ($T_{нб}(x) = (T_i)_{i \in I_{нб}(x)}$). При этом обозначим через $(T_{б}(x))_k$ — k-й столбец $m \times m$-матрицы $T_{б}(x)$, где $k \in \overline{1,m}$ (т. е. $(T_{б}(x))_k = T_{i_k(x)}$), а через $(T_{нб}(x))_k$ — k-й столбец $m \times$ $\times\, (n-m)$-матрицы $T_{нб}(x)$, где $k \in \overline{1, n-m}$ (т. е. $(T_{нб}(x))_k = T_{j_k(x)}$).

Аналогично матрице T всякий вектор $z \in \mathbb{R}^n$ разобьем на два вектора: вектор с базисными компонентами $z_{б}(x) = (z_i)_{i \in I_{б}(x)}$ из пространства $\mathbb{R}^m$ и вектор с небазисными компонентами $z_{нб}(x) = (z_i)_{i \in I_{нб}(x)}$

из пространства $\mathbb{R}^{n-m}$. При этом через $(z_б(x))_k$ обозначаем k-ю компоненту вектора $z_б(x)$ в $\mathbb{R}^m$, т. е. $(z_б(x))_k = z_{i_k(x)}$; аналогично определяем $(z_{нб}(x))_k = z_{j_k(x)}$ — k-ю компоненту вектора $z_{нб}(x) \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Так как вследствие теоремы 2.4.3 матрица $T_б(x)$ является невырожденной, то обозначим через $U(x)$ обратную к матрице $T_б(x)$ матрицу.

Определим в $\mathbb{R}^m$ векторы $Z_j(x) = U(x)(T_{нб}(x))_j$, $j \in \overline{1, n-m}$, и вектор $\Lambda(x) = U^T(x)c_б(x)$, где $c_б(x)$ — вектор из базисных компонент вектора $c \in \mathbb{R}^n$, входящего в целевую функцию $\langle c, z\rangle$.

Для каждого $j \in \overline{1, n-m}$ определим величину

$$\sigma_j(x) = \langle Z_j(x), c_б(x)\rangle - (c_{нб}(x))_j, \tag{2.5.1}$$

которую в других обозначениях можно записать так:

$$\sigma_j(x) = \langle \Lambda(x), (T_{нб}(x))_j\rangle - (c_{нб}(x))_j \tag{2.5.2}$$

Величины $\sigma_j(x)$, где $j \in \overline{1, n-m}$, называют *оценками замещения*.

Рассмотрим произвольную точку $z \in A$. Разбивая вектор z на $z_б(x)$ и $z_{нб}(x)$, получим, что в силу введенных обозначений система линейных уравнений в задаче (2.4.12) принимает вид

$$T_б(x)z_б(x) + T_{нб}(x)z_{нб}(x) = b.$$

Отсюда в силу введенных выше обозначений следует

$$z_б(x) = U(x)b - U(x)T_{нб}(x)z_{нб}(x), \tag{2.5.3}$$

что для k-й компоненты (в силу приведенного ранее определения вектора $Z_j(x)$) влечет равенство

$$(z_б(x))_k = (U(x)b)_k - \left(\sum_{j=1}^{n-m} Z_j(x)(z_{нб}(x))_j\right)_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{2.5.4}$$

Отметим, что для случая, когда $z = x \in \operatorname{extr} A$, имеем $x_{нб}(x) = 0$ и $x_б(x) = U(x)b$.

Разбивая вектор c на векторы $c_б(x)$ и $c_{нб}(x)$, вычислим значение функции $\langle c, z\rangle$ в произвольной точке $z \in A$ с учетом (2.5.4) и (2.5.1):

$$\begin{aligned}
\langle c, z\rangle &= \langle c_б(x), z_б(x)\rangle + \langle c_{нб}(x), z_{нб}(x)\rangle = \\
&= \langle c_б(x), U(x)b - U(x)T_{нб}(x)z_{нб}(x)\rangle + \langle c_{нб}(x), z_{нб}(x)\rangle = \\
&= \langle c_б(x), U(x)b\rangle - \sum_{j=1}^{n-m} \left[\langle Z_j(x)(z_{нб}(x))_j, c_б(x)\rangle - (c_{нб}(x))_j(z_{нб}(x))_j\right] = \\
&= \langle c_б(x), U(x)b\rangle - \sum_{j=1}^{n-m} \sigma_j(x)(z_{нб}(x))_j.
\end{aligned}$$

Итак, получили формулу

$$\langle c, z\rangle = \langle c_{\text{б}}(x), U(x)b\rangle - \sum_{j=1}^{n-m} \sigma_j(x)(z_{\text{нб}}(x))_j \quad \forall z \in A. \tag{2.5.5}$$

Приступим к описанию одного шага алгоритма (симплекс-метода), при котором по одной (некоторой заданной) крайней точке $x_0 \in \operatorname{extr} A$ находим другую крайнюю точку $\widetilde{x} \in \operatorname{extr}$, у которой значение функции $\langle c, z\rangle$ по крайней мере не возрастет, т. е. $\langle c, x_0\rangle \geqslant \langle c, \widetilde{x}\rangle$.

Для краткости обозначений введенные выше базисные столбцы $I_{\text{б}}$ и остальные величины $I_{\text{нб}}$, $T_{\text{б}}$, $T_{\text{нб}}$, $z_{\text{б}}$, $z_{\text{нб}}$, U, Z_j, $c_{\text{б}}$, $c_{\text{нб}}$, Λ, σ_j, определяемые выбором точки $x_0 \in \operatorname{extr} A$, будем обозначать указанными буквами, т. е. опускать аргумент x_0. Перечисленные величины, соответствующие новой крайней точке $\widetilde{x}$, будем обозначать аналогичными буквами, но с волной, например, $\widetilde{I}_{\text{б}}$, $\widetilde{T}_{\text{б}}$ и т. д.

Начнем с того, что вычислим в данной точке x_0 оценки замещения $\sigma_j = \sigma_j(x_0)$ для всех $j \in \overline{1, n-m}$ (по формуле (2.5.2)), и затем действуем в соответствии с полученным результатом.

1. Начнем перебирать j в порядке возрастания. Если для каждого $j \in \overline{1, n-m}$ выполнено условие $\sigma_j \leqslant 0$, то крайняя точка x_0 есть решение исходной задачи (2.4.12), и алгоритм вычисления закончен. В самом деле, из формулы (2.5.5) и того, что по условию задачи (2.4.12) для любого вектора $z \in A$ его компоненты неотрицательны, из неравенства $\sigma_j \leqslant 0$ следует, что $\langle c, z\rangle \geqslant \langle c_{\text{б}}(x_0), U(x_0)b\rangle = \langle c, x_0\rangle$.

2. Пусть для некоторого $j_0 \in \overline{1, n-m}$ выполнено неравенство $\sigma_{j_0} > 0$. При этом возможны два случая.

2, а. Все компоненты вектора $Z_{j_0} = Z_{j_0}(x_0)$ не больше нуля, т. е. $(Z_{j_0})_k \leqslant 0$ при всех $k \in \overline{1, m}$. Покажем, что в этом случае $\inf\limits_{z \in A} \langle c, z\rangle = -\infty$, т. е. конечного решения задача (2.4.12) не имеет.

Для любого $t > 0$ определим вектор $z^t = (z^t_{\text{б}}, z^t_{\text{нб}}) \in A$ так, что $(z^t_{\text{нб}})_{j_0} = t$, $(z^t_{\text{нб}})_j = 0$ при всех $j \in \overline{1, n-m} \setminus \{j_0\}$. Значения $z^t_{\text{б}}$ вычисляем по формуле (2.5.4), т. е.

$$(z^t_{\text{б}})_k = (Ub)_k - (Z_{j_0})_k t, \quad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Так как $(Z_{j_0})_k \leqslant 0$, то отсюда следует, что $(z^t_{\text{б}})_k \geqslant 0$ для всех $t > 0$ и всех $k \in \overline{1, m}$, следовательно, $z^t \in A$ для всех $t > 0$. Из формулы (2.5.5) и неравенства $\sigma_{j_0} > 0$, очевидно, следует, что $\langle c, z^t\rangle \to -\infty$ при $t \to +\infty$, что означает неограниченность снизу на множестве A функции $\langle c, z\rangle$ и неограниченность множества A.

2, б. Пусть существует по крайней мере один номер $k \in \overline{1, m}$, для которого $(Z_{j_0})_k > 0$. Среди таких компонент вектора Z_{j_0} определим так называемый *разрешающий элемент* $(Z_{j_0})_s$ вектора Z_{j_0} по следующей формуле для номера $s \in \overline{1,m}$:

$$s \in \operatorname{Arg} \min_{k \in \overline{1,m}:\ (Z_{j_0})_k > 0} \frac{(Ub)_k}{(Z_{j_0})_k}. \tag{2.5.6}$$

В этом случае алгоритм нахождения новой точки $\widetilde{x}$ состоит в том, что на s-е место массива номеров $\widetilde{I}_б$ помещаем номер $(I_{нб})_{j_0}$, а на j_0-е место массива номеров $\widetilde{I}_{нб}$ помещаем номер $(I_б)_s$. При этом остальные элементы массивов сохраняют свои значения, т. е. $(I_б)_i = (\widetilde{I}_б)_i$ при $i \in \overline{1,m} \backslash \{s\}$ и $(I_{нб})_j = (\widetilde{I}_{нб})_j$ при $j \in \overline{1,n-m} \backslash \{j_0\}$.

Покажем, что полученный таким образом новый набор столбцов матрицы T с номерами из множества $\widetilde{I}_б$ будет базисным, т. е. матрица $\widetilde{T}_б$ является невырожденной, и что ей соответствует некоторая крайняя точка $\widetilde{x}$ множества A.

Невырожденность матрицы $\widetilde{T}_б$ докажем позже тем, что в явной форме укажем обратную к $\widetilde{T}_б$ матрицу $\widetilde{U}$ (см. формулу (2.5.13)). Сначала найдем точку $\widetilde{x}$.

Приведенный выше алгоритм замены базисных номеров означает, что искомая точка $\widetilde{x}$ удовлетворяет соотношениям $(\widetilde{x}_{нб})_j = 0$ для всех $j \in \overline{1,n-m} \backslash \{j_0\}$. В силу сделанной замены массива базисных номеров определяем

$$(\widetilde{x}_б)_s = (z_{нб}(x_0))_{j_0} = (Ub)_s / (Z_{j_0})_s \geqslant 0, \tag{2.5.7}$$

откуда в силу (2.5.4) получаем, что

$$(\widetilde{x}_б)_k = (Ub)_k - (Z_{j_0})_k (z_{нб}(x_0))_{j_0} \quad \forall\, k \in \overline{1,m} \backslash \{s\}. \tag{2.5.8}$$

Отсюда с учетом (2.5.6) получаем, что $(\widetilde{x}_б)_k \geqslant 0$ для всех $k \in \overline{1,m}$, причем

$$(\widetilde{x}_{нб})_{j_0} = (z_б(x_0))_s = (Ub)_s - (Z_{j_0})_s (\widetilde{x}_б)_s = 0.$$

Итак, определенная выше точка $\widetilde{x}$ принадлежит множеству A, причем соответствует другому набору базисных столбцов, т. е. в силу теоремы 2.4.3 она является крайней точкой этого множества. При этом из формулы (2.5.5) получаем, что

$$\langle c, \widetilde{x} \rangle = \langle c_б, Ub \rangle - \sigma_{j_0} (z_{нб}(x_0))_{j_0} \leqslant \langle c_б, Ub \rangle = \langle c, x_0 \rangle, \tag{2.5.9}$$

т. е. значение целевой функции, минимум которой необходимо найти в задаче (2.4.12), не увеличится. Отметим, что если $(z_{нб}(x_0))_{j_0} > 0$, то значение целевой функции строго уменьшится.

Допустим, что матрица, составленная из базисных столбцов, $T_б = T_б(x_0)$ имела вид

$$T_б = (T_{i_1} | \ldots | T_{i_{s-1}} | T_{i_s} | T_{i_{s+1}} | \ldots | T_{i_m}). \tag{2.5.10}$$

В результате указанной выше замены базисных номеров новая матрица столбцов $\widetilde{T}_б = T_б(\widetilde{x})$ принимает вид

$$\widetilde{T}_б = (T_{i_1}| \ldots |T_{i_{s-1}}|(T_{нб})_{j_0}|T_{i_{s+1}}| \ldots |T_{i_m}). \tag{2.5.11}$$

Требуется показать, что эти столбцы линейно независимы, а для этого достаточно найти обратную к ней матрицу.

Более того, на следующем шаге алгоритма для вычисления новой оценки замещения $\widetilde{\sigma}_j = \sigma_j(\widetilde{x})$ и векторов $\widetilde{Z}_j = Z_j(\widetilde{x})$ в силу формул (2.5.2) и (2.5.5) опять потребуется вычислить матрицу $\widetilde{U} = U(\widetilde{x})$, обратную к матрице $\widetilde{T}_б$, и вектор $\widetilde{\Lambda} = \Lambda(\widetilde{x})$.

Будем обозначать через U_{rk} и $\widetilde{U}_{rk}$ элементы матриц U и $\widetilde{U}$, через $U_r = (U_{r1}, \ldots, U_{rm})$ — r-ю строку матрицы U, через $\widetilde{U}_r$ — r-ю строку матрицы $\widetilde{U}$.

Так как матрица U является по определению обратной к матрице $T_б$, то справедливо равенство $UT_б = E_m$, где матрица E_m есть единичная $m \times m$-матрица.

В свою очередь, чтобы искомая матрица $\widetilde{U}$ была обратной к матрице $\widetilde{T}_б$, должно выполняться равенство $\widetilde{U}\widetilde{T}_б = E_m$, которое (записанное по строкам $\widetilde{U}_r$ и столбцам $\widetilde{T}_{i_l}$) принимает вид

$$\widetilde{U}_r\widetilde{T}_{i_l} = U_rT_{i_l} = \delta_{rl} = \begin{cases} 1, & r = l, \\ 0, & r \neq l. \end{cases} \tag{2.5.12}$$

Непосредственной проверкой покажем справедливость соотношений (2.5.12), выбирая матрицу $\widetilde{U}$ по формуле

$$\widetilde{U}_r = \begin{cases} U_r - \dfrac{(Z_{j_0})_r}{(Z_{j_0})_s}\, U_s, & r \in \overline{1,m}\backslash\{s\}, \\[2ex] \dfrac{1}{(Z_{j_0})_s}\, U_s, & r = s. \end{cases} \tag{2.5.13}$$

1) Пусть $r = s$.

1, а) Пусть $r = s = l$. Тогда в силу (2.5.10) и (2.5.11) имеем $\widetilde{T}_{i_s} = (T_{нб})_{j_0}$, откуда и в силу определения Z_{j_0} и (2.5.13) получаем

$$\widetilde{U}_s\widetilde{T}_{i_s} = \frac{1}{(Z_{j_0})_s}\, U_s(T_{нб})_{j_0} = \frac{\langle e_s, U(T_{нб})_{j_0}\rangle}{(Z_{j_0})_s} = \frac{(Z_{j_0})_s}{(Z_{j_0})_s} = 1 = \delta_{ss}.$$

1, б) Пусть $r = s \neq l$. Тогда в силу (2.5.10) и (2.5.11) имеем $\widetilde{T}_{i_l} = T_{i_l}$, откуда и в силу (2.5.12) и (2.5.13) получаем

$$\widetilde{U}_s\widetilde{T}_{i_l} = \frac{1}{(Z_{j_0})_s}\, U_sT_{i_l} = \frac{1}{(Z_{j_0})_s}\, \delta_{sl} = 0 = \delta_{sl}.$$

2) Пусть $r \neq s$.

2, а) Пусть $r \neq s \neq l \neq r$. Тогда $\widetilde{T}_{i_l} = T_{i_l}$ и по формулам (2.5.12) и (2.5.13) получаем

$$\widetilde{U}_r \widetilde{T}_{i_l} = U_r T_{i_l} - \frac{(Z_{j_0})_r}{(Z_{j_0})_s} U_s T_{i_l} = \delta_{rl} - \frac{(Z_{j_0})_r}{(Z_{j_0})_s} \delta_{sl} = \delta_{rl}.$$

2, б) Пусть $l \neq r \neq s = l$. Из формулы (2.5.13) и равенства $\widetilde{T}_{i_s} = (T_{\text{нб}})_{j_0}$ по определению Z_j получаем

$$\widetilde{U}_r \widetilde{T}_{is} = U_r (T_{\text{нб}})_{j_0} - (Z_{j_0})_r \frac{U_s (T_{\text{нб}})_{j_0}}{(Z_{j_0})_s} = \\ = (Z_{j_0})_r - (Z_{j_0})_r \frac{\langle e_s, U(T_{\text{нб}})_{j_0} \rangle}{(Z_{j_0})_s} = 0 = \delta_{rl}.$$

2, в) Пусть $l \neq s \neq r = l$. Из формул (2.5.13) и (2.5.11) и равенства $\widetilde{T}_{i_l} = T_{i_l}$ получаем

$$\widetilde{U}_l \widetilde{T}_{i_l} = U_l T_{i_l} - \frac{(Z_{j_0})_l}{(Z_{j_0})_s} U_s T_{i_l} = 1 - \frac{(Z_{j_0})_l}{(Z_{j_0})_s} \delta_{sl} = \delta_{ll}.$$

В итоге формула (2.5.12) доказана. При этом доказано, что матрица $\widetilde{T}_{\text{б}}$ из (2.5.11) обратима, причем обратной к ней является матрица $\widetilde{U}$, задаваемая формулой (2.5.13).

Обозначим через Λ_k ($\widetilde{\Lambda}_k$) компоненты вектора $\Lambda = \Lambda(x_0)$ (вектора $\widetilde{\Lambda} = \Lambda(\widetilde{x})$). Для координат $\widetilde{\Lambda}_k$ справедлива формула

$$\widetilde{\Lambda}_k = \Lambda_k - \frac{U_{sk}}{(Z_{j_0})_s} \sigma_{j_0}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{2.5.14}$$

Для доказательства этой формулы напомним, что по определению вектор Λ вычисляется по формуле $\Lambda = U^T(x_0) c_{\text{б}}(x_0)$, где $c_{\text{б}}(x_0) = (c_{i_1}, \ldots, c_{i_m})^T$ — вектор базисных компонент вектора c из функционала $\langle c, z \rangle$. Уточним индекс $(I_{\text{нб}})_{j_0}$ в наборе $I_{\text{нб}}$. Обозначим его через $t = (I_{\text{нб}})_{j_0}$. Тогда новый вектор $\widetilde{c}_{\text{б}} = c_{\text{б}}(\widetilde{x})$ имеет вид

$$\widetilde{c}_{\text{б}} = (c_{i_1}, \ldots, c_{i_{s-1}}, c_t, c_{i_{s+1}}, \ldots, c_{i_m})^T.$$

Отсюда и в силу формулы (2.5.13) получаем для k-й компоненты

$$\widetilde{\Lambda}_k = (\widetilde{U}^T \widetilde{c}_{\text{б}})_k = \sum_{r=1,\ r\neq s}^{m} c_{i_r} \widetilde{U}_{rk} + c_t \widetilde{U}_{sk} = \\ = \sum_{r=1,\ r\neq s}^{m} c_{i_r} \left(U_{rk} - \frac{U_{sk}}{(Z_{j_0})_s} (Z_{j_0})_r \right) + c_t \frac{U_{sk}}{(Z_{j_0})_s}.$$

Так как при $r = s$ очевидно равенство $U_{sk} - \dfrac{U_{sk}}{(Z_{j_0})_s}\,(Z_{j_0})_s = 0$, то можем записать

$$\widetilde{\Lambda}_k = \sum_{r=1}^{m} c_{i_r}\left(U_{rk} - \frac{U_{sk}}{(Z_{j_0})_s}\,(Z_{j_0})_r\right) + c_t\,\frac{U_{sk}}{(Z_{j_0})_s} = \\ = \sum_{r=1}^{m} c_{i_r}U_{rk} - \frac{U_{sk}}{(Z_{j_0})_s}\left(\sum_{r=1}^{m} c_{i_r}(Z_{j_0})_r - c_t\right) = \\ = \Lambda_k - \frac{U_{sk}}{(Z_{j_0})_s}\left(\sum_{r=1}^{m} c_{i_r}(Z_{j_0})_r - c_t\right).$$

Вспоминая, что

$$\sigma_{j_0} = \langle Z_{j_0}, c_{\text{б}}\rangle - (c_{\text{нб}})_{j_0} = \sum_{r=1}^{m} c_{i_r}(Z_{j_0})_r - c_t,$$

получаем справедливость формулы (2.5.14).

В заключение заметим, что на каждом шаге алгоритма симплекс-метода необходимо формировать новые массивы индексов $\widetilde{I}_{\text{б}}$ и $\widetilde{I}_{\text{нб}}$, по формулам (2.5.13) и (2.5.14) вычислять новые $\widetilde{U}$ и $\widetilde{\Lambda}$, а по формуле (2.5.2) вычислять $\widetilde{\sigma}_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n - m$.

На практике обычно объединяют первую и вторую фазы симплекс-метода в так называемую *M-задачу*.

Пусть $e_m = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m$. Рассмотрим вместо задачи (2.4.12) следующую задачу:

$$\inf\,\{M\langle e_m, u\rangle + \langle c, x\rangle\} \quad \text{при условии} \quad (x, u) \in A_1 = \\ = \{(x, u) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x \geqslant 0,\ u \geqslant 0,\ u + Tx = b\}, \qquad (2.5.15)$$

которая зависит от параметра $M > 0$. В задаче (2.5.15) точка $(0, b)$ является крайней точкой допустимого множества A_1, причем легко находятся соответствующие $(0, b)$ базисные столбцы: это столбцы единичной $m \times m$-матрицы.

Допустим, что множество A в задаче (2.4.12) непусто. Если задача (2.4.12) имеет решение $-\infty$, то и (2.5.15) имеет решение $-\infty$, это очевидно.

Допустим, задача (2.4.12) имеет конечное решение. Обозначим через A_* множество точек решений, т. е. таких точек из множества A, что для любого $a \in A_*$ выполнено равенство $\inf\limits_{x \in A}\langle c, x\rangle = \langle c, a\rangle$. Обозначим через A_{1*} множество точек-решений задачи (2.5.15).

Напомним (лемма 2.4.1), что задача

$$\inf_{\lambda}\,\langle -b, \lambda\rangle \quad \text{на множестве} \quad \{\lambda \in \mathbb{R}^m \mid \langle T_i, \lambda\rangle \leqslant c_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}, \quad (2.5.16)$$

является двойственной к задаче (2.4.12), и поэтому в случае, когда решение задачи (2.4.12) конечно, решение задачи (2.5.16) совпадает с решением задачи (2.4.12).

Лемма 2.5.1. *Если в задаче* (2.4.12) *множество A непусто, задача имеет конечное численное значение f_* и если $\overline{\lambda}$ — некоторое решение задачи* (2.5.16), *то для всех $M > \|\overline{\lambda}\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |\overline{\lambda}_i|$ задача* (2.5.15) *имеет такое же численное значение, т. е. $g_*(M) = f_*$, причем $A_{1*} = \{(x,0)\,|\,x \in A_*\}$.*

Доказательство. Запишем функцию Лагранжа для задачи (2.5.16):

$$L = \langle -b, \lambda\rangle + \sum_{i=1}^{n} x_i(\langle T_i, \lambda\rangle - c_i), \quad x_i \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Перепишем ее в виде

$$L = \langle \lambda,\, Tx - b\rangle - \langle c, x\rangle.$$

Запишем условие седловой точки для решения $\overline{\lambda}$ задачи (2.5.16) и решения x_0 задачи (2.4.12):

$$L(\overline{\lambda}, x) \leqslant L(\overline{\lambda}, x_0).$$

Отсюда

$$\langle \overline{\lambda},\, Tx - b\rangle - \langle c, x\rangle \leqslant -\langle c, x_0\rangle,$$

$$\langle c, x_0\rangle = f_* \leqslant \langle c, x\rangle - \langle \overline{\lambda}, Tx - b\rangle = \langle c, x\rangle - \langle \overline{\lambda}, -u\rangle \leqslant \langle c, x\rangle + \|\overline{\lambda}\|_\infty \|u\|_1.$$

Зафиксируем число $M > \|\overline{\lambda}\|_\infty$. Переходя в неравенстве

$$f_* \leqslant \langle c, x\rangle + M\|u\|_1$$

к точной нижней грани по $(x,u) \in A_1$, получаем, что $f_* \leqslant g_*(M)$. Отсюда также следует, что $A_{1*} \neq \varnothing$.

Покажем, что $A_{1*} = \{(x,0)\,|\,x \in A_*\}$ и $f_* = g_*(M)$. Пусть точка $(x_*, 0) \in A_1$ такова, что $x_* \in A_*$. Имеем

$$f_* \leqslant g_*(M) \leqslant M \cdot 0 + \langle c, x_*\rangle = f_*,$$

т. е. $f_* = g_*(M)$, $(x_*, 0) \in A_{1*}$.

Пусть точка $(z_*, v_*) \in A_{1*}$. С учетом равенства $f_* = g_*(M)$ имеем

$$M\|v_*\|_1 + \langle c, z_*\rangle = g_*(M) = f_* \leqslant \langle c, z_*\rangle + \|\overline{\lambda}\|_\infty \|v_*\|_1,$$

откуда $(M - \|\overline{\lambda}\|_\infty)\|v_*\|_1 \leqslant 0$, т. е. $\|v_*\|_1 = 0$ и $(z_*, v_*) = (z_*, 0)$. При этом $\langle c, z_*\rangle = g_*(M) = f_*$, следовательно, $z_* \in A_*$. Итак, $A_{1*} = \{(x,0)\,|\,x \in A_*\}$. $\square$

Таким образом, нами обоснована замена задачи (2.4.12) на задачу (2.5.15), в которой объединены обе фазы симплекс-метода: фаза выбора начальной крайней точки и фаза нахождения решения задачи.

Замечание 2.5.1. На практике штрафной коэффициент $M > 0$ обычно выбирают больше, чем максимальное значение из модулей элементов матрицы T, и компонентов векторов b и c.

Если же в задаче (2.5.16) множество $\{\lambda \mid \langle T_i, \lambda\rangle \leqslant c_i,\ \ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ ограничено, то в качестве числа M можно взять полунорму этого множества.

Более подробное обсуждение M-задачи можно найти, например, в монографии [48].

Замечание 2.5.2. Описанный алгоритм симплекс-метода не является, вообще говоря, строго монотонным. Это связано с тем, что выбор разрешающего элемента $Z_{j_0 s}$ в формуле (2.5.6) в общем случае неоднозначен, т. е. возможны ситуации, при которых симплекс-метод <зацикливается>.

Зацикливание может случиться, когда, выполняя алгоритм по п. 2, б), мы каждый раз будем получать представления различными базисными столбцами $T_{\text{б}}$ одной и той же крайней точки множества A, т. е. $x_0 = \widetilde{x}$.

В настоящее время известны алгоритмы построения специального правила выбора номера s из множества индексов правой части формулы (2.5.6), при которых гарантируется строгая монотонность алгоритма симплекс-метода (т. е. неповторяемость на разных шагах алгоритма одних и тех же наборов $I_{\text{б}}$). Такие правила выбора разрешающего элемента принято называть *антициклинами*. Примеры задач, в которых зацикливание возникает, а также пример антициклина можно найти в книге [48].

§ 2.6. Приближения множеств и оценки

Известны различные способы приближенного описания выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$. Одним из простейших способов является приближение выпуклых компактов многогранниками. Например, выпуклый компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ можно приблизить выпуклым многогранником, определяемым конечной системой неравенств, т. е.

$$\widehat{A} = \bigcap_{i=1}^{I} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_i, x\rangle \leqslant s(p_i, A)\}, \tag{2.6.1}$$

где $s(p, A)$ — опорная функция множества A, а векторы p_i принадлежат некоторому конечному набору векторов, называемому в дальнейшем *сеткой* $\mathbf{C}$. Очевидно, что $A \subset \widehat{A}$.

Мы описали один из методов внешнего приближения компакта многогранником. Возможны и другие, как внешние, так и внутренние приближения телесных выпуклых компактов многогранниками. Методы приближения выпуклых множеств многогранниками часто необходимы, так как для решения задач, заданных конечным числом неравенств, разработаны эффективные аналитические и численные методы решения.

Следуя работам [45, 80] мы установим оценки погрешности указанного выше внешнего многогранного приближения выпуклого компакта.

Определение 2.6.1. *Сеткой* $\mathbf{C}$ *мелкости* $\Delta \in (0,1)$ называется такой конечный набор векторов $p_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \overline{1, I}$, из единичной сферы (т. е. $\|p_i\| = 1$), что для любого вектора $p \neq 0$, $p \in \mathbb{R}^n$ такого, что $p/\|p\| \notin \mathbf{C}$, существуют подмножество индексов $I_p \subset \overline{1, I}$ и числа $\alpha_i > 0$, $i \in I_p$ такие, что

$$\|p_i - p_j\| < \Delta \quad \forall\, i,\, j \in I_p, \quad \text{где} \quad p_i,\, p_j \in \mathbf{C}, \tag{2.6.2}$$

$$p = \sum_{i \in I_p} \alpha_i p_i, \quad p_i \in \mathbf{C}. \tag{2.6.3}$$

Лемма 2.6.1. *Для данной сетки* $\mathbf{C}$ *мелкости* $\Delta \in (0,1)$ *в представлении любого вектора* $p \neq 0$, $p/\|p\| \notin \mathbf{C}$, *в виде* (2.6.2), (2.6.3) *справедливы оценки*

$$\|\widehat{p} - p_j\| < \Delta \quad \forall\, j \in I_p, \quad 1 \geqslant \|\widehat{p}\| \geqslant 1 - \Delta^2, \tag{2.6.4}$$

где

$$\widehat{p} = \frac{p}{\alpha}, \quad \alpha = \sum_{i \in I_p} \alpha_i, \quad \widehat{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{\alpha}. \tag{2.6.5}$$

Доказательство. В силу выражений (2.6.2), (2.6.3), (2.6.5) получаем равенства $\widehat{p} = \sum\limits_{i \in I_p} \widehat{\alpha}_i p_i$, $\sum\limits_{i \in I_p} \widehat{\alpha}_i = 1$, откуда

$$\sum_{i \in I_p} \widehat{\alpha}_i (\widehat{p} - p_i) = 0, \quad \|\widehat{p} - p_j\| \leqslant \sum_{i \in I_p} \widehat{\alpha}_i \|p_i - p_j\| \leqslant \Delta \quad \forall\, j \in I_p,$$
$$\|\widehat{p}\| \leqslant \sum_{i \in I_p} \widehat{\alpha}_i \|p_i\| = 1. \tag{2.6.6}$$

С другой стороны, суммируя равенства

$$1 = \|p_i\|^2 = \|\widehat{p}\|^2 + 2\langle \widehat{p},\, p_i - \widehat{p} \rangle + \|p_i - \widehat{p}\|^2$$

с весами $\widehat{\alpha}_i$ из (2.6.5), в силу неравенств (2.6.6) получаем

$$1 = \|\widehat{p}\|^2 + \sum_{i \in I_p} \widehat{\alpha}_i \|p_i - \widehat{p}\|^2 \leqslant \|\widehat{p}\|^2 + \Delta^2 \leqslant \|\widehat{p}\| + \Delta^2$$

(где последнее неравенство верно в силу $\|\widehat{p}\| \leqslant 1$), откуда следует правое неравенство в (2.6.4). □

Определение 2.6.2. Пусть задана сетка $\mathbf{C}$ мелкости Δ. На множестве положительно однородных функций $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ зададим *сеточный оператор* $\mathcal{C}$ по формуле

$$\mathcal{C}f(p) = \begin{cases} f(p), & \frac{p}{\|p\|} \in \mathbf{C}, \\ +\infty, & \frac{p}{\|p\|} \notin \mathbf{C}. \end{cases} \tag{2.6.7}$$

Для получения оценок приближения множеств, использующих оператор $\mathcal{C}$, нам потребуются еще один вспомогательный оператор, вычисляемый для данной сетки $\mathbf{C}$ мелкости Δ по формуле

$$\mathcal{U}f(p) = \begin{cases} f(p), & \frac{p}{\|p\|} \in \mathbf{C}, \\ \sum\limits_{i \in I_p} \alpha_i f(p_i), & \frac{p}{\|p\|} \notin \mathbf{C}, \end{cases} \tag{2.6.8}$$

где для каждого вектора $p \neq 0$ определены множества индексов I_p и числа $\alpha_i > 0$ при $i \in I_p$ также, как и в определении 2.6.1.

Лемма 2.6.2. *Пусть дана сетка* $\mathbf{C}$ *мелкости* $\Delta < 1$, *на которой определены сеточные операторы* $\mathcal{C}, \mathcal{U}$, *действующие на множестве положительно однородных функций* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Тогда:

1) *если функция* f *выпукла, то* $\operatorname{co} \mathcal{C}f \geqslant f$, *причем*

$$\operatorname{co} \mathcal{C}f(p) = f(p) \quad \forall\, p \in \mathbf{C};$$

2) *если* f *выпукла, то* $f \leqslant \operatorname{co} \mathcal{U}f$;

3) $\operatorname{co} \mathcal{C}f = \operatorname{co} \mathcal{U}f \quad \forall\, f$;

4) $\operatorname{co} f \leqslant \operatorname{co} \mathcal{C}f$;

5) $\operatorname{co} \mathcal{C}\|p\| \leqslant \|p\|/(1 - \Delta^2)$.

Доказательство. Первую часть соотношения 1) и соотношения 4) легко получить из неравенства $\mathcal{C}f \geqslant f$, взяв от обеих его частей выпуклую оболочку. Вторая часть соотношения 1) следует из его первой части и того, что для любой точки $p \in \mathbf{C}$ справедливо неравенство $\operatorname{co} \mathcal{C}f(p) \leqslant \mathcal{C}f(p) = f(p)$.

Соотношение 2) следует из определений оператора $\mathcal{U}$ и выпуклой функции.

Так как по формулам (2.6.7), (2.6.8) $\mathcal{C}f \geqslant \mathcal{U}f$, то $\operatorname{co}\mathcal{C}f \geqslant \operatorname{co}\mathcal{U}f$. С другой стороны, $\operatorname{co}\mathcal{C}f(p) \leqslant \sum\limits_{i\in I_p} \alpha_i f(p_i) = \mathcal{U}f(p)$, т. е. $\operatorname{co}\mathcal{C}f \leqslant \operatorname{co}\mathcal{U}f$. В итоге получаем равенство 3).

Докажем неравенство 5). Из определения оператора $\mathcal{U}$ получаем

$$\mathcal{U}\|p\| - \|p\| = \sum_{i\in I_p} \alpha_i \|p_i\| - \|p\| = \alpha\biggl(\sum_{i\in I_p} \widehat{\alpha}_i - \|\widehat{p}\|\biggr) = \alpha(1 - \|\widehat{p}\|).$$

В силу леммы 2.6.1 получаем, что

$$\alpha = \frac{\|p\|}{\|\widehat{p}\|} \leqslant \frac{\|p\|}{1-\Delta^2} \quad \text{и} \quad 1 - \|\widehat{p}\| \leqslant \Delta^2,$$

откуда следует $\mathcal{U}\|p\| - \|p\| \leqslant \|p\|\,\dfrac{\Delta^2}{1-\Delta^2}$, т. е. $\mathcal{U}\|p\| \leqslant \|p\|\,\dfrac{1}{1-\Delta^2}$. Взяв выпуклую оболочку от обеих частей неравенства и учитывая соотношение 3), получаем требуемое неравенство 5). $\square$

Замечание 2.6.1. В силу леммы 2.6.2 оператор $\mathcal{C}$ позволяет описать внешнее приближение выпуклых множеств многогранниками. В самом деле, многогранник $\widehat{A}$, заданный неравенствами (2.6.1) при условии, что все $p_i \in \mathbf{C}$, приближает извне выпуклый компакт A, причем опорная функция многогранника $\widehat{A}$ удовлетворяет равенству $s(p, \widehat{A}) = \operatorname{co}\mathcal{C}s(p, A)$ для всех $p \in \mathbb{R}^n$, причем $s(p, \widehat{A}) = s(p, A)$ для всех $p \in \mathbf{C}$.

Для получения оценок внешних многогранных приближений выпуклых компактов сформулируем условия на изучаемый класс положительно однородных функций.

Предположение 1. *Положительно однородная функция* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условию Липшица с константой* $L > 0$, *а ее выпуклая оболочка ограничена с константой* $M > 0$, *т. е.* $|\operatorname{co} f(p)| \leqslant M\|p\|$ $\forall\, p \in \mathbb{R}^n$.

Предположение 2. *Существуют число* $r > 0$ *и точка* $a \in \mathbb{R}^n$ *такие, что*

$$f(p) \geqslant r\|p\| + \langle p, a\rangle \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^n.$$

Поясним геометрический смысл предположений 1 и 2. Если по функции f, удовлетворяющей предположениям 1 и 2, определим множество

$$A = \bigcap_{p\in\partial B_1(0)} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x\rangle \leqslant f(p)\},$$

то оно непусто, содержится в шаре радиуса M с центром в нуле и само содержит шар $B_r(a)$.

Предположения 1 и 2, очевидно, выполняются для опорных функций компактов с непустой внутренностью, причем $L = M = \|A\|$.

Теорема 2.6.1. (Е.С.Половинкин [79, 80]). *Пусть функция* f *удовлетворяет предположениям* 1 *и* 2, *пусть задана сетка* $\mathbf{C}$ *мелкости* $\Delta \in (0, 1/2)$, *на которой определен сеточный оператор* $\mathcal{C}$. *Тогда справедливы оценки*

$$\operatorname{co} f(p) \leqslant \operatorname{co} \mathcal{C}f(p) \leqslant \operatorname{co} f(p) + \frac{4LM\Delta\|p\|}{r} \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^n. \tag{2.6.9}$$

В случае, когда функция f *выпукла и удовлетворяет только предположению* 1, *справедлива оценка*

$$f(p) \leqslant \operatorname{co} \mathcal{C}f(p) \leqslant f(p) + 2L\Delta\|p\| \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^n. \tag{2.6.10}$$

Доказательство. Так как $f \leqslant \mathcal{C}f$, то левые неравенства в (2.6.9) и (2.6.10) очевидны. Зафиксируем вектор $p \neq 0$. Используя для произвольно выбранного вектора p обозначения из определения 2.6.1 и леммы 2.6.1 и выбирая по заданной сетке $\mathbf{C}$ оператор $\mathcal{U}$ (2.6.8), получаем с учетом формулы (2.6.4), предположения 1 и условия на Δ выражения

$$\mathcal{U}f(p) - f(p) = \alpha\bigg(\sum_{i\in I_p} \widehat{\alpha}_i f(p_i) - f(\widehat{p})\bigg) \leqslant \\ \leqslant \alpha \sum_{i\in I_p} \widehat{\alpha}_i L\|p_i - \widehat{p}\| \leqslant \alpha L\Delta = \frac{\|p\|}{\|\widehat{p}\|}\, L\Delta \leqslant 2\|p\|L\Delta. \tag{2.6.11}$$

Если функция f выпукла и для нее выполнено предположение 1, то в полученном неравенстве

$$\mathcal{U}f(p) \leqslant f(p) + 2L\Delta\|p\| \quad \forall\, p$$

вычислим выпуклую оболочку от обеих его частей и с учетом равенства 3) из леммы 2.6.2 получаем оценку (2.6.10).

В случае, когда функция f невыпукла, в приведенном выше неравенстве оценивая $\|p\|$ из предположения 2, получаем

$$\mathcal{U}f(p) \leqslant f(p)\Big(1 + \frac{2L\Delta}{r}\Big) - \frac{2L\Delta\,\langle p, a\rangle}{r}. \tag{2.6.12}$$

Вычислив выпуклую оболочку справа и слева в неравенстве (2.6.12), воспользовавшись слева леммой 2.6.2, п. 3) и справа простым свойством выпуклой оболочки (см. предложение 1.6.3, п. 3), получаем оценку

$$\operatorname{co} \mathcal{C}f(p) \leqslant \operatorname{co} f(p) + (\operatorname{co} f(p) - \langle p, a\rangle)\, \frac{2L\Delta}{r} \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^n,$$

откуда, учитывая, что в силу предположений 1 и 2 справедливы неравенства

$$\operatorname{co} f(p) + \langle -p, a\rangle \leqslant \operatorname{co} f(p) + \operatorname{co} f(-p) \leqslant 2M\|p\|,$$

получаем правое неравенство в выражении (2.6.9). □

Следствие 2.6.1. *Пусть в теореме* 2.6.1 *функция* $f(p)$ *является опорной функцией некоторого выпуклого компакта* A *из* $\mathbb{R}^n$, *т. е.* $f(p) = s(p, A)$, *и пусть*

$$\widehat{A} = \bigcap_{p\in\mathbf{C}} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x\rangle \leqslant s(p, A)\} \tag{2.6.13}$$

есть его внешняя многогранная аппроксимация с нормалями p *из сетки* $\mathbf{C}$ *мелкости* $\Delta > 0$, *Отметим, что его опорная функция имеет вид* $s(p, \widehat{A}) = \operatorname{co} \mathcal{C}s(p, A)\ \ \forall\, p \in \mathbb{R}^n$, *а функция* $f(p) = s(p, A)$ (*в силу свойств опорной функции*) *удовлетворяет предположению* 1 *с константой* $L = M = \|A\|$, *где* $\|A\| = \max\{\|a\| \mid a \in A\}$ — *полунорма компакта* A.

Тогда из оценки (2.6.10) *в силу формулы* (1.11.19) *получаем следующую оценку*:

$$h(A, \widehat{A}) \leqslant 2\|A\|\Delta.$$

Следствие 2.6.2. *Допустим, что положительно однородная функция* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет предположениям* 1 *и* 2, *но не является выпуклой функцией. Тем самым она является предопорной функцией некоторого* (*не известного нам*) *выпуклого компакта* A *с непустой внутренностью, т. е.* $\operatorname{co} f(p) = s(p, A)$. (*Такая ситуация возникает, например, в случае, когда* $f(p) = s(p, B) - s(p, C)$, *где* B *и* C — *заданные своими опорными функциями выпуклые компакты, т. е. нам необходимо по значениям* $f(p)$ *на сетке* $\mathbf{C}$ *получить значения опорной функции множества* $A = B \overset{*}{-} C$ *тоже на сетке* $\mathbf{C}$, *не вычисляя выпуклой оболочки* $\operatorname{co} f(p)$ *для всех* p). *Вычисляя приближенное множество* $\widehat{A}$ *через конечную систему неравенств*

$$\widehat{A} = \bigcap_{p\in\mathbf{C}} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x\rangle \leqslant f(p)\}, \tag{2.6.14}$$

из оценки (2.6.9) *получаем в метрике Хаусдорфа оценку*

$$h(A, \widehat{A}) \leqslant \frac{4ML\Delta}{r},$$

т. е. эта оценка прямо пропорциональна мелкости Δ *сетки* $\mathbf{C}$ *и обратно пропорциональна радиусу вписанного шара.*

Таким образом, телесность множества A играет не менее важную роль для точности аппроксимации, чем мелкость Δ сетки $\mathbf{C}$.

В гл. 4 мы получим другие аппроксимации компактов множествами, задаваемыми системами с конечным числом неравенств, точность которых будет пропорциональна Δ^2 на сетке $\mathbf{C}$.

Рассмотрим еще один способ аппроксимации выпуклых тел множествами, задаваемыми аналитическими функциями.

Теорема 2.6.2 (Г. Минковский [20]). *Для любого выпуклого компактного тела A из $\mathbb{R}^n$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти строго выпуклый компакт B такой, что $A \subset B \subset A + B_\varepsilon(0)$ и компакт B задается неравенством $B = \{x \mid f(x) \leqslant 1\}$, где функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является аналитической функцией аргументов $(x_1 \ldots, x_n)$, причем в каждой точке границы B существует касательная гиперплоскость.*

Доказательство. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и считаем, что $0 \in \operatorname{int} A$. На основании теоремы 2.6.1 существует многогранник $\widehat{A}$, содержащий множество A и такой, что $h(A, \widehat{A}) < \varepsilon/2$. То есть нужно взять сетку $\mathbf{C}$ мелкости $\Delta < \varepsilon/(2\|A\|)$, состоящую из I точек нормалей ($I \geqslant 3$), и требуемое множество $\widehat{A}$ задается формулой (2.6.13). Определим функцию

$$L(x, p) = \frac{\langle p, x\rangle}{s(p, A)} - 1,$$

где $p \in \mathbf{C}$.

Тогда множество $\widehat{A}$ можно представить в виде ($p_i \in \mathbf{C}$)

$$\widehat{A} = \bigcap_{i=1}^{I} \{x \in \mathbb{R}^n \mid L(x, p_i) \leqslant 0\}.$$

Выберем число α_0, большее чем $\dfrac{\varepsilon + 2\|A\|}{\varepsilon} \ln I$, определим функцию

$$f(x) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} e^{\alpha_0 L(x, p_i)} \tag{2.6.15}$$

и множество B по формуле $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leqslant 1\}$. Так как для любого $x_0 \in \widehat{A}$ справедливо неравенство $L(x_0, p_i) \leqslant 0 \quad \forall\, i \in \overline{1, I}$, то в силу определения (2.6.15) получаем, что $f(x_0) \leqslant 1$, т. е. справедливо включение $\widehat{A} \subset B$. В свою очередь для любой точки $x_0 \notin \widehat{A} + \frac{\varepsilon}{2} B_1(0)$ существует номер $i_0 \in \overline{1, I}$ такой, что

$$L(x_0, p_{i_0}) > \frac{\varepsilon}{2s(p_{i_0}, A)} \geqslant \frac{\varepsilon}{2\|A\|}.$$

Отсюда в силу выбора числа α_0 получаем, что $f(x_0) \geqslant \frac{1}{I}\, e^{\alpha_0 L(x_0, p_{i_0})} > 1$, т. е. $x_0 \notin B$, откуда следует включение

$$B \subset \widehat{A} + \frac{\varepsilon}{2}\, B_1(0).$$

В итоге получаем включения

$$A \subset B \subset A + B_\varepsilon(0).$$

Докажем, что множество B строго выпукло и в каждой граничной точке множества B существует касательная гиперплоскость к поверхности множества B. Для этого вычислим производную функции f по произвольному направлению $l \in \mathbb{R}^n$, $l \neq 0$:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial l} = \frac{d}{dt}\, f(x+tl)\Big|_{t=0} = \frac{1}{I}\,\alpha_0 \sum_{i=1}^{I} e^{\alpha_0 L(x, p_i)}\, \frac{d}{dt}\, L(x+tl,\, p_i)\Big|_{t=0} = \\ = \frac{1}{I}\,\alpha_0 \sum_{i=1}^{I} e^{\alpha_0 L(x,p_i)}\, \frac{\langle p_i, l\rangle}{s(p_i, A)}. \quad (2.6.16)$$

Аналогично, вычисляя вторую производную функции f по направлению l, получаем

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial l^2} = \frac{1}{I}\,\alpha_0^2 \sum_{i=1}^{I} e^{\alpha_0 L(x,p_i)} \left(\frac{\langle p_i, l\rangle}{s(p_i, A)}\right)^2,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial l^2} > 0 \quad \forall\, l \in \mathbb{R}^n, \quad l \neq 0. \qquad (2.6.17)$$

Для любой граничной точки $x_0 \in \partial B$, выбирая направление $l = x_0$, получаем из выражения (2.6.16) формулу

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_0} = \langle x_0,\, \nabla f(x_0)\rangle = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \alpha_0 e^{\alpha_0 L(x_0,p_i)} (L(x_0, p_i) + 1).$$

Так как для граничной точки x_0 имеется хотя бы одно неравенство $L(x_0, p_{i_0}) \geqslant 0$, где $i_0 \in \overline{1, I}$, то, учитывая очевидную оценку $te^t \geqslant -1/e$, верную для всех $t \in \mathbb{R}$, и условия $\alpha_0 > \ln I > \ln 3$, получаем

$$\langle e^{\alpha_0} x_0,\, \nabla f(x_0)\rangle = e^{\alpha_0}\, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_0} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \alpha_0 (L(x_0, p_i) + 1) e^{\alpha_0 (L(x_0,p_i)+1)} \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{I}\left(\alpha_0 e^{\alpha_0} - \frac{I-1}{e}\right) \geqslant \alpha_0 - \frac{I-1}{I \cdot e} > \alpha_0 - \frac{1}{e} > 0. \quad (2.6.18)$$

Таким образом, в силу неравенства (2.6.18) мы доказали, что градиент $\nabla f(x_0)$ не равен нулю в любой точке x_0 границы ∂B, т. е. в этой точке x_0 существует касательная гиперплоскость к границе ∂B.

Из неравенства (2.6.17) следует выпуклость компакта B, а также то, что касательная плоскость, проведенная в произвольной граничной точке множества B, имеет лишь одну общую точку с компактом B, т. е. множество B есть строго выпуклый компакт. $\square$

Следствие 2.6.3. *Если выпуклый компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет непустую внутренность, то при желании можно легко построить внутренние многогранные или гладкие аппроксимации множества A с любой заданной точностью в метрике Хаусдорфа.*

В самом деле, пусть число $r > 0$ таково, что справедливо включение $B_r(0) \subset A$, т. е. справедливо неравенство $r\|p\| \leqslant s(p, A)\ \ \forall\, p \in \mathbb{R}^n$.

В силу теорем 2.6.1 и 2.6.2 можем построить внешнюю (многогранную или гладкую) аппроксимацию компакта A с точностью до $r \cdot \varepsilon > 0$. Это значит, что справедливы неравенства

$$s(p, A) \leqslant s(p, B) \leqslant s(p, A) + r\varepsilon\|p\| \leqslant s(p, A)(1+\varepsilon) \quad \forall p \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда следует, что выпуклый компакт $\widetilde{B} = \dfrac{1}{1+\varepsilon}\, B$ содержится в компакте A и приближает его с точностью до

$$h\Big(\frac{1}{1+\varepsilon}\, A,\ A\Big) \leqslant \varepsilon\|A\|.$$

При работе с выпуклыми множествами, когда их нужно складывать и вычитать по Минковскому, оказывается недостаточным приближение их выпуклыми многогранниками или гладкими множествами. Необходимо уметь вычислять опорные функции этих аппроксимаций, так как сумма множеств может быть вычислена лишь через сумму опорных функций данных множеств.

Пусть множество $\widehat{A}$ задано конечной системой неравенств (2.6.14), где функция $f(p)$ не является выпуклой. Самый простой способ вычислять опорную функцию по ее определению: $s(p, \widehat{A}) = \max\limits_{x \in \widehat{A}} \langle p, x\rangle$. Но так как множество задано через систему линейных неравенств, то задача нахождения значения опорной функции на заданном векторе $p \in \mathbb{R}^n$ есть задача линейного программирования. Для описания выпуклых многогранников достаточно найти значения опорной функции лишь на сетке $\mathbf{C}$, на которой определено множество $\widehat{A}$ в (2.6.14). Тем не менее необходимо решить много однотипных задач линейного программирования с общей системой неравенств и при различных максимизируемых линейных функционалах (для всех $p \in \mathbf{C}$).

Возникает проблема экономного решения данного семейства однотипных задач.

Приведем описание одного алгоритма приближенного решения семейства задач линейного программирования с общей системой линейных неравенств. Будем считать, что дана совокупность точек $\{p_i\}_{i=1}^m$ из единичной сферы $\partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, которую обозначим буквой $\mathbf{C}_1$.

На сетке $\mathbf{C}_1$ задана функция $f(p)$. Будем считать, что мелкость сетки $\mathbf{C}_1$ есть $\Delta_1 \in (0,1)$. Для каждого $p_k \in \mathbf{C}_1$ задан целевой функционал $g_k(x) = \langle p_k, x\rangle$.

Рассмотрим семейство k-задач (где $k \in \overline{1,m}$)

$$\max\{g_k(x)\,|\,x \in A\}, \quad \text{где} \quad A = \bigcap_{p\in\mathbf{C}_1} \{\, x \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle p, x\rangle \leqslant f(p)\}. \tag{2.6.19}$$

Для работы алгоритма существенно выполнение следующего предположения.

Предположение 3. *Множество A из* (2.6.19) *ограничено, т. е. $d = \operatorname{diam} A < +\infty$, и имеет непустую внутренность, т. е. существуют вектор $a \in \mathbb{R}^n$ и число $r > 0$ такие, что $\langle p, a\rangle + r \leqslant f(p)$ для всех $p \in \mathbf{C}_1$.*

Опишем алгоритм одновременного приближенного решения семейства k-задач (2.6.19) при всех $k \in \overline{1,m}$.

Первый шаг. Прежде всего проверим, что в задаче (2.6.19) выполнено предположение 3. Для этого найдем вектор $a \in \mathbb{R}^n$ и число r как решение следующей задачи:

$$\max\{\inf\{\|a-y\|\,|\,y \in \mathbb{R}^n\backslash A\}\,|\,a \in A\}.$$

Сведем эту задачу к задаче линейного программирования. Для этого введем дополнительную переменную $\lambda \in \mathbb{R}$ и решим задачу (линейного программирования) вида

$$\max\{\lambda\,|\,(\lambda, z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\colon\ \langle p, z\rangle - f(p) + \lambda \leqslant 0 \quad \forall\, p \in \mathbf{C}_1\},$$

в результате чего получаем точку $z = a \in \mathbb{R}^n$ — центр максимального вписанного в A шара и число $\lambda = r > 0$ — точную верхнюю грань радиусов всех шаров, вписанных в A.

Если $a \neq 0$, то делаем в (2.6.19) замену переменного x на $x + a$, т. е. множество A заменяем на множество $A - a$, а функции $g_k(z)$ — на $g_k(z+a)$. В итоге сводим задачу к случаю, когда центр максимального вписанного в A шара находится в точке 0 и справедливы включения

$$B_r(0) \subset A \subset B_d(0). \tag{2.6.20}$$

Второй шаг. На единичной сфере введем новую сетку $\mathbf{C}_2 = \{q_j\}_{j=1}^N$ мелкости $\Delta_2 \in (0, 1/2)$. Для каждого вектора $q \in \mathbf{C}_2$ вычислим значение

$$s^\circ(q) = \max\left\{ \frac{\langle p, q\rangle}{f(p)} \;\middle|\; p \in \mathbf{C}_1 \right\}.$$

Третий шаг. Для всех векторов $q \in \mathbf{C}_2$ определим векторы $z(q) = q/s^\circ(q)$, которые в силу выбора функции $s^\circ(q)$ принадлежат множеству A. Определим выпуклый многогранник

$$A_1 = \mathrm{co} \bigcup_{q \in \mathbf{C}_2} z(q), \tag{2.6.21}$$

который по построению является вписанным во множество A. Далее для каждого $k \in \overline{1, m}$ находим (перебором) вектор $z_k \in \bigcup\limits_{q \in \mathbf{C}_2} \{z(q)\}$ такой, что $g_k(z_k) = \max\{g_k(z(q)) \,|\, q \in \mathbf{C}_2\}$. Это и есть приближенное решение k-задачи (2.6.19).

Теорема 2.6.3 [84]. *Если в семействе k-задач* (2.6.19) *выполнено предположение* 3 *с центром максимального вписанного шара в точке $a = 0$ и если через $\overline{z}_k$ обозначено некоторое точное решение k-задачи, то для приближенного решения z_k, получаемого в результате реализации приведенного выше алгоритма, справедливы соотношения* (*см.* (2.6.21))

$$A_1 \subset A \subset A_1 + \frac{2d^2 \Delta_2}{r} B_1(0), \tag{2.6.22}$$

$$g_k(z_k) \leqslant g_k(\overline{z}_k) \leqslant g_k(z_k) + \frac{2d^2 \Delta_2}{r}. \tag{2.6.23}$$

Доказательство. Рассмотрим поляру множества A, т. е.

$$A^\circ = \{\, y \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle z, y\rangle \leqslant 1 \quad \forall\, z \in A\}.$$

В силу примера 1.12.2 и леммы 1.12.3 получаем равенство

$$A^\circ = \mathrm{co} \bigcup_{p \in \mathbf{C}_1} \{z \,|\, \langle p, z\rangle \leqslant f(p)\}^\circ = \mathrm{co} \bigcup_{p \in \mathbf{C}_1} \left[0;\ \frac{p}{f(p)}\right].$$

Из включений (2.6.20) и леммы 1.12.1 следуют включения

$$\frac{1}{d} B_1(0) \subset A^\circ \subset \frac{1}{r} B_1(0), \tag{2.6.24}$$

из которых получаем

$$\|A^\circ\| = h(0, A^\circ) \leqslant \frac{1}{r}, \quad s(q, A^\circ) \geqslant \frac{1}{d} \quad \forall\, q \in \partial B_1(0). \tag{2.6.25}$$

Определим множество

$$A_1^\circ = \bigcap_{q \in \mathbf{C}_2} \{z \mid \langle q, z\rangle \leqslant s(q, A^\circ)\}.$$

Так как для всех $q \in \mathbf{C}_2$ справедливы равенства $s^\circ(q) = s(q, A^\circ)$, то из определения множества A_1° следует включение $A^\circ \subset A_1^\circ$. Как показано в теореме 2.6.1, при выборе сетки $\mathbf{C}_2$ мелкости $\Delta_2 < 1/2$ множество A_1° как пересечение полупространств с нормалями, образующими сетку $\mathbf{C}_2$, будет ограниченным множеством. В самом деле, в силу правого включения в формуле (2.6.24) и оценки формулы (2.6.10) теоремы 2.6.1 (где надо взять $f(p) = s(p, A^\circ)$ и $\mathbf{C} = \mathbf{C}_2$) выполнено включение

$$A_1^\circ \subset A^\circ + 2\|A^\circ\|\Delta_2 B_1(0) \subset \frac{1 + 2\Delta_2}{r} B_1(0). \tag{2.6.26}$$

Опорная функция $s(q, A_1^\circ)$ ограниченного множества A_1° удовлетворяет условию Липшица с константой $\|A_1^\circ\| = h(0, A_1^\circ)$ (см. лемму 1.6.4). Поэтому из (2.6.25) и формулы (2.6.10) теоремы 2.6.1 получаем

$$s(q, A_1^\circ) \leqslant s(q, A^\circ)\Bigl(1 + \frac{2d}{r}\,\Delta_2\Bigr) \quad \forall\, q \in \partial B_1(0),$$

т. е. справедливо включение

$$A_1^\circ \subset A^\circ\Bigl(1 + \frac{2d}{r}\,\Delta_2\Bigr). \tag{2.6.27}$$

Определяя множество A_1 как поляру множества A_1°, получаем

$$A_1 = (A_1^\circ)^\circ = \operatorname{co} \bigcup_{q \in \mathbf{C}_2} \Bigl[0;\ \frac{q}{s^\circ(q)}\Bigr].$$

Из включения $A^\circ \subset A_1^\circ$ следует включение $A_1 \subset A$.

Из известного свойства поляры $(\alpha A)^\circ = (1/\alpha)A^\circ$ при $0 \in \operatorname{int} A$ и $\alpha > 0$ (лемма 1.12.1) и из включения (2.6.27) получаем включение

$$A \subset A_1\Bigl(1 + \frac{2d\Delta_2}{r}\Bigr),$$

которое эквивалентно неравенствам

$$s(q, A) \leqslant s(q, A_1)\Bigl(1 + \frac{2d\Delta_2}{r}\Bigr) \quad \forall\, q \in \partial B_1(0). \tag{2.6.28}$$

Из включения $A_1 \subset A \subset B_d(0)$ и неравенств (2.6.28) получаем неравенства

$$s(q, A_1) \leqslant d, \quad 0 \leqslant s(q, A) - s(q, A_1) \leqslant \frac{2d^2\Delta_2}{r} \quad \forall\, q \in \partial B_1(0).$$

Последнее неравенство в силу леммы 1.11.4 и означает выполнение включения (2.6.22).

Докажем (2.6.23). Так как $A_1 \subset A$, то $g_k(z_k) \leqslant g_k(\overline{z}_k)$. С другой стороны, в силу (2.6.22) найдется $x_k \in A_1$ такое, что $\|\overline{z}_k - x_k\| \leqslant \leqslant 2d^2\Delta_2/r$. Отсюда

$$g_k(\overline{z}_k) \leqslant g_k(x_k) + \|p_k\| \cdot \|\overline{z}_k - x_k\| \leqslant g_k(z_k) + \frac{2d^2\Delta_2}{r}.$$

Таким образом, требуемые неравенства (2.6.23) доказаны. □

Замечание 2.6.2. Отметим, что объем вычислений в предложенном алгоритме составляет один симплекс-метод плюс $O(mN)$ арифметических операций (умножений).

§ 2.7. Некоторые задачи теории приближений

Определение 2.7.1. Банахово пространство E называется *равномерно выпуклым* пространством, если для $\forall\,\varepsilon \in (0, 2]$ функция

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{1}{2}\,\|x + y\| \;\middle|\; x,\, y \in B_1(0),\ \|x - y\| \geqslant \varepsilon\right\} \tag{2.7.1}$$

строго больше нуля.

Функцию $\delta(\varepsilon)$ из (2.7.1) принято называть *модулем выпуклости* пространства E. Легко видеть, что геометрический смысл модуля выпуклости следующий: это минимальный из радиусов вписанных в $B_1(0)$ шаров наибольшего радиуса с центром в точке $(x+y)/2$ по всем точкам x, y из шара $B_1(0)$ таким, что $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$.

Например, гильбертово пространство $\mathcal{H}$ является равномерно выпуклым с модулем

$$\delta_{\mathcal{H}}(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}\ .$$

Более того, по теореме Дэя–Нордлендера гильбертово пространство является наиболее выпуклым среди всех равномерно выпуклых банаховых пространств, именно, если E — равномерно выпуклое банахово пространство с модулем δ_E, то $\delta_E(\varepsilon) \leqslant \delta_{\mathcal{H}}(\varepsilon)$ (см. гл. 3, § 3 в [37]).

Отметим, что модули выпуклости некоторых конкретных пространств, например, $L_p[0, 1]$, при $1 < p < \infty$ можно найти в книге [37]. Также известно, что всякое равномерно выпуклое банахово пространство рефлексивно (см., например, [37, 49]).

Из определения 2.7.1 сразу следует строгая выпуклость шара $B_1(0)$ и монотонность модуля выпуклости:

$$\delta(\varepsilon_1) \leqslant \delta(\varepsilon_2) \quad \text{при} \quad \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2. \tag{2.7.2}$$

Кроме того, из геометрической трактовки функции $\delta(\varepsilon)$ из (2.7.1) следует неравенство

$$\delta(\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.7.3}$$

Отметим, что из теоремы Дэя–Нордлендера следует даже более сильное неравенство $\delta(\varepsilon) \leqslant \varepsilon^2/4$.

Лемма 2.7.1. *Пусть E — равномерно выпуклое банахово пространство. Пусть даны точки x, $y \in B_1(0)$, $x \neq y$, и число $\beta \in (0, 1/2)$. Тогда*

$$1 - \|\beta x + (1-\beta)y\| \geqslant 2\beta\delta(\|x-y\|). \tag{2.7.4}$$

Доказательство. По определению модуля выпуклости выполнено включение

$$B_{\delta(\|x-y\|)}\left(\frac{x+y}{2}\right) \subset B_1(0).$$

Пусть $z = \beta x + (1-\beta)y$, $z \in [x, (x+y)/2]$. Так как $y \in B_1(0)$, то

$$\operatorname{co}\left(\{y\} \cup B_{\delta(\|x-y\|)}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \subset B_1(0),$$

поэтому, применяя к шару $B_{\delta(\|x-y\|)}((x+y)/2)$ гомотетию с центром y и коэффициентом $\|y-z\|/\|y-(x+y)/2\| = 2\beta$, получаем

$$B_{2\beta\delta(\|x-y\|)}(z) \subset \operatorname{co}\left(\{y\} \cup B_{\delta(\|x-y\|)}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \subset B_1(0),$$

откуда следует, что $\|z\| + 2\beta\delta(\|x-y\|) \leqslant 1$. □

Лемма 2.7.2. *Пусть E — равномерно выпуклое банахово пространство. Пусть числа $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (0, 1/2)$, векторы x, $z \in E$ и функционал $p \in E^*$ удовлетворяют условиям* (2.7.5)–(2.7.7):

$$\|z\| \leqslant 1 = \|x\| = \langle p, x\rangle = \|p\|_*, \tag{2.7.5}$$

$$\langle p, z\rangle \leqslant 1 - \alpha, \tag{2.7.6}$$

$$\|z - \beta x\| \leqslant 1 - \beta. \tag{2.7.7}$$

Тогда

$$\|z\| \leqslant 1 - 2\beta\delta(\alpha). \tag{2.7.8}$$

Доказательство. Определим $y = \dfrac{1}{1-\beta}(z - \beta x)$; тогда в силу условия (2.7.7) получаем, что $\|y\| \leqslant 1$ и $z = \beta x + (1-\beta)y$. Из леммы 2.7.1 и свойства (2.7.2) получаем

$$1 - \|z\| \geqslant 2\beta\delta(\|x-y\|) \geqslant 2\beta\delta(\|x-z\|).$$

Далее, в силу формул (2.7.5) и (2.7.6) получаем

$$\|x-z\| = \|p\|_*\|x-z\| \geqslant \langle p, x-z\rangle = \langle p, x\rangle - \langle p, z\rangle \geqslant \alpha.$$

Поэтому $\|z\| \leqslant 1-2\beta\delta(\alpha)$, что и требовалось. □

Лемма 2.7.3. *Пусть пространство E является строго выпуклым, т. е. граница шара в E не содержит отрезков. Тогда для любых линейно независимых векторов a и b выполнено неравенство*

$$\|a+b\| < \|a\| + \|b\|.$$

Доказательство. Так как точки $a/\|a\|$, $b/\|b\|$ лежат на сфере $\partial B_1(0)$, в силу строгой выпуклости шара получаем:

$$\frac{a+b}{\|a\|+\|b\|} = \frac{\|a\|}{\|a\|+\|b\|}\,\frac{a}{\|a\|} + \frac{\|b\|}{\|a\|+\|b\|}\,\frac{b}{\|b\|} \in B_1(0)\setminus\partial B_1(0) = \operatorname{int} B_1(0),$$

т. е. $\left\|\dfrac{a+b}{\|a\|+\|b\|}\right\| < 1$, что и требовалось доказать. □

Теорема 2.7.1 (М. Эделстейн [130]). *Пусть E — равномерно выпуклое банахово пространство. Пусть $A \subset E$ — замкнутое и ограниченное множество. Тогда совокупность $\mathcal{A}$ всех точек x из E, для каждой из которых существует единственная точка $a \in A$ такая, что*

$$\|x-a\| = \sup_{y\in A}\|x-y\|, \tag{2.7.9}$$

плотна в пространстве E.

Доказательство. Обозначим через $\delta^k(1) = \delta(\delta(\ldots\delta(1)\ldots))$ суперпозицию модулей выпуклости (вложенность k раз).

1. Сначала докажем, что множество точек в пространстве E, для которых существует наиболее удаленный элемент множества A (вообще говоря, не единственный), плотно в E. Будем называть такие точки из E точками существования. Обозначим множество точек существования через $\mathcal{A}_1$.

Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in E$ и определим число

$$r_1 = \sup_{x\in A}\|x-x_0\|. \tag{2.7.10}$$

Считаем, что $r_1 > 0$. Мы покажем, что для любого $\lambda \in (0, r_1)$ найдется точка $\widehat{x} \in E$, удовлетворяющая условию (2.7.9) и такая, что $\|\widehat{x}-x_0\| \leqslant \lambda$. Для этого мы индуктивно определим последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящиеся к $\widehat{a} \in A$ и $\widehat{x} \in \mathcal{A}_1$ соответственно.

Выберем точку $a_1 \in A$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\|a_1 - x_0\| \geqslant r_1\Big(1 - \frac{\lambda}{2r_1}\,\delta^2(1)\Big). \tag{2.7.11}$$

Это можно сделать по определению супремума в (2.7.10).

Определим точку

$$x_1 = x_0 + \frac{x_0 - a_1}{\|x_0 - a_1\|}\,\frac{\lambda}{2}. \tag{2.7.12}$$

Полагая по индукции, что числа r_{n-1} и точки a_{n-1}, x_{n-1} уже определены, определим число

$$r_n = \sup_{x\in A}\|x - x_{n-1}\| \tag{2.7.13}$$

и выберем точку $a_n \in A$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\|a_n - x_{n-1}\| \geqslant r_n\Big(1 - \frac{\lambda}{2^n r_n}\,\delta^{n+1}(1)\Big), \tag{2.7.14}$$

и определим точку

$$x_n = x_{n-1} + \frac{x_{n-1} - a_n}{\|x_{n-1} - a_n\|}\,\frac{\lambda}{2^n}. \tag{2.7.15}$$

Отметим, что последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной последовательностью в силу формулы (2.7.15). Далее мы докажем, что и последовательность $\{a_n\}$ является фундаментальной.

Для каждого натурального числа n определим числа $R_n > 0$, $\beta_n \in \in (0, 1/2)$, точки $u_n \in \partial B_1(0) \subset E$ и функционал $p_n \in E^*$ следующим образом:

$$R_n = r_n + 2^{-n}\lambda, \tag{2.7.16}$$

$$\beta_n = 2^{-n}\,\frac{\lambda}{R_n}, \quad u_n = \frac{a_n - x_{n-1}}{\|a_n - x_{n-1}\|}, \tag{2.7.17}$$

$$\langle p_n, u_n\rangle = \|p_n\|_* = 1. \tag{2.7.18}$$

Отметим, что функционал $p_n \in E^*$ существует по следствию из теоремы Хана–Банаха (см. упр. 1.9.10).

Проверим, что числа $\beta_n \in (0, 1/2)$ для всех $n > 1$. Используя определение числа r_n и формулу (2.7.15), получаем

$$\begin{aligned} r_n = \sup_{x\in A}\|x - x_{n-1}\| \geqslant \|a_{n-1} - x_{n-1}\| ={}& \\ = \Big\|(a_{n-1} - x_{n-2}) + \frac{a_{n-1} - x_{n-2}}{\|a_{n-1} - x_{n-2}\|}\,\frac{\lambda}{2^{n-1}}\Big\| ={}& \\ = \|a_{n-1} - x_{n-2}\| + \frac{\lambda}{2^{n-1}} \geqslant \ldots \geqslant \|a_1 - x_0\| + \frac{\lambda}{2} + \ldots& \\ \ldots + \frac{\lambda}{2^{n-1}} \geqslant \frac{\lambda}{2} + \ldots + \frac{\lambda}{2^{n-1}},& \end{aligned}$$

т. е.

$$R_n = r_n + \frac{\lambda}{2^n} \geqslant \frac{\lambda}{2} + \ldots + \frac{\lambda}{2^{n-1}} + \frac{\lambda}{2^n},$$

откуда следует

$$\beta_n = 2^{-n}\,\frac{\lambda}{R_n} \leqslant \frac{\lambda}{2^n\big(\lambda/2 + \ldots + \lambda/2^n\big)} < \frac{1}{2}.$$

Из формулы (2.7.13) для $n+1$, формул (2.7.15) и (2.7.14) и из определения R_n по формуле (2.7.16) получаем оценку

$$\begin{aligned} r_{n+1} = \sup_{x\in A}\|x - x_n\| \geqslant \|a_n - x_n\| &= \\ = \left\|(a_n - x_{n-1}) + \frac{a_n - x_{n-1}}{\|a_n - x_{n-1}\|}\,\frac{\lambda}{2^n}\right\| &= \|a_n - x_{n-1}\| + \frac{\lambda}{2^n} \geqslant \\ \geqslant r_n\Big(1 - \frac{\lambda}{2^n r_n}\,\delta^{n+1}(1)\Big) + \frac{\lambda}{2^n} &= R_n - \frac{\lambda}{2^n}\,\delta^{n+1}(1). \end{aligned} \tag{2.7.19}$$

Покажем, что для любой точки $y \in A$ справедливо неравенство

$$\left\|\frac{y - x_n}{R_n}\right\| \leqslant 1. \tag{2.7.20}$$

Действительно, из формул (2.7.13) имеем $\|y - x_{n-1}\| \leqslant r_n \quad \forall\, y \in A$, откуда в силу (2.7.15) и (2.7.16) получаем

$$\begin{aligned} \|y - x_n\| = \left\|y - x_{n-1} + \frac{\lambda}{2^n}\,\frac{a_n - x_{n-1}}{\|a_n - x_{n-1}\|}\right\| &\leqslant \\ \leqslant \|y - x_{n-1}\| + \frac{\lambda}{2^n} \leqslant r_n + \frac{\lambda}{2^n} &= R_n. \end{aligned}$$

Далее из определения точки u_n (2.7.17) и функционала p_n (2.7.18) с учетом неравенства (2.7.14) получаем

$$\begin{aligned} \langle p_n,\, a_n - x_n\rangle = \langle p_n,\, a_n - x_{n-1}\rangle + \langle p_n,\, x_{n-1} - x_n\rangle &= \\ = \|a_n - x_{n-1}\| + 2^{-n}\lambda \geqslant r_n - \frac{\lambda}{2^n}\,\delta^{n+1}(1) + \frac{\lambda}{2^n} &= \\ = R_n\Big(1 - \frac{\lambda}{2^n R_n}\,\delta^{n+1}(1)\Big) &> R_n(1 - \delta^n(1)). \end{aligned} \tag{2.7.21}$$

Поясним последнюю оценку в (2.7.21). Она имеет место, так как $\lambda/(2^n R_n) = \beta_n < 1/2$, а в силу (2.7.3) $\quad \delta^n(1) \geqslant 2\delta^{n+1}(1) > \delta^{n+1}(1)$.

Для доказательства сходимости последовательности $\{a_n\}$ достаточно доказать неравенство

$$\langle p_n,\, a_{n+1} - x_n\rangle > R_n(1 - \delta^n(1)). \tag{2.7.22}$$

Действительно, в этом случае из неравенства (2.7.20) следует, что точки
$$\frac{a_{n+1}-x_n}{R_n},\ \frac{a_n-x_n}{R_n}\in B_1(0),$$
а из неравенств (2.7.22) и (2.7.21) получаем
$$\frac{1}{2}\left\|\frac{a_{n+1}-x_n}{R_n}+\frac{a_n-x_n}{R_n}\right\|\geqslant\frac{1}{2}\left\langle p_n,\ \frac{a_{n+1}-x_n}{R_n}+\frac{a_n-x_n}{R_n}\right\rangle>1-\delta^n(1).$$
Поэтому из формулы (2.7.1) для модуля выпуклости $\delta(\varepsilon)$ получаем
$$\delta\left(\frac{\|a_{n+1}-a_n\|}{R_n}\right)<\delta^n(1),$$
откуда в силу (2.7.2) следует, что $\|a_{n+1}-a_n\|\leqslant R_n\delta^{n-1}(1)$. Учитывая неравенство (2.7.3), получаем
$$\|a_{n+1}-a_n\|\leqslant R_n\delta^{n-1}(1)\leqslant(r_1+\lambda)\delta^{n-1}(1)\leqslant 2^{-n+1}(r_1+\lambda),$$
т. е. последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна.

Приступим к доказательству оценки (2.7.22). Для этого проверим выполнение условий и утверждения леммы 2.7.2. Причем берем $\alpha=\delta^n(1)$, $\beta=\beta_n$, $p=p_n$, $x=u_n$, $z=(a_{n+1}-x_n)/R_n$. Условия (2.7.5) уже проверены, они выполнены. С учетом формул (2.7.15) и (2.7.17) справедливо равенство $x_n-x_{n-1}=-(\lambda/2^n)u_n$, откуда следует
$$\frac{a_{n+1}-x_{n-1}}{R_n}=\frac{a_{n+1}-x_n}{R_n}+\frac{x_n-x_{n-1}}{R_n}=\frac{a_{n+1}-x_n}{R_n}-\beta_n u_n.$$
Отсюда в силу того, что $\|a_{n+1}-x_{n-1}\|\leqslant r_n=R_n-2^{-n}\lambda=R_n(1-\beta_n)$, получаем
$$\left\|\frac{a_{n+1}-x_n}{R_n}-\beta_n u_n\right\|\leqslant 1-\beta_n.$$
Таким образом, условие (2.7.7) тоже выполнено. Из формулы (2.7.14), взятой при индексе $n+1$, из неравенства (2.7.19) и из неравенства $\delta^{n+2}(1)\leqslant\frac{1}{2}\,\delta^{n+1}(1)$, получаемого из неравенства (2.7.3), имеем
$$\begin{aligned}\|a_{n+1}-x_n\|\geqslant r_{n+1}\Big(1-\frac{\lambda}{2^{n+1}r_{n+1}}\,\delta^{n+2}(1)\Big)\geqslant\\ \geqslant R_n-\frac{\lambda}{2^n}\,\delta^{n+1}(1)-\frac{\lambda}{2^{n+1}}\,\delta^{n+2}(1)>\\ >R_n-\frac{\lambda}{2^{n-1}}\,\delta^{n+1}(1)=R_n(1-2\beta_n\delta^{n+1}(1)).\end{aligned}$$
Таким образом, получили неравенство, противоположное неравенству (2.7.8).

Мы доказали выполнение всех условий леммы 2.7.2, кроме условия (2.7.6), а также доказали, что не верно утверждение (2.7.8). Следовательно, условие (2.7.6) нарушено, что и означает неравенство (2.7.22) а вместе с ним и фундаментальность последовательности $\{a_n\}$.

В силу замкнутости множества A последовательность $\{a_n\}$ сходится к элементу $\widehat{a} \in A$.

По построению $x_n \to \widehat{x} \in B_\lambda(x_0)$. Переходя к пределу в неравенстве (2.7.14), с учетом определения r_n в (2.7.13) получаем

$$\|\widehat{a} - \widehat{x}\| \geqslant \lim_{n\to\infty} r_n = \sup_{x\in A} \|x - \widehat{x}\|,$$

откуда $\widehat{x} \in \mathcal{A}_1$.

Итак п. 1 доказан.

2. Пусть $x \in \mathcal{A}_1$ — точка существования и $a \in A$ — одна из точек, для которой $\sup\limits_{y\in A} \|x - y\| = \|x - a\|$. Определим луч $l = \{x + \lambda(x - a) \,|\, \lambda > 0\}$.

Зафиксируем любую точку $z \in l$. Определим числа $r = \|x - a\|$, $R = \|z - a\|$, причем $R = \|x - a\| + \|x - z\| > r$. По построению $A \subset B_r(x) \subset B_R(z)$ и $a \in \partial B_r(x) \cap \partial B_R(z)$.

Пусть точка $y \in B_r(x) \backslash \{a\}$.

Если векторы $(x - y)$ и $(x - z)$ линейно независимы, то в силу леммы 2.7.3

$$\|y - z\| < \|x - z\| + \|x - y\| \leqslant \|x - z\| + r = R.$$

Если же $(x - y)$ и $(x - z)$ линейно зависимы, то $y - x = \lambda(a - x)$, $\lambda \in [-1, 1)$ (так как $y \neq a$), и при $\lambda \in [0, 1)$ получаем

$$\|y - z\| = \|x - z + \lambda(a - x)\| \leqslant \|x - z\| + |\lambda|\|x - a\| = \\ = \|x - z\| + |\lambda| r < R,$$

а при $\lambda \in [-1, 0)$

$$\|y - z\| = \|x - z + \lambda(a - x)\| = |\|x - z\| - |\lambda|\|x - a\|| < R.$$

Итак, $\partial B_r(x) \cap \partial B_R(z) = \{a\}$, т.е. луч $l \subset \mathcal{A}$ и, следовательно, множество $\mathcal{A}$ плотно в $\mathcal{A}_1$, а значит, и в пространстве E. $\square$

З а м е ч а н и е 2.7.1. В теории приближений исследуются и ближайшие точки. Пусть в банаховом пространстве E задано замкнутое множество $A \subset E$. Пусть $\mathcal{A}$ — множество тех точек E, для каждой из которых существует единственная ближайшая точка из A, т.е.

для любой точки $x \in \mathcal{A}$ найдется единственная точка $a \in A$ такая, что $\|x-a\| = \inf\limits_{y\in A}\|x-y\|$. Н. В. Ефимов и С. Б. Стечкин показали (см. [42]), что в случае, когда задача решается в равномерно выпуклом пространстве E, множество $\mathcal{A}$ является всюду плотным в E.

Более подробное исследование подобных задач можно найти также в приложении II книги [107].

Теорема 2.7.2 (о снятии шара). *Пусть в равномерно выпуклом пространстве E задано слабо замкнутое множество $A \subset E$ такое, что* $(\operatorname{int} B_1(0)) \cap A = \varnothing$, *и пусть существует единственная точка x_0 такая, что $B_1(0) \cap A = \{x_0\}$. Зафиксируем произвольную точку $y_0 \in \operatorname{int} B_1(0)$ и определим вектор $e = y_0 - x_0$.*

Тогда существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что для $\forall\,\lambda \in (0,\lambda_0)$ множества $B_1(\lambda e)$ и A не пересекаются.

Доказательство. Так как по условию точка $y_0 \in \operatorname{int} B_1(0)$, то существует число $\gamma > 0$ такое, что справедливо включение $B_\gamma(y_0) \subset \operatorname{int} B_1(0)$. По теореме Хана–Банаха существует функционал $p \in E^*$ такой, что $\|p\|_* = 1$ и $\langle p, x_0\rangle = 1 = \|x_0\|$.

Определим множества $V(\lambda) = \{x \mid \langle p, x\rangle \geqslant 1-\lambda\}$ и $H(\lambda) = V(\lambda) \cap B_1(0)$ при $\lambda \in [0,1)$. Очевидно, что справедливы включения $x_0 \in H(\lambda)$ $\forall\,\lambda \in (0,1)$ и $x_0 \in \operatorname{int} V(\lambda)$ $\forall\,\lambda \in (0,1)$, а также равенство $H(0) = \{x_0\}$.

Покажем, что
$$\lim_{\lambda\to+0} H(\lambda) = \{x_0\} \tag{2.7.23}$$
в метрике Хаусдорфа.

Допустим, что это не так. Тогда найдется последовательность положительных чисел $\{\lambda_k\}$, сходящаяся к 0, и число $\varepsilon > 0$ такие, что справедливо соотношение
$$H(\lambda_k) \not\subset H(0) + B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(x_0) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$
Это значит, что для всякого номера $k \in \mathbb{N}$ найдется точка $x_k \in H(\lambda_k)$ такая, что справедливо неравенство
$$\|x_k - x_0\| > \varepsilon. \tag{2.7.24}$$
При этом справедливо представление точек x_k в виде $x_k = (1-\mu_k)x_0 + y_k$, где числа $\mu_k \in [0,\lambda_k]$, а точки $y_k \in \ker p$, т. е. $\langle p, y_k\rangle = 0$. Из неравенства (2.7.24) и определения модуля выпуклости $\delta(\,\cdot\,)$ следует включение
$$B_{\delta(\varepsilon)}\Bigl(\frac{x_0+x_k}{2}\Bigr) \subset B_1(0) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{2.7.25}$$

С другой стороны, так как $\lim\limits_{k\to\infty}\mu_k = 0$, то при достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ получаем

$$s\Big(p,\ B_{\delta(\varepsilon)}\Big(\frac{x_0 + x_k}{2}\Big)\Big) = \delta(\varepsilon) + \frac{1}{2}\,\langle p, x_0\rangle + \frac{1}{2}\,\langle p, x_k\rangle = \\ = \delta(\varepsilon) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,(1 - \mu_k) = 1 + \delta(\varepsilon) - \frac{1}{2}\,\mu_k > 1,$$

что противоречит включению (2.7.25).

Итак, мы доказали соотношение (2.7.23), в силу которого существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что при всех $\lambda \in (0, \lambda_0)$ справедливо включение

$$H(\lambda) \subset B_\gamma(x_0). \tag{2.7.26}$$

Зафиксируем число $\lambda \in (0, \lambda_0)$ и рассмотрим множество $\overline{B_1(0)\backslash H(\lambda)}$. Очевидно, что это множество выпукло, замкнуто и ограничено. В силу рефлексивности равномерно выпуклого пространства E отсюда следует, что это множество является компактным в слабой топологии пространства E (т. е. слабо компактным). Из очевидного равенства $\overline{B_1(0)\backslash H(\lambda)} = \overline{B_1(0)\backslash V(\lambda)}$ и включения $x_0 \in \operatorname{int} V(\lambda)$ следует, что $x_0 \notin \overline{B_1(0)\backslash H(\lambda)}$, т. е.

$$(\overline{B_1(0)\backslash H(\lambda)}) \cap A = \varnothing.$$

По теореме 1.1.8 о топологической отделимости компакта и замкнутого множества (в слабой топологии пространства E) получаем, что найдется слабая (а значит, и сильная) окрестность нуля V такая, что

$$(\overline{B_1(0)\backslash H(\lambda)} + V) \cap A = \varnothing.$$

Отсюда следует, что существует число $\alpha_1 > 0$ такое, что $(e = y_0 - x_0)$

$$(\overline{B_1(0)\backslash H(\lambda)} + \alpha e) \cap A = \varnothing \quad \forall\, \alpha \in (0, \alpha_1). \tag{2.7.27}$$

В свою очередь в силу включения (2.7.26) и определения множества $H(\lambda)$ справедливо включение $H(\lambda) \subset B_\gamma(x_0) \cap B_1(0)$. Покажем, что справедливо включение

$$B_\gamma(x_0) \cap B_1(0) + \alpha e \subset \operatorname{int} B_1(0) \quad \forall\, \alpha \in (0, 1). \tag{2.7.28}$$

Зафиксируем $\alpha \in (0, 1)$, и пусть точка $x \in [B_\gamma(x_0) \cap B_1(0) + \alpha e]$. Тогда существуют точки $y \in B_\gamma(x_0) \cap B_1(0)$ и $w \in B_\gamma(0)$ такие, что $x = y + \alpha e$ и $y = x_0 + w$. Рассмотрим точку $z = y_0 + w$. Так как $z \in B_\gamma(y_0) \subset \operatorname{int} B_1(0)$, то $\|z\| < 1$. Кроме того, очевидной проверкой можно убедиться в справедливости равенства $x = (1 - \alpha)y + \alpha z$, где

$\|y\| \leqslant 1$ и $\|z\| < 1$, откуда и в силу выпуклости нормы следует $\|x\| < 1$, что и доказывает включение (2.7.28). Отсюда и из условия теоремы следует

$$(H(\lambda) + \alpha e) \cap A = \varnothing \quad \forall\, \alpha \in (0, 1). \tag{2.7.29}$$

Определим $\lambda_0 = \min\{\alpha_1, 1\}$; тогда из выражений (2.7.27) и (2.7.29) получаем $(B_1(0) + \alpha e) \cap A = \varnothing$ для любого $\alpha \in (0, \lambda_0)$, что и завершает доказательство теоремы. $\square$

Определение 2.7.2. Замкнутое множество $A \subset E$ называется *аппроксимативно компактным*, если для любой точки $z \notin A$ и любой минимизирующей последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset A$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|a_k - z\| = \varrho(z, A)$, найдется некоторая подпоследовательность этой последовательности $\{a_k\}$ (которую мы обозначим снова $\{a_k\}$) такая, что эта подпоследовательность $\{a_k\}$ сходится по норме к некоторой точке $a \in A$ и справедливо равенство $\|z - a\| = \varrho(z, A)$.

Теорема 2.7.3. *В равномерно выпуклом пространстве E всякое непустое слабо замкнутое множество $A \subset E$ является аппроксимативно компактным.*

Доказательство. Для простоты будем считать $z = 0 \notin A$, и пусть $\varrho = \varrho(0, A) = \inf\{\|x\| \mid x \in A\}$. Очевидно, что $\varrho > 0$. Зафиксируем некоторое число $\varepsilon > 0$ и определим множество $A_\varepsilon = A \bigcap B_{\varrho+\varepsilon}(0)$. В силу рефлексивности равномерно выпуклого пространства E множество A_ε является компактом в слабой топологии пространства E как пересечение слабо компактного множества $B_{\varrho+\varepsilon}(0)$ и слабо замкнутого множества A.

Пусть последовательность $\{a_k\} \subset A$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|a_k\| = \varrho$. Поскольку множество A_ε слабо компактно и справедливо включение $a_k \in A_\varepsilon$ для всех достаточно больших k, то существуют точка $a \in A$ и подпоследовательность последовательности $\{a_k\}$ (обозначаемая снова через $\{a_k\}$), сходящаяся слабо к точке $a \in A$. В силу слабой пн. сн. функции нормы (так как ее надграфик слабо замкнут) получаем

$$\varrho = \lim_{k\to\infty} \|a_k\| \geqslant \|a\|,$$

откуда $\|a - 0\| = \varrho(0, A)$.

Итак, последовательность $\{a_k\}$ слабо сходится к точке a, а числовая последовательность их норм $\{\|a_k\|\}$ сходится к числу $\|a\|$. Покажем, что отсюда в равномерно выпуклом пространстве E следует сходимость последовательности $\{a_k\}$ к точке a по норме, что и завершит доказательство теоремы.

Будем, далее, считать, что $\varrho = 1$.

Из определения равномерно выпуклого пространства E следует, что если в нем последовательности $\{x_k\} \subset E$ и $\{y_k\} \subset E$ таковы, что $\|x_k\| = \|y_k\| = 1$ и $\|(x_k + y_k)/2\| \to 1$ при $k \to \infty$, то $\|x_k - y_k\| \to 0$ при $k \to \infty$.

В нашем случае $\|a_k\| \to \varrho = 1 = \|a\|$ при $k \to \infty$. По теореме Хана–Банаха существует функционал $p \in E^*$ такой, что $\|p\|_* = 1$ и $\langle p, a\rangle = \|a\| = 1$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \langle p, a_k\rangle = \langle p, a\rangle = 1$, откуда следует, что

$$\left\langle p,\ \frac{a_k + a}{2}\right\rangle \to 1 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Отсюда и из неравенства

$$\left\langle p,\ \frac{a_k + a}{2}\right\rangle \leqslant \left\|\frac{a_k + a}{2}\right\| \leqslant \frac{1}{2}\,\|a_k\| + \frac{1}{2}\,\|a\|$$

в пределе получаем равенство

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\frac{a_k + a}{2}\right\| = 1.$$

Поскольку

$$\left\|\frac{a_k + a}{2}\right\| = \left\|\frac{\dfrac{a_k}{\|a_k\|} + a}{2}\right\| \cdot \left\|\frac{a_k + a}{\dfrac{a_k}{\|a_k\|} + a}\right\|,$$

а $\|a_k\| \to 1$, то и

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\frac{\dfrac{a_k}{\|a_k\|} + a}{2}\right\| = 1.$$

Отсюда $\|a_k/\|a_k\| - a\| \to 0$, следовательно, и $\lim\limits_{k\to\infty} \|a_k - a\| = 0$. □

Приведенные выше теоремы 2.7.2 и 2.7.3 используются в некоторых задачах геометрической теории приближений, связанных с понятием чебышевского множества.

Определение 2.7.3. Множество A из метрического пространства (E, ϱ) называется *чебышевским*, если для любого $x \in E$ существует единственная точка $a \in A$ такая что $\varrho(x, a) = \varrho(x, A)$.

Определение 2.7.4. Банахово пространство E называется *гладким*, если в каждой граничной точке шара $B_1(0)$ из E существует единственная опорная гиперплоскость.

Одной из основных задач геометрической теории приближений является выяснение необходимых и (или) достаточных условий, которые надо наложить на шар в банаховом пространстве для того, чтобы классы чебышевских множеств и выпуклых замкнутых множеств совпадали. По сути речь идет об обобщении теоремы 1.9.8 со случая конечномерного пространства $\mathbb{R}^n$ на бесконечномерный случай. Приведем один результат такого рода, полученный Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным в [41].

Теорема 2.7.4. *Пусть E — равномерно выпуклое и гладкое банахово пространство. Для того чтобы чебышевское множество из E было выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы оно было аппроксимативно компактным.*

Упражнение 2.7.1. Показать, что гильбертово пространство $\mathcal{H}$ является равномерно выпуклым пространством и его модуль выпуклости равен

$$\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}\,.$$

Найти производную Фреше нормы в гильбертовом пространстве в точках, отличных от нуля.

Упражнение 2.7.2 (теорема С. Мазура [149]). Доказать, что в рефлексивном банаховом пространстве с дифференцируемой по Фреше нормой всякое выпуклое замкнутое ограниченное множество совпадает с пересечением всех содержащих его замкнутых шаров.

Указание. Пусть $A \subset E$ — множество и точка $x \notin A$. Покажите, что найдется шар, содержащий A, но не содержащий x. Для этого рассмотрите точку a — метрическую проекцию точки x на множество A, которая существует и единственна (почему?). Пусть $l = \{a + \lambda(a - x) \mid \lambda \geqslant 0\}$. Покажите, что вектор $p \in \partial B_1^*(0)$ такой, что $\langle p, x - a\rangle = \|x - a\|$ (см. упр. 1.9.10) отделяет шар $B_{\|x-a\|}(x)$ от A и является производной Фреше по y в точке $y = (x + a)/2$ функции $\|z - y\|$ для любого $z \in l$. Пусть $y = (x + a)/2$. Покажите, используя дифференцируемость по Фреше функции $\|z - y\|$ (по y), что можно выбрать достаточно удаленную от a точку $z \in l$ такую, что $\|z - x\| > \|z - y\| \geqslant \sup\limits_{b \in A} \|z - b\|$.

Упражнение 2.7.3. Доказать, что в равномерно выпуклом банаховом пространстве для всякого выпуклого замкнутого ограниченного множества $A \subset E$ выполнено равенство

$$A = \overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{extr}\,A.$$

Указание. Применить теорему 2.7.1 и упр. 2.7.2.

§ 2.8. Непрерывность многозначных отображений

В этом параграфе мы продолжим исследования многозначных отображений, начатые в § 2.2.

Пусть T и Y — топологические пространства, причем Y — линейное.

Многозначным отображением (или *соответствием*) F из T в Y называется отображение, которое сопоставляет каждому $t \in T$ множество $F(t) \subset Y$, называемое значением F в точке t. Многозначное отображение будем обозначать $F\colon T \to 2^Y$.

Многозначное отображение полностью характеризуется своим *графиком*, т. е. множеством

$$\operatorname{graph} F = \{(t, y) \in T \times Y \mid y \in F(t)\}.$$

Определение 2.8.1. Многозначное отображение $F\colon T \to 2^Y$ называется *полунепрерывным сверху* (пн. св.) в точке t_0, если для любой открытой окрестности $N(F(t_0))$ множества $F(t_0)$ существует окрестность $U(t_0)$ точки t_0 такая, что для всех $t \in U(t_0)$ выполнено $F(t) \subset N(F(t_0))$.

Определение 2.8.2. Многозначное отображение $F\colon T \to 2^Y$ называется *полунепрерывным снизу* (пн. сн.) в точке t_0, если для любой точки $y_0 \in F(t_0)$ и для любой открытой окрестности $N(y_0)$ точки y_0 существует окрестность $U(t_0)$ точки t_0 такая, что для всех $t \in U(t_0)$ выполнено $F(t) \cap N(y_0) \neq \varnothing$.

В линейном метрическом пространстве (Y, ϱ) через $B^\circ_\varepsilon(a)$ будем обозначать открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $a \in Y$ вида

$$B^\circ_\varepsilon(a) = \{x \in Y \mid \varrho(a, x) < \varepsilon\}.$$

Введем понятия ε-полунепрерывности сверху и снизу для многозначных отображений в линейное метрическое пространство Y.

Определение 2.8.3. Многозначное отображение $F\colon T \to 2^Y$ называется *ε-полунепрерывным сверху* (ε-пн. св.) в точке t_0, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ окрестность } U(t_0) \text{ точки } t_0,$$
$$\forall\, t \in U(t_0)\colon\ F(t) \subset F(t_0) + B^\circ_\varepsilon(0).$$

Определение 2.8.4. Многозначное отображение $F\colon T \to 2^Y$ называется *ε-полунепрерывным снизу* (ε-пн. сн.) в точке t_0, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ окрестность } U(t_0) \text{ точки } t_0,$$
$$\forall\, t \in U(t_0)\colon\ F(t_0) \subset F(t) + B^\circ_\varepsilon(0).$$

Лемма 2.8.1. *Пусть T и Y — топологические пространства, причем Y — линейное пространство с инвариантной относительно сдвигов метрикой ϱ. Пусть $F\colon T \to 2^Y$ — многозначное отображение.*

1. *Если F пн. св. в точке t_0, то оно и ε-пн. св. в точке $t_0 \in \in T$. Обратное верно, если $F(t_0)$ — компакт.*

2. *Если F ε-пн. сн. в точке $t_0 \in T$, то оно и пн. св. в точке t_0. Обратное верно, если $F(t_0)$ — компакт.*

Доказательство. 1. Если отображение F пн. св. в точке t_0, то, взяв в качестве окрестности $N(F(t_0))$ множество $F(t_0) + B^\circ_\varepsilon(0)$, получаем, что для всех t из некоторой окрестности $U(t_0)$ точки t_0 справедливо включение

$$F(t) \subset F(t_0) + B^\circ_\varepsilon(0).$$

Пусть множество $F(t_0)$ — компакт и отображение F ε-пн. св. в точке t_0. Зафиксируем произвольную окрестность $N(F(t_0))$ множества $F(t_0)$. Тогда для любой точки $y \in F(t_0)$ найдется число $\varepsilon(y) > 0$ такое, что справедливы включения

$$y + B^\circ_{\varepsilon(y)}(0) + B^\circ_{\varepsilon(y)}(0) \subset N(F(t_0)), \tag{2.8.1}$$

$$F(t_0) \subset \bigcup_{y \in F(t_0)} (y + B^\circ_{\varepsilon(y)}(0)). \tag{2.8.2}$$

В силу компактности множества $F(t_0)$ выделим из покрытия шарами (2.8.2) множества $F(t_0)$ конечное подпокрытие шарами вида

$$F(t_0) \subset \bigcup_{i=1}^{m} (y_i + B^\circ_{\varepsilon_i}(0)),$$

где $\varepsilon_i = \varepsilon(y_i)$, $y_i \in F(t_0)$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Выберем $\varepsilon = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \varepsilon_i$. Тогда в силу (2.8.1) получаем, что

$$F(t_0) + B^\circ_\varepsilon(0) \subset N(F(t_0)).$$

В силу ε-пн. св. отображения F для числа $\varepsilon = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \varepsilon_i$ найдется окрестность $U(t_0)$ точки t_0 такая, что для всех точек $t \in U(t_0)$ справедливо включение

$$F(t) \subset F(t_0) + B^\circ_\varepsilon(0),$$

откуда следует, что

$$F(t) \subset N(F(t_0)) \quad \forall\, t \in U(t_0),$$

что и доказывает пн. св. отображения F в точке t_0.

2. Пусть отображение F ε-пн. сн. в точке t_0. Выберем произвольные точку $y_0 \in F(t_0)$ и окрестность $N(y_0)$ точки y_0. Тогда найдутся число $\varepsilon > 0$ и окрестность $U(t_0)$ точки t_0 такие, что

$$B_\varepsilon^\circ(y_0) \subset N(y_0) \quad \text{и} \quad \forall\, t \in U(t_0)\colon\ y_0 \in F(t_0) \subset F(t) + B_\varepsilon^\circ(0).$$

Из этих соотношений получаем, что для любого $t \in U(t_0)$ выполняется включение

$$F(t) \cap N(y_0) \supset F(t) \cap B_\varepsilon^\circ(y_0) \neq \varnothing,$$

что и означает пн. сн. отображения F.

Пусть отображение F пн. сн. в точке t_0 и $F(t_0)$ — компакт. Допустим, что условие ε-пн. сн. нарушено, т. е.

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \exists\, t_k \to t_0,\ \exists\, y_k \in F(t_0)\colon\ \varrho(y_k, F(t_k)) \geqslant \varepsilon. \tag{2.8.3}$$

В силу компактности множества $F(t_0)$ можно без ограничения общности считать, что последовательность y_k сходится, т. е. существует точка $y_0 \in F(t_0)$ такая, что $\lim y_k = y_0$. В силу пн. сн. отображении F существует число k_0 такое, что для всех номеров $k > k_0$ справедливы неравенства $\varrho(y_0, F(t_k)) \leqslant \varepsilon/2$ и $\varrho(y_0, y_k) < \varepsilon/2$. В итоге получаем

$$\varepsilon \leqslant \varrho(y_k, F(t_k)) \leqslant \varrho(y_0, y_k) + \varrho(y_0, F(t_k)) < \varepsilon.$$

Противоречие. $\square$

В дальнейшем благодаря лемме 2.8.1 мы не будем различать полунепрерывность и ε-полунепрерывность для многозначных отображений с компактными значениями. Далее мы будем, если не оговорено противное, считать пространство T метрическим с инвариантной относительно сдвига метрикой.

Теорема 2.8.1 (о замкнутом графике). *Пусть многозначное отображение $F\colon T \to 2^{\mathbb{R}^n}$ имеет замкнутый график $\operatorname{graph} F$ и для точки t_0 существует число $\varepsilon > 0$ такое, что значения $F(t)$ при $t \in B_\varepsilon(t_0)$ равномерно ограничены. Тогда многозначное отображение F ε-пн. св. в точке $t_0 \in T$.*

Доказательство. Допустим, что утверждение неверно, т. е. отображение F не является пн. св. в точке t_0. Это означает, что найдутся последовательность точек $t_k \to t_0$ при $k \to \infty$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$F(t_k) \not\subset F(t_0) + B_\varepsilon^\circ(0) \quad \forall\, k.$$

Последнее включение означает, что для каждого номера k найдется точка $x_k \in F(t_k)$ такая, что $x_k \notin F(t_0) + B_\varepsilon^\circ(0)$. В силу ограниченности отображения F из последовательности $\{x_k\}$ можно выделить сходящуюся к некоторой точке x_0 подпоследовательность, причем $x_0 \notin \notin F(t_0) + B^\circ_{\varepsilon/2}(0)$. Но в силу того, что $\lim\limits_{k\to\infty}(t_k, x_k) = (t_0, x_0)$, а $x_k \in F(t_k)$, из замкнутости графика $\operatorname{graph} F$ получаем включение $x_0 \in F(t_0)$. Противоречие. □

Замечание 2.8.1. Легко перенести данное выше доказательство с пространства $\mathbb{R}^n$ на банахово пространство E. При этом вместо ограниченности образов отображения F надо потребовать, чтобы значения $F(t)$ при всех $t \in B^\circ_\varepsilon(t_0)$ лежали в компактном множестве.

Теорема 2.8.2. *Пусть даны два многозначных отображения $F, G\colon T \to 2^{\mathbb{R}^n}$, причем отображение G ε-пн. сн., а отображение F ε-пн. св. и принимает компактные значения. Определим отображение $H(t) = F(t) \overset{*}{-} G(t)$. Пусть $H(t) \neq \varnothing$ при всех $t \in T$. Тогда H пн. св.*

Доказательство. Покажем, что график $\operatorname{graph} H$ есть замкнутое множество. Пусть последовательность точек $(t_k, x_k) \in \operatorname{graph} H$ такая, что $t_k \to t_0$, $x_k \to x_0$. Покажем, что $(t_0, x_0) \in \operatorname{graph} H$.

Для всех номеров k получаем, что $x_k + G(t_k) \subset F(t_k)$. Используя сходимость последовательности $\{x_k\}$, получаем

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, k^1_\varepsilon, \quad \forall\, k > k^1_\varepsilon\colon \quad x_0 \in x_k + B^\circ_\varepsilon(0),$$

из ε-пн. сн. отображения G следует

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, k^2_\varepsilon, \quad \forall\, k > k^2_\varepsilon\colon \quad G(t_0) \subset G(t_k) + B^\circ_\varepsilon(0)$$

и из ε-пн. св. F следует

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists k^3_\varepsilon, \quad \forall\, k > k^3_\varepsilon\colon \quad F(t_k) \subset F(t_0) + B^\circ_\varepsilon(0).$$

В итоге получаем, что для любого $k > \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3} k^i_\varepsilon$ выполнены включения

$$x_0 + G(t_0) \subset x_k + G(t_k) + B^\circ_{2\varepsilon}(0) \subset F(t_k) + B^\circ_{2\varepsilon}(0) \subset F(t_0) + B^\circ_{3\varepsilon}(0),$$

откуда получаем

$$x_0 + G(t_0) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} (F(t_0) + B^\circ_\varepsilon(0)) = \overline{F(t_0)} = F(t_0),$$

т. е. $x_0 \in H(t_0)$, и поэтому множество $\operatorname{graph} H$ замкнуто.

По условию теоремы для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что справедливы включения

$$F(t) \subset F(t_0) + B^\circ_\varepsilon(0), \quad G(t_0) \subset G(t) + B^\circ_\varepsilon(0) \quad \forall\, t \in B^\circ_{\delta(\varepsilon)}(t_0).$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$. Для любой точки $t \in B_\delta(t_0)$ и любой точки $x \in H(t)$ справедливы включения

$$x + G(t_0) \subset x + G(t) + B_\varepsilon^\circ(0) \subset F(t) + B_\varepsilon^\circ(0) \subset F(t_0) + B_{2\varepsilon}^\circ(0),$$

откуда следует, что

$$x \in (F(t_0) + B_{2\varepsilon}^\circ(0)) \overset{*}{-} G(t_0).$$

Таким образом, мы доказали включение

$$H(t) \subset (F(t_0) + B_{2\varepsilon}(0)) \overset{*}{-} G(t_0) \quad \forall\, t \in B_\delta^\circ(t_0),$$

причем правое множество во включении компактно. Отсюда в силу теоремы 2.8.1 следует, что отображение H пн. св. $\square$

Упражнение 2.8.1. Пусть многозначные отображения F, G: $T \to 2^{R^n}$ принимают замкнутые значения, ε-пн. св. и значения $F(t)$ компактны. Пусть отображение $H(t) = F(t) \cap G(t)$ непусто при всех $t \in T$. Доказать, что оно ε-полунепрерывно сверху.

Лемма 2.8.2. *Пусть E — банахово пространство. Пусть $A \subset \subset E$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество с непустой внутренностью, причем $B_\alpha(x_0) \subset A$. Пусть число $\beta \in (0, \alpha)$.*

Тогда имеет место оценка

$$h(A,\, A \overset{*}{-} B_\beta(0)) \leqslant \frac{\operatorname{diam} A - \alpha}{\alpha}\, \beta. \tag{2.8.4}$$

Доказательство. Из свойств метрики Хаусдорфа и так как $A \overset{*}{-} B_\beta(0) \subset A$, справедливо равенство

$$h(A,\, A \overset{*}{-} B_\beta(0)) = \sup_{x \in \partial A} \varrho(x,\, A \overset{*}{-} B_\beta(0)). \tag{2.8.5}$$

Зафиксируем точку $x \in \partial A$.

Выберем точку $y \in [x_0, x]$ так, чтобы $\|x - y\| / \|x - x_0\| = \beta/\alpha$. Делая преобразование подобия (точнее, гомотетии с центром в точке x и коэффициентом $\beta/\alpha \in (0, 1)$) получаем включение

$$y + B_\beta(0) \subset \mathrm{co}\,(B_\alpha(x_0) \cup \{x\}) \subset A,$$

откуда следует оценка

$$\varrho(x, A \overset{*}{-} B_\beta(0)) \leqslant \|x - y\| = \frac{\beta}{\alpha}\,\|x - x_0\| \leqslant \frac{\operatorname{diam} A - \alpha}{\alpha}\,\beta.$$

Следовательно, с учетом формулы (2.8.5) и произвольности точки $x \in \in \partial A$, получаем оценку (2.8.4). $\square$

Теорема 2.8.3 (Л.С. Понтрягин [90]). *Пусть многозначные отображения F, $G\colon T \to 2^E$, принимающие ограниченные значения, непрерывны в точке t_0 в метрике Хаусдорфа, причем значения отображения F выпуклы, а* $\operatorname{int}(F(t_0) \overset{*}{-} G(t_0)) \neq \varnothing$.

Тогда многозначное отображение $H(t) = F(t) \overset{*}{-} G(t)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа в точке t_0.

Доказательство. Выберем число $\alpha > 0$ такое, чтобы было справедливо включение $B_\alpha(x_0) \subset F(t_0) \overset{*}{-} G(t_0)$. Определим числа

$$k = \frac{\operatorname{diam}\, F(t_0) - \alpha}{\alpha} \quad \text{и} \quad \varepsilon \in \left(0,\ \min\left\{\frac{\alpha}{4},\ \frac{\alpha}{4k}\right\}\right).$$

Очевидно, что множество $F(t_0) \overset{*}{-} B_\alpha(0)$ непусто.

В силу непрерывности отображений F и G в точке t_0 для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любой точки $t \in B_\delta^\circ(t_0)$ справедливы неравенства $h(F(t), F(t_0)) < \varepsilon/2$, $h(G(t), G(t_0)) < \varepsilon/2$. Отсюда для любого числа $\lambda > 1$ справедливы включения $G(t_0) + B_{\lambda\varepsilon/2}(0) \supset G(t)$, $F(t_0) \subset F(t) + B_{\lambda\varepsilon/2}(0)$, а с учетом леммы 2.8.2 получаем для любого числа $\lambda \in (1, 2)$ включения

$$\begin{aligned} B_\alpha(x_0) \subset F(t_0) \overset{*}{-} G(t_0) \subset (F(t_0) \overset{*}{-} G(t_0)) \overset{*}{-} \lambda B_\varepsilon(0) + \lambda k B_\varepsilon(0) = \\ = \left(F(t_0) \overset{*}{-} \frac{\lambda\varepsilon}{2} B_1(0)\right) \overset{*}{-} \left(G(t_0) + \frac{\lambda\varepsilon}{2} B_1(0)\right) + \lambda k B_\varepsilon(0) \subset \\ \subset F(t) \overset{*}{-} G(t) + \lambda k \varepsilon B_1(0). \end{aligned}$$

Итак, мы установили ε-пн. сн. отображения $H(t)$ в точке t_0 и, кроме того, в силу выбора числа $\varepsilon < \alpha/(4k)$, получаем, что для любого $t \in B_\delta^\circ(t_0)$ выполнено включение (при $\lambda \leqslant 2$)

$$B_\alpha(x_0) \subset H(t) + \frac{\alpha}{2} B_1(0),$$

откуда следует, что справедливо включение

$$x_0 + \frac{\alpha}{2} B_1(0) \subset H(t) \quad \forall\, t \in B_\delta^\circ(t_0).$$

Отсюда также следует, что множества $F(t) \overset{*}{-} B_{\alpha/2}(0)$ непусты при всех $t \in B_\delta^\circ(t_0)$. Определим число

$$k_1 = \frac{\operatorname{diam}\, F(t_0) + \varepsilon - \alpha}{\alpha/2}.$$

Для любого числа $\lambda > 1$ с учетом леммы 2.8.2 и того, что $\operatorname{diam}\, F(t) \leqslant \operatorname{diam}\, F(t_0) + \varepsilon$, получаем

$$F(t) \overset{*}{-} G(t) \subset (F(t) \overset{*}{-} G(t)) \overset{*}{-} \lambda B_\varepsilon(0) + \lambda k_1 B_\varepsilon(0) =$$
$$= \left(F(t) \overset{*}{-} \frac{\lambda\varepsilon}{2} B_1(0)\right) \overset{*}{-} \left(G(t) + \frac{\lambda\varepsilon}{2} B_1(0)\right) + \lambda k_1 B_\varepsilon(0) \subset$$
$$\subset F(t_0) \overset{*}{-} G(t_0) + \lambda k_1 \varepsilon B_1(0),$$

т. е. отображение H пн. св. в точке t_0. □

Теорема 2.8.4. *Пусть отображения $F, G\colon T \to 2^{\mathbb{R}^n}$ — непрерывные в метрике Хаусдорфа многозначные отображения и F принимает строго выпуклые компактные значения. Пусть отображение $H(t) = F(t) \overset{*}{-} G(t)$ непусто на T.*

Тогда H непрерывно в метрике Хаусдорфа.

Доказательство. 1. Если $\operatorname{int} H(t_0) \neq \varnothing$, то непрерывность в точке t_0 следует из теоремы 2.8.3.

2. Пусть $\operatorname{int} H(t_0) = \varnothing$. Тогда в силу строгой выпуклости отображения F, а следовательно, и отображения H, множество $H(t_0)$ одноточечное: $H(t_0) = \{x_0\}$. По теореме 2.8.2 получаем

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0, \quad \forall\, t \in B_\delta(t_0)\colon\ H(t) \subset H(t_0) + B_\varepsilon(0) = x_0 + B_\varepsilon(0).$$

Но это эквивалентно условию

$$H(t_0) = x_0 \in H(t) + B_\varepsilon(0),$$

т. е. отображение H пн. сн. в точке t_0. □

В заключение рассмотрим один случай, когда операция геометрической разности многозначных отображений непрерывна без предположений о непустой внутренности и строгой выпуклости.

Теорема 2.8.5 (М.В. Балашов [12]). *Пусть T — метрическое пространство. Пусть выпуклый компакт $F \subset \mathbb{R}^n$ является P-множеством* (*см.* § 1.8). *Пусть $G(t)$ — непрерывное в метрике Хаусдорфа многозначное отображение с компактными значениями такое, что $H(t) = F \overset{*}{-} G(t) \neq \varnothing$ при всех $t \in T$.*

Тогда многозначное отображение $H(t)$ непрерывно на T.

Доказательство. Полунепрерывность сверху $H(t)$ следует из теоремы 2.8.2. Допустим, что в точке t_0 условие пн. сн. нарушается, т. е.

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0,\ \exists\, x \in H(t_0),\ \exists\, t_k \to t_0\colon\ x \notin H(t_k) + B_{\varepsilon_0}(0). \tag{2.8.6}$$

Выберем произвольные точки $x_k \in H(t_k)$. Тогда

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset F - \bigcup_{k=1}^{\infty} G(t_k),$$

т. е. имеет место ограниченность последовательности $\{x_k\}$. Поэтому существует точка $x_0 \neq x$ такая, что можно без ограничения общности считать, что имеет место сходимость $x_k \to x_0$. Поскольку по теореме 2.8.2 отображение $H(t)$ пн. св., то $x_0 \in H(t_0)$. Далее будем без ограничения общности считать, что $x_0 = 0$. Определим $G_1(t_k) = G(t_k) + x_k$, $H_1(t_k) = F \overset{*}{-} G_1(t_k)$, $0 \leqslant k < \infty$, т. е. $G_1(t_k) \subset F$.

Из условия (2.8.6) и сходимости $x_k \to 0$ получаем, что начиная с некоторого номера K_0 для всех $k > K_0$ выполнено условие

$$x \notin H_1(t_k) + B_{\varepsilon_0/2}(0). \tag{2.8.7}$$

Отметим, что $x \neq 0$.

Зафиксируем в соответствии с обозначениями § 1.8 $q \in \mathbb{R}^n$, $q = -x/\|x\|$ и ортогональное вектору q подпространство $L(q)$, $\dim L(q) = n - 1$, а также определим для любой точки $w \in P_{L(q)}F$ функцию (см. § 1.8)

$$f(w) = f_{F,q}(w) = \min\{\mu \mid (w, \mu) \in F\}.$$

В силу того, что множество F является P-множеством, функция f непрерывна на $P_{L(q)}F$.

В силу полунепрерывности сверху отображения $G(t)$ в точке t_0 существует бесконечно малая последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что

$$G_1(t_k) \subset G_1(t_0) + \alpha_k B_1(0). \tag{2.8.8}$$

Из непрерывности функции f на компакте $P_{L(q)}F$ следует ее равномерная непрерывность. Последнее можно записать в виде

$$\forall m \;\exists\, k_m \colon\; |f(w_1) - f(w_2)| \leqslant \frac{1}{m},$$

$$\forall\, k \geqslant k_m,\; \forall w_1,\, w_2 \in P_{L(q)}F \colon\; \|w_1 - w_2\| \leqslant \alpha_k.$$

Пусть m и $k = k_m$ выбраны так, что $k > K_0$ и $2\alpha_k + 1/m < (1/2)\min\{\varepsilon_0, |x|\}$. Зафиксируем произвольную точку $u_k \in G_1(t_k)$. Тогда $u_k \in F$.

1. Если $x + u_k \in F$, то из включения $u_k \in F$ и выпуклости F следует, что $u_k + \lambda x \in F$ для всех $\lambda \in [0, 1]$.

2. Пусть $x + u_k \notin F$. Из условия (2.8.8) найдется точка $u_0^k \in G_1(t_0)$ такая, что $\|u_0^k - u_k\| \leqslant \alpha_k$. Отметим, что $u_0^k + x \in F$. Пусть $w_k = P_{L(q)}u_k$, $w_0^k = P_{L(q)}u_0^k$. Имеем $\|w_0^k - w_k\| \leqslant \alpha_k$. Определим также векторы $z_k = (w_k, f(w_k)) - u_k - x$.

Будем говорить, что точка (w, μ) лежит выше точки (w, λ), если $\mu \geqslant \lambda$.

Рассмотрим точки $x + u_k$, $(w_k, f(w_k))$, $u_0^k + x$ и $(w_0^k, f(w_0^k))$. Они лежат на параллельных прямых $\operatorname{aff}\{u_k, u_k + x\}$ и $\operatorname{aff}\{u_0^k, u_0^k + x\}$, причем точка $(w_k, f(w_k))$ лежит выше точки $u_k + x$ (в силу условия $x + u_k \notin F$), а точка $u_0^k + x$ выше точки $(w_0^k, f(w_0^k))$. Следовательно, отрезки $[x + u_k,\, x + u_0^k]$ и $[(w_k,\, f(w_k)), (w_0^k, f(w_0^k))]$ пересекаются в некоторой точке a как диагонали трапеции с вершинами $x + u_k$, $(w_k, f(w_k))$, $u_0^k + x$ и $(w_0^k, f(w_0^k))$. Имеем

$$\|z_k\| \leqslant \|(w_k,\, f(w_k)) - a\| + \|a - u_k - x\| \leqslant \\ \leqslant \|w_k - w_0^k\| + |f(w_k) - f(w_0^k)| + \|u_k - u_0^k\|.$$

Отметим, что если прямые $\operatorname{aff}\{u_k,\, u_k + x\}$ и $\operatorname{aff}\{u_0^k,\, u_0^k + x\}$ совпадают, то $w_k = w_0^k$, и полученная выше оценка очевидна. Первое и третье слагаемые в правой части предыдущей формулы не превосходят α_k. В силу равномерной непрерывности f на компакте $P_{L(q)}F$ выполнена оценка $|f(w_k) - f(w_0^k)| \leqslant 1/m$.

Из пунктов 1 и 2 получаем, что для любого $u_k \in G_1(t_k)$

$$u_k + x - \left(\frac{1}{m} + 2\alpha_k\right)\frac{x}{\|x\|} \in F,$$

откуда

$$x - \left(\frac{1}{m} + 2\alpha_k\right)\frac{x}{\|x\|} \in H_1(t_k),$$

т. е.

$$x \in H_1(t_k) + B_{\varepsilon_0/2}(0),$$

что противоречит (2.8.7). Следовательно, $H(t)$ пн. сн. $\square$

Следствие 2.8.1. *Для любого выпуклого компакта $F \subset \mathbb{R}^2$ и для любого непрерывного многозначного отображения $G(t)$ такого, что $H(t) = F \overset{*}{-} G(t) \neq \varnothing$, отображение $H(t)$ непрерывно.*

Для доказательства достаточно заметить, что любой выпуклый плоский компакт является P-множеством (лемма 1.8.3).

Интересно отметить, что усилить теорему 2.8.5 нельзя. Именно, нельзя отказаться от того, что F есть P-множество.

Пример 2.8.1. Пусть $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (-1, 0, 0)$, $a_3 = (1, 0, 1)$, $a_4 = (-1, 0, 1)$. Рассмотрим также две дуги окружности радиуса 1 радианной меры π:

$$D_1 = \{x_3 = 0,\ x_1 = \cos t,\ x_2 = \sin t,\ t \in [0, \pi]\},$$

$$D_2 = \{x_3 = 1,\ x_1 = \cos t,\ x_2 = \sin t,\ t \in [\pi, 2\pi]\}.$$

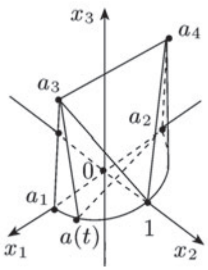


Рис. 13

Пусть $F_3 = \mathrm{co}\,\{\{a_3, a_4\} \cup D_1\}$ (рис. 13), $F_2 = \mathrm{co}\,\{\{a_1, a_2\} \cup D_2\}$, $F = F_1 \cup F_2$. Легко видеть, что множество F выпукло, компактно и не является P-множеством. Пусть $a(t) = (\cos t,\, \sin t,\, 0)$, $G(t) = \mathrm{co}\,\{a_1, a_2, a(t)\}$. При $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$ получаем

$$F \overset{*}{-} G(t) = \begin{cases} \{(0,0,0)\}, & t \in [\pi/2, \pi), \\ \mathrm{co}\,\{(0,0,0), (0,0,1)\}, & t = \pi, \\ \{(0,0,1)\}, & t \in (\pi, 3\pi/2]. \end{cases}$$

Итак, отображение $F \overset{*}{-} G(t)$ является разрывным и также не имеет непрерывного селектора.

Т е о р е м а 2.8.6 (М.В. Балашов [12]). *Пусть дана матрица $T(t)$ размера $n \times n$, которая имеет непрерывные компоненты и невырождена для всех точек t из метрического пространства T. Пусть даны P-множество $F \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывное многозначное отображение $G\colon T \to 2^{\mathbb{R}^n}$. Определим множества $H(t) = (T(t)F) \overset{*}{-} G(t) \neq \varnothing$ при каждом $t \in T$.*

Тогда многозначное отображение $H\colon T \to 2^{\mathbb{R}^n}$ непрерывно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим отображения $G_1(t) = T^{-1}(t)G(t)$ и $H_1(t) = T^{-1}(t)H(t)$ при $t \in T$.

Так как справедливо включение $H_1(t) + G_1(t) \subset F$, то $H_1(t) \subset F \overset{*}{-} G_1(t)$ для всех $t \in T$.

Выберем точку $x \in F \overset{*}{-} G_1(t)$. Тогда $T(t)x + G(t) \subset T(t)F$, т. е. $T(t)x \in H(t)$, откуда $x \in H_1(t)$.

Итак, справедливо равенство $H_1(t) = F \overset{*}{-} G_1(t)$. По теореме 2.8.5 отображение H_1 непрерывно, откуда следует, что и отображение H непрерывно. □

П р и м е р 2.8.2. Отметим, что в теореме 2.8.6 нельзя отказаться от обратимости матриц $T(t)$. Пусть в $\mathbb{R}^3$ задан многогранник

$$F = \mathrm{co}\,\{(0,0,0),\ (0,0,2),\ (1,0,0),\ (1,0,1),\ (0,1,0),\ (0,1,2),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}.$$

Пусть линейный оператор $T(t)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ при каждом $t \in [0, \pi/4]$, есть суперпозиция поворота на угол t вокруг оси Ox_1 (направление поворота от оси Ox_2 к Ox_3) и ортогонального проектирования на Ox_1x_2. Пусть

$$G(t) = \mathrm{co}\,\{(0,\, -2\sin t,\, 0),\ (0,\, \cos t,\, 0)\}.$$

Тогда

$$T(t)F = \mathrm{co}\,\{(0,\,\cos t,\,0),\,(1,\,\cos t,\,0),\,(1,\,-\sin t,\,0),\,(0,\,-2\sin t,\,0)\},$$

поэтому отображение $(T(t)F) \overset{*}{-} G(t)$ не пн. сн. в нуле:

$$(T(t)F) \overset{*}{-} G(t) = \begin{cases} \{(0,0,0)\}, & t \in (0, \pi/4], \\ \mathrm{co}\,\{(0,0,0),(1,0,0)\}, & t = 0. \end{cases}$$

§ 2.9. Теорема Майкла

Пусть T — метрическое пространство, E — банахово пространство.

Напомним утверждение о том, что многозначное отображение $F\colon T \to 2^E$ с замкнутыми выпуклыми значениями полунепрерывно снизу (пн. сн.), если для любого открытого множества $U \subset E$ множество $\{t \in T \mid F(t) \cap U \neq \varnothing\}$ открыто в пространстве T (ср. с определением 2.8.2).

Лемма 2.9.1. *Пусть даны многозначное пн. сн. отображение $F\colon T \to 2^E$ с замкнутыми выпуклыми значениями и непрерывная функция $f\colon T \to E$.*

Тогда:

1) *для любого открытого множества $V \subset E$ многозначное отображение вида $G(t) = F(t) \cap V$ пн. сн.*;

2) *многозначное отображение $G(t) = F(t) + f(t)$ пн. сн.*;

3) *если точка $x_0 \in F(t_0)$, то многозначное отображение вида*

$$G(t) = \begin{cases} F(t), & t \neq t_0, \\ x_0, & t = t_0, \end{cases}$$

также полунепрерывно снизу.

Доказательство. 1) Допустим, что для некоторого открытого множества $U \subset E$ множество $G(t_0) \cap U$ непусто. Тогда справедливо равенство

$$\{t \mid G(t) \cap U \neq \varnothing\} = \{t \mid F(t) \cap V \cap U \neq \varnothing\},$$

а поскольку множество $V \cap U$ открыто, а множество $F(t_0) \cap (V \cap \cap U)$ непусто, то в силу пн. сн. отображения F множество $\{t \mid F(t) \cap \cap (V \cap U) \neq \varnothing\}$ открыто в T, откуда следует пн. сн. G.

2) Условие пн. сн. отображения F в точке t_0 эквивалентно следующему: для любого замкнутого множества $A \subset E$ условие $F(t_0) \not\subset A$

влечет то, что множество $\{t \,|\, F(t) \not\subset A\}$ открыто. Это следует из равенства $\{t \,|\, F(t) \cap V \neq \varnothing\} = \{t \,|\, F(t) \not\subset E \backslash V\}$.

Зафиксируем произвольное замкнутое множество $A \subset E$ такое, что имеет место соотношение $F(t_0) + f(t_0) \not\subset A$. То есть найдется точка $x_0 \in F(t_0)$ такая, что $x_0 + f(t_0) \notin A$. По теореме 1.1.8 о топологической отделимости найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что справедливо равенство
$$(x_0 + f(t_0) + B_\varepsilon(0)) \cap A = \varnothing. \tag{2.9.1}$$

В силу пн. сн. отображения F существует окрестность $\mathcal{U}_1(t_0)$ точки t_0 такая, что для любого $t \in \mathcal{U}_1(t_0)$ выполнено неравенство $F(t) \cap B_{\varepsilon/3}(x_0) \neq \varnothing$. В силу непрерывности функции f существует окрестность $\mathcal{U}_2(t_0)$ точки t_0 такая, что для любого $t \in \mathcal{U}_2(t_0)$ выполнено включение $f(t) \in f(t_0) + B_{\varepsilon/3}(0)$. Выбирая точку $x(t) \in F(t) \cap$ $\cap\, B_{\varepsilon/3}(x_0)$ получаем, что $x(t) + f(t) \in F(t) + f(t)$ и
$$x(t) + f(t) \in x_0 + f(t_0) + B_{2\varepsilon/3}(0),$$
откуда и в силу равенства (2.9.1) следует выражение $(F(t) + f(t)) \not\subset A$ для всех $t \in \mathcal{U}_1(t_0) \cap \mathcal{U}_2(t_0)$.

3) Проверки требует лишь то, что G пн. сн. в точке t_0. Выбирая любое открытое множество $V \subset E$ такое, что $x_0 \in V$, получаем равенство
$$\{t \,|\, G(t) \cap V \neq \varnothing\} = \{t \,|\, F(t) \cap V \neq \varnothing\},$$
где последнее множество по условию на F открыто. $\square$

Определение 2.9.1. Семейство $\{f_\alpha\}$ непрерывных функций $f_\alpha\colon T \to \mathbb{R}$ называется *непрерывным разложением единицы*, если $0 \leqslant$ $\leqslant f_\alpha \leqslant 1$, $\sum\limits_\alpha f_\alpha = 1$, причем это семейство локально конечно, т. е. каждой точке $t \in T$ соответствует ее окрестность U такая, что множество значений $f_\alpha(U)$ равно $\{0\}$ для всех индексов α, за исключением, быть может, конечного их числа (которое зависит от выбора точки t и окрестности U).

Напомним, что покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства T называется *локально конечным*, если у каждой точки $t \in T$ существует ее окрестность U такая, что $U \cap U_\alpha = \varnothing$ для всех индексов α, за исключением конечного их числа.

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма, доказанная, например, в [109] (§ 0.2.21, утверждения (3), (4) и (5)).

Лемма 2.9.2. *Во всякое открытое покрытие $\{U_\beta\}$ метрического пространства T можно вписать локально конечное открытое покрытие $\{V_\lambda\}$, т. е. для каждого индекса λ найдется индекс*

$\beta = \beta(\lambda)$ такой, что $V_\lambda \subset U_\beta$. При этом существует непрерывное разбиение единицы $\{f_\lambda\}$ такое, что для каждого λ носитель $\operatorname{supp} f_\lambda = \{t \mid f_\lambda(t) \neq 0\}$ *функции f_λ содержится во множестве V_λ, а множества $\{\operatorname{supp} f_\lambda\}$ сами образует локально конечное покрытие пространства T.*

Теорема 2.9.1 (Е. Майкл [152]). *Пусть T — метрическое пространство, E — банахово пространство. Пусть $F\colon T \to 2^E$ — пн. сн. многозначное отображение с непустыми замкнутыми выпуклыми значениями.*

Тогда для любых точек $t_0 \in T$, $x_0 \in E$ таких, что $x_0 \in F(t_0)$, сущестует непрерывная функция $f\colon T \to E$ такая, что $f(t_0) = x_0$ и $f(t) \in F(t)$ для всех $t \in T$.

Доказательство. Шаг 1. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$.

Пусть $x \in E$ — произвольная точка. Определим множество

$$U_x = F^{-1}(x - B^\circ_\varepsilon(0)) = \{t \mid F(t) \cap (x - B^\circ_\varepsilon(0)) \neq \varnothing\}.$$

Множество U_x открыто в силу пн. сн. отображения F. Очевидно, что множество $\bigcup\limits_{x \in E} U_x$ есть открытое покрытие пространства T.

В силу леммы 2.9.2 найдется локально конечное покрытие $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, вписанное в $\{U_x\}_{x\in E}$, и соответствующее ему непрерывное разбиение единицы $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ со свойством $\operatorname{supp} f_\lambda \subset V_\lambda$.

Поскольку покрытие V_λ вписано в U_x, то для каждого λ найдется точка $x_\lambda \in E$ (возможно, не единственная) такая, что $V_\lambda \subset U_{x_\lambda}$. Зафиксируем x_λ для каждого λ. Определим функцию

$$f(t) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(t) x_\lambda. \tag{2.9.2}$$

В силу локальной конечности покрытия $\{\operatorname{supp} f_\lambda\}$ для любого $t_0 \in T$ найдется окрестность $U \subset T$ точки t_0 такая, что $U \cap \operatorname{supp} f_\lambda = \varnothing$ для всех λ, кроме конечного их набора. Отсюда получаем, что при всех $t \in U$ сумма в формуле (2.9.2) содержит одно и то же конечное число непрерывных слагаемых, поэтому функция $f(t)$ непрерывна в точке t_0. Следовательно, функция f непрерывна на T.

Пусть мы выбрали $t \in T$ и λ такие, что $f_\lambda(t) > 0$; тогда в силу леммы 2.9.2 получаем $t \in \operatorname{supp} f_\lambda \subset V_\lambda \subset U_{x_\lambda} = F^{-1}(x_\lambda - B^\circ_\varepsilon(0))$, или $x_\lambda \in F(t) + B^\circ_\varepsilon(0)$. Отсюда в силу условия $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(t) = 1$ и в силу выпуклости значений $F(t)$ получаем

$$f(t) = \sum_{\lambda\colon\, f_\lambda(t)>0} f_\lambda(t) x_\lambda \in \sum_{\lambda\colon\, f_\lambda(t)>0} f_\lambda(t)(F(t) + B^\circ_\varepsilon(0)) = F(t) + B^\circ_\varepsilon(0).$$

Итак, в произвольной ε-окрестности отображения F доказано существование непрерывного селектора.

Шаг 2. Выберем последовательность чисел $\varepsilon_k = 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. Построим последовательность непрерывных функций $f_k\colon T \to E$ таких, что справедливы включения:

1) $f_k(t) \in F(t) + B^\circ_{\varepsilon_k}(0)$ для всех $t \in T$;

2) $f_k(t) \in f_{k-1}(t) + 2B^\circ_{\varepsilon_{k-1}}(0)$ для всех $t \in T$.

По индукции допустим, что набор $f_1, \ldots, f_k$ построен. Для построения функции f_{k+1} рассмотрим многозначное отображение

$$G(t) = F(t) \cap (f_k(t) + B^\circ_{\varepsilon_k}(0)) = f_k(t) + (F(t) - f_k(t)) \cap B^\circ_{\varepsilon_k}(0).$$

По построению функции f_k значения отображение G непусты, а по лемме 2.9.1 отображение G пн. сн. По п. 1 доказательства (примененному к отображению G) найдется непрерывная функция $f_{k+1}(t)$ такая, что справедливо включение

$$f_{k+1}(t) \in G(t) + B^\circ_{\varepsilon_{k+1}}(0),$$

откуда $f_{k+1}(t) \in F(t) + B^\circ_{\varepsilon_{k+1}}(0)$ для всех $t \in T$ и $f_{k+1}(t) \in f_k(t) + B^\circ_{\varepsilon_k}(0) + B^\circ_{\varepsilon_{k+1}}(0) \subset f_k(t) + 2B^\circ_{\varepsilon_k}(0)$ для всех t. Итак, функция f_{k+1} построена.

Из включения 2) следует, что последовательность функций $\{f_k\}$ фундаментальна в пространстве $C(T)$. Следовательно, f_k сходится к некоторой непрерывной функции f. В силу включения 1) и замкнутости значений $F(t)$ получаем, что $f(t) \in F(t)$ для всех t.

Шаг 3. Для того чтобы еще удовлетворить условию $f(t_0) = x_0$, нужно применить рассуждения первых двух шагов к многозначному отображению

$$G(t) = \begin{cases} F(t), & t \neq t_0, \\ x_0, & t = t_0, \end{cases}$$

которое имеет выпуклые замкнутые значения и пн. сн. по лемме 2.9.1. $\square$

§ 2.10. ε-вариационный принцип Экланда

В данном параграфе мы докажем некоторый общий для полных метрических пространств факт, установленный И. Экландом [129] и называемый ε-вариационным принципом. Это утверждение не требует от функции ничего, кроме ее пн. сн. и ограниченности снизу и позволяет получить многочисленные важные результаты. Речь идет о проблеме минимизации полунепрерывной снизу функции f на полном метрическом пространстве (E, ϱ). Известно, что если E — компакт, то точка минимума у такой функции f всегда существует, т. е. существует точка $\overline{x}$ такая, что $f(x) \geqslant f(\overline{x})$ для всех $x \in E$. Однако это не так, если пространство E не компактно. При этом даже для ограниченной снизу функции (т. е. $f(x) \geqslant \mu > -\infty \quad \forall x \in E$) инфимум этой функции на пространстве E может не достигаться. Тем не менее по определению инфимума, существует минимизирующая последовательность $\{x_n\}$, т. е. такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \inf\limits_{x\in E} f(x)$.

Отсюда для ограниченной снизу функции следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка x_ε такая, что справедливо неравенство

$$f(x) \geqslant f(x_\varepsilon) - \varepsilon \quad \forall\, x \in E. \tag{2.10.1}$$

ε-вариационный принцип устанавливает для каждого $\varepsilon > 0$ наличие других точек, кроме x_ε, обладающих дополнительными замечательными свойствами.

Мы получим также из принципа Экланда теорему о том, что выпуклая собственная полунепрерывная снизу функция на банаховом пространстве субдифференцируема на всюду плотном подмножестве множества $\operatorname{dom} f$.

Теорема 2.10.1 (ε-вариационный принцип Экланда). *Пусть* (E, ϱ) *— полное метрическое пространство*, $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ *— собственная пн. сн. и ограниченная снизу функция. Пусть число* $\varepsilon > 0$ *зафиксировано и точка* $x_\varepsilon \in E$ *такова, что*

$$f(x_\varepsilon) \leqslant \inf_{x\in E} f(x) + \varepsilon. \tag{2.10.2}$$

Тогда для любого числа $\lambda > 0$ *найдется точка* $y_\varepsilon \in E$ *такая, что*:

1) $f(y_\varepsilon) \leqslant f(x_\varepsilon)$;

2) $\varrho(y_\varepsilon, x_\varepsilon) \leqslant \lambda$;

3) $\forall\, x \in E, \quad x \neq y_\varepsilon$, *выполнено неравенство* $f(x) + \dfrac{\varepsilon}{\lambda}\,\varrho(x, y_\varepsilon) > > f(y_\varepsilon)$.

Доказательство. Для любого числа $\alpha > 0$ определим отношение частичного порядка $\prec$ на $E \times \mathbb{R}$, полагая, что

$$(x_1, r_1) \prec (x_2, r_2) \Leftrightarrow r_2 - r_1 + \alpha\varrho(x_1, x_2) \leqslant 0. \tag{2.10.3}$$

Нетрудно видеть, что данное отношение $\prec$ рефлексивно и транзитивно, кроме того, для каждого $(x_1, r_1) \in E \times \mathbb{R}$ множество

$$\{(x, r) \mid (x_1, r_1) \prec (x, r)\}$$

непусто и замкнуто в пространстве $E \times \mathbb{R}$.

Покажем, что если замкнутое множество $S \subset E \times \mathbb{R}$ таково, что существует число μ, при котором любой элемент $(x, r) \in S$ удовлетворяет условию $r \geqslant \mu$, то для каждого элемента $(x_1, r_1) \in S$ найдется элемент $(\widetilde{x}, \widetilde{r}) \in S$, удовлетворяющий соотношению $(x_1, r_1) \prec (\widetilde{x}, \widetilde{r})$ и являющийся максимальным во множестве S для отношения порядка (2.10.3).

Для элемента $(x_1, r_1) \in S$ определим по индукции последовательность точек $\{(x_n, r_n)\} \subset S$. Пусть точка $(x_n, r_n) \in S$ известна, определим множество и число

$$\begin{gathered} S_n = \{(x, r) \in S \mid (x_n, r_n) \prec (x, r)\}, \\ \mu_n = \inf \{r \mid (x, r) \in S_n \ \text{ для некоторого } x\}. \end{gathered} \tag{2.10.4}$$

По определению множества S справедливо неравенство $\mu_n \geqslant \mu$. Теперь определим точку (x_{n+1}, r_{n+1}) как произвольный элемент из S_n, удовлетворяющий условию

$$r_{n+1} \leqslant \frac{r_n + \mu_n}{2}. \tag{2.10.5}$$

Множества S_n замкнуты и упорядочены по включению, т. е. $S_{n+1} \subset \subset S_n$, откуда следует, что $\mu_{n+1} \geqslant \mu_n$. Из этого и неравенства (2.10.5) получаем неравенство

$$0 \leqslant r_{n+1} - \mu_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\Big(r_n - \mu_n\Big) \leqslant 2^{-n}(r_1 - \mu).$$

Следовательно, для любого элемента $(x, r) \in S_{n+1}$ из определения μ_n (2.10.4) и определения отношения частичного порядка (2.10.3) получаем неравенства

$$|r_{n+1} - r| \leqslant |r_{n+1} - \mu_{n+1}| \leqslant 2^{-n}|r_1 - \mu|,$$

$$\varrho(x_{n+1}, x) \leqslant \frac{2^{-n}}{\alpha}\,|r_1 - \mu|.$$

Это значит, что диаметр $\operatorname{diam} S_n = \sup\limits_{x,y \in S_n} \varrho(x, y)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому в силу полноты метрического пространства $E \times \mathbb{R}$ существует единственная точка $(\widetilde{x}, \widetilde{r}) \in E \times \mathbb{R}$ такая, что

$$(\widetilde{x}, \widetilde{r}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Из определения множеств S_n (2.10.4) следует, что $(x_n, r_n) \prec (\widetilde{x}, \widetilde{r})$ для всех n, в частности, и для $n = 1$.

Предположим, что найдется другая точка $(\widehat{x}, \widehat{r}) \in S$ такая, что $(\widetilde{x}, \widetilde{r}) \prec (\widehat{x}, \widehat{r})$. В силу транзитивности $\prec$ получаем, что $(x_n, r_n) \prec (\widehat{x}, \widehat{r})$ для всех n, откуда

$$(\widehat{x}, \widehat{r}) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Из последнего включения следует, что элемент $(\widehat{x}, \widehat{r})$ совпадает с $(\widetilde{x}, \widetilde{r})$, что и доказывает максимальность элемента $(\widetilde{x}, \widetilde{r})$ для отношения (2.10.3).

Определим теперь множество $S = \operatorname{epi} f$, число $\alpha = \varepsilon/\lambda$ и точку $(x_1, r_1) = (x_\varepsilon, f(x_\varepsilon))$. По доказанному выше в S существует максимальный элемент $(y_\varepsilon, r_\varepsilon) \in S$, удовлетворяющий условию

$$(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon)) \prec (y_\varepsilon, r_\varepsilon). \tag{2.10.6}$$

Так как $(y_\varepsilon, r_\varepsilon) \in S$, то $(y_\varepsilon, r_\varepsilon) \prec (y_\varepsilon, f(y_\varepsilon))$, а это вследствие максимальности элемента $(y_\varepsilon, r_\varepsilon)$ означает, что $r_\varepsilon = f(y_\varepsilon)$. Теперь из неравенства (2.10.6) вытекает, что

$$f(y_\varepsilon) - f(x_\varepsilon) + \alpha \varrho(y_\varepsilon, x_\varepsilon) \leqslant 0, \tag{2.10.7}$$

откуда следует свойство 1) утверждения теоремы.

Максимальность элемента $(y_\varepsilon, f(y_\varepsilon))$ во множестве S означает, что для любого $y \in E$, $y \neq y_\varepsilon$, и такого, что $f(y) < +\infty$, соотношение $(y_\varepsilon, f(y_\varepsilon)) \prec (y, f(y))$ не имеет места. Это в силу отношения (2.10.3) означает выполнение свойства 3). Наконец, поскольку $f(x_\varepsilon) \leqslant \inf\limits_{x \in E} f(x) + \varepsilon$, имеем $f(y_\varepsilon) \geqslant f(x_\varepsilon) - \varepsilon$. С учетом неравенства (2.10.7) отсюда получаем оценку 2). $\square$

Отметим, что свойство 3) теоремы 2.10.1 означает, что у функции $g(y) = f(y) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\, \varrho(y, y_\varepsilon)$ в точке y_ε достигается абсолютный минимум.

Для пояснения геометрического смысла свойства 3) считаем, что E — банахово пространство такое, что $\varrho(x, y) = \|x - y\|$. Определим множество $K = \left\{(x, r) \mid r + \frac{\varepsilon}{\lambda}\, \|x\| < 0\right\}$. Это конус вращения с вершиной в точке $(0, 0)$ и углом ω таким, что $\operatorname{tg} \omega = \lambda/\varepsilon$. Тогда геометрический смысл свойства 3) состоит в том, что сдвинутый конус

$$(y_\varepsilon, f(y_\varepsilon)) + K = \left\{(x, r) \mid r - f(y_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\, \|x - y_\varepsilon\| < 0\right\}$$

целиком лежит под графиком $\operatorname{graph} f$ в пространстве $E \times \mathbb{R}$, причем касается графика только своей вершиной $(y_\varepsilon, f(y_\varepsilon))$.

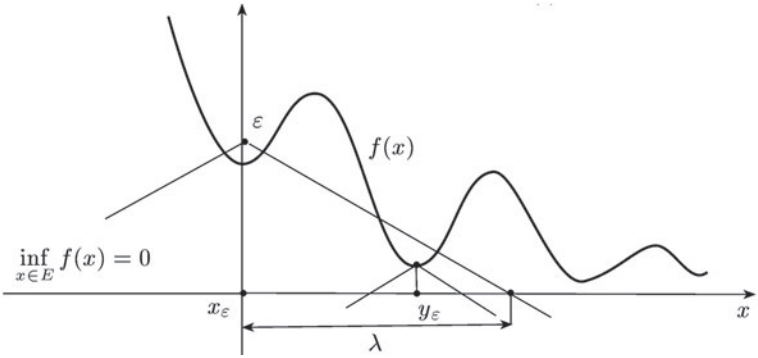


Рис. 14

Чем меньше ε/λ, тем более плоским является конус K и тем ближе множество $(y_\varepsilon, f(y_\varepsilon)) + K$ к горизонтальной плоскости, проходящей через точку $(y_\varepsilon, f(y_\varepsilon))$ (рис. 14).

Выбор коэффициентов ε и λ позволяет находить некий баланс между утверждениями 2) и 3) теоремы в зависимости от преследуемых целей. Если коэффициент λ/ε увеличивать, то конус K становится более плоским, а точка y_ε дает значение $f(y_\varepsilon)$, приближающееся к инфимуму. Но при этом, так как правая часть неравенства 2) увеличивается, информация о положении точки y_ε будет незначительной. Если коэффициент λ/ε уменьшать, то точка y_ε близка к исходной точке x_ε, но конус K острый, и из неравенства 3) можно получить мало информации.

Следствие 2.10.1. *Пусть E — полное метрическое пространство, $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ — собственная пн. сн. и ограниченная снизу функция.*

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует точка y_ε такая, что:

1) $f(y_\varepsilon) \leqslant \inf\limits_{x\in E} f(x) + \varepsilon$,

2) $f(x) > f(y_\varepsilon) - \varepsilon\varrho(x, y_\varepsilon)$ *для любого* $x \neq y_\varepsilon$.

Выбирая частные случаи $\lambda = 1$ и $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$, получаем следующие следствия.

Следствие 2.10.2. *Пусть E — полное метрическое пространство, $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ — собственная пн. сн. и ограниченная снизу функция. Для любого числа $\varepsilon > 0$ пусть точка $x_\varepsilon \in E$ такова, что*

$$f(x_\varepsilon) \leqslant \inf_{x\in E} f(x) + \varepsilon.$$

Тогда существует точка $y_\varepsilon \in E$ *такая, что*:

1) $f(y_\varepsilon) \leqslant f(x_\varepsilon)$;

2) $\varrho(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leqslant \sqrt{\varepsilon}$;

3) $\forall\, x \in E,\ \ x \neq y_\varepsilon$, *выполнено неравенство*

$$f(x) > f(x_\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}\ \varrho(x, y_\varepsilon).$$

Следствие 2.10.3. *Если в следствии* 2.10.2 *пространство* E *банахово, а функция* f *дифференцируема по Гато, то из свойства* 3) *следует неравенство*

$$\|f'(y_\varepsilon)\| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\,.$$

Этот факт можно трактовать и так: найдется минимизирующая последовательность точек $\{y_n\} \subset E$ *такая, что* $f(y_n) \to \to \inf\limits_{x\in E} f(x)$ *и* $f'(y_n) \to 0$.

Доказательство. Выберем произвольный единичный вектор $q \in E$, $\|q\| = 1$, и положим $x = y_\varepsilon + tq$, где $t > 0$. Тогда из свойства 3) получаем неравенство

$$\frac{1}{t}\,(f(y_\varepsilon + tq) - f(y_\varepsilon)) \geqslant -\sqrt{\varepsilon} \quad \forall\, t > 0.$$

Устремляя $t \to 0$, получаем по определению производной Гато, что $\langle f'(y_\varepsilon), q\rangle \geqslant -\sqrt{\varepsilon} \quad \forall q \in E, \quad \|q\| = 1$. Заменяя q на $-q$, получаем, что $-\langle f'(y_\varepsilon), q\rangle \geqslant -\sqrt{\varepsilon}\,$, т. е. $|\langle f'(y_\varepsilon), q\rangle| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$ для всех единичных векторов $q \in E$, что и доказывает требуемое неравенство. □

Пусть теперь функция f выпукла, пн.сн. и ограничена снизу, пусть $x_0 \in E$ — произвольная точка, где $f(x_0) < +\infty$. Из ε-вариационного неравенства с $\lambda = 1$ следует, что найдется точка $y_\varepsilon \in E$ такая, что $\|x_0 - y_\varepsilon\| \leqslant f(x_0) - f(y_\varepsilon)$, и для любой точки $x \neq y_\varepsilon$

$$f(y_\varepsilon) < f(x) + \varepsilon\|x - y_\varepsilon\|.$$

Так как $x = y_\varepsilon$ есть точка минимума выпуклой функции $x \to f(x) + + \varepsilon\|x - y_\varepsilon\|$, то в силу теоремы Моро–Рокафеллара получаем включение

$$0 \in \partial f(y_\varepsilon) + \varepsilon B_1^*(0). \tag{2.10.8}$$

Следствие 2.10.4. *Пусть* E — *банахово пространство, а* f: $E \to \overline{\mathbb{R}}$ — *собственная пн. сн. выпуклая и ограниченная снизу функция. Пусть точка* $x_0 \in \operatorname{dom} f$ *и число* $\varepsilon > 0$.

Тогда найдутся точка $y_\varepsilon \in \operatorname{dom} f$ *и функционал* $p_\varepsilon \in \partial f(x_\varepsilon)$ *такие, что справедливы формулы* $\|x_0 - y_\varepsilon\| \leqslant f(x_0) - f(y_\varepsilon)$, $\|p_\varepsilon\|_* \leqslant \varepsilon$.

Доказательство следует из формулы 2.10.8.

Следствие 2.10.5. *Пусть* $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ — *собственная пн. сн. выпуклая и ограниченная снизу функция. Для любого числа* $\varepsilon > 0$ *выберем точку* $x_\varepsilon \in \operatorname{dom} f$ *такую, что* $f(x_\varepsilon) \leqslant \varepsilon + \inf\limits_{x\in E} f(x)$.

Тогда для любого k *найдутся точка* $y_\varepsilon \in \operatorname{dom} f$ *и функционал* $p_\varepsilon \in \partial f(y_\varepsilon)$ *такие, что* $f(y_\varepsilon) \leqslant f(x_\varepsilon)$, $\|x_\varepsilon - y_\varepsilon\| \leqslant 1/k$, $\|p_\varepsilon\|_* \leqslant k\varepsilon$.

Доказательство следствия 2.10.5 получается так же, как следствия 2.10.2 ($\lambda = 1/k$).

В заключение в целях демонстрации эффективности вариационного принципа докажем с его помощью следующую теорему

Теорема 2.10.2. (А. Бренстед, Р.Т. Рокафеллар [68]). *Пусть* E — *банахово пространство, а функция* $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ — *собственная выпуклая и пн. сн.*

Тогда множество точек, где f *субдифференцируема, всюду плотно в* $\operatorname{dom} f$. *Более того, для любой точки* $x_0 \in E$, *где* $f(x_0) < +\infty$, *найдется последовательность точек* $\{y_k\} \subset E$ *такая, что*: а) $y_k \to x_0$; б) $f(y_k) \to f(x_0)$ *при* $k \to \infty$; в) $\partial f(y_k) \neq \varnothing$ *для всех* k.

Доказательство. Если функция $f = +\infty$, то $\operatorname{dom} f = \varnothing$, и доказывать нечего.

Если $f \not\equiv +\infty$, то в силу теоремы 1.11.1 найдутся функционал $p \in E^*$ и число $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что функция $g(x) = f(x) - \langle p, x\rangle - \alpha$ больше нуля для всех $x \in E$.

Пусть x_0 — любая точка из $\operatorname{dom} f$. Применим к функции g при $\varepsilon = g(x_0) - \inf\limits_{x\in E} g(x)$ следствие 2.10.5. Для произвольного натурального числа k найдутся точка $y_k \in E$ и функционал $p_k \in \partial g(y_k)$ такие, что

$$g(y_k) \leqslant g(x_0), \tag{2.10.9}$$

$$\|x_0 - y_k\| \leqslant k^{-1}, \tag{2.10.10}$$

$$\|p_k\|_* \leqslant k\varepsilon. \tag{2.10.11}$$

Отсюда и из определения функции g следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = x_0$, $y_k \in \operatorname{dom} f$, и функция f субдифференцируема в точке y_k, так как $\partial f(y_k) = p + \partial g(y_k)$. Пункты а), в) утверждения теоремы доказаны.

Докажем пункт б). Из неравенства (2.10.9) получаем, что $f(y_k) < f(x_0) - \langle p, x_0 - y_k\rangle$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Устремляя $k \to \infty$, получаем $\liminf\limits_{k\to\infty} f(y_k) \leqslant f(x_0)$. Но в силу пн. сн. функции f имеем

$$\liminf_{k\to\infty} f(y_k) \geqslant f(x_0),$$

откуда следует, что $f(y_k) \to f(x_0)$. $\square$

§ 2.11. О вложении множества выпуклых компактов в линейное пространство

В этом параграфе исследуется вопрос о возможности вложения пространства выпуклых компактов в некоторое линейное пространство. Один из таких способов состоит в том, что каждому выпуклому компакту соответствует его опорная функция, определенная на единичной сфере. При этом множество всех опорных функций образует выпуклый конус в линейном пространстве непрерывных функций, определенных на единичной сфере (см., например, [65, 111]).

Мы воспользуемся другой конструкцией вложения множества выпуклых компактов из линейного топологического пространства в некоторое линейное пространство, в котором будет построена локально выпуклая хаусдорфова топология, индуцированная топологией пространства выпуклых компактов. С помощью указанного вложения нами получены некоторые аналоги теорем Шаудера (о неподвижной точке), Майкла (о непрерывном селекторе) и Крейна–Мильмана (о крайних точках) для многозначных отображений с выпуклыми значениями.

В этом параграфе для случая линейного метрического пространства (Y, ϱ) для открытого шара радиуса $r > 0$ с центром в точке y введем специальное обозначение через $B_r^{\varrho}(y)$, т. е.

$$B_r^{\varrho}(y) = \{x \in Y \mid \varrho(y, x) < r\}.$$

Метрика Хаусдорфа для множеств из линейного метрического пространства (Y, ϱ) с инвариантной относительно сдвигов метрикой ϱ определяется аналогично определению из § 1.3, т. е.

$$h_{\varrho}(A, B) = \inf\{r \geqslant 0 \mid A \subset B + B_r^{\varrho}(0),\ B \subset A + B_r^{\varrho}(0)\}. \qquad (2.11.1)$$

В случае, когда пространство Y является линейным нормированным пространством, расстояние по Хаусдорфу между множествами A, B в этом параграфе будем обозначать, как и прежде, через $h(A, B)$ (см. § 1.3).

Пусть (E, τ) — локально выпуклое хаусдорфово пространство. Определим топологическое пространство $\mathcal{K}(E, \tau)$, состоящее из всех выпуклых компактов пространства (E, τ) с топологией, локальную базу которой определим через окрестности произвольного элемента $A \in \mathcal{K}(E, \tau)$ вида

$$\mathcal{U}(A) = \{B \in \mathcal{K}(E, \tau) \mid B \subset A + V(A),\ A \subset B + V(A)\}, \qquad (2.11.2)$$

где $V(A)$ — некоторая окрестность нуля из пространства (E, τ). Легко проверить, что совокупность окрестностей (2.11.2) удовлетворяет определению локальной базы топологии. В силу этого для множеств, элементами которых являются компакты из пространства (E, τ), стандартным образом можно ввести понятия компактности и замкнутости.

Определение 2.11.1. Множество $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}(E, \tau)$ называется *τ-компактным* множеством, если из любого покрытия множества $\mathcal{A}$ множествами вида (2.11.2) можно выделить конечное подпокрытие.

Определение 2.11.2. Множество $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}(E, \tau)$ называется *τ-замкнутым* множеством, если любой элемент $A_0 \in \mathcal{K}(E, \tau)$ такой, что всякая его окрестность $\mathcal{U}(A_0)$ вида (2.11.2) пересекается со множеством $\mathcal{A}$ ($\mathcal{U}(A_0) \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$), принадлежит множеству $\mathcal{A}$. Иными словами, семейство компактов $\mathcal{A}$ замкнуто, если для любого выпуклого компакта A_0 из условия, что для любой окрестности нуля $V \in \tau$ найдется множество $A_V \in \mathcal{A}$ такое, что $A_0 \subset A_V + V$, $A_V \subset A_0 + V$, следует, что $A_0 \in \mathcal{A}$.

Определение 2.11.3. Пусть (E, τ) — локально выпуклое хаусдорфово пространство, а A — некоторое непустое множество из E. Многозначное отображение $f\colon 2^E \to 2^E$ называется *непрерывным* в A, если для любой окрестности нуля V из пространства E найдется окрестность нуля U из E такая, что для любого множества B, удовлетворяющего включениям $A \subset B + U$ и $B \subset A + U$, выполнены включения $f(A) \subset f(B) + V$ и $f(B) \subset f(A) + V$.

Отметим, что в случае, когда пространство E является линейным метрическим пространством с метрикой ϱ, инвариантной относительно сдвига, пространство компактов $\mathcal{K}(E, \varrho)$ является метрическим с метрикой Хаусдорфа (2.11.1), а определение 2.11.3 означает непрерывность в метрике Хаусдорфа.

Используя операции суммы Минковского двух множеств $A + B$ и умножение множества A на скаляр λ, т.е. λA, укажем правило вложения пространства выпуклых компактов $\mathcal{K}(E, \tau)$ в некоторое линейное пространство $L(E)$, которое зададим следующим образом.

Элементами линейного пространства $L(E)$ будут классы эквивалентностей, составленные из пар (A, B), где A, $B \in \mathcal{K}(E, \tau)$. Скажем, что элемент (A_1, B_1) *равен* элементу (A_2, B_2) (иначе говоря, эти элементы принадлежат одному классу эквивалентности), если справедливо равенство $A_1 + B_2 = A_2 + B_1$. *Нулевой* элемент определим как класс эквивалентностей, задаваемый любой парой вида (A, A), где $A \in \mathcal{K}(E, \tau)$. Сумму двух элементов, задаваемых парами (A, B) и (C, D), определим как класс эквивалентностей, задаваемый парами $(A + C, B + D)$, т. е. по формуле

$$(A, B) + (C, D) = (A + C,\ B + D).$$

При этом отметим, что пара $(A + C, B + D)$ является элементом пространства $L(E)$, так как сумма компактов $A + C$ также является компактом из E. *Противоположным* к элементу (A, B) назовем элемент (B, A), т. е. $-(A, B) = (B, A)$.

Умножение элемента на скаляр $\lambda \geqslant 0$ определим по формуле

$$\lambda(A, B) = (\lambda A,\ \lambda B),$$

и умножение элемента на $\lambda < 0$ определим по формуле $\lambda(A, B) = (|\lambda| B,\ |\lambda| A)$.

Легко проверить, что определенные таким образом операции сложения и умножения на скаляр удовлетворяют всем аксиомам линейных пространств, т. е. пространство $L(E)$ является линейным пространством.

Определим в линейном пространстве $L(E)$ топологию $\mathcal{T}$ через ее локальную базу нуля, представляющую собой семейство множеств вида

$$\Omega = \Omega(N,\ \{V_1, \ldots, V_N\}) = \bigcap_{i=1}^{N} \{(A, B) \mid A \subset B + V_i,\ B \subset A + V_i\}, \tag{2.11.3}$$

где $N \in \mathbb{N}$, V_i — выпуклые окрестности нуля в (E, τ).

Теорема 2.11.1. *Пусть (E, τ) — локально выпуклое хаусдорфово пространство. Тогда топологическое пространство $(L(E), \mathcal{T})$ является локально выпуклым хаусдорфовым пространством, а пространство $\mathcal{K}(E, \tau)$ изоморфно острому выпуклому порождающему конусу*

$$\mathbb{K} = \{(A, \{0\}) \mid A \in \mathcal{K}(E, \tau)\} \tag{2.11.4}$$

в пространстве $(L(E), \mathcal{T})$.

Доказательство. Проверка выпуклости множеств Ω, непрерывности операций сложения и умножения на скаляр, а также замкнутости точек в $(L(E), \mathcal{T})$ есть простое техническое упражнение.

Проверим выпуклость произвольного множества Ω из (2.11.3). Пусть (A, B) и (C, D) принадлежат Ω и $\lambda \in (0, 1)$; тогда

$$\lambda(A, B) + (1 - \lambda)(C, D) = (\lambda A + (1 - \lambda) C,\ \lambda B + (1 - \lambda) D),$$

$$A \subset B + V_i, \quad C \subset D + V_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Поэтому в силу выпуклости базы топологии τ получаем

$$\lambda A + (1-\lambda)C \subset \lambda B + (1-\lambda)D + \lambda V_i + (1-\lambda)V_i = \\ = \lambda B + (1-\lambda)D + V_i.$$

Аналогично доказывается второе включение, т. е. в итоге

$$\lambda(A,B) + (1-\lambda)(C,D) \in \Omega.$$

Проверим непрерывность операции сложения в линейном пространстве $L(E)$ с топологией $\mathcal{T}$. Рассмотрим произвольную окрестность нуля в $L(E)$, входящую в локальную базу, вида

$$W = \bigcap_{i=1}^{N} \{(G,H) \,|\, G \subset H + V_i,\ H \subset G + V_i\}. \tag{2.11.5}$$

Покажем, что если взять окрестность нуля вида

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^{N} \Big\{(G,H) \,|\, G \subset H + \frac{1}{2}V_i,\ H \subset G + \frac{1}{2}V_i\Big\},$$

то для двух произвольных элементов (A,B) и (C,D) из $L(E)$ справедливо включение

$$((A,B)+\Omega) + ((C,D)+\Omega) \subset (A+C, B+D) + W, \tag{2.11.6}$$

что и будет означать непрерывность операции сложения в указанной топологии пространства $L(E)$.

Прежде всего покажем, что $\Omega + \Omega \subset W$. В самом деле, пусть $(G_1,H_1) \in \Omega$, $(G_2,H_2) \in \Omega$. Тогда это означает включения

$$G_1 \subset H_1 + \frac{1}{2}V_i, \quad G_2 \subset H_2 + \frac{1}{2}V_i \quad \forall\, i.$$

Отсюда и в силу выпуклости ограниченных множеств G_1, G_2, H_1, H_2 получаем, что

$$G_1 + G_2 \subset H_1 + H_2 + V_i \quad \forall\, i.$$

Аналогично, из $(G_1,H_1) \in \Omega$, $(G_2,H_2) \in \Omega$ получаем включение

$$H_1 + H_2 \subset G_1 + G_2 + V_i,$$

т. е. $(G_1+G_2, H_1+H_2) \in W$.

Для доказательства включения (2.11.6) зафиксируем $(A,B)\in$ $\in L(E)$, $(C,D)\in L(E)$ и $(G_1,H_1)\in\Omega$, $(G_2,H_2)\in\Omega$. Тогда

$$((A,B)+(G_1,H_1))+((C,D)+(G_2,H_2))=$$
$$=(A+C,\,B+D)+(G_1+G_2,\,H_1+H_2)\in(A+C,\,B+D)+W,$$

что и доказывает (2.11.6).

Проверим непрерывность операции умножения элемента на скаляр в линейном пространстве $L(E)$ с топологией $\mathcal{T}$.

Зафиксируем элемент $(A,B)\in L(E)$ и скаляр $\lambda\in\mathbb{R}$. Доказательство непрерывности проведем для случая, когда $\lambda>0$, так как другие случаи доказываются аналогично.

Достаточно показать, что для любой окрестности нуля W вида (2.11.5) найдутся окрестность нуля $\Omega\in\mathcal{T}$ и число $\delta>0$ такие, что для $\forall\,(C,D)\in(A,B)+\Omega$ и для $\forall\,\alpha\in(\lambda-\delta,\,\lambda+\delta)$ справедливо включение

$$\alpha(C,D)\in\lambda(A,B)+W. \qquad (2.11.7)$$

Определим $V_0=\bigcap\limits_{i=1}^{N}V_i$, где V_i взяты из определения W (2.11.5). Очевидно, что множество V_0 есть окрестность нуля в топологии τ пространства E. Выберем число $r>0$ такое, чтобы выполнялось включение $A\cup B\subset rV_0$. В силу того, что множества A и B ограничены, такое число r, очевидно, существует.

Выберем $\delta>0$ из условий $\delta\in(0,\lambda)$ и $4r\delta<1$, откуда следует включение $2r\delta V_0\subset\frac{1}{2}V_i\ \ \forall\,i\in\overline{1,N}$.

Выберем окрестность нуля Ω вида

$$\Omega=\bigcap_{i=1}^{N}\left\{(G,H)\,\Big|\,G\subset H+\frac{1}{2(\lambda+\delta+1)}\,V_i,\ H\subset G+\frac{1}{2(\lambda+\delta+1)}\,V_i\right\}, \qquad (2.11.8)$$

где V_i взяты из определения окрестности W (2.11.5). Зафиксируем число $\alpha\in(\lambda-\delta,\,\lambda+\delta)$ и элемент $(C,D)\in(A,B)+\Omega$. Это значит, что существует элемент $(G,H)\in\Omega$ такой, что

$$(C,D)=(A+G,\,B+H).$$

Прежде всего покажем, что при любом $\alpha\in(\lambda-\delta,\lambda+\delta)$ справедливы включения

$$\lambda A\subset\alpha A+\delta rV_0,\quad \alpha A\subset\lambda A+\delta rV_0. \qquad (2.11.9)$$

В самом деле, при $\lambda\geqslant\alpha$ из выпуклости множества A получаем

$$\lambda A=\alpha A+(\lambda-\alpha)A\subset\alpha A+\delta rV_0.$$

При $\lambda < \alpha$ имеем $\alpha A = \lambda A + (\alpha - \lambda)A$, откуда для любого $x \in \lambda A$ существует $y \in \alpha A$ такой, что $y - x \in (\alpha - \lambda)A \subset \delta r V_0$. В силу того, что $V_0 = -V_0$, получаем, что $x - y \in \delta r V_0$, т. е. $x \in \alpha A + \delta r V_0$, что и доказывает первое включение в (2.11.9). Аналогично можно доказать второе включение в (2.11.9). Отметим, что включения (2.11.9) справедливы и для множества B.

Для доказательства (2.11.7) рассмотрим выражение

$$\alpha(C, D) - \lambda(A, B) = (\alpha C + \lambda B,\, \alpha D + \lambda A) = \\ = (\alpha A + \lambda B + \alpha G,\, \lambda A + \alpha B + \alpha H).$$

В силу включения (2.11.9) для A и B и определения множества Ω (2.11.8) получаем

$$\alpha A + \lambda B + \alpha G \subset \lambda A + \lambda B + \alpha G + \delta r V_0 \subset \\ \subset \lambda A + \alpha B + \alpha G + 2\delta r V_0 \subset \lambda A + \alpha B + \alpha H + \\ + \frac{\lambda + \delta}{2(\lambda + \delta + 1)} V_i + 2\delta r V_0 \subset \lambda A + \alpha B + \alpha H + V_i \quad \forall i.$$

Аналогично получаем включение $\lambda A + \alpha B + \alpha H \subset \alpha A + \lambda B + \alpha G + V_i$, что и доказывает включение (2.11.7).

Итак, в топологии $\mathcal{T}$ введенные выше операции сложения и умножения на скаляр непрерывны.

Покажем, что любая точка в топологическом пространстве $(L(E), \mathcal{T})$ есть замкнутое множество. Зафиксируем произвольную точку $(A, B) \in L(E)$. Достаточно показать, что пересечение всех окрестностей точки (A, B), т. е. множество вида

$$\bigcap \{(A, B) + \Omega \,|\, \Omega \in \mathcal{T},\ \Omega \text{ — окрестность нуля}\}, \tag{2.11.10}$$

состоит из одной точки (A, B). В свою очередь для этого достаточно показать, что пересечение множеств

$$\bigcap \{\Omega \,|\, \Omega \in \mathcal{T},\ \Omega \text{ — окрестность нуля}\} \tag{2.11.11}$$

содержит только нуль, т. е. точку вида (C, C).

Допустим, что некоторая точка $(C, D) \in L(E)$ содержится в пересечении (2.11.11). Тогда для любой окрестности нуля V из пространства (E, τ) справедливо включение $C \subset D + V$, т. е.

$$C \subset \bigcap \{D + V \,|\, V \in \tau \text{ — окрестности нуля}\},$$

а в силу замкнутости множества D получаем, что

$$\bigcap \{D + V \,|\, V \in \tau \text{ — окрестности нуля}\} = D.$$

Итак, справедливо включение $C \subset D$. Аналогично, из включения $D \subset C + V$ для любой окрестности нуля V следует, что $D \subset \subset C$, т. е. множество (2.11.10) состоит из нулевого элемента, откуда пересечение множеств (2.11.10) совпадает с элементом (A, B), т. е. точка (A, B) является замкнутым множеством в топологии $\mathcal{T}$.

В итоге в пространстве $L(E)$ с топологией $\mathcal{T}$ из выпуклости множеств, входящих в локальную базу нуля, из непрерывности сложения элементов и умножения элемента на скаляр, из замкнутости точек (в силу теоремы 1.12 гл. 1 из [97]) получаем, что пространство $(L(E), \mathcal{T})$ является локально выпуклым хаусдорфовым пространством.

Пространство выпуклых компактов $\mathcal{K}(E, \tau)$ вкладывается в $(L(E), \mathcal{T})$ по формуле $A \to (A, \{0\})$. Очевидно, что множество $\mathbb{K} = \{(A,\ \{0\}) \mid A \in \mathcal{K}(E, \tau)\}$ образует в $L(E)$ острый выпуклый конус. Изоморфизм следует понимать относительно сложения элементов и умножения на положительный скаляр.

Полученный конус является порождающим конусом, так как любой элемент $(A, B) \in L(E)$ может быть представлен как сумма элемента $(A,\ \{0\}) \in \mathbb{K}$ и элемента $(\{0\}, B) \in -\mathbb{K}$. $\square$

З а м е ч а н и е 2.11.1. Отметим, что выпуклость компактов существенна для введения линейных операций в пространстве $L(E)$, например, для доказательства равенства $(\lambda + \mu)(A, B) = \lambda(A, B) + + \mu(A, B)$. Действительно, с одной стороны (например, при $\lambda > 0$, $\mu > 0$) по определению имеем равенство $(\lambda + \mu)(A, B) = ((\lambda + \mu)A,\ (\lambda + \mu)B)$, а с другой стороны — $(\lambda + \mu)(A, B) = (\lambda A + \mu A,\ \lambda B + \mu B)$. Равенство $\lambda A + \mu A = (\lambda + \mu)A$ имеет место в силу выпуклости множества A.

Отметим также, что доказательство не проходит для произвольных замкнутых выпуклых ограниченных множеств (в бесконечномерном пространстве), так как сумма двух замкнутых множеств может оказаться незамкнутым множеством.

С л е д с т в и е 2.11.1. *Пусть пространство E банахово. Тогда пространство выпуклых компактов из E можно изометрично вложить в нормированное пространство*, *причем образ этого вложения будет острым порождающим конусом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Норма определяется по формуле $\|(A, B)\| = = h(A, B)$. Аксиомы нормы, очевидно, проверяются с помощью свойств метрики Хаусдорфа. Так как $\|(A, \{0\}) - (B, \{0\})\| = \|(A, B)\| = = h(A, B)$, то вложение является изометричным. $\square$

Отметим, что даже в случае конечномерного пространства E пространство $(L(E), \|\cdot\|)$ не является полным (см. пример в [71, § 8]).

Следствие 2.11.2. *Если в пространстве* (E, τ) *топология* τ *задается метрикой* ϱ, *то топология* $\mathcal{T}$ *в пространстве* $(L(E), \mathcal{T})$ *также задается некоторой метрикой* ϱ^o.

Доказательство. В линейном метрическом пространстве (E, ϱ) локальная база нуля задается счетной системой окрестностей $V_k = \{x \in E \,|\, \varrho(0, x) < 1/k\}$. Поэтому легко показать, что система окрестностей

$$\Omega_k = \{(G, H) \,|\, G \subset H + V_k,\ H \subset G + V_k\}$$

является локальной базой нуля в $(L(E), \mathcal{T})$. Но, как известно из функционального анализа (см. [30, 97]), в линейном топологическом пространстве со счетной локальной базой нуля можно ввести метрику, совместимую с топологией. Более того, в данном случае эта метрика легко выписывается в явном виде $\varrho^o((A, B), (C, D)) = h_\varrho(A + D, B + C)$. $\square$

Следствие 2.11.3. *Если в теореме* 2.11.1 *топология* τ *задается метрикой* ϱ, *причем пространство* (E, ϱ) *полно, то множество* $\mathbb{K}$ (2.11.4) *есть выпуклый* (*секвенциально*) *полный конус в соответствующем линейном локально выпуклом пространстве.*

Доказательство. Пусть $(A_k, \{0\})$ — фундаментальная последовательность в пространстве $L(E)$ с топологией $\mathcal{T}$. Это значит, что для любой окрестности нуля $\Omega \in \mathcal{T}$ найдется натуральное число N такое, что $\forall\, m, k > N$ выполнено включение $(A_k, \{0\}) - (A_m, \{0\}) = (A_k, A_m) \in \Omega$. Пусть

$$\Omega = \{(G, H) \,|\, G \subset H + V,\ H \subset G + V\}.$$

Тогда $A_k \subset A_m + V$, $A_m \subset A_k + V$ для всех $m, k > N$. Поскольку $\tau = \tau_\varrho$, то последние включения означают фундаментальность последовательности выпуклых компактов $\{A_k\}$ в метрике Хаусдорфа h_ϱ, где $h_\varrho(A, B)$ — из определения 1.3.1. Но, как известно, для всякого полного линейного метрического пространства (E, ϱ) пространство выпуклых компактов с метрикой h_ϱ является полным. Следовательно, существует такой выпуклый компакт A_0, что $h_\varrho(A_k, A_0) \to 0$. Повторяя рассуждения в обратном порядке, получаем, что $(A_k, \{0\}) \to (A_0, \{0\})$ в $\mathcal{T}$.

Таким образом, секвенциальная замкнутость конуса доказана. Для доказательства замкнутости остается отметить, что в $(L(E), \mathcal{T})$ топология метризуема и, следовательно, секвенциальная замкнутость эквивалентна замкнутости (см., например, приложение A в [97]). $\square$

Замечание 2.11.2. В частности, из следствия 2.11.3 следует полнота конуса $\mathbb{K}$ в случае, когда пространство E банахово. Для доказательства достаточно определить метрику $\varrho(x, y)$ через норму $\|x - y\|$.

Следствие 2.11.4. *Пусть топология τ в пространстве E задается метрикой ϱ, причем метрическое пространство (E, ϱ) полно. Пусть семейство выпуклых компактов $\mathcal{A}$ из (E, ϱ) τ-замкнуто в смысле определения* 2.11.2.

Тогда вложение $\mathcal{A} \to \mathcal{A} \times \{0\} = \mathcal{A}_1$ будет замкнутым множеством в линейном пространстве $(L(E), \mathcal{T})$. Более того, если $(\overline{L(E)}, \mathcal{T})$ — пополнение пространства $(L(E), \mathcal{T})$, то множество $\mathcal{A}_1$ будет замкнутым в пространстве $(\overline{L(E)}, \mathcal{T})$.

Доказательство. Пусть $(A_k, \{0\})$ — фундаментальная последовательность из $\mathcal{A}_1$. Это значит, что для любой окрестности нуля вида

$$\Omega = \{(G, H) \,|\, G \subset H + V,\ H \subset G + V\}$$

включение $(A_m, A_k) \in \Omega$ имеет место для всех достаточно больших m, k.

Поскольку топология τ пространства E метризуема, то для любого числа $\varepsilon > 0$ выполнены включения $A_m \subset A_k + B_\varepsilon^\varrho(0)$, $A_k \subset A_m + B_\varepsilon^\varrho(0)$ для всех достаточно больших номеров m, k. Иными словами, $h_\varrho(A_m, A_k) < \varepsilon$ для всех достаточно больших m, k. Последнее означают фундаментальность последовательности выпуклых компактов $\{A_k\}$ в метрике Хаусдорфа h_ϱ, где h_ϱ взято из определения 1.3.1. Как и в следствии 2.11.3, получаем, что существует выпуклый компакт A_0 такой, что $h_\varrho(A_k, A_0) \to 0$, и последовательность $(A_k, \{0\})$ сходится к $(A_0, \{0\})$ при $k \to \infty$ в линейном пространстве $(L(E), \mathcal{T})$. Далее замкнутость множества $\mathcal{A}_1$ в $(L(E), \mathcal{T})$ доказывается так же, как и замкнутость конуса в следствии 2.11.3.

Поскольку каждая фундаментальная последовательность $\{(A_k, \{0\})\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{A}_1$ сходится к некоторой точке $(A_0, \{0\}) \in \mathcal{A}_1$, отсюда следует, что последовательность $\{(A_k, \{0\})\}$ эквивалентна стационарной последовательности $\{(A_0, \{0\})\}$ (поскольку они имеют один предел), что и означает замкнутость семейства $\mathcal{A}_1$ в пространстве $(\overline{L(E)}, \mathcal{T})$. $\square$

Следствие 2.11.5. *Пусть семейство $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}(E, \tau)$ является τ-компактным* (*см. определение* 2.11.1) *и выпуклым, т.е. для любых A, $B \in \mathcal{A}$ и для любого $\lambda \in (0, 1)$ справедливо включение $\lambda A + (1 - \lambda)B \in \mathcal{A}$.*

Тогда существует вложение семейства $\mathcal{A}$ в линейное локально выпуклое хаусдорфово пространство $(L(E), \mathcal{T})$, причем образ такого вложения будет выпуклым компактом.

Доказательство. Осуществив вложение множества всех выпуклых компактов из E в пространство $(L(E), \mathcal{T})$, получим конус $\mathbb{K}$ (см. (2.11.4)). При этом множество $\mathcal{A}$ отобразится во множество $\mathcal{A}_1 = \{(A, \{0\}) \mid A \in \mathcal{A}\} \subset \mathbb{K}$.

Для каждого компакта $A \in \mathcal{A}$ выберем произвольную окрестность нуля $\Omega(A) \in \mathcal{T}$ вида $\Omega(A) = \{(G, H) \mid G \subset H + V(A),\ H \subset G + V(A)\}$, $V(A) \in \tau$ — окрестность нуля. Получаем покрытие $\mathcal{A}_1$ вида

$$\mathcal{A}_1 \subset \bigcup_{(A,\{0\}) \in \mathcal{A}_1} ((A, \{0\}) + \Omega(A)). \qquad (2.11.12)$$

В силу компактности $\mathcal{A}$ из покрытия семейства $\mathcal{A}$ окрестностями $\mathcal{U}(A)$ вида (2.11.2) по всем $A \in \mathcal{A}$ можно выделить конечное подпокрытие

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{U}(A_i).$$

Отсюда

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \times \{0\} \subset \bigcup_{i=1}^{N} \{(B, \{0\}) \mid A_i \subset B + V(A_i),\ B \subset A_i + V(A_i)\} \subset \subset \bigcup_{i=1}^{N} ((A_i, \{0\}) + \Omega(A_i)),$$

что и означает компактность $\mathcal{A}_1$ в $(L(E), \mathcal{T})$.

Выпуклость $\mathcal{A}_1$, очевидно, следует из выпуклости $\mathcal{A}$. $\square$

С помощью следствия 2.11.5 получаем теорему, обобщающую известную теорему Шаудера о неподвижной точке (см. теорему 3.6.1 из [109]).

Теорема 2.11.2. *Пусть семейство $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}(E, \tau)$ является τ-компактным* (*см. определение* 2.11.1) *и выпуклым. Пусть отображение $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ является τ-непрерывным на $\mathcal{A}$.*

Тогда найдется элемент $A_0 \in \mathcal{A}$ такой, что $f(A_0) = A_0$.

Доказательство. Рассмотрим пространство $(L(E), \mathcal{T})$. В этом пространстве, согласно следствию 2.11.5, вложение $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \times \{0\}$ компактно и выпукло.

Определим функцию $f_1((A, \{0\})) = f(A)$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Из τ-непрерывности многозначной функции f (см. определение 2.11.3) следует непрерывность функции f_1 в линейном топологическом пространстве $(L(E), \mathcal{T})$.

По теореме Шаудера [109] получаем, что найдется точка $(A_0, \{0\}) \in \mathcal{A}_1$ такая, что $f_1((A_0, \{0\})) = (A_0, \{0\})$. В силу определения f_1 это означает, что $A_0 = f(A_0)$. $\square$

Теорема 2.11.3. *Пусть пространство $(E, \|\cdot\|)$ банахово, а T — линейное пространство с инвариантной метрикой. Пусть $\mathcal{A}(t) \subset \mathcal{K}(E, \|\cdot\|)$ — выпуклое замкнутое семейство множеств, непрерывно зависящее от параметра $t \in T$, т. е.*

$$\begin{gathered}\forall\, t_0 \in T, \quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, U(t_0) \text{ — окрестность } t_0 \text{ в } T\text{:}\\ \forall\, t \in U(t_0), \quad \forall A_0 \in \mathcal{A}(t_0), \quad \exists\, A \in \mathcal{A}(t) \quad h(A_0, A) < \varepsilon.\end{gathered} \tag{2.11.13}$$

Тогда для каждого $t \in T$ существует выпуклый компакт $A(t) \in \mathcal{A}(t)$ такой, что многозначное отображение $A(t)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа, т. е.

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, t_0, \quad \exists\, U(t_0) \quad \forall t \in U(t_0) \quad h(A(t), A(t_0)) < \varepsilon.$$

Доказательство. Вложим семейство $\mathcal{A}(t)$ в пополнение $(\overline{L(E)}, \|\cdot\|)$ пространства $(L(E), \|\cdot\|)$ по формуле $\mathcal{A}(t) \to \mathcal{A}_1(t) = \mathcal{A}(t) \times \{0\}$. Отметим, что пространство $(\overline{L(E)}, \|\cdot\|)$ является банаховым пространством. По следствию 2.11.4 для каждого значения $t \in T$ множество $\mathcal{A}_1(t)$ замкнуто в $(\overline{L(E)}, \|\cdot\|)$. Выпуклость множеств $\mathcal{A}_1(t)$ очевидна. Перепишем условие (2.11.13) в виде

$$\forall\, t_0 \in T \quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, U(t_0) \text{ — окрестность } t_0 \text{ в } T\text{:}$$

$$\forall\, t \in U(t_0),\ \forall\, A_0 \in \mathcal{A}(t_0),\ \exists\, A \in \mathcal{A}(t) \ \ (A_0, \{0\}) \in (A, \{0\}) + B_\varepsilon^{\overline{L(E)}}(0),$$

т. е.

$$\mathcal{A}_1(t_0) \subset \mathcal{A}_1(t) + B_\varepsilon^{\overline{L(E)}}(0) \quad \forall\, t \in U(t_0),$$

что означает пн.сн. отображения $\mathcal{A}_1(\,\cdot\,)$. По теореме 2.9.1 найдется элемент $(A(t), \{0\}) \in \mathcal{A}_1(t)$, непрерывно зависящий от t. Последнее означает, что

$$\begin{gathered}\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, t_0, \quad \exists U(t_0)\colon \quad \forall\, t \in U(t_0)\\ (A(t), \{0\}) \in (A(t_0), \{0\}) + B_\varepsilon^{\overline{L(E)}}(0).\end{gathered}$$

Выбирая пересечения в обеих частях последнего включения с конусом $\mathbb{K}$ (см. (2.11.4)), получаем

$$(A(t), \{0\}) \in (A(t_0), \{0\}) + B_\varepsilon^{L(E)}(0) \quad \forall\, t \in U(t_0).$$

Это означает включение $(A(t), A(t_0)) \in B_\varepsilon^{L(E)}(0)$, т. е. $h(A(t_0), A(t)) < \varepsilon$, что и доказывает утверждение теоремы. $\square$

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 2.11.1. Зафиксируем в $\mathbb{R}^n$ некоторое P-множество K (определение понятия P-множества см. в § 1.8), и пусть $0 \in K$. Пусть на множестве непустых выпуклых компактных подмножеств множества K, которое обозначим через $\mathcal{K}(K)$, определено непрерывное в метрике Хаусдорфа многозначное отображение G со значениями также из $\mathcal{K}(K)$. Как показано в § 2.8, многозначное отображение, определенное на $\mathcal{K}(K)$, вида

$$A \to K \cap (K \overset{*}{-} G(A)) = K \overset{*}{-} \operatorname{co}\, (\{0\} \cup G(A))$$

непрерывно, а из условия $0 \in K$ следует, что оно принимает непустые значения для всех $A \in \mathcal{K}(K)$. По теореме 2.11.2 получаем, что найдется выпуклый компакт $A_0 \subset K$ такой, что $K \cap (K \overset{*}{-} G(A_0)) = A_0$.

Для иллюстрации этого результата определим на $\mathcal{K}(K)$ отображение вида $G(A) = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \{f_k(A)\}$, где $f_k(A)$ суть различные непрерывные в метрике Хаусдорфа селекторы выпуклых компактов (определение селектора см. § 2.1). Тогда приведенный выше результат означает, что существует выпуклый компакт $A_0 \subset K$ такой, что

$$\bigcap_{k=1}^{N} (K - f_k(A_0)) \cap K = A_0. \tag{2.11.14}$$

В частном случае, когда $N = 1$, обозначая через $f(A) = f_1(A)$ произвольный непрерывный селектор на $\mathcal{K}(K)$, из (2.11.14) получаем, что найдется точка $x_0 \in K$ (т. е. $x_0 = f(A_0)$) такая, что

$$f(K \cap (K - x_0)) = x_0.$$

Заметим, что последний результат легко следует из обычной теоремы Шаудера [109], если рассмотреть непрерывное отображение $x \to$ $\to f(K \cap (K - x))$. Однако равенство (2.11.14) получить непосредственно из теоремы Шаудера затруднительно.

Пример 2.11.2. Пусть $\mathcal{K}(E, \|\cdot\|)$ — метрическое (с метрикой Хаусдорфа) пространство выпуклых компактов, выбираемых из банахова пространства $(E, \|\cdot\|)$. Пусть задано некоторое семейство $\mathcal{A} \subset$ $\subset \mathcal{K}(E, \|\cdot\|)$, которое является выпуклым (см. формулировку следствия 2.11.5) и компактным.

Скажем, что элемент (т. е. компакт) $A \in \mathcal{A}$ является *крайним элементом семейства* $\mathcal{A}$, если

$$\forall\, \lambda \in (0, 1), \quad \forall B,\, C \in \mathcal{A} \backslash \{A\} \quad A \neq \lambda B + (1 - \lambda) C.$$

Как обычно, обозначаем множество крайних элементов семейства $\mathcal{A}$ через $\operatorname{extr}\mathcal{A}$.

Переходя в силу теоремы 2.11.1 в линейное пространство $(L(E), \|\cdot\|)$, немедленно получаем из теоремы Крейна–Мильмана (см. § 1.18) равенство

$$\mathcal{A} = \overline{\operatorname{co}} \operatorname{extr}\mathcal{A},$$

где

$$\operatorname{co}\operatorname{extr}\mathcal{A} = \Big\{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i A_i \,\Big|\, A_i \in \operatorname{extr}\mathcal{A},\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1\Big\},$$

причем замыкание множества $\operatorname{co}\operatorname{extr} A$ берется в метрике Хаусдорфа. В частности, отсюда следует, что $\operatorname{extr}\mathcal{A} \neq \varnothing$.

Пример 2.11.3. Изучим крайние элементы конуса, получаемого при вложении пространства выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$ в линейное нормированное пространство $L(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Напомним (см. § 1.18), что в любом линейном пространстве для выпуклого конуса K луч $l = \{\lambda k \mid \lambda \geqslant 0\}$, $k \in K\backslash\{0\}$, называется *крайним* лучом этого конуса, если множество $K\backslash l$ выпукло.

В силу этого для каждого выпуклого компакта $A \subset \mathbb{R}^n$ в пространстве $L(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ определяем луч по формуле $l(A) = \{\lambda(A, \{0\}) \mid \lambda \geqslant 0\}$.

Прежде всего покажем, что конус $\mathbb{K} \subset L(\mathbb{R}^n)$, полученный в теореме 2.11.1, не имеет крайних лучей. Действительно, если $(A, \{0\}) \in \mathbb{K}$, то для любой точки $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ справедливы включения $(2A \pm x, \{0\}) \in L(\mathbb{R}^n)$ и выполнено равенство $(A, \{0\}) = \frac{1}{2}\,((2A - x, \{0\}) + (2A + x, \{0\}))$, т. е. луч $l(A)$ не является крайним лучом конуса $\mathbb{K}$ для любого выпуклого компакта $A \subset \mathbb{R}^n$.

Выделим в конусе $\mathbb{K}$ подконус, введя классы эквивалентностей среди выпуклых компактов. Все множества вида $\{A + x \mid x \in \mathbb{R}^n\}$, где A — выпуклый компакт, отнесем в один класс, определяемый множеством $A - s(A)$, т. е. задаваемый таким компактом $A + x_0$, у которого центр Штейнера $s(A + x_0) = 0$.

Определим подконус $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}$, состоящий из элементов $(A, \{0\})$, у которых $s(A) = 0$. Легко видеть, что в силу свойств центра Штейнера $s(\cdot)$ как функции множества (его непрерывности и положительной линейности) множество $\mathbb{K}_1$ является острым, выпуклым и замкнутым конусом в пространстве $(L(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|)$. Покажем, что у этого конуса существуют крайние лучи.

Для начала рассмотрим случай $\mathbb{R}^2$. Если одноточечное множество $A = \{a\} \in \mathbb{R}^2$ таково, что $(\{a\}, \{0\}) \in \mathbb{K}_1$, то из условия $s(A) = 0$ получаем, что $a = 0$, т. е. это крайняя точка — вершина конуса $\mathbb{K}_1$.

Пусть множество $A = \mathrm{co}\,\{a, b\} \in \mathbb{K}_1$ есть отрезок; тогда луч $l(A)$ является крайним лучом конуса $\mathbb{K}_1$. Действительно, если существуют элементы $(B, \{0\}), (C, \{0\}) \in \mathbb{K}_1$ такие, что $(A, \{0\}) = (B, \{0\}) + (C, \{0\})$, то это возможно лишь когда множества B и C суть параллельные множеству A отрезки, т. е. $B = \lambda A + x$ и $C = (1-\lambda)A + y$, где $\lambda \in [0, 1]$. А поскольку $s(A) = s(B) = s(C) = 0$, то $x = y = 0$ и $(B, \{0\}), (C, \{0\}) \in l(A)$.

Пусть множество $A = \mathrm{co}\,\{a, b, c\}$ есть треугольник. Покажем, что и в этом случае луч $l(A)$ является крайним лучом конуса $\mathbb{K}_1$. Допустим, что существуют элементы $(B, \{0\}), (C, \{0\}) \in \mathbb{K}_1$ такие, что $(A, \{0\}) = (B, \{0\}) + (C, \{0\})$. Из равенства $A = B + C$ следует, что множества B и C могут быть лишь подобными треугольниками (или точкой и треугольником, что невозможно, так как точка может быть только нулевой $(s(\{a\}) = 0)$), т. е. $B = \lambda A$, $C = (1-\lambda)A$ для некоторого $\lambda \in [0, 1]$, откуда следует, что $(B, \{0\}), (C, \{0\}) \in l(A)$.

Рассмотрим теперь произвольный выпуклый многоугольник $A \subset \mathbb{R}^2$, отличный от отрезка и треугольника, причем $s(A) = 0$. Известно (см. [29, § 4]), что любой выпуклый многоугольник можно представить в виде конечной суммы отрезков и треугольников. т. е. существует некоторая выпуклая комбинация $\sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i A_i$, где A_i — отрезки или треугольники, $\lambda_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$, которая равняется многоугольнику A. Без ограничения общности можно считать, что $s(A_i) = 0$. В самом деле, если это не так, то, выбирая множества $\widetilde{A}_i = A_i - s(A_i)$, получаем

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \widetilde{A}_i = A - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i s(A_i) = A - s\Big(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i A_i\Big) = A - s(A) = A.$$

Таким образом, мы получили, что $(A, \{0\}) = \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i (\widetilde{A}_i, \{0\})$, где $(\widetilde{A}_i, \{0\}) \in \mathbb{K}_1$, т. е. луч $l(A)$ не является крайним лучом для конуса $\mathbb{K}_1$.

Рассмотрим случай произвольного выпуклого компакта. Известно (см. § 2.6), что любой выпуклый компакт на плоскости можно представить как предел в метрике Хаусдорфа некоторой последовательности выпуклых многоугольников. Пусть A — выпуклый компакт из $\mathbb{R}^2$, для которого $s(A) = 0$. Пусть A_k — последовательность выпуклых многоугольников, сходящаяся к A в метрике Хаусдорфа. В силу непрерывности центра Штейнера $s(\cdot)$ имеем $s(A_k) \to s(A) = 0$ при $k \to \infty$. Отсюда последовательность $\widetilde{A}_k = A_k - s(A_k)$ также сходится к A в метрике Хаусдорфа, причем $s(\widetilde{A}_k) = 0$. Следовательно, $(\widetilde{A}_k, \{0\}) \in \mathbb{K}_1$ и $(\widetilde{A}_k, \{0\}) \to (A, \{0\})$ при $k \to \infty$ в $\mathbb{K}_1$.

Покажем, что конус $\mathbb{K}_1$ не содержит других крайних лучей.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ — такой выпуклый компакт, что $s(A) = 0$, $l(A)$ — крайний луч конуса $\mathbb{K}_1$, причем множество A не является ни точкой, ни отрезком, ни треугольником.

Воспользуемся следующим утверждением (см. теорему 7.4 из [31, § 7]). Множество $Z \subset \mathbb{R}^n$ есть симплекс тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ множество $Z \cap (Z + x)$ является пустым или точкой, или гомотетично самому Z (с положительным коэффициентом гомотетии).

Выберем точку $x \in \mathbb{R}^2$ так, что множество $B_x = A \cap (A + x)$ не гомотетично множеству A, непусто и не является точкой. Это возможно, так как множество A не является точкой, отрезком или треугольником. В теореме 4.2.6 (гл. 4) мы докажем, что найдется выпуклый компакт C_x такой, что справедливо равенство $A = B_x + C_x$ (в этом случае будем говорить, что выпуклый компакт $A \in \mathbb{R}^2$ является порождающим множеством). Если бы множество C_x было гомотетично множеству A или было точкой, то нашлись бы число $\lambda \in [0, 1]$ и точка $y \in \mathbb{R}^n$ такие, что $C_x = \lambda A + y$. Но тогда из равенства следовало бы, что $B_x = (1 - \lambda)A - y$. Это противоречит выбору точки x. Итак, B_x и C_x не являются точками и не гомотетичны множеству A. При этом, если центр Штейнера равен $s(B_x) = z$, то $s(C_x) = s(A) - s(B_x) = -z$. Тогда вместо множеств B_x и C_x, выбирая соответственно множества $\widetilde{B}_x = B_x - z$ и $\widetilde{C}_x = C_x + z$, считаем, что $s(B_x) = s(C_x) = 0$. Так как $(A, \{0\}) = \frac{1}{2}((2B_x, \{0\}) + (2C_x, \{0\}))$, то получаем, что луч $l(A)$ не является крайним лучом множества $\mathbb{K}_1$.

Итак, конус $\mathbb{K}_1$ является замыканием (в пространстве $(L(\mathbb{R}^2), \|\cdot\|)$) выпуклых комбинаций крайних лучей $l(A)$, где A — всевозможные отрезки и треугольники, у которых $s(A) = 0$.

Задача описания конуса $\mathbb{K}_1$ в общем случае $\mathbb{R}^n$, где $n \geqslant 3$, является очень трудной. Она частично сводится к известной задаче о неразложимых многогранниках. По аналогии с плоским случаем легко видеть, что крайними лучами конуса $\mathbb{K}_1$ будут лучи $l(A)$, у которых множество $A \subset \mathbb{R}^n$ есть неразложимый многогранник, т. е. такой многогранник, для которого равенство $A = B + C$ возможно лишь, когда множества B и C гомотетичны множеству A с положительным коэффициентом гомотетии. Так же, как и в $L(\mathbb{R}^2)$, доказывается, что конус $\mathbb{K}_1$ есть замыкание выпуклой оболочки множества лучей $\{l(A) \mid A$ — неразложимый многогранник из $\mathbb{R}^n,\ s(A) = 0\}$. Даже в случае пространства $\mathbb{R}^3$ нет полного описания неразложимых многогранников: кроме симплексов таковыми здесь являются, например, октаэдры или икосаэдры. Кроме того, существуют множества $A \subset \mathbb{R}^n$, не являющиеся многогранниками и такие, что луч $l(A)$ является крайним лучом конуса $\mathbb{K}_1$. Таково, например, множество в $\mathbb{R}^3$ вида $A = \operatorname{co}\{\{x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = 0\} \cup \{(0,0,1)\}\}$.

Глава 3

R-СИЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ В $\mathbb{R}^n$

§ 3.1. Замечательное свойство шара в $\mathbb{R}^n$

Определение 3.1.1. Пусть $R > 0$. Множество A из $\mathbb{R}^n$ называется *R-сильно выпуклым множеством* (или *сильно выпуклым множеством радиуса R*), если оно может быть представлено как пересечение некоторой совокупности замкнутых шаров одного и того же радиуса R с разными центрами.

Иначе говоря, множество A из $\mathbb{R}^n$ является R-сильно выпуклым, если оно может быть представлено в виде выражения

$$A = \bigcap_{x \in X} B_R(x), \tag{3.1.1}$$

где X есть некоторое множество центров шаров радиуса $R > 0$.

Основное свойство замкнутых выпуклых множеств, состоящее в том, что каждое может быть представлено в виде пересечения опорных полупространств (см. § 1.9), для сильно выпуклых множеств может быть преобразовано к представлению их в виде пересечения опорных шаров, что и утверждается в следующей теореме.

Теорема 3.1.1 (опорный принцип). *Всякий выпуклый компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ является R-сильно выпуклым множеством тогда и только тогда, когда он представим в виде*

$$A = \bigcap_{\|p\|=1} B_R(x_p - Rp), \tag{3.1.2}$$

где для любого $p \in \mathbb{R}^n$, $\|p\| = 1$, точка $x_p \in A$ определена из равенства $\langle p, x_p \rangle = s(p, A)$ (рис. 15).

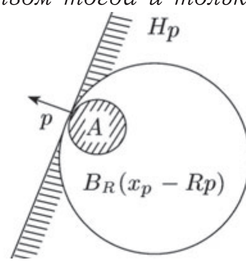


Рис. 15

Доказательство. Достаточность очевидна, так как из равенства (3.1.2) следует, что множество A по определению 3.1.1 есть сильно выпуклое множество. Докажем необходимость.

Пусть для множества A справедлива формула (3.1.1). Очевидно, что входящее в него множество X ограничено и замкнуто. По формуле вычисления опорной функции пересечения множеств (см. § 1.11), получаем $s(p, A) = \operatorname{co} f(p)$, где $f(p)$ имеет вид

$$f(p) = \min_{x \in X} (\langle p, x\rangle + R\|p\|). \tag{3.1.3}$$

Отбрасывая тривиальный случай, когда A состоит из одной точки и равенство (3.1.2) очевидно, получаем, что $\operatorname{int} A \neq \varnothing$, откуда, как показано в теореме 1.14.4, для любого $p \in \partial B_1(0)$ существуют числа $\lambda_i > 0$ и векторы $p_i \in \partial B_1(0)$, где $i \in \overline{1, k}$ и $k \leqslant n+1$, такие, что

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i = p \quad \text{и} \quad \operatorname{co} f(p) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(p_i), \tag{3.1.4}$$

т. е. в силу (3.1.3) найдутся точки $x_i \in X$ такие, что

$$s(p, A) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle p_i, x_i\rangle + R. \tag{3.1.5}$$

Выберем точку $x_p \in A$ такую, что $\langle p, x_p\rangle = s(p, A)$; тогда в силу включения $A \subset B_R(x)$ для любой точки $x \in X$ получаем

$$\langle q, x_p\rangle \leqslant \langle q, x\rangle + R\|q\| \quad \forall\, x \in X, \quad q \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1.6}$$

Оценивая в равенстве (3.1.5) слагаемые через неравенства (3.1.6), где $q = p_i$ и $x = x_i$, получаем

$$\langle p, x_p\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle p_i, x_i\rangle + R \geqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle p_i, x_p\rangle = \langle p, x_p\rangle, \tag{3.1.7}$$

т. е. в выражении (3.1.7) имеет место равенство, что возможно только тогда, когда в неравенстве (3.1.6) при $q = p_i$ и $x = x_i$ справедливы равенства, поэтому $\langle p_i, x_p\rangle = s(p_i, B_R(x_i))$, что для шара возможно только в случае равенства $x_i = x_p - Rp_i$ $\forall\, i \in \overline{1, k}$.

Обозначим $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i$ и $\alpha_i = \dfrac{\lambda_i}{\alpha}$, $i \in \overline{1, k}$. Очевидно, что $\alpha \geqslant 1$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i p_i = \dfrac{p}{\alpha}$. Тогда для каждой точки $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} B_R(x_i)$ выполнены неравенства $\|x - x_i\| \leqslant R$ $\forall\, i \in \overline{1, k}$, которые в силу только что доказанных равенств для x_i эквивалентны неравенствам вида

$$\|x - x_p\|^2 + 2R\langle x - x_p, p_i\rangle \leqslant 0 \quad \forall\, i \in \overline{1, k}.$$

Суммируя эти неравенства с множителями α_i соответственно, получаем неравенство $\|x - x_p\|^2 + 2R\langle x - x_p, p/\alpha\rangle \leqslant 0$, которое означает, что $x \in B_{R_1}(x_p - R_1 p)$, где $R_1 = R/\alpha \leqslant R$, т. е. получили

$$A \subset \bigcap_{i=1}^{k} B_R(x_i) \subset B_{R_1}(x_p - R_1 p) \subset B_R(x_p - Rp). \tag{3.1.8}$$

В свою очередь из теоремы об отделимости (теоремы 1.9.3 и следствия 1.9.5) следует, что выпуклое множество A можно представить в виде

$$A = \bigcap_{\|p\|=1} H_p^-, \quad \text{где} \quad H_p^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x\rangle \leqslant s(p, A)\} \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^n.$$

С другой стороны, очевидно, справедливы включения $B_R(x_p - Rp) \subset \subset H_p^- \ \ \forall\, p \in \partial B_1(0)$, что в совокупности с (3.1.8) и дает равенство (3.1.2). $\square$

В следующей теореме приведем замечательное свойство шара $B_R(0)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, которое в следующей главе будет положено в основу понятия порождающего множества.

Теорема 3.1.2 (Е.С. Половинкин [80]). *Выпуклый компакт A является R-сильно выпуклым множеством тогда и только тогда, когда найдется выпуклое компактное множество B такое, что справедливо равенство* (рис. 16)

$$A + B = B_R(0). \tag{3.1.9}$$

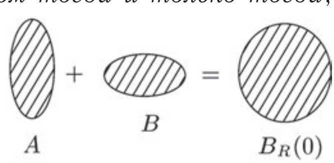


Рис. 16

Доказательство. Достаточность этого утверждения очевидна, так как равенство (3.1.9) влечет равенство (3.1.1) при $X = -B$, откуда в силу определения 3.1.1 получаем, что множество A является R-сильно выпуклым.

Докажем необходимость. Воспользовавшись формулой (3.1.2) для R-сильно выпуклого множества A, аналогично формуле (3.1.3) получаем формулу для опорной функции пересечения множеств (3.1.2), и для любого $p_0 \in \partial B_1(0)$ получаем

$$\begin{aligned}\langle p_0, x_{p_0}\rangle = s(p_0, A) \leqslant \min_{\|p\|=1} s(p_0,\, B_R(x_p - Rp)) = \\ = \min_{\|p\|=1} \left(\langle p_0,\, x_p - Rp\rangle + R\|p_0\|\right) \leqslant s(p_0,\, B_R(x_{p_0} - Rp_0)) = \\ = \langle p_0, x_{p_0}\rangle, \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

т. е. в (3.1.10) неравенства нужно заменить на равенства. Получаем,

что
$$s(p_0, A) = R\|p_0\| - \max_{\|p\|=1} \langle p_0, -x_p + Rp\rangle \quad \forall\, p_0 \in \partial B_1(0),$$
откуда и следует равенство (3.1.9), где
$$B = \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{\|p\|=1} (-x_p + Rp). \;\square$$

Замечание 3.1.1. Из теоремы 3.1.2 следует, что множество $-B$ в формуле (3.1.9) есть максимальное множество центров шаров радиуса R, пересечение которых дает множество A. Равенства (3.1.1), (3.1.9) удобно записывать через сумму и разность Минковского в виде
$$\begin{gathered} A = B_R(0) \overset{*}{-} (-X), \quad B + (B_R(0) \overset{*}{-} (-X)) = B_R(0), \\ A + (B_R(0) \overset{*}{-} A) = B_R(0). \end{gathered} \tag{3.1.11}$$

В теории дифференциальных игр (см. [89]) отмеченная в равенстве (3.1.9) (или в последнем равенстве из (3.1.11)) доказанная выше взаимосвязь множеств A и $B_R(0)$ имеет специальное название, а именно, в этом случае говорят, что множество A полностью выметает шар $B_R(0)$, т. е. множество R-сильно выпукло тогда и только тогда, когда оно полностью выметает шар радиуса R.

Из теорем 3.1.1 и 3.1.2 получаем следующие следствия.

Следствие 3.1.1. *Если множество A является R_0-сильно выпуклым множеством, то оно также является R-сильно выпуклым множеством при любом $R > R_0$.*

Следствие 3.1.2. *Пусть A_1 и A_2 — сильно выпуклые множества из $\mathbb{R}^n$ с радиусами соответственно R_1 и R_2, а A_3 — компакт из $\mathbb{R}^n$. Тогда множества $A_1 + A_2$, $A_1 \cap A_2$ и $A_1 \overset{*}{-} A_3$ (если они не пусты) также будут сильно выпуклыми с соответствующими радиусами $R_1 + R_2$, $\max\{R_1, R_2\}$ и R_1.*

Следствие 3.1.3. *Для того чтобы выпуклый компакт A был R-сильно выпуклым множеством, необходимо и достаточно, чтобы функция $p \to R\,\|p\| - s(p, A)$ была выпуклой функцией.*

Доказательство следствий 3.1.1–3.1.3 очевидно.

Теорема 3.1.3 (Е.С. Половинкин [80]). *Компакт A является сильно выпуклым множеством с радиусом R тогда и только тогда, когда субдифференциал опорной функции $s(p, A)$ этого множества удовлетворяет условию Липшица по p на единичной сфере $\partial B_1(0)$ с константой Липшица равной R.*

Доказательство. Пусть множество A является R-сильно выпуклым множеством. В теореме 3.1.1 для всякого $p \in \partial B_1(0)$ определена точка $x_p \in A$ такая, что $\langle p, x_p \rangle = s(p, A)$. Отсюда и из определения опорной функции (см. § 1.6) следует, что $s(q, A) - s(p, A) \geqslant \langle x_p, q - p \rangle$ $\forall\, q \in \mathbb{R}^n$, т. е. $\partial s(p, A) = \{x_p\}$. В силу формулы (3.1.2) для любых векторов $p, q \in \partial B_1(0)$ справедливы включения $x_q \in B_R(x_p - Rp)$ и $x_p \in B_R(x_q - Rq)$, которые эквивалентны неравенствам

$$\|x_q - x_p\|^2 \leqslant 2R\langle x_p - x_q, p\rangle, \quad \|x_p - x_q\|^2 \leqslant 2R\langle x_q - x_p, q\rangle.$$

Складывая эти неравенства, получаем $\|x_q - x_p\| \leqslant R\|q - p\|$. Обратно, пусть субдифференциал $\partial s(p, A)$ удовлетворяет условию Липшица по p на сфере $\partial B_1(0)$ с константой R, но множество A не является R-сильно выпуклым множеством. Тогда по теореме 3.1.1 существует вектор $p \in \partial B_1(0)$ такой, что для всякого $x_p \in \partial s(p, A)$ имеем $A \not\subset B_R(x_p - pR)$. Так как множество A ограничено, то существуют число $R_1 > R$ и точка $y \in A$ такие, что $A \subset B_{R_1}(x_p - pR)$ и $\|y - x_p + pR\| = R_1$. Пусть $q = (y - x_p + pR)/R_1$. Очевидно, что $\langle q, y \rangle = s(q, A)$ и $\partial s(q, A) = \{y\}$, т. е. по допущению $\|y - x_p\| \leqslant R\|q - p\|$. В то же время $\|y - x_p\| = \|R(q - p) + (R_1 - R)q\| > R\|q - p\|$. Противоречие. $\square$

Из теоремы 3.1.3 получаем критерий вычисления для данного множества минимального радиуса сильной выпуклости.

Следствие 3.1.4. *Пусть множество A является сильно выпуклым множеством из $\mathbb{R}^n$. Для всякого вектора p из сферы $\partial B_1(0)$ определим точку $x_p \in A$ такую, что $\langle p, x_p \rangle = s(p, A)$. Наименьший радиус $R > 0$, при котором множество A будет сильно выпуклым, вычисляется по формуле*

$$R = \sup\left\{\frac{\|x_p - x_q\|}{\|p - q\|} \;\Big|\; p,\, q \in \partial B_1(0),\ p \neq q\right\}.$$

Следствие 3.1.5. *Пусть последовательность сильно выпуклых множеств A_k, $k \in \overline{1, \infty}$, с соответствующими радиусами $R_k > 0$, сходится в метрике Хаусдорфа к компакту A, причем существуют числа $\widehat{R}_k \geqslant R_k$ такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} \widehat{R}_k = R_0$, где $0 < R_0 < \infty$.*

Тогда множество A будет также сильно выпуклым множеством с радиусом R_0.

Доказательство. Для любого $p \in \partial B_1(0)$ определим точки $x_p^k \in A_k$ такие, что для каждого множества A_k по теореме 3.1.1 справедливы равенства (3.1.2), которые равносильны неравенствам

$$\|x - x_p^k\|^2 + 2\widehat{R}_k\langle x - x_p^k, p\rangle \leqslant 0 \quad \forall\, x \in A_k. \tag{3.1.12}$$

В силу сходимости последовательности множеств $\{A_k\}$ ко множеству A для всякого вектора $a \in A$ существует последовательность векторов $a_k \in A_k$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$. Так как для каждого p последовательность $\{x_p^k\}$ ограничена, то она имеет предельную точку x_p^0. Поэтому, выбирая для каждого $k \in \mathbb{N}$ в неравенстве (3.1.12) вектор $x = a_k$ и переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\|a - x_p^0\|^2 + 2R_0\langle a - x_p^0,\, p\rangle \leqslant 0 \quad \forall\, a \in A,$$

что в силу теоремы 3.1.1 влечет сильную выпуклость множества A с радиусом R_0. $\square$

Следствие 3.1.6. *Пусть многозначное отображение* $F\colon [0,1] \to 2^{\mathbb{R}^n}$, *принимающее при почти всех* $t \in [0,1]$ *сильно выпуклые значения* $F(t)$ *с суммируемым по Лебегу радиусом* $r(t) > 0$, *измеримо по Лебегу на* $[0,1]$ *и ограничено* (*т. е. существует суммируемая функция* $\rho(t) > 0$ *такая, что* $F(t) \subset B_{\rho(t)}(0)$). *Пусть* $\int\limits_0^1 r(t)\,dt = r_0 < \infty$.

Тогда многозначный интеграл Аумана $\int\limits_0^1 F(t)\,dt$ *является сильно выпуклым множеством с радиусом* r_0.

Мы не приводим доказательства этого следствия, так как оно требует введения дополнительных определений и свойств многозначных отображений, выходящих за рамки нашей книги (нужно дать определение интеграла Аумана от многозначного отображения, возможности его представления по схеме Бохнера, что описано, например, в работе [73]). Используя эти понятия и свойства, а также следствия 3.1.2 и 3.1.5, легко получить доказательство.

Следствие 3.1.7. *Пусть* $f(p)$ — *положительно однородная непрерывная функция, а* $\operatorname{co} f(p)$ *есть собственная функция. Пусть число* $R > 0$, *а функция* $p \to R\|p\| - f(p)$ *выпукла.*

Тогда и функция $p \to R\|p\| - \operatorname{co} f(p)$ *выпукла.*

Доказательство. В силу приведенных условий следует существование выпуклых компактов X и Y таких, что их опорные функции удовлетворяют равенствам $s(p,X) = R\|p\| - f(p)$ и $s(p,Y) = \operatorname{co} f(p)$, откуда $\operatorname{co}(R\|p\| - s(p,X)) = s(p,Y)$. Из формулы для опорной функции разности Минковского двух множеств (см. § 1.11) последнее равенство означает равенство множеств $Y = B_R(0) \overset{*}{-} X$, т.е. множество Y сильно выпукло, откуда по следствию 3.1.3 следует, что функция $R\|p\| - s(p,Y)$ выпукла, что и требовалось доказать. $\square$

§ 3.2. Сохранение сильной выпуклости при линейных отображениях

Рассмотрим линейное отображение $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, причем $m \geqslant n$ и его ранг $\operatorname{Rang} T = n$. Определим эллипсоид P в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле как образ единичного шара $B_1(0)$ из $\mathbb{R}^m$ при отображении T, т.е.

$$P = TB_1(0). \tag{3.2.1}$$

Этот эллипсоид также можно записать в эквивалентной форме

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, Q^{-1}x\rangle \leqslant 1\}, \quad \text{где} \quad Q = TT^*, \tag{3.2.2}$$

т.е. Q есть положительно определенная симметрическая матрица. Как известно, любой эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле может быть представлен в виде (3.2.1) или (3.2.2). Опорная функция $s(p, P)$ эллипсоида P принимает вид

$$s(p, P) = s(T^*p, B_1(0)) = \|T^*p\| = \sqrt{\langle p, TT^*p\rangle} = \sqrt{\langle p, Qp\rangle}\,. \tag{3.2.3}$$

Теорема 3.2.1. *Всякий эллипсоид P вида* (3.2.1), (3.2.2) *является сильно выпуклым множеством с радиусом $R = \lambda_n/\sqrt{\lambda_1}$, где λ_n — максимальное, а λ_1 — минимальное собственные числа матрицы Q.*

Доказательство. В силу следствия 3.1.3 и формулы (3.2.3) достаточно доказать, что при указанном в теореме R функция вида $f(p) = R\|p\| - \|T^*p\|$ является выпуклой. Прежде всего покажем, что для $\forall\, p_1,\, p_2 \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\|T^*p_1\|\|T^*p_2\| - \langle T^*p_1, T^*p_2\rangle \;\leqslant\; \|Q\|(\|p_1\|\|p_2\| - \langle p_1, p_2\rangle). \tag{3.2.4}$$

Напомним, что для положительно определенной симметрической матрицы $Q = TT^*$ существует ортогональное преобразование J такое, что $Q = J^{\mathrm{T}}\widetilde{Q}J$, где $\widetilde{Q}$ есть диагональная матрица вида

$$\widetilde{Q} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{3.2.5}$$

λ_k — собственные числа матрицы Q, причем они упорядочены по величине, т.е. пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Тогда $\|Q\| = \lambda_n$. Выбирая замену по формуле $q = Jp$ и определяя матрицу $(\widetilde{Q})^{1/2} =$

$= \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$, получаем, что неравенство (3.2.4) эквивалентно для $\forall\, q_1,\, q_2 \in \mathbb{R}^n$ неравенству

$$\|(\widetilde{Q})^{1/2}q_1\|\,\|(\widetilde{Q})^{1/2}q_2\| - \langle q_1, \widetilde{Q}q_2\rangle \leqslant \lambda_n(\|q_1\|\,\|q_2\| - \langle q_1, q_2\rangle). \qquad (3.2.6)$$

Зафиксируем точки $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$ из $\mathbb{R}^n$. Введем функцию g из $\mathbb{R}^n_+$ в $\mathbb{R}_+$ вида

$$g(x) = \|Q^{1/2}(x)q_1\|\,\|Q^{1/2}(x)q_2\| - \langle q_1, Q(x)q_2\rangle,$$

где матрица $Q(x)$ задается по формуле $Q(x) = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n)$, причем $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$. Легко убедиться, что для всякого номера $k \in \overline{1,n}$ справедлива формула

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_k} = \frac{(q_{1k}\|Q^{1/2}(x)q_2\| - q_{2k}\|Q^{1/2}(x)q_1\|)^2}{2\,\|Q^{1/2}(x)q_1\|\,\|Q^{1/2}(x)q_2\|} \geqslant 0,$$

т. е. $g(x)$ возрастает по каждой компоненте x_k в $\mathbb{R}_+$. Поэтому $g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \leqslant g(\lambda_n, \ldots, \lambda_n)$, что и доказывает неравенства (3.2.6), (3.2.4)). Также очевидно, что

$$\|T^*p\| = \|\widetilde{Q}^{1/2}q\| \geqslant \sqrt{\lambda_1}\,\|q\| = \sqrt{\lambda_1}\,\|p\|. \qquad (3.2.7)$$

Вернемся к доказательству теоремы. Для доказательства выпуклости функции $f(p)$ достаточно показать, что для $\forall\,\alpha \in [0,1]$ и $\forall\,p_1$, $p_2 \in \mathbb{R}^n$, $p_1 \neq p_2$, при $R = \lambda_n/\sqrt{\lambda_1}$ справедливо неравенство

$$R\|\alpha p_1 + (1-\alpha)p_2\| - \|\alpha T^*p_1 + (1-\alpha)T^*p_2\| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha(R\|p_1\| - \|T^*p_1\|) + (1-\alpha)(R\|p_2\| - \|T^*p_2\|). \qquad (3.2.8)$$

Воспользовавшись неравенствами (3.2.4) и (3.2.7), получаем

$$R\|\alpha p_1 + (1-\alpha)p_2\| - (\alpha R\|p_1\| + (1-\alpha)R\|p_2\|) =$$
$$= \frac{2R\alpha(1-\alpha)(\langle p_1, p_2\rangle - \|p_1\|\,\|p_2\|)}{\|\alpha p_1 + (1-\alpha)p_2\| + \alpha\|p_1\| + (1-\alpha)\|p_2\|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2\alpha(1-\alpha)(\langle T^*p_1, T^*p_2\rangle - \|T^*p_1\|\,\|T^*p_2\|)}{\|\alpha T^*p_1 + (1-\alpha)T^*p_2\| + \alpha\|T^*p_1\| + (1-\alpha)\|T^*p_2\|} =$$
$$= \|\alpha T^*p_1 + (1-\alpha)T^*p_2\| - (\alpha\|T^*p_1\| + (1-\alpha)\|T^*p_2\|),$$

что доказывает неравенство (3.2.8) и теорему. $\square$

Следствие 3.2.1. *Пусть число $R > 0$ и множество A есть R-сильно выпуклое множество из $\mathbb{R}^m$, пусть $m \geqslant n$, $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение с* $\operatorname{Rang} T = n$, *причем у матрицы $Q = TT^*$ минимальное и максимальное собственные числа соответственно равны λ_1 и λ_n.*

Тогда множество TA будет R_1-сильно выпуклым множеством в $\mathbb{R}^n$ с радиусом $R_1 = R\lambda_n/\sqrt{\lambda_1}$.

Доказательство. По теореме 3.1.2 для множества A существует множество B такое, что справедливо равенство (3.1.9), откуда получаем $TA + TB = RTB_1(0)$. По теореме 3.2.1 эллипсоид $TB_1(0)$ есть сильно выпуклое множество, и по теореме 3.1.2 найдется компакт D такой, что справедливо равенство $TB_1(0) + D = R_2B_1(0)$, где $R_2 = \lambda_n/\sqrt{\lambda_1}$. Отсюда получаем равенство $TA + (TB + RD) = RR_2B_1(0)$, которое в силу теоремы 3.1.2 и доказывает сильную выпуклость множества TA с радиусом R_1. □

§ 3.3. R-сильно выпуклая оболочка множеств

По аналогии с выпуклой оболочкой множества введем понятие R-сильно выпуклой оболочки и изучим некоторые свойства этой оболочки, ее связь с выпуклой оболочкой множества и отличия от нее.

Определение 3.3.1. Пусть дано ограниченное множество A из $\mathbb{R}^n$, числа $\rho > 0$ и $R > 0$ такие, что $B_\rho(0) \overset{*}{-} A \neq \varnothing$ и $R \geqslant \rho$. *Сильно выпуклой оболочкой радиуса R* (или, короче, *R-сильно выпуклой оболочкой*) множества A называется множество, получаемое при пересечении всех замкнутых шаров радиуса R, которые содержат данное множество A. Будем обозначать R-сильно выпуклую оболочку множества A через $\mathrm{strco}_R A$.

Иначе говоря, R-сильно выпуклая оболочка множества A есть наименьшее по включению R-сильно выпуклое множество, содержащее данное множество A. Очевидно, что R-сильно выпуклая оболочка R-сильно выпуклого множества A совпадает с самим множеством A. Напомним, что в теореме Юнга для всякого компакта A из $\mathbb{R}^n$ указана величина радиуса $R(A)$ наименьшего шара, в который можно заключить данное множество A, в зависимости от диаметра множества A и размерности пространства, а именно, $R(A) = \sqrt{n/(2(n+1))}\ \mathrm{diam}\, A$ (т. е. всегда можно найти число $\rho \geqslant R(A)$, указанное в определении 3.3.1).

Теорема 3.3.1 (Е.С. Половинкин [80]). *Пусть A — множество из $\mathbb{R}^n$, числа $\rho > 0$ и $R > 0$ такие, что $R \geqslant \rho$, $B_\rho(0) \overset{*}{-} A \neq \varnothing$. Тогда R-сильно выпуклая оболочка множества A удовлетворяет равенству*

$$\mathrm{strco}_R A = B_R(0) \overset{*}{-} (B_R(0) \overset{*}{-} A), \tag{3.3.1}$$

а ее опорная функция может быть вычислена по формуле

$$s(p, \mathrm{strco}_R A) = R\|p\| - \mathrm{co}\,(R\|p\| - s(p, A)) \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^n. \tag{3.3.2}$$

Доказательство. Так как множество $B_R(0) \overset{*}{-} A$ непусто, то по определению 3.1.1 оно R-сильно выпукло. Поэтому в силу теоремы 3.1.2 существует другое сильно выпуклое множество C такое, что

$$(B_R(0) \overset{*}{-} A) + C = B_R(0), \tag{3.3.3}$$

т. е. $C = B_R(0) \overset{*}{-} (B_R(0) \overset{*}{-} A)$. Из определения геометрической разности Минковского (см. предложение 1.1.1) следует включение $(B_R(0) \overset{*}{-} A) + A \subset B_R(0)$, которое по тому же определению означает, что $A \subset B_R(0) \overset{*}{-} (B_R(0) \overset{*}{-} A) = C$. Выберем любую точку $a \in \mathbb{R}^n$, для которой $A \subset B_R(a)$. Это значит, что $-a \in B_R(0) \overset{*}{-} A$. В свою очередь в силу равенства (3.3.3) это означает, что $C \subset B_R(0) \overset{*}{-} (-a) = B_R(a)$. Таким образом, множество C содержится в пересечении всех тех шаров, которые содержат множество A, является R-сильно выпуклым множеством и удовлетворяет включению $C \supset A$. По определению 3.3.1 это влечет равенство $C = \operatorname{strco}_R A$, т. е. соотношение (3.3.1). Из равенства (3.3.3) получаем для опорных функций выражение

$$s(p, C) = R\|p\| - s(p,\, B_R(0) \overset{*}{-} A) = \\ = R\|p\| - \operatorname{co}\,(R\|p\| - s(p, A)) \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^n,$$

т. е. справедлива формула (3.3.2). $\square$

Из формул (3.3.1) и (3.1.11) получаем

Следствие 3.3.1. *Пусть A есть R-сильно выпуклое множество и в соответствии с определением* 3.1.1 *существует некоторое множество X — множество центров тех шаров, пересечение которых дает множество A по формуле* (3.1.1). *Заметим, что это множество центров X определяется для A неоднозначно. Максимальным* (*по включению*) *множеством центров, при которых пересечение соответствующих им шаров дает то же множество A, для исходного множества X является множество* $\operatorname{strco}_R X$.

Для изучения R-сильно выпуклых оболочек нам потребуется формула вычисления сильно выпуклой оболочки двух точек.

Теорема 3.3.2. *Пусть $R > 0$, пусть точки a_0 и a_1 из $\mathbb{R}^n$ таковы, что $0 < \|a_0 - a_1\| < 2R$.*

Тогда R-сильно выпуклая оболочка множества, состоящего из двух точек a_0 и a_1, удовлетворяет выражению

$$\operatorname{strco}_R\,(\{a_0\} \cup \{a_1\}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} B_{R_\lambda}(a_\lambda), \tag{3.3.4}$$

где $a_\lambda = (1-\lambda)a_0 + \lambda a_1$ *и*

$$R_\lambda = R - \sqrt{R^2 - \lambda(1-\lambda)\|a_1 - a_0\|^2} \quad \forall\, \lambda \in [0, 1]. \tag{3.3.5}$$

Доказательство. 1. Докажем, что левое множество в (3.3.4) содержится в правом. Для этого определим точку $b=(a_1-a_0)/2$ и, сдвигая множества в (3.3.4) на точку $(a_0+a_1)/2$, получим эквивалентное включение

$$\operatorname{strco}_R(\{-b\}\cup\{b\})\subset\bigcup_{\lambda\in[0,1]}B_{R_\lambda}(b_\lambda),\tag{3.3.6}$$

где $b_\lambda=(2\lambda-1)b$, $R_\lambda=R-\sqrt{R^2-4\lambda(1-\lambda)\|b\|^2}\quad\forall\,\lambda\in[0,1]$. Докажем его.

Зафиксируем точку $x\in\operatorname{strco}_R(\{-b\}\cup\{b\})$. По определению 3.3.1 это включение означает, что для всякой точки $a\in B_R(-b)\cap\cap B_R(b)$ справедливо неравенство $\|a-x\|\leqslant R$. Возможны два случая: а) $x\in[-b,b]$, т. е. существует такое $\lambda\in[0,1]$, что $x=b_\lambda$, и требуемое включение очевидно; б) $x\notin[-b,b]$. Прежде всего покажем, что в случае б) $x\neq\mu b$ для любого $\mu\in R$. Допустим противное, т. е. пусть существует число μ такое, что $|\mu|>1$ и $x=\mu b$. Тогда выберем точку $a\in\mathbb{R}^n$ такую, что $\|a-b\|=R$, $\|a+b\|=R$. Как отмечено в начале доказательства, отсюда в силу включения $x\in\operatorname{strco}_R(\{-b\}\cup\{b\})$ следует неравенство $\|a-x\|\leqslant R$. С другой стороны, $\|x-a\|^2=$ $=|\mu|^2\|b\|^2+\|a\|^2>\|b\|^2+\|a\|^2=R^2$, т. е. получаем противоречие.

Итак, $x\neq\mu b$ при всех μ, в силу чего можем ввести два ортонормированных вектора: $e_1=b/\|b\|$ и $e_2=(x-\langle x,e_1\rangle e_1)/\|x-\langle x,e_1\rangle e_1\|$. Выберем точку $a\in\mathbb{R}^n$ вида $a=-\sqrt{R^2-\|b\|^2}\,e_2$. Очевидно, что $\|a-b\|=\|a+b\|=R$, откуда следует, что $\|a-x\|\leqslant R$. Легко проверить, что уравнение $a+\mu(x-a)=b_\lambda$ относительно μ и λ имеет решение μ_0, λ_0 вида

$$\mu_0=\frac{\sqrt{R^2-\|b\|^2}}{\sqrt{R^2-\|b\|^2}+\|x-\langle x,e_1\rangle e_1\|},\quad \lambda_0=\frac{\mu_0\langle x,e_1\rangle}{\|b\|}+\frac12.$$

Нетрудно показать, что $\mu_0\in(0,1)$, $\lambda_0>0$. Кроме того, имеем $\|b_{\lambda_0}-a\|=\mu_0\|x-a\|<\|x-a\|\leqslant R$ и $\|b_{\lambda_0}-a\|^2=\|b_{\lambda_0}\|^2+\|a\|^2$, откуда следует, что $\|b_{\lambda_0}\|<\|b\|$, т. е. $\lambda_0<1$. Итак, отрезки $[-b,b]$ и $[a,x]$ пересекаются в точке b_{λ_0}, и $\|x-b_{\lambda_0}\|=(1-\mu_0)\|x-a\|=$ $=\|x-a\|-\|b_{\lambda_0}-a\|\leqslant R-\sqrt{\|b_{\lambda_0}\|^2+\|a\|^2}=R_{\lambda_0}$. В итоге получаем $x\in B_{R_{\lambda_0}}(b_{\lambda_0})$; включение (3.3.6) доказано.

2. Докажем обратное включение в равенстве (3.3.4). В силу теоремы 3.3.1 получаем, что $\operatorname{strco}_R(\{a_0\}\cup\{a_1\})=B_R(0)\overset{*}{-}(B_R(-a_0)\cap\cap B_R(-a_1))$. Очевидно также равенство

$$B_{R_\lambda}(a_\lambda)=B_R(0)\overset{*}{-}B_{R-R_\lambda}(-a_\lambda)\quad\forall\,\lambda\in[0,1].$$

Поэтому для доказательства обратного включения в (3.3.4) достаточно доказать включения

$$B_R(-a_0) \cap B_R(-a_1) \subset B_{R-R_\lambda}(-a_\lambda) \quad \forall\, \lambda \in [0, 1]. \tag{3.3.7}$$

Пусть точка $x \in B_R(-a_0) \cap B_R(-a_1)$, т. е. $\|x + a_0\|^2 \leqslant R^2$, $\|x + a_1\|^2 \leqslant R^2$. Для каждого числа $\lambda \in [0, 1]$ определим точку $a_\lambda = (1 - \lambda)a_0 + \lambda a_1$, в силу чего последние неравенства принимают вид

$$\|x + a_\lambda\|^2 + 2\,\langle x + a_\lambda, a_0 - a_\lambda\rangle + \|a_0 - a_\lambda\|^2 \leqslant R^2, \tag{3.3.8}$$

$$\|x + a_\lambda\|^2 + 2\,\langle x + a_\lambda, a_1 - a_\lambda\rangle + \|a_1 - a_\lambda\|^2 \leqslant R^2. \tag{3.3.9}$$

Так как $a_0 - a_\lambda = \lambda(a_0 - a_1)$ и $a_1 - a_\lambda = (\lambda - 1)(a_0 - a_1)$, то, умножая неравенство (3.3.8) на $(1 - \lambda)$, а неравенство (3.3.9) на λ и затем складывая, получаем неравенство $\|x + a_\lambda\|^2 + \lambda(1 - \lambda) \times \|a_0 - a_1\|^2 \leqslant R^2$, т. е. $x \in B_{R-R_\lambda}(-a_\lambda)$, и включение (3.3.7) доказано. $\square$

Предложение 3.3.1. *Пусть числа* $R > 0$ *и* $\delta \in (0, R)$, *точки* a_0 *и* a_1 *из* $\mathbb{R}^n$ *таковы, что: либо* 1) $\|a_0 - a_1\|^2 \leqslant (2R - \delta)\delta$ *либо* 2) $R^2/2 > \|a_0 - a_1\|^2 > (2R - \delta)\delta$. *Определим точку* $a_2 = a_1 + (2R\delta - \delta^2)(a_1 - a_0)/\|a_1 - a_0\|^2$, *число* $\mu_0 = \|a_1 - a_0\|^2/(\|a_1 - a_0\|^2 + 2R\delta - \delta^2)$, *точку* $a_\lambda = (1 - \lambda)a_0 + \lambda a_1 \ \forall\, \lambda \in [0, 1]$, *точку* $b_\mu = (1 - \mu)a_0 + \mu a_2 \ \forall\, \mu \in [0, 1]$.

Тогда справедлива оценка

$$\operatorname{strco}_R(\{a_0\} \cup B_\delta(a_1)) \supset \bigcup_{\lambda \in [0,1]} B_{R_{\lambda,\delta}}(a_\lambda) = \bigcup_{\mu \in [0,\mu_0]} B_{\widehat{R}_\mu}(b_\mu), \tag{3.3.10}$$

где

$$\widehat{R}_\mu = R - \sqrt{R^2 - \mu(1 - \mu)\|a_2 - a_0\|^2}\,, \tag{3.3.11}$$

$$R_{\lambda,\delta} = R - \sqrt{R^2 - \lambda(1 - \lambda)\|a_1 - a_0\|^2 - \lambda(2\delta R - \delta^2)}\,. \tag{3.3.12}$$

Доказательство. Равенство в выражении (3.3.10) проверяется непосредственно в силу того, что для всех чисел $\mu \in [0, \mu_0]$ и $\lambda \in [0, 1]$ при соответствии $\lambda = \mu/\mu_0$ справедливы равенства $b_\mu = a_\lambda$ и $\widehat{R}_\mu = R_{\lambda,\delta}$. Условия 1) и 2) в предложении 3.3.1 следуют из неотрицательности подкоренных выражений в (3.3.11) и (3.3.12) и обеспечивают непустоту сильно выпуклой оболочки в (3.3.10). Условие 1) соответствует случаю $\mu_0 \leqslant 1/2$, а условие 2) — случаю $\mu_0 > 1/2$.

Докажем включение в выражении (3.3.10). Из теоремы 3.3.1 следует равенство

$$\operatorname{strco}_R(\{a_0\} \cup B_\delta(a_1)) = B_R(0) \stackrel{*}{-} (B_R(-a_0) \cap B_{R-\delta}(-a_1)).$$

Поэтому достаточно доказать включение

$$B_R(-a_0) \cap B_{R-\delta}(-a_1) \subset B_{R-R_{\lambda,\delta}}(-a_\lambda) \quad \forall \lambda \in [0,1]. \qquad (3.3.13)$$

Выберем точку $x \in B_R(-a_0) \cap B_{R-\delta}(-a_1)$; тогда легко показать, что аналогично доказательству теоремы 3.3.2 (см. п. 2 формулы (3.3.7)–(3.3.9)) для выражения точки x справедливо неравенство

$$\|x + a_\lambda\|^2 + \lambda(1-\lambda)\|a_0 - a_1\|^2 \leqslant (1-\lambda)R^2 + \lambda(R-\delta)^2 \quad \forall \lambda \in [0,1],$$

откуда следует включение (3.3.13) и соответственно (3.3.10). □

Замечание 3.3.1. Из соотношений (3.3.4), (3.3.10), (3.3.11) легко показать, что R-сильно выпуклая оболочка точки a_0 и шара $B_\delta(a_1)$ при условии, что она существует, всегда является подмножеством R-сильно выпуклой оболочкой двух точек a_0 и a_2, где точка a_2 указана в предложении 3.3.1.

Так как в силу формул (3.3.11) и (3.3.5), очевидно, справедливо строгое неравенство $R_{\lambda,\delta} > R_\lambda$ при всех $\lambda \in (0,1]$, то из теоремы 3.3.2 и предложения 3.3.1 получаем

Следствие 3.3.2. *Пусть выполнены условия предложения* 3.3.1. *Тогда справедливо включение*

$$\bigl(\operatorname{strco}_R(\{a_0\} \cup \{a_1\})\bigr)\backslash\{a_0\} \subset \operatorname{int}\bigl((\operatorname{strco}_R(\{a_0\} \cup B_\delta(a_1))\bigr). \qquad (3.3.14)$$

Предложение 3.3.2. *Пусть число* $R > 0$, *точки* a_0, a_1 *из* $\mathbb{R}^n$ *такие, что* $0 < \|a_0 - a_1\| < 2R$, *пусть* $a_\lambda = (1-\lambda)a_0 + \lambda a_1$ $\forall \lambda \in [0,1]$.

Тогда для всякой точки $b \in \partial B_R(a_0) \cap \partial B_R(a_1)$ *справедливо равенство*

$$\operatorname{strco}_R(\{a_0\} \cup \{a_1\}) \cap \partial B_R(b) = \left\{ b + \frac{R(a_\lambda - b)}{\|a_\lambda - b\|} \;\middle|\; \lambda \in [0,1] \right\}. \qquad (3.3.15)$$

Доказательство. В силу теоремы 3.3.2 (равенства (3.3.4)) достаточно показать, что

$$B_{R_\lambda}(a_\lambda - b) \cap \partial B_R(0) = \frac{R(a_\lambda - b)}{\|a_\lambda - b\|} \quad \forall \lambda \in [0,1], \qquad (3.3.16)$$

где R_λ определено по формуле (3.3.5). Для любого $\lambda \in (0,1)$ получаем, что $s(p, B_{R_\lambda}(a_\lambda - b)) = \langle p, a_\lambda - b\rangle + R_\lambda < \|a_\lambda - b\| + R_\lambda = s((a_\lambda - b)/\|a_\lambda - b\|, B_{R_\lambda}(a_\lambda - b))$ при всех $p \neq (a_\lambda - b)/\|a_\lambda - b\|$, $\|p\| = 1$, т. е. справедливо включение $B_{R_\lambda}(a_\lambda - b) \subset B_{r_\lambda}(0)$, где $r_\lambda = \|a_\lambda - b\| + R_\lambda$, причем множество $B_{R_\lambda}(a_\lambda - b) \cap \partial B_{r_\lambda}(0)$, очевидно, состоит из одной точки $a_\lambda - b + R_\lambda(a_\lambda - b)/\|a_\lambda - b\|$, норма которой равна r_λ. Так как в силу выбора точки b справедливо равенство $\langle a_0 - a_1, a_0 + a_1 - 2b\rangle = 0$, то $\|a_\lambda - b\|^2 = \|b - (a_0 + a_1)/2\|^2 + (\lambda - 1/2)^2\|a_0 - a_1\|^2 = (\|a_0 + a_1 - 2b\|^2 + \|a_0 - a_1\|^2)/4 + (\lambda^2 - \lambda)\|a_0 - a_1\|^2 = R^2 - \lambda(1-\lambda)\|a_0 - a_1\|^2$, т.е. $\|a_\lambda - b\| + R_\lambda = R$, что и доказывает равенство (3.3.16). □

Из определения 3.3.1 и теорем 3.3.1, 3.3.2 легко показать справедливость следующих простейших свойств R-сильно выпуклой оболочки.

Предложение 3.3.3. *Пусть заданы числа* $\alpha \geqslant 0$, ρ, r *и* R *такие, что* $0 \leqslant \rho \leqslant r \leqslant R$, *и ограниченные подмножества* A *и* B *из пространстве* $\mathbb{R}^n$ *такие, что* $B_\rho(0) \overset{*}{-} A \neq \varnothing$, $B_\rho(0) \overset{*}{-} B \neq \varnothing$.

Тогда:

1) $\mathrm{strco}_R A \subset \mathrm{strco}_r A$, *и если* $A \subset B$, *то* $\mathrm{strco}_R A \subset \mathrm{strco}_R B$;

2) $\mathrm{strco}_{r+R}(A + B) \subset \mathrm{strco}_r A + \mathrm{strco}_R B$, *если же* $A = B_r(a)$ *при некотором* $a \in \mathbb{R}^n$, *то указанное включение превращается в равенство*;

3) $\mathrm{strco}_{\alpha r}(\alpha A) = \alpha\, \mathrm{strco}_r A$, $\mathrm{strco}_r(A + a) = \mathrm{strco}_r A + a$ *при любом* $a \in \mathbb{R}^n$;

4) *если множество* $A \overset{*}{-} B$ *непусто, то справедливо включение*

$$\mathrm{strco}_r(A \overset{*}{-} B) \subset (\mathrm{strco}_r A) \overset{*}{-} B,$$

которое обращается в равенство, если множество A *является* r*-сильно выпуклым множеством*;

5) *существует точка* $a \in \mathbb{R}^n$ *такая, что* $B_\beta(a) \subset \mathrm{strco}_r A$, *где* $\beta = (\mathrm{diam}\ A)^2/(8r)$.

Теорема 3.3.3 (Е.С. Половинкин). *Компактное множество* A *является* R*-сильно выпуклым множеством тогда и только тогда, когда* R*-сильно выпуклая оболочка произвольного конечного подмножества его точек непуста и содержится в* A.

Доказательство. Из предложения 3.3.3, очевидно, следует, что сильно выпуклое множество A содержит R-сильно выпуклую оболочку любого конечного подмножества его точек. Докажем обратное утверждение. Пусть A есть компакт, и пусть для всякой пары его точек $a_1, a_2 \in A$ множество $\mathrm{strco}_R(\{a_1\} \cup \{a_2\})$ непусто и справедливо включение $\mathrm{strco}_R(\{a_1\} \cup \{a_2\}) \subset A$. Так как $[a_1, a_2] \subset \mathrm{strco}_R(\{a_1\} \cup \{a_2\})$, то множество A выпукло и

$$s(p, \mathrm{strco}_R(\{a_1\} \cup \{a_2\})) \leqslant s(p, A) \quad \forall\, p \in \partial B_1(0). \tag{3.3.17}$$

Для доказательства того, что в этом случае множество A является R-сильно выпуклым множеством, в силу следствия 3.1.3 достаточно доказать, что функция $f(p) = R\|p\| - s(p, A)$ является выпуклой функцией. Выберем произвольные векторы $p_1, p_2 \in \partial B_1(0)$ и число $\lambda \in [0, 1]$. В силу компактности множества A найдутся точки a_1, $a_2 \in A$ такие, что $\langle p_k, a_k \rangle = s(p_k, A)$, $k = 1, 2$. Рассмотрим функцию $f_1(p) = R\|p\| - s(p, \operatorname{strco}_R(\{a_1\} \cup \{a_2\}))$. Так как множество $\operatorname{strco}_R(\{a_1\} \cup \{a_2\})$ является R-сильно выпуклым множеством, то по следствию 3.1.3 функция $f_1(p)$ выпукла. Из неравенства (3.3.17), очевидно, следуют неравенства

$$f(p) \leqslant f_1(p) \quad \forall\, p \in \partial B_1(0),$$

$$\langle p_k, a_k \rangle \leqslant s(p_k, \operatorname{strco}_R(\{a_1\} \cup \{a_2\})) \leqslant s(p_k, A) = \langle p_k, a_k \rangle \quad \forall\, k = 1, 2.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} f(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) \leqslant f_1(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) \leqslant \lambda f_1(p_1) + (1-\lambda) f_1(p_2) = \\ = R(\lambda\|p_1\| + (1-\lambda)\|p_2\|) - \lambda\langle p_1, a_1\rangle - (1-\lambda)\langle p_2, a_2\rangle = \\ = \lambda f(p_1) + (1-\lambda) f(p_2), \end{aligned}$$

что и доказывает выпуклость функции f. □

Из теоремы 3.3.3, очевидно, следует

Следствие 3.3.3. *Пусть множество A есть R-сильно выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$. Для любых точек $a_0, a_1 \in A$ дуга любой окружности радиуса R длины не более πR с концами в точках a_0 и a_1 принадлежат множеству A.*

Как известно (см. предложение 1.3.2), операция взятия выпуклой оболочки компакта удовлетворяет условию Липшица, а именно: для любых компактов A_1 и A_2, принадлежащих пространству $\mathbb{R}^n$, справедливо неравенство $h(\operatorname{co} A_1, \operatorname{co} A_2) \leqslant h(A_1, A_2)$. Для сильно выпуклой оболочки это свойство принимает следующий вид.

Лемма 3.3.1 (Е.С. Половинкин [80]). *Пусть компакты A_1 и A_2, точки $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ и числа $r_0 > 0$, $h \geqslant 0$ такие, что $A_k \subset B_{r_0}(-x_k)$, $k = 1, 2$, $h(A_1, A_2) = h$.*

Тогда для любого числа $R > r_0 + h$ справедлива оценка

$$h(\operatorname{strco}_R A_1, \operatorname{strco}_R A_2) \leqslant \sqrt{\frac{R + r_0}{R - r_0}}\; h(A_1, A_2). \tag{3.3.18}$$

Доказательство. Из равенств $B_R(0) \overset{*}{-} A_k + \operatorname{strco}_R A_k = B_R(0)$, где $k = 1, 2$, справедливых в силу теорем 3.1.2 и 3.3.1, очевидно, следует равенство

$$h(\operatorname{strco}_R A_1, \operatorname{strco}_R A_2) = h(B_R(0) \overset{*}{-} A_1,\, B_R(0) \overset{*}{-} A_2). \tag{3.3.19}$$

Поэтому достаточно получить требуемую оценку расстояния между множествами $B_R(0) \overset{*}{-} A_1$ и $B_R(0) \overset{*}{-} A_2$. В силу определения метрики Хаусдорфа и симметрии в условиях на множества A_1 и A_2 для доказательства последнего достаточно для произвольного вектора $a_0 \in B_R(0) \overset{*}{-} A_1$ найти вектор $b_0 \in B_R(0) \overset{*}{-} A_2$ такой, что

$$\|a_0 - b_0\| \leqslant \sqrt{\frac{R + r_0}{R - r_0}}\ h.$$

Покажем это. Пусть $a_1 = x_1$. Из включения $A_1 \subseteq B_{r_0}(-a_1)$ следует, что $B_R(0) \overset{*}{-} A_1 \supset B_{R-r_0}(a_1)$, т. е. $B_{R-r_0}(a_1) + A_1 \subset B_R(0)$. Из R-сильной выпуклости множества $B_R(0) \overset{*}{-} A_1$ и теоремы 3.3.3 получаем включение

$$\operatorname{strco}_R(\{a_0\} \cup B_{R-r_0}(a_1)) \subseteq B_R(0) \overset{*}{-} A_1. \tag{3.3.20}$$

Допустим, что $\|a_0 - a_1\| \leqslant R - r_0$. Так как по условию леммы $h < R - r_0$, то найдется точка $b_0 \in [a_0, a_1]$ такая, что $\|a_0 - b_0\| \leqslant h$ и $B_h(b_0) \subset B_{R-r_0}(a_1)$, откуда следует, что $b_0 + A_2 \subset B_h(b_0) + A_1 \subset B_R(0)$, т. е. $b_0 \in B_R(0) \overset{*}{-} A_2$ и $\|a_0 - b_0\| \leqslant h$.

Допустим, что $\|a_0 - a_1\| > R - r_0$. Воспользуемся предложением 3.3.1 при $\delta = R - r_0$, причем без ограничения общности будем считать, что имеет место случай 1), т. е. $\|a_0 - a_1\|^2 \leqslant (2R - \delta)\delta = R^2 - r_0^2$, при этом число $\mu_0 \leqslant 1/2$. Если это не так и $\mu_0 > 1/2$, то вместо точки a_1 возьмем точку $\widehat{a}_1 = b_{1-\mu_0}$ (обозначения здесь и ниже из предложения 3.3.1), причем так как $\widehat{R}_{1-\mu_0} = \widehat{R}_{\mu_0} = \delta$, то в силу включения (3.3.10) получаем

$$B_{R-r_0}(\widehat{a}_1) \subset B_R(0) \overset{*}{-} A_1 \quad \text{и} \quad \|a_0 - \widehat{a}_1\|^2 \leqslant R^2 - r_0^2.$$

Так как в силу формулы (3.3.11) радиус $\widehat{R}_\mu$ при изменении μ от 0 до $\mu_0 \leqslant 1/2$ принимает все значения от 0 до $R - r_0$, а по условию леммы $h < R - r_0$, то найдется число $\mu_1 \in (0, \mu_0)$ такое, что $\widehat{R}_{\mu_1} = h$. Рассмотрим функцию $f(\mu) = \|b_\mu - a_0\|/\widehat{R}_\mu$ при $\mu \in (0, 1)$. В силу формулы (3.3.11) легко убедиться, что

$$f'(\mu) = \frac{\|a_2 - a_0\|^2 \cdot (\mu\|a_2 - a_0\|^2 - 2R\widehat{R}_\mu)}{2\widehat{R}_\mu^2 \sqrt{R^2 - \mu(1-\mu)\|a_2 - a_0\|^2}}.$$

Докажем, что $f'(\mu) > 0$ при всех $\mu \in (0, 1/2)$, т. е. $f(\mu)$ строго возрастает. Из формулы для производной $f'(\mu)$ достаточно показать, что $\mu\|a_2 - a_0\|^2 - 2R\widehat{R}_\mu > 0$ при всех $\mu \in (0, 1/2)$. Для этого воспользуемся тем, что по условию $\|a_2 - a_0\| < 2R$. В результате при $\mu \in (0, 1/2)$ получим

$$\frac{2R\widehat{R}_\mu}{\mu\|a_2-a_0\|^2} = \frac{2R^2}{\mu\|a_2-a_0\|^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{\mu(1-\mu)\|a_2-a_0\|^2}{R^2}}\,\right) =$$
$$= \frac{2(1-\mu)}{1+\sqrt{1-\dfrac{\mu(1-\mu)\|a_2-a_0\|^2}{R^2}}} < \frac{2(1-\mu)}{1+\sqrt{1-4\mu(1-\mu)}} = \frac{2(1-\mu)}{1+|1-2\mu|} = 1,$$

что и доказывает требуемое неравенство. Итак, $f(\mu_1) < f(\mu_0) = \|a_0 - - a_1\|/(R-r_0)$, т. е., взяв в качестве точки $b_0 = b_{\mu_1}$, получим

$$\frac{\|a_0-b_0\|}{h} < \frac{\|a_0-a_1\|}{R-r_0} \leqslant \frac{\sqrt{R^2-r_0^2}}{R-r_0}.$$

В свою очередь в силу выбора числа h и точки b_0 и из включения (3.3.20) следует, что $b_0 + A_2 \subset B_h(b_0) + A_1 \subset B_R(0)$, т. е. $b_0 \in \in B_R(0) \overset{*}{-} A_2$, что вместе с последним неравенством и доказывает оценку (3.3.18). □

Предложение 3.3.4. *Пусть компакт A из $\mathbb{R}^n$ имеет диаметр* $\operatorname{diam} A = 2r_0 > 0$, *и пусть число* $R \geqslant 2r_0$.

Тогда справедливы оценки $\operatorname{co} A \subset \operatorname{strco}_R A \subset \operatorname{co} A + B_\beta(0)$, *где* $\beta = 4r_0^2/R$, *т. е.* $\lim\limits_{R\to\infty} h(\operatorname{strco}_R A, \operatorname{co} A) = 0$.

Доказательство. В силу деммы 3.3.1 для оценки расстояния по Хаусдорфу между $\operatorname{co} A$ и $\operatorname{strco}_R A$ достаточно получить верхнюю оценку расстояния между выпуклыми многогранниками, содержащимися в $\operatorname{co} A$, и R-сильно выпуклыми оболочками этих многогранников.

Пусть точка a лежит на границе R-сильно выпуклой оболочки некоторого многогранника V из $\operatorname{co} A$. В силу определения 3.3.1 найдутся сфера $\partial B_R(b)$ радиуса R с центром в некоторой точке b и вершины $a_1, \ldots, a_k$ многогранника V такие, что

$$a - b = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(a_i - b), \quad \text{где} \quad \lambda_i > 0, \quad a,\, a_i \in \partial B_R(b) \quad \forall\, i \in \overline{1,k}.$$

Определим числа $\widehat{\lambda} = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i$, $\widehat{\lambda}_i = \dfrac{\lambda_i}{\widehat{\lambda}}$ и точку $\widehat{a} = \sum\limits_{i=1}^{k} \widehat{\lambda}_i a_i$. Очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{k} \widehat{\lambda}_i = 1$ и $\widehat{a} \in V$. По условию $\|a_i - a_j\| \leqslant 2r_0 \quad \forall i,\, j$, поэтому $\|\widehat{a} - a_j\| \leqslant 2r_0$. Складывая неравенства $R^2 = \|a_i - b\|^2 = \|\widehat{a} - b\|^2 + + 2\langle \widehat{a} - b,\, a_i - \widehat{a}\rangle + \|a_i - \widehat{a}\|^2$ с весами $\widehat{\lambda}_i$, получаем $R^2 = \|\widehat{a} - b\|^2 + + \sum\limits_{i=1}^{k} \widehat{\lambda}_i \|a_i - \widehat{a}\|^2 < \|\widehat{a} - b\|^2 + 4r_0^2$. т. е.

$$\|\widehat{a} - b\| > R\sqrt{1-\left(\tfrac{2r_0}{R}\right)^2} > R\Big(1-\left(\tfrac{2r_0}{R}\right)^2\Big).$$

В итоге получаем $\|\widehat{a}-a\| = \|a-b\| - \|\widehat{a}-b\| \leqslant 4r_0^2/R$, что и дает указанную в предложении оценку. $\square$

Замечание 3.3.2. Отметим, что в предложении 3.3.4 приведены достаточно простые и грубые оценки, целью которых было показать наличие предельного равенства, и в результате полученная величина β не совсем точна. Как мы покажем в в теореме 4.4.6, путем более точных оценок величину β можно уменьшить в четыре раза, т. е. справедливо следующее утверждение.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ дано выпуклое замкнутое множество A, содержащееся в некотором шаре $B_{r_0}(a)$. Пусть $R > r_0 > 0$.

Тогда справедлива оценка

$$h(A, \mathrm{strco}_R A) \leqslant \frac{r_0^2}{R}.$$

Предложение 3.3.5. *Пусть компакты A_1 и A_2 из $\mathbb{R}^n$, точки $x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}^n$ и число $r_0 > 0$ такие, что $A_i \subset B_{r_0}(x_i)$, $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$.*

Тогда для любого числа R такого, что $r_0 < R \leqslant r_0 + h(A_1, A_2)$, справедливо неравенство

$$h(\mathrm{strco}_R A_1, \mathrm{strco}_R A_2) \leqslant L\, h(A_1, A_2), \tag{3.3.21}$$

где константа $L = 1 + r_0^2/(R(R - r_0))$.

Доказательство. Обозначим $h = h(A_1, A_2)$. Это значит, что имеет место включение

$$A_1 \subset A_2 + B_h(0),$$

откуда следует, что

$$\mathrm{co}\, A_1 \subset \mathrm{co}\, A_2 + B_h(0).$$

Следовательно, по замечанию 3.3.2 получаем

$$\mathrm{strco}_R A_1 \subset \mathrm{co}\, A_1 + \frac{r_0^2}{R} B_1(0) \subset \mathrm{co}\, A_2 + \\ + \left(h + \frac{r_0^2}{R}\right) B_1(0) \subset \mathrm{strco}_R A_2 + \left(h + \frac{r_0^2}{R}\right) B_1(0).$$

Аналогично можно получить включение, в котором множества A_1 и A_2 поменялись местами. Отсюда получаем оценку

$$h(\mathrm{strco}_R A_1, \mathrm{strco}_R A_2) \leqslant \\ \leqslant \left(h + \frac{r_0^2}{R}\right) = \left(h + \frac{r_0^2}{R(R - r_0)}\,(R - r_0)\right) \leqslant \left(1 + \frac{r_0^2}{R(R - r_0)}\right) h,$$

т. е. получаем неравенство (3.3.21). $\square$

Объединяя утверждение леммы 3.3.1 и предложения 3.3.5, получаем следующую теорему.

Теорема 3.3.4. *Пусть числа* r_0, R, *где* $0 < r_0 < R$, *и множества* A_1, A_2 *таковы, что* $B_{r_0}(0) \overset{*}{-} A_i \neq \varnothing$, $i \in \overline{1,2}$.

Тогда справедлива оценка

$$h(\mathrm{strco}_R A_1, \mathrm{strco}_R A_2) \leqslant L(R, r_0)\, h(A_1, A_2), \tag{3.3.22}$$

где константа Липшица имеет вид

$$L(R, r_0) = \max\left\{ \sqrt{\frac{R + r_0}{R - r_0}},\ 1 + \frac{r_0^2}{R(R - r_0)} \right\}. \tag{3.3.23}$$

Теорема 3.3.5 (Е.С. Половинкин [80]). *Пусть компакт* $A \subset \mathbb{R}^n$, *точка* $a \in \mathbb{R}^n$ *и числа* R_1, R_2, r_0 *такие, что* $R_2 \geqslant R_1 > r_0 > 0$ *и* $A \subseteq B_{r_0}(a)$.

Тогда справедлива оценка

$$h(\mathrm{strco}_{R_1} A, \mathrm{strco}_{R_2} A) \leqslant \left(\sqrt{\frac{R_2 + r_0}{R_2 - r_0}} - 1 \right)(R_2 - R_1). \tag{3.3.24}$$

Доказательство. В силу формулы для расстояния по Хаусдорфу между выпуклыми компактами A и B (см. гл. 1) вида

$$h(A, B) = \max_{\|p\|=1} |s(p, A) - s(p, B)|,$$

а также в силу теоремы 3.3.1 (т. е. равенства (3.3.2)) получаем

$$\begin{aligned} h(\mathrm{strco}_{R_1} A, \mathrm{strco}_{R_2} A) = \max_{\|p\|=1} |R_1\|p\| - \mathrm{co}\,(R_1\|p\| - s(p, A)) -& \\ - R_2\|p\| + \mathrm{co}\,(R_2\|p\| - s(p, A))| = \max_{\|p\|=1} |(R_1 - R_2)\|p\| +& \\ + s(p,\, B_{R_2}(0) \overset{*}{-} A) - s(p,\, B_{R_1}(0) \overset{*}{-} A)|.& \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

По свойству геометрической разности очевидно включение

$$B_{R_2}(0) \overset{*}{-} A \supset \left(B_{R_1}(0) \overset{*}{-} A \right) + B_{R_2 - R_1}(0),$$

что для опорных функций влечет неравенство

$$s(p,\, B_{R_2}(0) \overset{*}{-} A) - s(p,\, B_{R_1}(0) \overset{*}{-} A) - (R_2 - R_1)\|p\| \geqslant 0 \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^n,$$

т. е. в последнем выражении формулы (3.3.25) модуль можно убрать и получить равенство

$$h(\mathrm{strco}_{R_1} A, \mathrm{strco}_{R_2} A) = h(B_{R_1}(0) \overset{*}{-} A,\ B_{R_2}(0) \overset{*}{-} A) - (R_2 - R_1).$$

В свою очередь из очевидных равенств $B_{R_1}(0) \overset{*}{-} A = B_{R_2}(0) \overset{*}{-} D$, где $D = A + B_{R_2-R_1}(0)$, и $h(A, D) = R_2 - R_1$, из леммы 3.3.1 и равенства (3.3.19) следует оценка $h(B_{R_2}(0) \overset{*}{-} D,\ B_{R_2}(0) \overset{*}{-} A) \leqslant \leqslant \sqrt{(R_2 + r_0)/(R_2 - r_0)}\ (R_2 - R_1)$, завершающая доказательство теоремы. □

Замечание 3.3.3. Как следует из теорем 3.3.4, 3.3.5, многозначное отображение $F(r) = \operatorname{strco}_r A$ при $r > r_0$ является непрерывным в метрике Хаусдорфа и монотонно убывающим по включению с предельным значением, равным $\operatorname{co} A$.

Упражнение 3.3.1. Доказать, что в оценке (3.3.10) имеет место не включение, а равенство.

§ 3.4. *R*-сильно крайние точки

Из теоремы Каратеодори о представлении выпуклых оболочек множеств из $\mathbb{R}^n$ (см. теорему 1.14.1) и теорем 3.3.4–3.3.5 получаем следующее ее развитие.

Теорема 3.4.1 (Е.С. Половинкин [81]). *Пусть даны компактное множество A из $\mathbb{R}^n$, и числа $r > 0$ и $R > 0$ такие, что $B_r(0) \overset{*}{-} A \neq \varnothing$ и $R \geqslant r$.*

Тогда R-сильно выпуклая оболочка множества A состоит из тех и только тех точек, каждая из которых содержится в R-сильно выпуклой оболочке некоторой совокупности не более чем $n + 1$ точек из A.

Доказательство. Пусть $a \in \operatorname{strco}_R A$. Допустим, что множество A содержит более $n + 1$ точек. Покажем, что можно выбрать подмножество D в A, которое содержит не более $n + 1$ точек, и такое, что $a \in \operatorname{strco}_R D$. Если точка $a \in \operatorname{co} A$, то по теореме Каратеодори существует такое множество $D \subset A$, что оно содержит не более $n + 1$ точек и $a \in \operatorname{co} D \subset \operatorname{strco}_R D$, что и требуется доказать. Если $a \notin \operatorname{co} A$, то в силу теорем 3.3.4 и 3.3.5 найдется число $R_1 \geqslant R$ такое, что точка a принадлежит границе множества $\operatorname{strco}_{R_1} A$. Возможны два случая: либо $B_{R_1}(0) \overset{*}{-} A$ состоит из одной точки, либо имеет непустую внутренность. В первом случае $\operatorname{strco}_{R_1} A$ в силу (3.3.1) является шаром минимального радиуса, в который можно поместить множество A. В силу теоремы 1.17.5 такой шар задается не более чем $n + 1$ точками из множества A, лежащими на границе шара (т. е. на сфере), которые и обозначим через D, т. е. $a \in \operatorname{strco}_{R_1} A = \operatorname{strco}_{R_1} D \subset \operatorname{strco}_R D$, что завершает доказательство теоремы. Во втором случае, так как всякое сильно выпуклое множество является строго выпуклым, существует точка $\widetilde{p} \in \partial B_1(0)$ такая, что $\langle \widetilde{p}, a\rangle = s(\widetilde{p}, \operatorname{strco}_{R_1} A)$ и $\langle \widetilde{p}, x\rangle < s(\widetilde{p}, \operatorname{strco}_{R_1} A)$ для любого $x \in \operatorname{strco}_{R_1} A \backslash \{a\}$. Для всякой точки $p \in \partial B_1(0)$ обозначим через $a_p \in A$ точку, удовлетворяющую равенству $s(p, A) = \langle p, a_p\rangle$. Тогда опорная функция множества $B_{R_1}(0) \overset{*}{-} A$ принимает вид $s(p, B_{R_1}(0) \overset{*}{-} A) = \operatorname{co}(R_1\|p\| - \langle p, a_p\rangle)$, причем в силу непустоты внутренности множества $B_{R_1}(0) \overset{*}{-} A$ при вычислении выпуклой оболочки в последней формуле $\inf$ можно заменить на $\min$ (см. теорему 1.14.4), причем в силу теоремы Каратеодори выпуклые комбинации можно брать не более чем из $n+1$ точек. В итоге для точки $\widetilde{p}$ найдутся числа $\lambda_k > 0$ и точки $p_k \in \partial B_1(0)$, $k \in \overline{1, m}$, такие, что

$$m \leqslant n+1, \quad \widetilde{p} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k p_k, \quad s(\widetilde{p}, B_{R_1}(0) \overset{*}{-} A) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (R_1 - \langle p_k, a_{p_k}\rangle).$$

Отсюда по формуле (3.3.2) получаем равенство

$$s(\widetilde{p}, \operatorname{strco}_{R_1} A) = R_1 - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (R_1 - \langle p_k, a_{p_k}\rangle).$$

Определим множество D как совокупность точек $\{a_{p_1}, \ldots, a_{p_m}\}$. Так как $a_{p_k} \in D \subset A$, то $\langle p_k, a_{p_k}\rangle \leqslant s(p_k, D) \leqslant s(p_k, A) = \langle p_k, a_{p_k}\rangle$, т. е. $s(p_k, D) = s(p_k, A) \quad \forall\, k \in \overline{1, m}$. Отсюда получаем, что $s(\widetilde{p}, B_{R_1}(0) \overset{*}{-} A) \leqslant s(\widetilde{p}, B_{R_1}(0) \overset{*}{-} D) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k (R_1 - \langle p_k, a_{p_k}\rangle)$, т. е. справедливо равенство $s(\widetilde{p}, \operatorname{strco}_{R_1} A) = s(\widetilde{p}, \operatorname{strco}_{R_1} D)$, которое в силу выбора точки $\widetilde{p}$ влечет включение $a \in \operatorname{strco}_{R_1} D \subset \operatorname{strco}_R D$. Теорема доказана. □

Определение 3.4.1. Пусть компакт A из $\mathbb{R}^n$ и числа $r > 0$, $R > 0$ такие, что $B_r(0) \overset{*}{-} A \neq \varnothing$ и $R \geqslant r$. Непустое подмножество V из A называется *R-сильно крайним подмножеством множества A*, если ни одна точка из V не содержится в R-сильно выпуклой оболочке какой-нибудь пары точек, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству V.

Определение 3.4.2. Точка $x \in A$ называется *R-сильно крайней точкой множества A*, если одноточечное множество $\{x\}$ является R-сильно крайним подмножеством множества A (рис. 17).

Рис. 17

Будем обозначать множества всех R-сильно крайних точек множества A через $\operatorname{extr}_R A$. Напомним, что множество всех крайних точек множества A обозначают через $\operatorname{extr} A$. Из определений 3.4.1, 3.4.2 и свойств R-сильно выпуклой оболочки, очевидно, следуют включения

$$\operatorname{extr} A \supset \operatorname{extr}_{R_1} A \supset \operatorname{extr}_{R_2} A \quad \forall R_1 > R_2 \geqslant r. \tag{3.4.1}$$

З а м е ч а н и е 3.4.1. Всякий шар $B_R(a)$ радиуса R с центром в произвольной точке $a \in \mathbb{R}^n$ не имеет R-сильно крайних точек, т.е. $\operatorname{extr}_R B_R(a) = \varnothing$, а для любого $R_1 > R$ справедливо равенство $\operatorname{extr}_{R_1} B_R(a) = \operatorname{extr} B_R(a) = \partial B_R(a)$.

Л е м м а 3.4.1. *Пусть число $R > 0$, и пусть множество A есть R-сильно выпуклое множество, не совпадающее ни с каким шаром $B_R(a)$.*

Тогда существует число $r \in (0, R)$ такое, что $B_r(0) \overset{*}{-} A \neq \varnothing$ (т. е. $\operatorname{diam} A \leqslant 2r < 2R$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 3.1.2 для R-сильно выпуклого множества A существует R-сильно выпуклое множество B, для которого выполнено равенство (3.1.9), и так как $A \neq B_R(a)$, то из равенства (3.1.9) следует, что множество B состоит более чем из одной точки, т.е. $\alpha > 0$, где $\alpha = \operatorname{diam} B$. По предложению 3.3.3, п. 5) существует точка $a^* \in \mathbb{R}^n$ такая, что $B_\rho(a^*) \subset B$, где $\rho = \alpha^2/(8R)$. Отсюда получаем $A = B_R(0) \overset{*}{-} B \subset B_r(-a^*)$, где $r = R - \rho$. $\square$

Л е м м а 3.4.2. *Пусть задан компакт A из $\mathbb{R}^n$ такой, что $A \neq B_R(0)$, $A \subset B_R(0)$. Пусть V есть R-сильно крайнее подмножество множества A такое, что множество $V_1 = V \cap \partial B_R(0)$ непусто.*

Тогда множество V_1 также является R-сильно крайним подмножеством множества A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z \in V_1$. Пусть существуют точки $x \in A$ и $y \in A$ такие, что $x \neq z$, $y \neq z$, $z \in \operatorname{strco}_R(\{x\} \cup \{y\})$. Так как множество V является R-сильно крайним подмножеством, то из включения $z \in V$ следуют включения $x \in V$ и $y \in V$. Лемма будет доказана, если докажем, что $x \in \partial B_R(0)$ и $y \in \partial B_R(0)$.

Допустим противное: пусть $x \notin \partial B_R(0)$. Тогда найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(x) \subset B_R(0)$. Так как по условию $y \in B_R(0)$, то по предложению 3.3.3, п. 1) получаем, что $\operatorname{strco}_R(B_\varepsilon(x) \cup \{y\}) \subset B_R(0)$, откуда в силу следствия 3.3.2 имеем $z \in \operatorname{int} B_R(0)$, т.е. $z \notin V_1$, что противоречит выбору точки z. $\square$

Л е м м а 3.4.2. *Пусть задан компакт A из $\mathbb{R}^n$ такой, что $A \neq B_R(0)$, $A \subset B_R(0)$. Пусть V — замкнутое R-сильно крайнее подмножество множества A такое, что $V \subset \partial B_R(0)$, и пусть существует вектор $p \in \partial B_1(0)$, для которого $s(p, V) = 0$. Пусть $H(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, p \rangle = 0\}$.*

Тогда множество $V_1 = V \cap H(p)$ также является R-сильно крайним подмножеством множества A.

Доказательство. Рассмотрим точку $z \in V_1$. Допустим, что существуют точки $x \in A$ и $y \in A$ такие, что $x \neq z$, $y \neq z$, $z \in \in \mathrm{strco}_R(\{x\} \cup \{y\})$. Так как V есть R-сильно крайнее подмножество, то из включения $z \in V$ следуют включения $x \in V$ и $y \in V$. Лемма будет доказана, если докажем, что $x \in H(p)$ и $y \in H(p)$.

По предложению 3.3.2 и в силу включения $z \in \mathrm{strco}_R(\{x\} \cup \{y\}) \cap \cap\, \partial B_R(0)$ существует число $\lambda \in (0,1)$ такое, что $z = R(\lambda x + (1 - -\lambda)y)/\|\lambda x + (1-\lambda)y\|$. Из того, что в силу выбора точки z имеем $\langle z, p\rangle = 0$, а по доказанному $\langle p, x\rangle \leqslant s(p, V) = 0$ и $\langle p, y\rangle \leqslant s(p, V) = 0$, получаем, что $\langle p, x\rangle = 0$ и $\langle p, y\rangle = 0$, т. е. справедливы включения $x \in H(p)$ и $y \in H(p)$. $\square$

Теперь мы можем доказать обобщение теоремы Минковского о крайних точках.

Теорема 3.4.2 (Е.С. Половинкин [81]). *Пусть компакт A из $\mathbb{R}^n$, точка $a \in \mathbb{R}^n$ и числа $r > 0$ и $R > 0$ таковы, что $A \subset B_r(a)$ и $R > r$.*

Тогда множество A содержится в R-сильно выпуклой оболочке множества всех своих R-сильно крайних точек, т. е.

$$A \subset \mathrm{strco}_R\,(\mathrm{extr}_R\, A). \tag{3.4.2}$$

Доказательство. 1. В силу условий теоремы множество $\mathrm{strco}_R A$ непусто. Докажем, что множество $\mathrm{extr}_R A \neq \varnothing$. Зафиксируем произвольную точку $p_0 \in \partial B_1(0)$ и рассмотрим соответствующую ей точку $x_{p0} \in \mathrm{strco}_R A$ такую, что $\langle p_0, x_{p0}\rangle = s(p_0, \mathrm{strco}_R A)$. В силу строгой выпуклости множества $\mathrm{strco}_R A$ такая точка существует и единственна.

Для удобства вычислений определим множество $\widetilde{A} = A + Rp_0 - -x_{p0}$ и докажем, что $\mathrm{extr}_R \widetilde{A} \neq \varnothing$. (Этого, очевидно, будет достаточно для доказательства непустоты множества $\mathrm{extr}_R A$.) Как отмечалось в п. 3) предложения 3.3.3, справедливо равенство $\mathrm{strco}_R \widetilde{A} = \mathrm{strco}_R A + Rp_0 - x_{p0}$, что в силу выбора точки x_{p0} влечет включение $Rp_0 \in \mathrm{strco}_R \widetilde{A}$ и равенство $s(p_0, \mathrm{strco}_R \widetilde{A}) = R$. Отсюда в силу теоремы 3.1.1 следует включение $\mathrm{strco}_R \widetilde{A} \subset B_R(0)$. Покажем, что множество $\widetilde{A} \cap \partial B_R(0)$ непусто. По теореме 3.4.1 существуют натуральное число $m \leqslant n+1$ и точки $x_k \in \widetilde{A}$, где $k \in \overline{1,m}$, такие, что $Rp_0 \in \mathrm{strco}_R\Bigl(\bigcup\limits_{k=1}^{m}\{x_k\}\Bigr)$. Именно среди этих точек $\{x_k\}$ найдутся точки, принадлежащие сфере $\partial B_R(0)$. Допустим противное, т. е. $x_k \notin \partial B_R(0)$ при $\forall\, k \in \overline{1,m}$. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(x_k) \subset B_R(0)$ $\forall\, k \in \overline{1,m}$, т. е. $\bigcup\limits_{k=1}^{m} \{x_k\} \subset B_{R-\varepsilon}(0)$. Отсюда, как отмечалось в п. 1) предложения 3.3.3, справедливо включение $\mathrm{strco}_R\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{m} \{x_k\}\Big) \subset B_{R-\varepsilon}(0)$, в частности, $Rp_0 \in B_{R-\varepsilon}(0)$, что противоречит выбору точки $p_0 \in \partial B_1(0)$.

Итак, множество $V_0 = \widetilde{A} \cap \partial B_R(0)$ непусто. Так как множество $\widetilde{A}$ является R-сильно крайним подмножеством самого себя (см. определение 3.4.1), то по лемме 3.4.2 непустое множество V_0 также будет R-сильно крайним подмножеством множества $\widetilde{A}$. Определим множество $W_0 = \mathrm{strco}_R\widetilde{A} \cap \partial B_R(0)$ и конусы $K_0 = \{\lambda x \mid x \in W_0,\ \ \lambda \geqslant 0\}$ и $T_0 = \{\lambda x \mid x \in V_0,\ \ \lambda \geqslant 0\}$. Очевидны включения $V_0 \subset W_0$ и $T_0 \subset K_0$. Покажем, что конус K_0 является выпуклым, т. е. для любых векторов x, $y \in K_0$ справедливо включение $x + y \in K_0$.

Отбрасывая тривиальные случаи, т. е. полагая, что $x \neq 0$, $y \neq 0$ и $x \neq \alpha y$ при любых $\alpha \in \mathbb{R}$, определим $a_0 = (R/\|x\|)x$ и $a_1 = (R/\|y\|)y$. Очевидно, что $a_0 \in W_0$ и $a_1 \in W_0$, $a_0 \neq a_1$, $a_0 \neq -a_1$.

Определим векторы $a_\lambda = \lambda a_1 + (1 - \lambda)a_0$ при $\lambda \in [0, 1]$. По предложению 3.3.2, выбирая в нем $b = 0$, получаем, что векторы $z_\lambda = R\,a_\lambda/\|a_\lambda\|$ для любого $\lambda \in [0, 1]$ принадлежат множеству W_0 (так как векторы z_λ лежат на дуге окружности радиуса R с центром в 0, соединяющей точки a_0 и a_1). Возьмем $\lambda_0 = \|y\|/(\|x\| + \|y\|)$, для которого получим, что $z_{\lambda_0} = R(x + y)/\|x + y\| \in W_0$, т. е. $x + y \in K_0$. Выпуклость конуса K_0 доказана.

Покажем, что конус K_0 также является острым замкнутым конусом. В самом деле, в противном случае существовал бы вектор $a \in W_0$ такой, что $-a \in W_0$, откуда $\mathrm{diam}\ \Big(\mathrm{strco}_R\widetilde{A}\Big) \geqslant 2\|a\| = 2R$, что противоречит условиям теоремы, из которых следовало, что $\mathrm{diam}\ (\mathrm{strco}_R\widetilde{A}) \leqslant 2r < 2R$.

Рассмотрим конус $N_0 = \{p \mid \langle p, x\rangle \leqslant 0\ \ \forall\, x \in T_0\}$, нормальный к конусу $T_0 \subset K_0$. Так как K_0 является острым выпуклым конусом, то конус N_0 является телесным конусом и удовлетворяет равенству $N_0 = \{p \mid s(p, V_0) \leqslant 0\}$. Так как по условию $p_0 \in K_0$ и K_0 — выпуклый острый конус, то по теореме 1.18.4 существует точка $x_0 \in \partial B_R(0) \cap T_0$, задающая крайний луч для конуса $\mathrm{co}\, T_0$ такой, что $\langle p_0, x_0\rangle > 0$. В свою очередь по теореме об отделимости (см., например, теорему 1.9.2) существует вектор $p_1 \in \partial B_1(0) \cap N_0$, отделяющий точку x_0 от конуса T_0, т. е. такой, что $\langle p_1, x_0\rangle = s(p_1, V_0) = 0$.

Определим множество $V_1 = V_0 \cap H(p_1)$, где, как и в лемме 3.4.3, для любого вектора p определяем подпространство $H(p)$ по формуле $H(p) = \{x \mid \langle x, p\rangle = 0\}$. По построению точка $x_0 \in V_1$, т. е. множество V_1 непусто, а по лемме 3.4.3 оно является R-сильно крайним подмножеством множества $\widetilde{A}$ и лежит в $(n-1)$-мерном подпространстве $H(p_1)$ из $\mathbb{R}^n$.

Повторяя рассуждения, при которых из начального множества V_0 мы получили множество V_1, из начального множества V_1 получим его R-сильно крайнее подмножество. Для этого определим замкнутый конус $T_1 = \{\lambda x \mid x \in V_1, \quad \lambda \geqslant 0\} \subset K_0$, а также конус $N_1 = \{p \in H(p_1) \mid s(p, V_1) \leqslant 0\}$, нормальный к конусу T_1. Так как точка $x_0 \in T_1$ и множество T_1 лежит в остром выпуклом конусе, принадлежащем подпространству $H(p_1)$, то по теореме 1.18.4 существует точка $x_1 \in \partial B_1(0) \cap T_1$, задающая крайний луч конуса $\operatorname{co} T_1$ в подпространстве $H(p_1)$ такой, что справедливо неравенство $\langle x_0, x_1\rangle > 0$. По теореме об отделимости существует вектор $p_2 \in \partial B_1(0) \cap \cap N_1$, отделяющий точку x_1 от конуса T_1 в подпространстве $H(p_1)$, т. е. такой, что $\langle x_1, p_2\rangle = s(p_2, V_1) = 0$. Таким образом, мы указали непустое R-сильно крайнее подмножество $V_2 = V_1 \cap H(p_2)$ множества $\widetilde{A}$, лежащее в $(n-2)$-мерном подпространстве. Продолжая аналогичные построения вложенных замкнутых непустых R-сильно крайних подмножеств множества $\widetilde{A}$ и отмечая, что на каждом шаге размерность этих множеств понижается, мы придем не более чем за n шагов к одноточечному R-сильно крайнему подмножеству $\{a\}$, чем и докажем существование R-сильно крайней точки в V_0, причем в силу построения будет справедливо неравенство $\langle a, p_0\rangle > 0$.

2. Докажем включение $A \subset \operatorname{strco}_R(\operatorname{extr}_R A)$. Допустим противное, что существует точка $z_0 \in A$ такая, что $z_0 \notin \operatorname{strco}_R(\operatorname{extr}_R A)$. Рассмотрим точку $x_0 \in \operatorname{strco}_R A$ — одну из максимально удаленных точек множества $\operatorname{strco}_R A$ от множества $\operatorname{strco}_R(\operatorname{extr}_R A)$. Обозначим через y_0 точку из $\operatorname{strco}_R(\operatorname{extr}_R A)$, которая является ортогональной проекцией на множество $\operatorname{strco}_R(\operatorname{extr}_R A)$ точки x_0. По допущению $x_0 \neq y_0$. Определим вектор $p_0 = (x_0 - y_0)/\|x_0 - y_0\|$. Легко проверить, что справедливы равенства $s(p_0, \operatorname{strco}_R A) = \langle p_0, x_0\rangle$ и $s(p_0, \operatorname{strco}_R(\operatorname{extr}_R A)) = \langle p_0, y_0\rangle$. Отсюда по теореме 3.1.1 получаем включение

$$\operatorname{strco}_R(\operatorname{extr}_R A) \subset B_R(y_0 - Rp_0). \tag{3.4.3}$$

Очевидно, что полусфера вида $S^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0 + Rp_0\| = R, \langle x - x_0 + Rp_0,\, p_0\rangle \geqslant 0\}$ не пересекается с шаром $B_R(y_0 - Rp_0)$. Учитывая включения (3.4.3), получаем, что полусфера S^+ не пересекается с множеством $\operatorname{strco}_R(\operatorname{extr}_R A)$. По теореме 3.1.1 справедливо включение $\operatorname{strco}_R A \subset B_R(x_0 - Rp_0)$, и по построению $x_0 \in S^+ \cap \operatorname{strco}_R A$. Отсюда следует, как было показано в п. 1 доказательства данной теоремы, что непустое множество $V_0 = A \cap B_R(x_0 - Rp_0)$ содержит R-сильно крайнюю точку множества A, принадлежащую полусфере S^+. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

Теорема 3.4.3 (Е.С. Половинкин [81]). *Всякое R-сильно выпуклое множество A из пространства $\mathbb{R}^n$, не являющееся шаром радиуса R, совпадает с R-сильно выпуклой оболочкой множества всех своих R-сильно крайних точек.*

Доказательство. По лемме 3.4.1 условие теоремы о том, что множество A не является шаром радиуса R, означает, что существуют число $r \in (0, R)$ и точка $a \in \mathbb{R}^n$ такие, что справедливо включение $A \subset B_r(a)$. По теореме 3.4.2 множество $\operatorname{extr}_R A$ непусто, и справедливо включение (3.4.2). В свою очередь, так как справедливо включение $A \supset \operatorname{extr}_R A$, то, как отмечено в п. 1) предложения 3.3.3, можно взять R-сильно выпуклые оболочки от обеих частей включения и получить обратное включение $A \supset \operatorname{strco}_R \operatorname{extr}_R A$. □

Лемма 3.4.4. *Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ является R-сильно выпуклым, причем $B_r(0) \overset{*}{-} A \neq \varnothing$, где $0 < r < R$. Выберем точку $z \in \operatorname{extr}_R A$ и компакт $B \subset A \backslash \{z\}$. Тогда $z \notin \operatorname{strco}_R B$.*

Доказательство. Допустим, что точка $z \in \operatorname{strco}_R B$. Существует нормальный вектор $p \in \partial B_1(0)$ такой, что $\langle p, z \rangle = s(p, A)$. Обозначим $a = z - pR$ и $C = \partial B_R(a) \cap A$ и для простоты далее в доказательстве будем полагать, что $a = 0$. Рассмотрим множество $\operatorname{cone} C$. Легко показать, что множество $\operatorname{cone} C$ является выпуклым острым конусом.

Покажем, что луч $L = \{\lambda z \mid \lambda \geqslant 0\}$ является крайним лучом конуса $\operatorname{cone} C$.

Допустим противное; тогда существуют точки $e_1, e_2 \in C \backslash \{z\}$ и числа $\alpha_i > 0$, $i \in \overline{1, 2}$ такие, что выполнено равенство $z = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$. Но это противоречит тому, что z является R-сильно крайней точкой множества A. Итак, луч L является крайним лучом конуса $\operatorname{cone} C$.

Так как по допущению $z \in \operatorname{strco}_R B$, то по теореме 3.4.1 найдется набор не более чем $n+1$ точек $\{x_i\}_{i=1}^m$, $m \leqslant n+1$, из множества B таких, что z содержится в R-сильно выпуклой оболочке этого набора точек. Из включения $B \subset A$ следует, что $\{x_i\}_{i=1}^m \subset A$.

Пусть $\{x_{i_k}\}_{k=1}^l$ суть все точки из набора $\{x_i\}_{i=1}^m$, которые принадлежат множеству $C = \partial B_R(0) \cap A$. Определим множество индексов $I = \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_k\}_{k=1}^l$. Тогда для каждого индекса $j \in I$ существует число $\varepsilon_j > 0$ такое, что $x_j + \varepsilon_j B_1(0) \subset B_R(0)$.

Рассмотрим множество

$$K = \operatorname{cone} \operatorname{co}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{l}\{x_{i_k}\}\right) \cup \{z\}\right).$$

Это многогранный выпуклый конус, причем из включения $\{z, x_{i_1}, \ldots \ldots, x_{i_l}\} \subset C$ следует, что $K \subset \operatorname{cone} C$, т. е. конус K также является острым конусом, а луч $L \subset K$ является крайним лучом конуса K.

По теореме 4.7 гл. 1 из [93] существует представление многогранного конуса K в виде конечной системы линейных однородных неравенств, т. е. существуют векторы $p_k \in \partial B_1(0)$, где $k \in \overline{1,r}$, такие, что

$$K = \bigcap_{k=1}^{r} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_k, x\rangle \leqslant 0\}.$$

Определим множество $\overline{K} = \{x \in K \mid \langle x, z\rangle \leqslant R^2\}$. Очевидно, из того, что L — крайний луч конуса K, следует, что точка z является крайней точкой множества $\overline{K}$.

Обозначим подмножество индексов

$$I(z) = \{k \in \overline{1,r} \mid \langle p_k, z\rangle = 0\}.$$

По теореме 4.2 гл. 1 из [93] множество $I(z)$ содержит подмножества I_0 мощности $n-1$, причем точки z и $\{p_i\}$, $i \in I_0$, линейно независимы.

Полагаем, что $I_0 = \{k_i \mid i = 1, \ldots, n-1\}$ и $\Pi_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_k, x\rangle = 0\}$, $k \in \overline{1,r}$. Тогда

$$\operatorname{lin} L = \bigcap_{i=1}^{n-1} \Pi_{k_i}, \tag{3.4.4}$$

Рассмотрим вектор

$$q = \left(\sum_{i=1}^{n-1} p_{k_i}\right) \Big/ \left(\left\|\sum_{i=1}^{n-1} p_{k_i}\right\|\right). \tag{3.4.5}$$

В силу определения вектора q по формуле (3.4.5) получаем, что $\langle q, x\rangle = 0$ для любой точки $x \in L$. С другой стороны, при $x \in K \backslash L$ в силу равенства (3.4.4) существует такой индекс $j \in \overline{1, n-1}$, что $\langle p_{k_j}, x\rangle < 0$, откуда следует, что $\langle q, x\rangle < 0$. Следовательно, гиперплоскость $\Pi_q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle q, x\rangle = 0\}$ такова, что справедливо равенство $K \cap \cap \Pi_q = L$.

Определим числа $\alpha = \min\limits_{k \in \overline{1,l}} \varrho(x_{i_k}, \Pi_q)$, $\beta = \min\limits_{j \in I} \varepsilon_j$ и $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$. Очевидно, что $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Из определения чисел ε_j и γ, очевидно, следует, что все точки $\{x_i\}_{i=1}^m$ принадлежат шару $B_R(-\gamma q)$. С другой стороны, $\|z + \gamma q\|^2 = \|z\|^2 + \gamma^2 > R^2$, т. е. точка z не принадлежит шару $B_R(-\gamma q)$. По определению сильно выпуклой оболочки это значит, что $z \notin \operatorname{strco}_R\Big\{\bigcup\limits_{i=1}^{m} x_i\Big\}$. Полученное противоречие показывает, что допущение о включении $z \in \operatorname{strco}_R B$ неверно. $\square$

Теорема 3.4.4 (М. В. Балашов, Е. С. Половинкин [11].) *Пусть числа r, R, $0<r<R$ и компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ таковы, что $B_r(0) \overset{*}{-} A \neq \neq \varnothing$. Тогда справедливо включение*

$$\operatorname{extr}_R A \supset \operatorname{extr}_R(\operatorname{strco}_R A).$$

Доказательство. Так как из включения $A \subset B_r(a)$ (при некоторой точке a из $\mathbb{R}^n$) следует, что $\operatorname{strco}_R A \subset B_r(a)$, и так как $r<R$, то по теореме 3.4.2 множества $\operatorname{extr}_R A$ и $\operatorname{extr}_R(\operatorname{strco}_R A)$ непусты.

Заметим, что если некоторая точка $z \in \operatorname{extr}_R(\operatorname{strco}_R A)$ такова, что $z \in A$, то в силу определения 3.4.2 эта точка z является R-сильно крайней точкой множества A. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что из включения $z \in \operatorname{extr}_R(\operatorname{strco}_R A)$ всегда следует включение $z \in A$.

Итак, пусть $z \in \operatorname{extr}_R(\operatorname{strco}_R A)$. Тогда по теореме 3.4.1 существует конечное множество точек $\{x_i\}$, $i \in \overline{1,m}$, из A, где $m \leqslant n+1$, таких, что $z \in \operatorname{strco}_R\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{m}\{x_i\}\Big)$.

Допустим, что $z \notin A$. Тогда $z = x_i$ при всех $i \in \overline{1,m}$. Так как компакт $\bigcup\limits_{i=1}^{m}\{x_i\}$ содержится во множестве $\operatorname{strco}_R A$ и не содержит точки z, то по лемме 3.4.4 получаем, что $z \notin \operatorname{strco}_R\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{m}\{x_i\}\Big)$, что неверно. Следовательно, $z \in A$. $\square$

§ 3.5. Сильно выпуклые функции

Продолжим исследование сильно выпуклых функций, начатое в § 1.19.

Напомним (см. определение 1.19.2), что функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, заданная на выпуклом множестве X из $\mathbb{R}^n$, называется *сильно выпуклой функцией*, если существует число $\varkappa > 0$ такое, что для любых точек $x, y \in X$ и числа $\lambda \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geqslant f(\lambda x + (1-\lambda) y) + \lambda(1-\lambda)\,\frac{\varkappa}{2}\,\|x-y\|^2. \quad (3.5.1)$$

Теорема 3.5.1. *Пусть A есть r-сильно выпуклое множество из пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, и пусть $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, \alpha \in \mathbb{R},\ (x,\alpha) \in A\}$. Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ задана по формуле $f(x) = \min\{\alpha \mid (x,\alpha) \in \in A\}$.*

Тогда функция f является сильно выпуклой функцией (3.5.1) *на X с константой сильной выпуклости $\varkappa = 1/r$.*

Доказательство. Как отмечено в следствии 3.3.3, для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ дуга любой окружности радиуса r длины не более πr с концами в точках $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ принадлежит множеству A, т. е. существует центр (a, α) окружности, где a лежит на прямой, проходящей через точки x_1 и x_2, а число α удовлетворяет неравенству $\alpha \geqslant \max\{f(x_1), f(x_2)\}$, такой, что

$$\|x_1 - a\|^2 + (f(x_1) - \alpha)^2 = r^2, \quad \|x_2 - a\|^2 + (f(x_2) - \alpha)^2 = r^2.$$

Отсюда для любой точки $x(\lambda) = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $\lambda \in [0, 1]$, получаем неравенство

$$f(x(\lambda)) \leqslant \alpha - \sqrt{r^2 - \|x(\lambda) - a\|^2}\,. \tag{3.5.2}$$

Обозначим $x_1 - x_2 = y$, тогда $x_1 = x(\lambda) + (1-\lambda)y$, $x_2 = x(\lambda) - \lambda y$. В силу этого

$$r^2 - \|x_1 - a\|^2 = \\ = \bigl(r^2 - \|x(\lambda) - a\|^2\bigr)\left(1 - \frac{2(1-\lambda)\langle x(\lambda) - a, y\rangle + (1-\lambda)^2\|y^2\|}{r^2 - \|x(\lambda) - a\|^2}\right).$$

Отсюда в силу неравенства $\sqrt{1+\beta} \leqslant 1 + 0{,}5\beta \quad \forall\, \beta \geqslant -1$ получаем неравенство

$$\sqrt{r^2 - \|x_1 - a\|^2} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{r^2 - \|x(\lambda) - a\|^2}\left(1 - \frac{(1-\lambda)\langle x(\lambda) - a, y\rangle}{r^2 - \|x(\lambda) - a\|^2} - \frac{(1-\lambda)^2\|y\|^2}{2(r^2 - \|x(\lambda) - a\|^2)}\right).$$

Аналогично получаем неравенство

$$\sqrt{r^2 - \|x_2 - a\|^2} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{r^2 - \|x(\lambda) - a\|^2}\left(1 + \frac{\lambda\langle x(\lambda) - a, y\rangle}{r^2 - \|x(\lambda) - a\|^2} - \frac{\lambda^2\|y\|^2}{2(r^2 - \|x(\lambda) - a\|^2)}\right).$$

Последовательно применяя неравенство (3.5.2) и последние два неравенства, получаем

$$f(x(\lambda)) - \lambda f(x_1) - (1-\lambda)f(x_2) \leqslant -\sqrt{r^2 - \|x(\lambda) - a\|^2} + \\ + \lambda\sqrt{r^2 - \|x_1 - a\|^2} + (1-\lambda)\sqrt{r^2 - \|x_2 - a\|^2} \leqslant \\ \leqslant -\frac{\lambda(1-\lambda)\|y\|^2}{2\sqrt{r^2 - \|x(\lambda) - a\|^2}} \leqslant -\frac{\lambda(1-\lambda)\|x_1 - x_2\|^2}{2r}.$$

Теорема доказана. □

§ 3.6. О новых липшицевых селекторах многозначных отображений

Как показано в § 2.1, важный класс селекторов выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию Липшица, определяется центром Штейнера $s(A)$ (см. определение 2.1.2). В данном параграфе покажем, как можно получить другие удовлетворяющие условию Липшица селекторы компактов из $\mathbb{R}^n$, используя центр Штейнера и R-сильно выпуклую оболочку данного компакта.

Напомним, что функция f, действующая из множества выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$, называется *селектором выпуклых компактов*, если для любого выпуклого компакта A справедливо включение $f(A) \in A$.

Напомним также (см. § 2.1), что селектор, задаваемый центром Штейнера $s(\,\cdot\,)$, удовлетворяет условию Липшица, т. е. для любых выпуклых компактов A_1 и A_2 выполнено неравенство

$$\|s(A_1) - s(A_2)\| \leqslant L(n)h(A_1, A_2), \quad \text{где} \quad L(n) = \frac{2\,\Gamma(n/2+1)}{\sqrt{\pi}\;\Gamma((n+1)/2)}, \tag{3.6.1}$$

а константа Липшица в (3.6.1), имеющая порядок $\sqrt{n}$, в общем случае является неулучшаемой.

Определение 3.6.1. Скажем, что Ω_r есть *семейство выпуклых компактов из* $\mathbb{R}^n$, *равномерно ограниченных константой* $r > 0$, если для любого компакта $A \in \Omega_r$ найдется точка $x \in \mathbb{R}^n$ такая, что $A \subset B_r(x)$.

Приведем некоторые обозначения.

Дугу окружности радиуса R с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$ длины меньше πR и концами в точках y_1, y_2 будем обозначать $D_R(a)[y_1, y_2]$.

Зафиксируем числа r, R, $0 < r < R$, и некоторое R-сильно выпуклое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $B_r(0) \overset{*}{-} A \neq \varnothing$, а также произвольный вектор p из множества $\partial B_1(0)$.

Обозначим

$$H_p^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x\rangle = s\,(p,\, \mathrm{co}\,(\mathrm{extr}_R A))\}, \tag{3.6.2}$$

$$H_p^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x\rangle \leqslant s\,(p,\, \mathrm{co}\,(\mathrm{extr}_R A))\}, \quad H_p^+ = \overline{\mathbb{R}^n \backslash H_p^-}\,, \tag{3.6.3}$$

$$A_p^0 = A \cap H_p^0, \quad A_p^+ = A \cap H_p^+, \quad A_p^- = A \cap H_p^-. \tag{3.6.4}$$

По построению множество A_p^0 непусто. Без ограничения общности (совершив, если надо, параллельный перенос множества A на некоторый вектор) будем считать, что $0 \in A_p^0$, т. е. H_p^0 есть подпространство в $\mathbb{R}^n$.

Определим отображение $g_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, обеспечивающее нахождение точки, симметричной данной относительно подпространства H_p^0, т. е.

$$g_p(x) = x - 2p\,\langle p, x\rangle \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.6.5}$$

Лемма 3.6.1. *В приведенных выше предположениях и обозначениях* (3.6.2)–(3.6.4) *справедливо равенство*

$$H_p^+ \cap \operatorname{strco}_R A_p^0 = A_p^+. \tag{3.6.6}$$

Доказательство. Из включения $A_p^0 \subset A$ сразу следует включение $H_p^+ \cap \operatorname{strco}_R A_p^0 \subset H_p^+ \cap A = A_p^+$. Докажем обратное включение.

Рассмотрим произвольную точку $z \in \partial A_p^+ \backslash H_p^0$. Для нее найдется нормальный вектор $\overline{p} \in \partial B_1(0)$ такой, что выполняется равенство $\langle \overline{p}, z\rangle = s(\overline{p}, A)$.

Определим точку $a = z - \overline{p}R$ и множество $C = A \cap \partial B_R(a)$. Отметим, что это множество непусто ($z \in C$) и в силу леммы 3.4.2 множество C является R-сильно крайним подмножеством множества A. Это значит, что любая дуга окружности радиуса R длины не более πR, проходящая через точку $z \in C$, с концами во множестве A, отличными от точки z, лежит на поверхности сферы $\partial B_R(a)$. С другой стороны, так как $z \in A_p^+$, а $\operatorname{extr}_R A \subset A_p^-$, т. е. точка z не является R-сильно крайней точкой множества A, то такая дуга существует. Выберем дугу $D_R(a)[y_1, y_2] \subset C$ такую, что $z \in D_R(a)[y_1, y_2]$ и $y_1 \neq z$, $y_2 \neq z$, имеющую максимальную длину, т. е. эта дуга не может быть продолжена во множестве C.

Определим множество

$$K_C = \{a + \lambda(x - a) \,|\, x \in C,\ \lambda \geqslant 0\} = a + \operatorname{cone}(C - a).$$

Очевидно, что множество K_C является выпуклым конусом с вершиной в точке a и $C \subset K_C$. Так как для точки z дуга $D_R(a)[y_1, y_2]$ выбрана максимально допустимой длины, то ее концы y_1, $y_2 \in \partial K_C$. Для каждой из концевых точек проведем исследования с целью нахождения R-сильно крайних точек. Сделаем это на примере точки y_1.

Допустим, что точка y_1 не является R-сильно крайней точкой множества A, так как в противном случае цель достигнута и переходим к рассмотрению другого конца дуги. По теореме об отделимости существует вектор $p_1 \in \partial B_1(0)$, отделяющий точку y_1 от множества K_C, т. е.

$$\langle p_1, y_1\rangle = \langle p_1, a\rangle \geqslant \langle p_1, x\rangle \quad \forall\, x \in K_C.$$

Определим гиперплоскость $\Pi_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_1, x - a\rangle = 0\}$ и множество $C_1 = C \cap \Pi_1$. Покажем, что множество C_1 также является R-сильно крайним подмножеством множества A.

Допустим противное, т. е. пусть существуют точка $x \in C_1$ и точки $e_1, e_2 \in C$ такие, что точка e_1 не принадлежит множеству C_1, $x \neq e_2$ и $x \in D_R(a)[e_1, e_2]$. Тогда из последнего включения следует, что существуют числа $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ такие, что $x = a + \lambda_1(e_1 - a) + \lambda_2(e_2 - a)$. Отсюда и из неравенств $\langle p_1, e_1 - a\rangle < 0$, $\langle p_1, e_2 - a\rangle \leqslant 0$ получаем

$$\langle p_1, x\rangle = \langle p_1, a\rangle + \lambda_1\langle p_1, e_1 - a\rangle + \lambda_2\langle p_1, e_2 - a\rangle < \langle p_1, a\rangle, \tag{3.6.7}$$

т. е. $x \notin C_1$. Получили противоречие. Итак, множество C_1 также является R-сильно крайним подмножеством множества A, причем размерность множества C_1, как минимум, на единицу меньше размерности множества C.

В итоге в случае, когда точка y_1 не является R-сильно крайней точкой множества A, существует другая дуга $D_R(a)[y_1^1, y_2^1]$, принадлежащая множеству C_1, максимальной длины и такая, что $y_1 \in D_R(a)[y_1^1, y_2^1]$ и $y_i^1 \neq y_1$, $i \in \overline{1,2}$.

Опять исследуем оба конца новой дуги на примере одного из них, а именно y_1^1. Если точка y_1^1 не является R-сильно крайней точкой, то для этой точки y_1^1 решаем задачу построения следующей дуги максимальной длины, аналогичную задаче для y_1, но уже в аффинном многообразии Π_2, которое имеет размерность $n-2$.

Таким образом, мы получаем каскад дуг, лежащих на сфере $\partial B_R(a)$, который заканчивается дугами, один или оба конца которых являются R-сильно крайними точками множества A.

В силу включения $\mathrm{extr}_R A \subset A_p^-$ точки, соответствующие концам этих дуг, лежат в A_p^-, а точка $z \in A_p^+ \backslash H_p^0$. Поэтому существуют точки $\{x_i\}_{i=1}^m$, в которых дуги каскада пересекают множество A_p^0. Как показано в следствии 3.3.3, все дуги окружностей радиуса R длины не более πR с концами в точках $\{x_i\}_{i=1}^m$ целиком лежат в $\mathrm{strco}_R A_p^0$; кроме того, любая дуга окружности радиуса R длины не более πR с концами в $\mathrm{strco}_R A_p^0$ целиком лежит в $\mathrm{strco}_R A_p^0$. Отсюда следует, что $z \in \mathrm{strco}_R A_p^0$. Итак, $z \in H_p^+ \cap \mathrm{strco}_R A_p^0$.

Учитывая к тому же очевидное равенство $\mathrm{strco}_R A_p^0 \cap H_p^0 = A_p^+ \cap H_p^0$, мы доказали, что граничные точки множеств $H_p^+ \cap \mathrm{strco}_R A_p^0$ и A_p^+ совпадают, а так как эти множества выпуклы, то сами они тоже совпадают. Итак, равенство (3.6.6) доказано. $\square$

Лемма 3.6.2. *Для отображения* (3.6.5) *справедливо включение*

$$g_p(A_p^+) \subset A_p^-. \tag{3.6.8}$$

Доказательство. Для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ из включения $A_p^0 \subset \subset B_R(x)$ и определения функции g_p по формуле (3.6.5), очевидно, следует включение $A_p^0 \subset B_R\left(g_p(x)\right)$. Поэтому $g_p(\mathrm{strco}_R A_p^0) = \mathrm{strco}_R A_p^0$. Кроме того, $g_p(H_p^+) = H_p^-$. В силу включения $\mathrm{strco}_R A_p^0 \subset A$ по лемме 3.6.1 получаем

$$g_p(A_p^+) = (\mathrm{strco}_R A_p^0) \cap H_p^- \subset A \cap H_p^- = A_p^-. \;\square$$

Теорема 3.6.1 (М.В. Балашов, Е.С. Половинкин [11]). *Пусть числа r, R, $0<r<R$, и R-сильно выпуклое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ такие, что $B_r(0) \overset{*}{-} A \neq \varnothing$. Тогда центр Штейнера $s(A)$ удовлетворяет включению*

$$s(A) \in \overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{extr}_R A)\,. \tag{3.6.9}$$

Доказательство. Прежде всего для произвольного фиксированного вектора $p \in \partial B_1(0)$ в обозначениях (3.6.2)–(3.6.5) докажем включение

$$s(A) \in H_p^-\,. \tag{3.6.10}$$

Обозначим

$$B_{1,p}^+(0) = \{q \in B_1(0) \,|\, 0 \leqslant \langle p, q\rangle\}, \quad B_{1,p}^-(0) = \{q \in B_1(0) \,|\, \langle p, q\rangle \leqslant 0\}.$$

Покажем, что справедливо неравенство

$$s(q, A) \leqslant s(g_p(q), A) \quad \forall\, q \in \partial B_{1,p}^+(0). \tag{3.6.11}$$

Зафиксируем вектор $q \in B_{1,p}^+(0)$, причем $\|q\| = 1$. Рассмотрим опорную точку $x_q \in A(q)$, т. е. такую точку из A, для которой справедливо равенство $\langle q, x_q\rangle = s(q, A)$. Разложим точки q и x_q в прямые суммы точек вида

$$q = q^\perp + \lambda_q p, \quad x_q = x_q^\perp + \mu_{xq} p,$$

где $\langle p, q^\perp\rangle = 0$, и $\langle p, x_q^\perp\rangle = 0$, а λ_q, $\mu_{xq} \in \mathbb{R}$.

Так как $q \in B_{1,p}^+(0)$, а $\langle p, q\rangle = \lambda_q$, то $\lambda_q \geqslant 0$. В силу определения симметрии (3.6.5) получаем $g_p(q) = q^\perp - \lambda_q p$ и $g_p(x_q) = x_q^\perp - \mu_{xq} p$. Для точки x_q возможна одна из двух ситуаций: либо $x_q \in \partial A_p^+$, либо $x_q \in \partial A_p^-$.

Допустим, что $x_q \in \partial A_p^+$. Тогда по лемме 3.6.2 $g_p(x_q) \in A_p^-$ и

$$s(q, A) = \langle q, x_q\rangle = \langle q^\perp + \lambda_q p, x^\perp + \mu_{xq} p\rangle =$$
$$= \langle q^\perp, x^\perp\rangle + \lambda_q \mu_{xq} \langle q^\perp - \lambda_q p, x^\perp - \mu_{xq} p\rangle \leqslant s(g_p(q), A).$$

Допустим, что $x_q \in \partial A_p^-$. Это означает, что $\mu_{xq} \leqslant 0$. Поэтому

$$s(q, A) = \langle q, x_q\rangle = \langle q^\perp + \lambda_q p, x^\perp + \mu_{xq} p\rangle =$$
$$= \langle q^\perp, x^\perp\rangle + \lambda_q \mu_{xq} \leqslant \langle q^\perp - \lambda_q p, x^\perp + \mu_{xq} p\rangle \leqslant s(g_p(q), A).$$

Итак, неравенство (3.6.11) доказано. Из него и из (2.1.6) получаем

$$\langle p, s(A)\rangle = \frac{1}{v_1}\int\limits_{\partial B_1(0)} s(q,A)\langle q,p\rangle\,dq =$$
$$= \frac{1}{v_1}\int\limits_{\partial B^+_{1,p}(0)} s(q,A)\langle q,p\rangle\,dq - \frac{1}{v_1}\int\limits_{\partial B^+_{1,p}(0)} s(g_p(q),A)\langle q,p\rangle\,dq \leqslant 0,$$

т. е. справедливо включение (3.6.10). Так как включение (3.6.10) доказано для произвольного вектора p из $\partial B_1(0)$, то

$$s(A) \in \bigcap_{|p|=1} H_p^- = \overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{extr}_R A)\,,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 3.6.2 (М.В. Балашов, Е.С. Половинкин [11]). *Пусть числа r, R, $0<r<R$, и выпуклый компакт $A\subset\mathbb{R}^n$ таковы, что $B_r(0) \overset{*}{-} A \neq \varnothing$. Тогда*

$$s(\mathrm{strco}_R A) \in A. \tag{3.6.12}$$

Доказательство. Применяя теорему 3.6.1, а затем теорему 3.4.4, получаем включения

$$s(\mathrm{strco}_R A) \in \overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{extr}_R(\mathrm{strco}_R A)) \subset \overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{extr}_R A) \subset A.\ \square$$

Определение 3.6.2. Пусть числа $r>0$, $R>0$ таковы, что $r<R$. Для всякого компакта $A\in\Omega_r$ определим *точку* $p_R(A)\in\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$p_R(A) = -\frac{1}{v_1}\int\limits_{\partial B_1(0)} \mathrm{co}\,\left(R\|q\| - s(q,A)\right) q\,dq, \tag{3.6.13}$$

где через v_1 обозначен объем единичного шара $B_1(0)$ из $\mathbb{R}^n$ (рис. 18).

Теорема 3.6.3 (М.В. Балашов, Е.С. Половинкин [11]). *Пусть зафиксированы числа r, R, такие, что $0<r<R$, и пусть Ω_r есть семейство выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$ равномерно ограниченных константой r.*

Тогда справедливо включение

$$p_R(A)\in A \quad \forall\, A\in\Omega_r, \tag{3.6.14}$$

и функция $A\to p_R(A)$ удовлетворяет условию Липшица на семействе множеств Ω_r, т. е. для любых компактов A_1, $A_2\in\Omega_r$ выполнено неравенство

$$\|p_R(A_1) - p_R(A_2)\| \leqslant L(n,R,r)\,h(A_1,A_2), \tag{3.6.15}$$

где $L(n,R,r) = L(n)L(R,r)$, *причем константа* $L(n)$ *вычислена по формуле* (3.6.1), *а константа* $L(R,r)$ *определена по формуле* (3.3.23).

Доказательство. Из формулы (3.6.13) для точки $p_R(A)$, формулы (3.3.2) для опорной функции сильно выпуклой оболочки и в силу того, что справедливо равенство

$$\int\limits_{\partial B_1(0)} \|q\| q\, dq = 0,$$

следует равенство $p_R(A) = s(\mathrm{strco}_R A)$. Отсюда по теореме 3.6.2 получаем включение (3.6.14).

Поскольку операция взятия R-сильно выпуклой оболочки удовлетворяет условию Липшица как функция множеств из семейства Ω_r

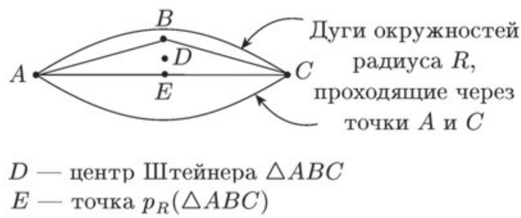


Рис. 18

в метрике Хаусдорфа с константой $L(R,r)$ вида (3.3.23), а центр Штейнера является селектором, удовлетворяющим условию Липшица с константой $L(n)$, то точка $p_R(A)$ как суперпозиция указанных выше отображений является селектором выпуклых равномерно ограниченных компактов Ω_r, удовлетворяющим условию Липшица в метрике Хаусдорфа. $\square$

Глава 4

ПОРОЖДАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА. M-СИЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

§ 4.1. Определения. Опорный принцип

Постараемся обобщить результаты гл. 3 на другие классы множеств, представимых в виде пересечения сдвигов некоторого выбранного множества, не являющегося в общем случае шаром из $\mathbb{R}^n$. Как станет ясно впоследствии, для этого необходимо наложить на выбранное множество дополнительное условие, справедливое, как показано в теореме 3.1.2, для шаров из $\mathbb{R}^n$, но, вообще говоря, не справедливое для многих выпуклых множеств из $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$. В результате мы приходим к следующему определению.

Определение 4.1.1. Выпуклое замкнутое множество M в банаховом пространстве E назовем *порождающим множеством*, если для любого множества X такого, что множество

$$A = \bigcap_{x \in X} (M + x) \tag{4.1.1}$$

непусто, найдется выпуклое замкнутое множество $B \subset E$ такое, что

$$\overline{A + B} = M. \tag{4.1.2}$$

Определение 4.1.2. Для выбранного порождающего множества M всякое непустое множество вида (4.1.1) будем называть *M-сильно выпуклым множеством*.

Замечание 4.1.1. При определенных условиях на M замыкание в формуле (4.1.2) можно убрать. Именно такого типа условия фигурируют во многих полученных далее результатах. При этом для простоты изложения мы не всегда приводим соответствующие условия в максимальной общности. Главным образом мы пользуемся теоремой 1.13.2, хотя в конкретных случаях возможны ослабления условий этой теоремы.

Поясним это замечание. Для множеств A, B, M из определения 4.1.1 получаем равенства для барьерных конусов этих множеств

$$b(M) = b(\overline{A+B}) = b(A) \cap b(B),$$

т. е. $b(A) \supset b(M)$, $b(B) \supset b(M)$. Если пространство E рефлексивно, а $\operatorname{int} b(M) \neq \varnothing$, то $b(A) - b(B) \supset b(M) - b(M) = E^*$, и по теореме 1.13.2 множество $A+B$ замкнуто.

Если $\operatorname{int} b(M) = \varnothing$ (но $b(M) \neq \varnothing$), то введем в пространстве E подпространство $E_1 = b(M)^- \cap (-b(M)^-)$. Если размерность подпространства E_1 или его коразмерность конечны или если исходное пространство E является гильбертовым пространством, то существует подпространство E_2 такое, что справедливо разложение E в прямую сумму $E = E_1 \oplus E_2$. Тогда можно указать замкнутое выпуклое множество $M_0 \subset E_2$ такое, что $M = M_0 \oplus E_1$, причем $\operatorname{int} b(M_0) \neq \varnothing$. При этом всякое непустое множество $A = \bigcap\limits_{x \in X} (M + x)$ можно представить в виде $A = \pi A + E_1$, где π — ортогональный проектор пространства E на подпространство E_2, т. е. $\pi A = \bigcap\limits_{x \in \pi X} (M_0 + x)$. Следовательно, если имеет место равенство $\overline{A+B} = M$, то оно эквивалентно равенству $\overline{(\pi A + \pi B)} \oplus E_1 = M_0 \oplus E_1$, т. е. $\overline{(\pi A + \pi B)} = M_0$. В силу теоремы 1.13.2 множество $\pi A + \pi B$ замкнуто, поэтому $A + \pi B$ тоже замкнуто, и $A + \pi B = M$.

Замечание 4.1.2. В дальнейшем, говоря, что множество A является M-сильно выпуклым, мы всегда будем предполагать, что имеется соответствующее множество M, которое является порождающим множеством, т. е. удовлетворяет определению 4.1.1.

Замечание 4.1.3. Отметим, что M-сильно выпуклое множество A можно записать через разность Минковского в виде $A = M \overset{*}{-} Y$, где Y связано с множеством X из определения 4.1.2 по формуле $Y = -X$. Более того, из равенства $A + B = M$ следует, что $B = M \overset{*}{-} A$, откуда в итоге получаем равенство

$$(M \overset{*}{-} Y) + (M \overset{*}{-} (M \overset{*}{-} Y)) = M. \tag{4.1.3}$$

Для исследования порождающих множеств полезно следующее простое утверждение.

Теорема 4.1.1. *Пусть M — выпуклое замкнутое множество из рефлексивного банахова пространства E, причем $\operatorname{int} b(M) \neq \varnothing$. Множество M будет порождающим тогда и только тогда, когда для любого непустого множества A вида $A = \bigcap\limits_{x \in X} (M + x)$ и для лю-*

бой точки $m \in M$ существует точка $b \in E$ такая, что справедливо включение $m \in A + b \subset M$.

Доказательство. Необходимость. Пусть M — порождающее множество. Тогда для всякого множества A из условия теоремы найдется выпуклое замкнутое множество B такое, что $A + B = M$. Поэтому для любой точки $m \in M$ найдутся точки $a \in A$ и $b \in B$ такие, что $m = a + b$, т. е. $m \in A + b$. Из равенства $A + B = M$ следует, что $A + b \subset M$, так как $b \in B$.

Достаточность. Пусть выполнено утверждение теоремы. Допустим, что множество M не является порождающим, т. е. $A + (M \overset{*}{-} A) \subset M$, причем включение строгое. Поэтому найдется точка $m_0 \in M$ такая, что $m_0 \notin A + (M \overset{*}{-} A)$. Но по утверждению существует точка $b_0 \in E$ такая, что $m_0 \in A + b_0 \subset M$, откуда $b_0 \in M \overset{*}{-} A$, т. е. $m_0 \in A + (M \overset{*}{-} A)$. Противоречие показывает, что предположение было неверно. $\square$

Напомним, что через $A(p)$ мы обозначаем опорное ко множеству A множество вида

$$A(p) = \{x \in A \mid \langle p, x\rangle = s(p, A)\}.$$

Теорема 4.1.2. *Пусть M — порождающее множество из рефлексивного банахова пространства E, причем $\operatorname{int} b(M) \neq \varnothing$.*

Тогда для любого M-сильно выпуклого множества A, для любого $p \in \operatorname{int} b(M)$, $\|p\|_* = 1$, и любой точки $x_p^A \in A(p)$ существует точка $x_p^M \in M(p)$ такая, что справедливо равенство

$$A = \bigcap_{\|p\|_*=1,\ p\in \operatorname{int} b(M)} \left(M + x_p^A - x_p^M\right). \tag{4.1.4}$$

Обратно, если выпуклое замкнутое множество M таково, что $\operatorname{int} b(M) \neq \varnothing$, и любое множество A вида (4.1.1) *представимо по формуле* (4.1.4), *то множество M порождающее.*

Доказательство. Для любого множества A вида (4.1.1) в силу леммы 1.13.4 следует равенство $\operatorname{int} b(A) = \operatorname{int} b(M)$.

1. Пусть M — порождающее множество, а множество A имеет вид (4.1.1). По определению 4.1.1 существует выпуклое замкнутое множество B такое, что $\overline{A + B} = M$. Отсюда, очевидно, следует, что $b(B) \supset b(M)$, а это в силу теоремы 1.13.2 влечет равенство $A + B = M$. Зафиксируем произвольный вектор $p \in \operatorname{int} b(M)$, $\|p\|_* = 1$, и произвольную точку $x_p^A \in A(p)$. Существует точка $x_p^M \in M(p)$ такая, что справедливо включение $x_p^M - x_p^A \in B(p)$. Поэтому обозначим

$$x_p^B = x_p^M - x_p^A \in B(p). \tag{4.1.5}$$

Из равенства $A+B=M$ и включения $x_p^B \in B$ следует включение $A+x_p^B \subset M$, отсюда в силу (4.1.5) получаем $A \subset M + x_p^A - x_p^M$. Так как последнее включение верно для любых векторов $p \in \operatorname{int} b(A)$, $\|p\|_* = 1$, то получаем включение

$$A \subset \bigcap_{\|p\|_*=1,\ p\in \operatorname{int} b(M)} \left(M + x_p^A - x_p^M\right).$$

Обозначим $H_p^+ = \{x \in E \mid \langle p, x\rangle \leqslant s(p, A)\}$. Ясно, что справедливо включение $M + x_p^A - x_p^M \subset H_p^+$ для каждого вектора $p \in \operatorname{int} b(M)$. В силу выпуклости и замкнутости множества A получаем по предложению 1.13.1 включение

$$\bigcap_{\|p\|_*=1,\ p\in \operatorname{int} b(M)} \left(M + x_p^A - x_p^M\right) \subset \bigcap_{\|p\|_*=1,\ p\in \operatorname{int} b(M)} H_p^+ = A.$$

Таким образом, равенство (4.1.4) доказано.

2. Пусть для любого множества A вида (4.1.1) выполнена формула (4.1.4). Покажем, что множество M порождающее.

Зафиксируем произвольный вектор $q \in \partial B_1^*(0) \cap \operatorname{int} b(M)$. Тогда

$$s(q, A) \leqslant \inf_{\|p\|_*=1,\ p\in \operatorname{int} b(M)} s(q,\ M + x_p^A - x_p^M) \leqslant$$
$$\leqslant s(q,\ M + x_q^A - x_q^M) = s(q, A),$$

откуда следует, что все неравенства здесь надо заменить на равенства, т. е.

$$s(q, A) = \inf_{\|p\|_*=1,\ p\in \operatorname{int} b(M)} s(q,\ M + x_p^A - x_p^M) =$$
$$= s(q, M) - \sup_{\|p\|_*=1,\ p\in \operatorname{int} b(M)} \langle q,\ x_p^M - x_p^A\rangle. \quad (4.1.6)$$

Определим множество B по формуле

$$B = \overline{\operatorname{co}} \bigcup_{\|p\|_*=1,\ p\in \operatorname{int} b(M)} (x_p^M - x_p^A).$$

Тогда в силу равенства (4.1.6) для любого вектора $q \in \partial B_1^*(0) \cap \cap \operatorname{int} b(M)$ справедливо равенство $s(q, A) + s(q, B) = s(q, M)$. Отсюда в силу предложения 1.13.1 и теоремы 1.13.2 следует равенство $A + B = M$. $\square$

Теорема 4.1.3 (опорный принцип). *Пусть M есть выпуклое замкнутое множество в рефлексивном банаховом пространстве E, причем $\operatorname{int} b(M) \neq \varnothing$. Множество M является порождающим тогда и только тогда, когда для любого непустого множества A*

вида (4.1.1), *для любого вектора* $p \in \partial B_1^*(0) \cap \operatorname{int} b(M)$ *и любой точки* $x_p^A \in A(p)$ *существует точка* $x_p^M \in M(p)$ *такая, что справедливо включение*
$$A \subset M + x_p^A - x_p^M. \tag{4.1.7}$$

Доказательство, очевидно, следует из теоремы 4.1.2 и равенства (4.1.4).

Замечание 4.1.4. Из доказательства теоремы 4.1.2, в частности, получаем следующее. Пусть дано непустое замкнутое выпуклое множество M из рефлексивного банахова пространства такое, что $\operatorname{int} b(M) \neq \varnothing$, и пусть это множество не является порождающим. Однако допустим, что для некоторого непустого множество A вида (4.1.1) выполнены условия теоремы 4.1.3 (т. е. для любых вектора $p \in \partial B_1^*(0) \cap \operatorname{int} b(M)$ и любой точки $x_p^A \in A(p)$ существует точка $x_p^M \in M(p)$ такая, что выполнено включение (4.1.7)). Тогда существует выпуклое замкнутое множество B такое, что справедливо равенство $A + B = M$.

§ 4.2. Операции с порождающими множествами

Непосредственная проверка того, что некоторое множество удовлетворяет определению 4.1.1 порождающего множества, достаточно трудна. Поэтому приступим к задаче нахождения различных критериев для порождающих множеств, в частности, получаемых в результате операций с порождающими множествами, сохраняющих свойство быть порождающим.

Отметим, что намеченная задача нетривиальна: легко указать примеры весьма простых множеств, не являющихся порождающими даже в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$.

Пример 4.2.1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ правильную пирамиду с квадратным основанием вида
$$M = \operatorname{co}\{(0,0,1),\ (1,1,0),\ (-1,1,0),\ (1,-1,0),\ (-1,-1,0)\}.$$
Пусть $A = (M + a) \cap (M - a)$, где точка $a = (1/2, 0, 0)$. Легко проверить, что
$$A = \operatorname{co}\Big\{\Big(\frac{1}{2},1,0\Big),\ \Big(\frac{1}{2},-1,0\Big),\ \Big(-\frac{1}{2},1,0\Big),\ \Big(-\frac{1}{2},-1,0\Big),\\ \Big(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big),\ \Big(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)\Big\}.$$

Выберем вектор $p = (0,0,1)$. Тогда опорное множество $A(p)$ есть отрезок вида $[(0,-1/2,1/2),\ (0,1/2,1/2)]$, а опорное множество $M(p)$ состоит из одной точки, т. е. $M(p) = x_p^M = (0,0,1)$. Выберем точку

$x_p^A = (0, 0, 1/2) \in A(p)$. Легко убедиться в том, что отрезок $A(p) - x_p^A$ не содержится во множестве $M - x_p^M$, т. е. не выполнен опорный принцип (теорема 4.1.3) для данного множества A, следовательно, множество M не является порождающим. $\square$

Пример 4.2.2. Через $D_r(a)[b, c]$, как и прежде, будем обозначать дугу окружности радиуса r длины не более πr с концами в точках b и c и центром в точке a. Определим множество M, являющееся выпуклой оболочкой множества, образованного вращением вокруг оси абсцисс дуги $D_5((3, -4, 0))[(0, 0, 0),\ (6, 0, 0)]$. Пусть $A = (M + a) \cap \cap (M - a)$, где $a = (0, 1/2, 0)$. Легко видеть, что $A = C_1 \cup C_2$, где

$$C_1 = M \cap \left\{(x, y, z) \,\middle|\, y \geqslant \frac{1}{2}\right\} - \left(0, \frac{1}{2}, 0\right),$$

а C_2 симметрично C_1 относительно плоскости xOz. Кривая, лежащая в плоскости xOz и ограничивающая множество, полученное пересечением множества A и плоскости xOz, является гладкой, так как ее сдвиг на вектор $(0, 1/2, 0)$ совпадает с гладкой кривой $\partial M \cap \cap \{(x, y, z) \,|\, y = 1/2\}$. Выберем вектор $p = (-1, 0, 0)$. Тогда опорная точка $x_p^A = (3 - \sqrt{19}/2,\ 0, 0)$. Касательный конус ко множеству A в точке x_p^A содержит полуплоскость $\{(x, y, z) \,|\, y = 0,\ x \geqslant 0\}$, так как множество A содержит двумерное подмножество $A \cap \{(x, y, z) \,|\, y = 0\}$, ограниченное гладкой кривой. Касательный конус ко множеству M в точке $x_p^M = (0, 0, 0)$ состоит из таких векторов $q \in \mathbb{R}^3$, для которых угол между q и вектором $(1, 0, 0)$ не больше, чем угол между прямой $y = 0$, $z = 0$ и дугой $D_5((3, -4, 0))[(0, 0, 0),\ (6, 0, 0)]$ в точке $(0, 0, 0)$, т. е. $\arcsin(3/5)$. Итак, касательный конус к M в точке x_p^M является острым. Отсюда следует, что включение $A \subset M + x_p^A - x_p^M$ не выполнено, и по теореме 4.1.3 данное множество M не является порождающим. $\square$

Приведем простейший позитивный пример порождающего множества.

Пример 4.2.3. Пусть M есть симплекс полной размерности в $\mathbb{R}^n$, т. е. выпуклая оболочка $n + 1$ аффинно независимых точек. Легко убедиться в том, что M является порождающим множеством, так как всякое множество A, полученное как пересечение сдвигов симплекса M, есть либо симплекс полной размерности с $(n - 1)$-мерными гранями, параллельными $(n - 1)$-мерным граням симплекса M (а, значит, подобный симплексу M), либо точка. В обоих случаях легко указать другой симплекс B, подобный симплексу M, такой, что имеет место равенство $A + B = M$. $\square$

Лемма 4.2.1. *Пусть M есть порождающее множество в E. Тогда всякое множество вида $\lambda M + a$, где $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $a \in E$, будет также порождающим множеством.*

Доказательство очевидно.

Теорема 4.2.1. *Пусть в сепарабельном банаховом пространстве E даны ограниченные замкнутые выпуклые слабо компактные множества M и M_k, где $k \in \mathbb{N}$, причем M_k суть порождающие множества, для которых выполнено одно из двух условий:*

1) $h(M_k, M) \to 0,\ \ \operatorname{int} M \neq \varnothing$;

2) $M_k \supset M\ \ \forall\, k$ *и* $M_k \to M$ *в слабой топологии.*

Тогда M также будет порождающим множеством.

Доказательство этой теоремы потребовало бы привлечения большого количества технических результатов теории многозначных отображений, поэтому мы его не приводим. При желании его можно найти в работе [11].

Следствие 4.2.1. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ даны компакт M и последовательность порождающих множеств $\{M_k\}$, причем $M_k \subset M$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $h(M_k, M) \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда множество M также будет порождающим множеством.*

Доказательство. Переходя в несущее подпространство множества M (делая сдвиг аффинной оболочки множества M), можем без ограничения общности считать, что $\operatorname{int} M \neq \varnothing$, и все M_k целиком содержатся в этом несущем подпространстве. Тогда утверждение последует из теоремы 4.2.1, п. 1). $\square$

Пример 4.2.4. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^4$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^4$, пусть $e_0 = 0 \in \mathbb{R}^4$. Пусть $\lambda_k = 1/k$. Рассмотрим последовательность симплексов полной размерности из $\mathbb{R}^4$ вида

$$M_k = \operatorname{co}\{e_1 + e_2 + \lambda_k e_4,\ e_1 - e_2,\ -e_1 - e_2,\ -e_1 + e_2,\ e_3\}.$$

Пусть $M_0 = \operatorname{co}\{e_1 + e_2,\ e_1 - e_2,\ -e_1 - e_2,\ -e_1 + e_2,\ e_3\}$. Легко видеть, что $M_k \to M_0$ при $k \to \infty$, внутренность множества M_0 пуста и нет включения $M_k \subset M_0$ для всех k. При этом справедлива формула $M_0 = M \times \{0\}$, где M есть трехмерная правильная четырехугольная пирамида, для которой в примере 4.2.1 доказано, что она не является порождающим множеством; следовательно, и множество M_0 не является порождающим множеством. $\square$

Теорема 4.2.2. *Пусть M — порождающее множество из E. Тогда для любого вектора $p \in \operatorname{int} b(M)$ опорное подмножество $M(p)$ будет порождающим в гиперплоскости $H_p^{\circ} = \{x \mid \langle p, x\rangle = s(p, M)\}$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольный вектор $p \in \operatorname{int} b(M)$. Сдвигая при необходимости множество M, можем считать, что H_p° есть подпространство пространства E. По лемме 1.13.2 множество $M(p)$ есть непустое замкнутое выпуклое множество. Выберем замкнутое множество X из H_p° такое, что множество

$$A = \bigcap_{x \in X} (M(p) + x)$$

непусто. Очевидно, справедливо равенство $A(p) = A$. Определим множество $A_1 = \bigcap\limits_{x \in X} (M + x)$. Из того, что для каждого $x \in X$ справедливо включение $A_1(p) \subset (M + x)(p) = M(p) + x$, следует

$$A_1(p) \subset \bigcap_{x \in X} (M(p) + x) = A \subset A_1,$$

т. е. справедливо равенство $A_1(p) = A$, и множество A_1 непусто.

Так как множество M является порождающим, то найдется выпуклое замкнутое множество C_1 такое, что справедливо равенство $A_1 + C_1 = M$. Отсюда по лемме 1.13.6 получаем, что

$$A_1(p) + C_1(p) = M(p),$$

т. е. $A + B = M(p)$, где в качестве множества B выбрано множество $C_1(p)$. $\square$

Покажем, что с помощью линейных преобразований можно получать новые порождающие множества.

Теорема 4.2.3. *Пусть E_1 и E_2 суть банаховы пространства, а $M \subset E_1$ — порождающее множество. Пусть $T\colon E_1 \to E_2$ — линейный оператор такой, что множество TM замкнуто в E_2, и на нем определен обратный оператор T^{-1}.*

Тогда множество TM является порождающим множеством в E_2.

Доказательство. Выберем произвольное множество вида $A = \bigcap\limits_{x \in X} (TM + x)$. В силу леммы 4.2.1 можно без ограничения общности считать, что $0 \in A \subset TM$. Отсюда имеем

$$A + (-X) \subset TM, \tag{4.2.1}$$

т. е. $-X \subset TM$, следовательно, на $-X$ определен обратный оператор T^{-1}.

Определим множество $A_1 = T^{-1}A$ и $-X_1 = T^{-1}(-X)$. Докажем равенство

$$A_1 = M \overset{*}{-} (-X_1). \tag{4.2.2}$$

Применяя оператор T^{-1} ко включению (4.2.1), получаем включение $A_1 + (-X_1) \subset M$, откуда
$$A_1 \subset M \overset{*}{-} (-X_1).$$

Докажем обратное включение. Пусть $x \in M \overset{*}{-} (-X_1)$, отсюда $x + (-X_1) \subset M$, $Tx + T(-X_1) \subset TM$, $Tx + (-X) \subset TM$, $Tx \in A$. Значит,
$$x \in T^{-1}A = A_1.$$
Равенство (4.2.2) доказано.

Так как множество M является порождающим, а множество A_1 является M-сильно выпуклым, то найдется M-сильно выпуклое множество B_1, дающее в сумме со множеством A_1 множество, замыкание которого совпадает с M. Отсюда получаем
$$TM = T(\overline{A_1 + B_1}) \subset \overline{A + TB_1} \subset TM.$$

Итак, $\overline{A + \overline{TB_1}} = TM$, что означает выполнение определения порождаемости для множества TM. $\square$

Отметим, что условие обратимости оператора T на образе TM существенно. Покажем это на примере.

Пример 4.2.5. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^4$ есть стандартный ортонорнированный базис в $\mathbb{R}^4$, пусть $e_0 = 0$. Определим в $\mathbb{R}^4$ симплекс полной размерности вида $S_4 = \mathrm{co}\,\{e_i\}_{i=0}^4$. Как показано в примере 4.2.3, множество S_4 является порождающим множеством. Пусть линейный оператор T задается матрицей
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда легко видеть, что $TS_4 = M \times \{0\} + (1,1,0,0)$, где M есть трехмерная правильная четырехугольная пирамида, которая, как показано в примере 4.2.1, не является порождающим множеством. Поэтому и TS_4 также не является порождающим множеством. $\square$

Теорема 4.2.4. *Пусть E_1, E_2 — рефлексивные банаховы пространства и пусть $M_1 \subset E_1$ и $M_2 \subset E_2$ — порождающие множества.*

Тогда их прямая сумма $M_1 \oplus M_2$ также будет порождающим множеством в прямой сумме пространств $E_1 \oplus E_2$.

Доказательство. Определим множества $M = M_1 \oplus M_2$, $X \subset E_1 \oplus E_2$ такие, что $M \overset{*}{-} X \neq \varnothing$. Пусть π_1 — проектор пространства $E_1 \oplus E_2$ на пространство E_1, а π_2 — проектор пространства $E_1 \oplus$

$\oplus E_2$ на пространство E_2. Докажем равенство

$$M \overset{*}{-} X = M \overset{*}{-} (\pi_1 X \oplus \pi_2 X). \tag{4.2.3}$$

Правое множество в формуле (4.2.3), очевидно, содержится в левом, поскольку $X \subset \pi_1 X \oplus \pi_2 X$. Покажем справедливость обратного включения. Пусть $z \in M \overset{*}{-} X$. Это равносильно включению $z + X \subset \subset M$, действуя на которое проекторами π_1 и π_2, получаем

$$\pi_i z + \pi_i X \subset M_i, \quad i \in \overline{1,2}.$$

Взяв прямую сумму двух последних включений, имеем

$$\pi_1 z \oplus \pi_2 z + \pi_1 X \oplus \pi_2 X \subset M,$$

а так как $z = \pi_1 z \oplus \pi_2 z$, то $z \in M \overset{*}{-} (\pi_1 X \oplus \pi_2 X)$. Аналогично равенству (4.2.3) легко доказать равенство

$$M \overset{*}{-} (\pi_1 X \oplus \pi_2 X) = (M_1 \overset{*}{-} \pi_1 X) \oplus (M_2 \overset{*}{-} \pi_2 X). \tag{4.2.4}$$

Пусть B_i — такие множества, что $(M_i \overset{*}{-} \pi_i X) + B_i = M_i$, $i = 1, 2$. Взяв прямую сумму двух последних равенств и учитывая равенства (4.2.3) и (4.2.4), получаем, что $M = (M \overset{*}{-} X) + (B_1 \oplus B_2)$. $\square$

Отметим, что, к сожалению, сумма Минковского двух порождающих множеств не является в общем случае порождающим множеством. Приведем соответствующий пример.

Пример 4.2.6. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^3$ есть стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$ и $e_0 = 0$. Рассмотрим тетраэдры, являющиеся порождающими множествами в $\mathbb{R}^3$:

$$S_1 = \operatorname{co}\Big\{e_0, -e_1, e_2, \frac{1}{2}(e_2 - e_1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\, e_3\Big\},$$
$$S_2 = \operatorname{co}\Big\{e_0, -e_1, e_2, \frac{1}{2}(e_2 - e_1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\, e_3\Big\}.$$

Определим многогранник $M = S_1 + S_2$. Точка 0 есть вершина многогранника M, из которой исходят четыре ребра: $[0, -2e_1]$, $[0, 2e_2]$, $[0, \frac{1}{2}(e_2 - e_1) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\, e_3]$. Таким образом, точка 0 является вершиной правильной четырехугольной пирамиды

$$\Sigma = \operatorname{co}\Big\{0, -e_1, e_2, \frac{1}{2}(e_2 - e_1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\, e_3, \frac{1}{2}(e_2 - e_1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\, e_3\Big\}$$

такой, что $B_{1/2}(0) \cap \Sigma = B_{1/2}(0) \cap M$. Выберем вектор $p = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$. Тогда опорное множество $M(p) = \{x_p^M\} = \{0\}$. Определим отрезок $X = [a, b]$, где

$$a = \frac{1}{3}\Big(-\frac{3e_1}{2} + \frac{e_2}{2} + \frac{e_3}{\sqrt{2}}\Big), \quad b = \frac{1}{3}\Big(-\frac{3e_1}{2} + \frac{e_2}{2} - \frac{e_3}{\sqrt{2}}\Big).$$

Определим множество $Y = M \overset{*}{-} X$, для которого получим

$$Y(p) = (\Sigma \overset{*}{-} X)(p) = \mathrm{co}\left\{\left(\frac{e_1}{6} + \frac{e_2}{6} + \frac{e_3}{3\sqrt{2}}\right), -\left(\frac{e_1}{6} + \frac{e_2}{6} + \frac{e_3}{3\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

Выберем точку $x_p^Y = 0 \in Y(p)$. Легко убедиться в том, что $Y(p) \not\subset \not\subset M(p) + x_p^Y - x_p^M$, т. е. не выполнен опорный принцип (теорема 4.1.3), и поэтому M не является порождающим множеством. $\square$

Следствие 4.2.2. *Теорема 4.2.4, очевидно, справедлива не только для множеств, представимых в виде прямой суммы двух порождающих множеств в прямой сумме двух пространств, но и для множеств, представимых в виде прямой суммы произвольного числа (конечного или счетного) порождающих множеств в соответствующей прямой сумме (конечной или бесконечной) пространств.*

Доказательство. Для обобщения теоремы 4.2.4 в случае бесконечного числа прямых слагаемых достаточно повторить рассуждения и воспользоваться очевидным равенством

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty}(A_i + B_i) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i + \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i, \tag{4.2.5}$$

где $A_i \subset E_i$ и $B_i \subset E_i$ для всех i и $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ суть набор соответствующих рефлексивных банаховых пространств. $\square$

Следствие 4.2.3. *Гильбертов кирпич из пространства l_p, где $p \in (1, +\infty)$, является порождающим множеством.*

Доказательство. Для всякой точки $x \in l_p$ через $\pi_i x = x_i$ обозначается i-й элемент последовательности x. *Гильбертовым кирпичом*, как известно, называется множество $M = \{x \in l_p \mid |x_i| \leqslant 1/i \ \ \forall\, i \in \mathbb{N}\}$. Отметим, что $l_p \subset \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}_i$, где $\mathbb{R}_i = \mathbb{R}$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим произвольное непустое множество $X \subset l_p$ такое, что $M \overset{*}{-} X \neq \varnothing$. Без ограничения общности считаем, что $X \subset M$.

Поскольку для любого $i \in \mathbb{N}$ множество $\pi_i M$ есть отрезок в $\mathbb{R}_i$ и $\pi_i X \subset \pi_i M = [-1/i, 1/i]$, то очевидно, что найдутся отрезки $B_i \subset \mathbb{R}_i$, для которых $(\pi_i M \overset{*}{-} \pi_i X) + B_i = \pi_i M$, и очевидно, что $B_i \subset [-3/i, 3/i]$. Определим множество B по формуле

$$B = \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i. \tag{4.2.6}$$

По следствию 4.2.2 справедливо равенство

$$M \overset{*}{-} X + B = M. \tag{4.2.7}$$

Осталось показать, что $B \subset l_p$. В самом деле если $b = (\dots, b_i, \dots) \in$ $\in B \subset \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}_i$, то $-\frac{3}{i} \leqslant b_i \leqslant \frac{3}{i}$, откуда следует, что

$$(\|b\|_p)^p = \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^p}{i^p} < +\infty. \ \square$$

С л е д с т в и е 4.2.4. *Единичный шар в l_∞ также является порождающим множеством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проводится аналогично доказательству следствия 4.2.3. Напомним, что *единичным шаром* в пространстве $l_\infty \subset \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}_i$ является множество $M = \{x \in l_\infty \mid |x_i| \leqslant 1$ $\forall\, i \in \mathbb{N}\}$.

Повторяя доказательство следствия 4.2.3, для любого множества $X \subset M$ получаем множество вида (4.2.6) такое, что справедливо равенство (4.2.7). При этом $B_i \subset [-3, 3]$ для любого натурального i, откуда следует, что $\|b\|_\infty \leqslant 3$ для любого $b \in B$, т. е. $B \subset l_\infty$. $\square$

Л е м м а 4.2.2. *Пусть M — выпуклое замкнутое множество с непустой внутренностью из рефлексивного банахова пространства E такое, что $\operatorname{int} b(M) \neq \varnothing$. Пусть для любого ограниченного множества Y такого, что $\operatorname{int}(M \overset{*}{-} Y) \neq \varnothing$, найдется выпуклое множество B_Y, для которого справедливо равенство $(M \overset{*}{-} Y) + B_Y = M$.*

Тогда множество M является порождающим множеством.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X есть произвольное множество, удовлетворяющее условию $M \overset{*}{-} X \neq \varnothing$. Покажем, что найдется множество B такое, что $(M \overset{*}{-} X) + B = M$. Без ограничения общности будем считать $0 \in X \subset M$, а поскольку $M \overset{*}{-} X = M \overset{*}{-} \overline{\operatorname{co}}\, X$, то считаем, что множество X является выпуклым и замкнутым. Естественно, оно может оказаться как неограниченным, так и таким, что $\operatorname{int}(M \overset{*}{-} X) = \varnothing$.

В силу изложенных условий для каждого $\lambda \in (0, 1)$ справедливы включения $\lambda X \subset X$ и $M \overset{*}{-} \lambda X \supset (1 - \lambda)M$, откуда $\operatorname{int}(M \overset{*}{-} \lambda X) \neq \varnothing$. Для всякого натурального числа $n \geqslant 2$ выберем число $\lambda_n = (n-1)/n$, а также множества $X_n = \lambda_n(X \cap B_n(0))$ и $A_n = M \overset{*}{-} X_n$. Очевидны включения $A_n \supset A_{n+1} \supset M \overset{*}{-} X$. Определим множества $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда $M \overset{*}{-} X \subset A$. В свою очередь, если $z \in A$, то $z + X_n \subset M$. Следовательно, для всякой точки $x \in X$ справедливо включение $z + \lambda_n x \in$ $\in M$ при всех $n \geqslant \|x\|$, откуда следует, что $z + x \in M$. Последнее означает, что $z \in M \overset{*}{-} X$. Итак, мы доказали равенство $A = M \overset{*}{-} X$. По условию леммы для всякого $n \geqslant 2$ найдется выпуклое замкнутое множество B_n такое, что $A_n + B_n = M$. При этом $A + B_n \subset M$ и $B_n \subset B_{n+1}$ для всех натуральных $n \geqslant 2$.

Определим множество $B = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n}$. Тогда $A + B \subset M$. Докажем обратное включение.

Пусть $m \in M$; тогда найдутся $a_n \in A_n$ и $b_n \in B_n$ такие, что $m = a_n + b_n$. По лемме 1.13.4 справедливы соотношения $\overline{b(A_n)} = \overline{b(M)} \subset \overline{b(B_n)}$, откуда, рассуждая аналогично теореме 1.13.2, получаем, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ с точностью до подпоследовательности слабо сходятся к a и $m - a$. Так как $\{b_n\} \subset B$, а множество B выпукло и замкнуто, то $m - a \in B$. Так как для любого натурального N верно включение $a_n \in A_N$ для всех $n > N$, то $a \in A_N$, т. е. $a \in A$. В итоге получили, что $m \in A + B$, т. е. $A + B = M$. $\square$

Приведем достаточное условие того, что некоторое множество является порождающим в случае, когда оно принадлежит конечномерному евклидову пространству $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4.2.5. *Пусть M — выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$, причем $\operatorname{int} M \neq \varnothing$. Пусть для каждого вектора $p \in \partial B_1(0) \cap \cap \operatorname{ri} b(M)$ выбраны произвольные наборы векторов $\{p_i\}_{i=1}^k \subset \partial B_1(0) \cap \cap b(M)$ и чисел $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$, где $k \in \overline{1,n}$, такие, что $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i = p$ и все опорные множества $M(p_i) \neq \varnothing$. Пусть, кроме того, для произвольно выбранных точек $x_{p_i}^M \in M(p_i)$ найдется точка $x_p^M \in M(p)$ такая, что справедливо включение*

$$\bigcap_{i=1}^k (M - x_{p_i}^M) \subset M - x_p^M. \tag{4.2.8}$$

Тогда множество M является порождающим.

Доказательство. Для доказательства теоремы в силу леммы 4.2.2 достаточно проверить определение 4.1.1 лишь для таких множеств A вида $A = \bigcap_{x \in X} (M + x) \neq \varnothing$, у которых X является компактом и $\operatorname{int} A \neq \varnothing$.

Опорная функция множества A, являющегося пересечением множеств, вычисляется по формуле $s(p, A) = \overline{\operatorname{co}}\, f(p)$, где $f(p) = \inf_{x \in X} (s(p, M) + \langle p, x \rangle)$. В силу компактности множества X здесь $\inf$ можно заменить на $\min$. Так как f можно переписать в виде $f(p) = s(p, M) - s(p, -X)$, причем опорная функция $p \to s(p, -X)$ компакта $-X$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$, то получаем, что функция f полунепрерывна снизу и $\operatorname{dom} f = b(M)$. В силу того, что $\operatorname{int} A \neq \varnothing$, то, взяв любую точку $x_0 \in \operatorname{int} A$, получаем справедливость условия непустой внутренности (условие (1.14.5) теоремы 1.14.4) для функции f.

Зафиксируем произвольный вектор $p \in \operatorname{ri} b(A) \cap \partial B_1(0)$. В силу теоремы 1.14.4 (если заменить в ней векторы p_i на векторы $p_i/\|p_i\|$ единичной длины, которые вновь обозначить через p_i) получаем векторы $p_i \in b(M) \cap \partial B_1(0)$ и числа $\lambda_i > 0$, где $i \in \overline{1,k}$, а $k \in \overline{1,n}$ такие, что справедливы выражения

$$s(p, A) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(p_i), \quad p = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i. \tag{4.2.9}$$

Зафиксируем некоторые точки $x_i \in \operatorname{Arg}\min\limits_{x \in X} \langle p_i, x \rangle$, где $i \in \overline{1,k}$. Тогда для любой опорной точки

$$x_p^A \in A(p) \subset A \subset \bigcap_{i=1}^{k} (M + x_i) \tag{4.2.10}$$

получаем неравенства $\langle p_i, x_p^A \rangle \leqslant s(p_i, M) + \langle p_i, x_i \rangle$. Отсюда в силу выражения (4.2.9) получаем

$$s(p, A) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (s(p_i, M) + \langle p_i, x_i \rangle) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle p_i, x_p^A \rangle = \langle p, x_p^A \rangle = s(p, A). \tag{4.2.11}$$

Из формулы (4.2.11) следует, что в ней неравенства нужно заменить на равенства, т. е. $\langle p_i, x_p^A \rangle = s(p_i, M) + \langle p_i, x_i \rangle$ для всех i. Отсюда, учитывая включение $x_p^A \in M + x_i$, получаем, что $x_p^A - x_i \in M(p_i)$, т. е. $M(p_i) \neq \varnothing \ \ \forall\, i$. Обозначим $x_p^A - x_i$ через $x_{p_i}^M$. В результате включение (4.2.10) принимает вид $A - x_p^A \subset \bigcap\limits_{i=1}^{k} (M - x_{p_i}^M)$. По условию теоремы существует точка $x_p^M \in M(p)$ такая, что выполнено включение (4.2.8). Отсюда и из последнего включения получаем включение $A - x_p^A \subset M - x_p^M$. Так как это включение имеет вид (4.1.7) и получено для произвольного вектора $p \in \operatorname{ri} b(A) \cap \partial B_1(0)$, то в силу теоремы 4.1.3 и замечания 4.1.4 получаем, что для выбранного множества A существует множество B такое, что $A + B = M$. $\square$

Лемма 4.2.3. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ есть произвольное выпуклое замкнутое множество. Пусть выбраны различные векторы p, p_1, $p_2 \in \partial B_1(0) \cap b(M)$ такие, что опорные множества $M(p)$, $M(p_1)$, $M(p_2)$ непусты, и существуют числа $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ такие, что $p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$.*

Тогда для произвольных точек $x_p^M \in M(p)$ *и* $x_{p_i}^M \in M(p_i)$ *справедливо включение*

$$\bigcap_{i=1}^{2}(M - x_{p_i}^M) \subset M - x_p^M. \tag{4.2.12}$$

Доказательство. Если для некоторого номера $i \in \overline{1,2}$ верно равенство $x_{p_i}^M = x_p^M$, то включение очевидно. Поэтому далее будем считать, что $x_{p_i}^M \neq x_p^M$ для всех i.

Без ограничения общности будем считать (при необходимости сделав параллельный перенос множества M на вектор x_p^M), что $x_p^M = 0 \in M$, $x_{p_1}^M \neq 0$, $x_{p_2}^M \neq 0$, $s(p, M) = 0$ и $s(q, M) \geqslant 0\ \forall\, q \in \mathbb{R}^2$. Отсюда, в частности, следует, что $\langle p, x_{p_i}^M \rangle \leqslant 0$, $i \in \overline{1,2}$. Следовательно, для любого $q \in \partial B_1(0)$ возможен по крайней мере один из трех случаев:

1) q принадлежит конической оболочке отрезка $[p_1, p_2]$;

2) q принадлежит конической оболочке одного из отрезков $[p_1, x_{p_1}^M]$ или $[p_2, x_{p_2}^M]$;

3) q принадлежит конической оболочке отрезка $[x_{p_1}^M, x_{p_2}^M]$.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

Случай 1. Пусть $q = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$, где $\alpha_i > 0$. Пользуясь выпуклостью и положительной однородностью опорной функции, получаем

$$s\left(q, \bigcap_{i=1}^{2}(M - x_{p_i}^M)\right) \leqslant \sum_{j=1}^{2} \alpha_j s\left(p_j, \bigcap_{i=1}^{2}(M - x_{p_i}^M)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{2} \alpha_j s(p_j,\, M - x_{p_j}^M) = 0 \leqslant s(q, M).$$

Случай 2. Пусть $q = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 x_{p_1}^M$, где $\alpha_i > 0$. Так как $0 \in M$ и $\langle p_1, x_{p_1}^M \rangle = s(p_1, M) \geqslant 0$, то угол между векторами p_1 и $x_{p_1}^M$ не больше $\pi/2$. Отсюда в свою очередь следует, что угол между векторами q и $x_{p_1}^M$ также не превосходит $\pi/2$. Следовательно,

$$s\left(q, \bigcap_{i=1}^{2}(M - x_{p_i}^M)\right) \leqslant s(q, M) - \langle q, x_{p_1}^M \rangle \leqslant s(q, M).$$

Случай 3. Пусть $q = \alpha_1 x_{p_1}^M + \alpha_2 x_{p_2}^M$, где $\alpha_i > 0$. Так как векторы $x_{p_i}^M$ лежат в полуплоскости $\{x \mid \langle p, x \rangle \leqslant 0\}$, то угол между $x_{p_1}^M$ и $x_{p_2}^M$ не больше π. Следовательно, угол между q и одним из векторов $x_{p_i}^M$, $i \in \overline{1,2}$, не превосходит $\pi/2$. Пусть для определенности угол между $x_{p_1}^M$ и q не более $\pi/2$. Получаем

$$s\left(q, \bigcap_{i=1}^{2}(M - x_{p_i}^M)\right) \leqslant s(q, M) - \langle q, x_{p_1}^M \rangle \leqslant s(q, M).$$

Суммируя полученные неравенства по всем $q \in \partial B_1(0)$, получаем требуемое включение (4.2.12). $\square$

Из теоремы 4.2.5 и леммы 4.2.3 получаем следующую теорему.

Теорема 4.2.6. *Всякое непустое выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^2$ является порождающим множеством.*

Лемма 4.2.4. *Пусть L — замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}$ и π — ортогональный проектор пространства $\mathcal{H}$ на L. Тогда если $L \cap B_R(x) \neq \varnothing$, то*

$$L \cap B_R(x) = \{y \in L \mid \|y - \pi x\| \leqslant \sqrt{R^2 - \|x - \pi x\|^2}\}. \tag{4.2.13}$$

Доказательство. Точка $y \in L \cap B_R(x)$ тогда и только тогда, когда $y \in L$ и $\|y - x\|^2 \leqslant R^2$. Это эквивалентно условиям

$$\|y - \pi x - (x - \pi x)\|^2 \leqslant R^2, \quad \langle y - \pi x,\, x - \pi x\rangle = 0,$$

откуда получаем формулу (4.2.13). $\square$

Теорема 4.2.7. *Всякий шар $B_R(0)$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ является порождающим множеством.*

Доказательство. Допустим противное, т. е., по теореме 4.1.2, существуют непустое множество $A = \bigcap\limits_{x \in X} B_R(x)$, $X \subset \mathcal{H}$, и вектор $p \in \partial B_1(0)$, для которых существует точка

$$z \in A \backslash B_R(x_p - pR), \quad \text{где} \quad x_p \in A, \quad \langle p, x_p\rangle = s(p, A). \tag{4.2.14}$$

Определим множество $L = \operatorname{aff}\{x_p, z,\, x_p - pR\}$. Покажем, что линейное многообразие L является двумерным в $\mathcal{H}$. Действительно, так как $z \in A$ и $\langle p, z\rangle \leqslant \langle p, x_p\rangle = s(p, A)$, то $z \notin \{x_p + \lambda p \mid \lambda > 0\}$. Аналогично, $z \notin \{x_p - 2pR - \lambda p \mid \lambda > 0\}$, так как в противном случае получаем неравенство $\|x_p - z\| > 2R$, которое противоречит включению $z \in A$. Кроме того, $z \notin \{x_p - \lambda p \mid \lambda \in [0, 2R]\}$, так как $z \notin B_R(x_p - pR)$. Итак, точка z не лежит на прямой $\operatorname{aff}\{x_p, x_p - pR\}$, поэтому линейное многооборазие L двумерно.

Сдвигая множество A на вектор $x_p - Rp$, будем считать, что $x_p - pR = 0$, а L есть двумерное линейное подпространство, т. е. $L = \operatorname{lin}\{e_1, e_2\}$, где $\{e_1, e_2\}$ — некоторый ортонормированный базис в L. Пусть π — ортогональный проектор пространства $\mathcal{H}$ на L.

Подпространство L с базисом $\{e_1, e_2\}$ изоморфно $\mathbb{R}^2$. По лемме 4.2.4

$$B_L = B_R(0) \cap L = \{(\xi_1, \xi_2) \in L \mid \xi_1^2 + \xi_2^2 \leqslant R^2\},$$

$$A_L = A \cap L = \bigcap_{x \in X} \{(\xi_1, \xi_2) \in L \mid (\xi_1 - \pi_1(x))^2 + (\xi_2 - \pi_2(x))^2 \leqslant r_x^2\},$$

где $(\pi_1(x), \pi_2(x)) = \pi x$, а $r_x = \sqrt{R^2 - \|x - \pi x\|^2}$. Отметим, что $z \in A_L \backslash B_L$.

Так как $x_p \in A_L$, то $\langle p, x_p\rangle \leqslant s(p, A_L) \leqslant s(p, A) = \langle p, x_p\rangle$, т.е. $x_p \in \in A_L(p)$. Аналогично, $x_p \in B_L(p)$.

Итак, в базисе $\{e_1, e_2\}$ множество B_L изоморфно кругу в $\mathbb{R}^2$ радиуса R, множество A_L изоморфно пересечению кругов радиусов не более R, x_p — опорная точка множеств A_L и B_L в направлении p. По теоремам 4.2.6 и 4.1.3 это влечет включение $A_L \subset B_L$. Но последнее противоречит тому, что $z \in A_L \backslash B_L$. Противоречие показывает, что шар $B_R(0)$ является порождающим множеством. □

Следствие 4.2.5. *Если $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство и T: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — линейный гомеоморфизм, то образ шара $TB_R(0)$ является порождающим множеством в $\mathcal{H}$.*

Это следует из теорем 4.2.3 и 4.2.7. Отсюда, в частности, следует, что эллипсоиды в $\mathbb{R}^n$ — порождающие множества.

Однако можно привести и более сложные примеры, чем в следствии 4.2.5.

Пример 4.2.7. Пусть $\mathcal{H} = l_2$. Напомним, что элементами l_2 являются последовательности $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которых $\sum x_k^2 < +\infty$.

Пусть оператор T является компактным оператором, действующим из l_2 в l_2 по правилу

$$Tx = \{x_k/k\}_{k=1}^{\infty} \quad \forall\, x \in l_2.$$

Определим множество M по формуле $M = TB_1(0)$, т.е.

$$M = \left\{ x \in l_2 \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x_k^2 \leqslant 1 \right\}. \tag{4.2.15}$$

Легко видеть, что множество M выпукло и компактно в l_2. При этом на множестве M определен обратный оператор T^{-1} такой, что для любой точки $x \in M$ имеем $T^{-1}x = \{kx_k\}_{k=1}^{\infty}$. По теоремам 4.2.3 и 4.2.7 множество (4.2.15) является компактным порождающим множеством в l_2.

Следующая теорема позволяет существенно уменьшить проверку условий, стоящих в определении 1.4.1 порождающего множества.

Теорема 4.2.8 (Р.Н. Карасев [52]). *Пусть $M \subset E$ — выпуклое замкнутое множество в рефлексивном банаховом пространстве E такое, что $\operatorname{int} M \neq \varnothing$ и $\operatorname{int} b(M) \neq \varnothing$. Пусть для любой точки $a \in E$ такой, что $\operatorname{int}(M \cap (M + a)) \neq \varnothing$, существует выпуклое замкнутое множество B_a такое, что*

$$(M \cap (M + a)) + B_a = M. \tag{4.2.16}$$

Тогда множество M является порождающим.

Доказательство. I. В этом пункте докажем по индукции утверждение о том, что, если для множества M выполнены условия теоремы 4.2.8, то для множества M выполнены условия определения 4.1.1 при произвольном множестве X, состоящем из конечного числа точек и таком, что $\operatorname{int}(M \overset{*}{-} (-X)) \neq \varnothing$.

База индукции: по условию теоремы (4.2.16) определение 4.1.1 выполнено для случая двухточечных множеств X, т. е. состоящих из двух произвольных точек a_1 и a_2, для которых $a_2 - a_1 \in \operatorname{int}(M + (-M))$.

Допустим, что натуральное число $N \geqslant 3$ таково, что для множества M выполнены условия определения 4.1.1 для любых конечных множеств X, состоящих не более чем из $N-1$ точек и таких, что $\operatorname{int}(M \overset{*}{-} (-X)) \neq \varnothing$.

Докажем, что для множества M выполнены условия определения 4.1.1 при произвольном конечном множестве X, состоящем ровно из N точек и таком, что $\operatorname{int}(M \overset{*}{-} (-X)) \neq \varnothing$. Для этого определим множества $A = \bigcap\limits_{x \in X} (M + x)$, $B = M \overset{*}{-} A$ и $C = A + B$. Отметим, что множества A, B и C непусты, выпуклы и замкнуты (см. теорему 1.13.2), причем справедливы включения $B \supset (-X)$, $C \subset M$ и равенства $\operatorname{int} b(M) = \operatorname{int} b(A) = \operatorname{int} b(C)$. Для доказательства шага индукции необходимо доказать равенство $C = M$.

Допустим, что $C \neq M$. Тогда в силу предложения 1.13.1 найдется вектор $p \in \operatorname{int} b(M)$ такой, что $s(p, M) > s(p, C)$, и в силу леммы 1.13.2 существует точка $c \in C$ такая, что $\langle p, c\rangle = s(p, C)$.

В силу определения множества C найдется точка $b \in B$ такая, что $c \in A + b = \bigcap\limits_{x \in X} (M + x + b)$. При этом справедливо равенство $\langle p, c\rangle = s(p, A + b)$. Так как

$$\bigcap_{x \in X} \operatorname{int}(M + x + b) = \operatorname{int} A + b \neq \varnothing,$$

то выполнены условия предложения 1.16.4 о представлении нормального конуса пересечения множеств в виде суммы нормальных конусов ко множествам, входящим в пересечение. Таким образом, вектор p, являющийся нормальным ко множеству $A + b$ в точке c, можно представить в виде суммы векторов

$$p = \sum_{x \in X} p(x), \tag{4.2.17}$$

где $p(x) \in N(M + x + b, c)$.

Возможны два случая. Рассмотрим их.

Случай 1. Существует точка $x_0 \in X$ такая, что в равенстве (4.2.17) имеется всего одно слагаемое, т. е. $p = p(x_0)$. Тогда $p \in N(M + x_0 + b, c)$, следовательно,

$$\langle p, c\rangle = s(p, M) + \langle p, x_0\rangle + \langle p, b\rangle.$$

Так как при этом по определению вектора p справедливо строгое неравенство $\langle p, c\rangle = s(p, C) < s(p, M)$, то получаем неравенство

$$\langle p, x_0\rangle + \langle p, b\rangle < 0. \tag{4.2.18}$$

Поскольку $-x_0 \in -X \subset B$, то $A - x_0 \subset A + B = C$. Следовательно, с учетом неравенства (4.2.18) получаем

$$s(p, C) \geqslant s(p, A) - \langle p, x_0\rangle = s(p, A) + \langle p, b\rangle - (\langle p, x_0\rangle + \langle p, b\rangle) >$$
$$> s(p, A) + \langle p, b\rangle = s(p, C).$$

Полученное противоречие доказывает, что справедливо равенство $C = M$.

Случай 2. Пусть $p \neq p(x)$ $\forall\, x \in X$. Тогда в равенстве (4.2.17) найдутся два вектора $p(x_1)$ и $p(x_2)$, не равные нулю, и такие, что их сумма $p(x_1) + p(x_2) \neq 0$. Обозначим $p(x_1) + p(x_2) = p_1$, определим множества X_1, A_1, A_1^* по формулам

$$X_1 = X\backslash\{x_1, x_2\}, \quad A_1 = (M + x_1 + b) \cap (M + x_2 + b),$$
$$A_1^* = \bigcap_{x \in X_1} (M + x + b).$$

Отметим, что

$$A + b = A_1 \cap A_1^*. \tag{4.2.19}$$

По условию теоремы (4.2.16) для множества A_1 существует множество B_1 такое, что справедливо равенство $A_1 + B_1 = M$, откуда следует, что

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, b_{1\varepsilon} \in B_1\colon\ s(p_1, M) \leqslant s(p_1, A_1) + \langle p_1, b_{1\varepsilon}\rangle + \varepsilon \tag{4.2.20}$$

и $A_1 + b_{1\varepsilon} \subset M$. Так как по предложению 1.16.4 вектор p_1 принадлежит конусу $N(A_1, c)$, то справедливо равенство

$$s(p_1, A_1) = \langle p_1, c\rangle. \tag{4.2.21}$$

Определим множество A_2:

$$A_2 = (M - b_{1\varepsilon}) \cap A_1^*. \tag{4.2.22}$$

Отметим, что из включения $A_1 + b_{1\varepsilon} \subset M$ следует, что $A_1 \cap A_1^* \subset A_2$, т. е. из формулы (4.2.19) получаем включение

$$A + b \subset A_2. \tag{4.2.23}$$

В силу (4.2.17) возможна одна из ситуаций: а) $p - p_1 = 0$; б) $p - p_1 \in N(A_1^*, c)$, $p - p_1 \neq 0$.

С учетом формул (4.2.20) и (4.2.21) получаем: в случае а)

$$s(p, A_2) = s(p_1, A_2) \leqslant s(p_1, M - b_{1\varepsilon}) \leqslant \\ \leqslant s(p_1, A_1) + \varepsilon = \langle p_1, c\rangle + \varepsilon = \langle p, c\rangle + \varepsilon;$$

в случае б)

$$s(p, A_2) \leqslant s(p_1, A_2) + s(p - p_1, A_2) \leqslant s(p_1, M - b_{1\varepsilon}) + s(p - p_1, A_1^*) \leqslant \\ \leqslant \langle p_1, c\rangle + \varepsilon + \langle p - p_1, c\rangle = \langle p, c\rangle + \varepsilon;$$

т. е. всегда справедливо неравенство

$$s(p, A_2) \leqslant \langle p, c\rangle + \varepsilon = s(p, C) + \varepsilon.$$

Выбрав в условии (4.2.20) достаточно малое $\varepsilon > 0$, получаем, что $s(p, A_2) < s(p, M)$, так как $s(p, M) > s(p, C)$.

Множество A_2 есть пересечение $(N-1)$-го сдвига множества M. По предположению индукции найдется выпуклое замкнутое множество B_2, для которого $A_2 + B_2 = M$ и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, b_{2\varepsilon} \in B_2\colon\ s(p, A_2) + \langle p, b_{2\varepsilon}\rangle \geqslant s(p, M) + \varepsilon.$$

Так как $s(p, M) > s(p, A_2)$, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ получаем, что $\langle p, b_{2\varepsilon}\rangle > 0$.

В силу формулы (4.2.23) получаем

$$A + b + b_{2\varepsilon} \subset A_2 + b_{2\varepsilon} \subset M,$$

т. е.

$$b + b_{2\varepsilon} \in M \overset{*}{-} A = B, \quad A + b + b_{2\varepsilon} \subset A + B = C.$$

Следовательно, $c + b_{2\varepsilon} \in A + b + b_{2\varepsilon} \subset C$, откуда

$$s(p, C) \geqslant \langle p, c + b_{2\varepsilon}\rangle = \langle p, c\rangle + \langle p, b_{2\varepsilon}\rangle = s(p, C) + \langle p, b_{2\varepsilon}\rangle > s(p, C),$$

противоречие. Следовательно, $C = M$, и п. I доказан.

II. Пусть теперь X — произвольное бесконечное множество, удовлетворяющее условию $\operatorname{int}(M \overset{*}{-} (-X)) \neq \varnothing$. Пусть так же, как в п. I, определены множества $A = \bigcap\limits_{x \in X} (M + x)$, $B = M \overset{*}{-} A$ и $C = A + B$. Требуется доказать, что $C = M$.

Допустим, что $C \neq M$, тогда (как и в п. I) найдутся векторы $p \in \operatorname{int} b(M)$ и $c \in C$ такие, что

$$s(p, C) = \langle p, c\rangle < s(p, M).$$

По определению суммы множеств для $c \in A + B$ существует вектор $b \in B$ такой, что $c \in A + b$. При этом $\langle p, c\rangle = s(p, A) + \langle p, b\rangle$.

Обозначим через Y произвольное конечное подмножество из X. Для любого такого Y определим множество

$$A(Y) = \bigcap_{x \in Y} (M + x + b).$$

Если справедливо неравенство $s(p, A(Y)) < s(p, M)$ для некоторого конечного множества $Y \subset X$, то по п. I найдется выпуклое замкнутое множество $B(Y)$ такое, что $A(Y) + B(Y) = M$ и

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, b_Y \in B(Y)\colon\ s(p, M) \leqslant s(p, A(Y)) + \langle p, b_Y \rangle - \varepsilon < \\ < s(p, M) + \langle p, b_Y \rangle - \varepsilon,$$

что дает $\langle p, b_Y \rangle > 0$. При этом $A + b + b_Y \subset A(Y) + b_Y \subset M$, следовательно, $c + b_Y \in A + b + b_Y \subset C$ и

$$s(p, C) \geqslant \langle p, c + b_Y \rangle = s(p, C) + \langle p, b_Y \rangle > s(p, C).$$

Получили противоречие, т. е. доказали равенство $C = M$.

Допустим теперь, что

$$s(p, A(Y)) \geqslant s(p, M) \tag{4.2.24}$$

для всех конечных подмножеств $Y \subset X$. В силу того, что $s(p, M) > > s(p, C)$, найдется $\varepsilon > 0$, при котором

$$s(p, C) < s(p, M) - \varepsilon. \tag{4.2.25}$$

Определим множество H по формуле

$$H = \{x \in E \mid \langle p, x \rangle \geqslant s(p, M) - \varepsilon\}.$$

Всякое множество $A(Y)$, где подмножество $Y \subset X$ — конечно, в силу (4.2.24) имеет непустое пересечение с H. В свою очередь в силу (4.2.25)

$$s(p, A + b) = \langle p, c \rangle = s(p, C) < s(p, M) - \varepsilon,$$

т. е. $A + b$ не пересекается с H.

По лемме 1.13.2 множества $\{(M + x + b) \cap H\}_{x \in X}$ ограничены. Кроме того, они выпуклы, замкнуты и, следовательно, в силу рефлексивности пространства E слабо компактны. Поскольку их пересечение пусто, т. е.

$$\bigcap_{x \in X} ((M + x + b) \cap H) = (A + b) \cap H = \varnothing,$$

то в силу их слабой компактности по известному критерию компактности (теореме 1.1.1) должно найтись конечное множество $Y \subset X$, для которого $A(Y) \cap H = \varnothing$. Но это противоречит (4.2.24), т. е. $C = M$.

III. Доказательство для общего случая, допускающего, что $\operatorname{int}(M \overset{*}{-} (-X)) = \varnothing$, следует из леммы 4.2.2. $\square$

В заключение данного параграфа в $\mathbb{R}^n$ укажем связь порождающих множеств с P-множествами (см. § 1.8).

Теорема 4.2.9 (М.В. Балашов [14]). *Если выпуклый компакт $M \subset \mathbb{R}^n$ является порождающим множеством, то он является P-множеством.*

Доказательство. Применим индукцию по размерности.

В $\mathbb{R}^2$ утверждение верно: на плоскости все выпуклые компакты являются как P-множествами, так и порождающими множествами (см. лемму 1.8.3 и теорему 4.6.2). Это база индукции.

Пусть утверждение доказано для пространств размерностей $2, \ldots \ldots, n-1$. Покажем его справедливость в пространстве $\mathbb{R}^n$. Без ограничения общности будем считать, что $\operatorname{int} M \neq \varnothing$.

Зафиксируем вектор $q \in \mathbb{R}^n$, $\|q\| = 1$ и в соответствии с обозначениями § 1.8 определим ортогональное вектору q подпространство $L(q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, q\rangle = 0\}$ и оператор $P_{L(q)}$ ортогонального проектирования на $L(q)$, получим представление произвольного вектора $z \in \mathbb{R}^n$ в виде $z = x + \mu q = (x; \mu)$, где $x = P_{L(q)} z$, $\mu \in \mathbb{R}$. Кроме того, определим функцию $f_{M,q}(x)$ по формуле

$$f_{M,q}(x) = \min\{\mu \mid (x; \mu) \in M\} \quad \forall\, x \in P_{L(q)} M.$$

По лемме 1.8.1 функция $f_{M,q}$ является пн. сн. функцией. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что функция $f_{M,q}$ является пн. св. функцией.

Допустим противное. Поскольку это выпуклая функция, то нарушение пн. св. возможно лишь в граничных точках множества $P_{L(q)} M$ относительно подпространства $L(q)$. Без ограничения общности можно считать, что такой точкой является начало координат. Тогда нарушение полунепрерывности сверху можно записать так: найдется последовательность $\{x_k\} \subset P_{L(q)} M$ такая, что $x_k \to 0$ при $k \to \infty$, где 0 — граничная точка множества $P_{L(q)} M$ в подпространстве $L(q)$, при этом последовательность $f_{M,q}(x_k) \to 0$ при $k \to \infty$ (этого также можно добиться сдвигом множества M по вектору q), но имеет место строгое неравенство $f(0) < 0$.

Можно считать, что справедливо включение $x_k \in \operatorname{int} P_{L(q)} M$ (где внутренность понимается относительно $L(q)$), так как выпуклая функция $f_{M,q}$ непрерывна на отрезках, соединяющих любую точку $z \in \in P_{L(q)} M$ с точкой z_0, принадлежащей внутренности (относительно $L(q)$) множества $P_{L(q)} M$ (см. теорему 1.2.1).

Из того, что точки x_k лежат во внутренности $P_{L(q)} M$ (относительно $L(q)$), следует, что функция $f_{M,q}$ субдифференцируема в этих точках (см. § 1.16). Пусть выбраны $p_k \in \partial f_{M,q}(x_k)$, и определим $q_k = (p_k; -1)$.

Отрезок $[(0;\ f_{M,q}(0)),\ (0;0)]$ лежит на границе множества M, иначе он бы не проектировался в граничную точку нуль проектором $P_{L(q)}$. Пусть q_0 — вектор, отделяющий отрезок $[(0;\ f_{M,q}(0)),\ (0;0)]$ от выпуклого множества M. Легко видеть, что q_0 имеет вид $q_0 = (p_0; 0)$.

Определим векторы e_k по формуле $e_k = (x_k;\ f_{M,q}(x_k))$. Пусть

$$A_m = M \overset{*}{-} \left(\{0\} \cup \left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \{e_k\}\right)\right) = M \cap \left(\bigcap_{k=m}^{\infty} (M - e_k)\right). \qquad (4.2.26)$$

Отметим, что $0 \in A_m$, поэтому $A_m \neq \varnothing$ для всех m. Так как по условию теоремы M — порождающее множество, то для любого номера m найдется выпуклый компакт B_m такой, что

$$A_m + B_m = M. \qquad (4.2.27)$$

Поскольку $e_k \to 0$ при $k \to \infty$, то

$$\{0\} \cup \bigcup_{k=m}^{\infty} \{e_k\} \to \{0\}$$

в метрике Хаусдорфа. Отсюда следует, что $\operatorname{int} A_m \neq \varnothing$ при достаточно больших m, и из непрерывности геометрической разности при условии непустоты внутренности (см. теорему 2.8.3) получаем, что $A_m \to M$, $B_m \to \{0\}$ при $m \to \infty$ в метрике Хаусдорфа.

Легко видеть, что для любого m выполняется включение $0 \in \partial A_m$ и

$$\{(0,0) + \lambda(0,-1) \mid \lambda > 0\} \cap A_m = \varnothing. \qquad (4.2.28)$$

Поясним формулу (4.2.28). Так как при любом $k \geqslant m$, q_k — <негоризонтальный> (не параллельный $L(q)$) нормальный вектор ко множеству $M - e_k$ в точке 0, то каждый из $\{q_k\}_{k\geqslant m}$ есть нормальный вектор и ко множеству A_m в 0; отсюда и следует (4.2.28).

Пусть $H_0 = \{(x;\mu) \in \mathbb{R}^n \mid \langle q_0, (x;\mu)\rangle = \langle p_0, x\rangle = 0\}$ — опорная гиперплоскость, отделяющая отрезок $[(0;\ f_{M,q}(0)),\ (0;0)]$ от M.

Из (4.2.27) имеем

$$A_m(q_0) + B_m(q_0) = M(q_0),$$

а так как $0 \in A_m(q_0)$, то

$$B_m(q_0) \subset M(q_0) \quad \forall\, m. \qquad (4.2.29)$$

В силу теоремы 4.2.2 множество $M(q_0)$ — тоже порождающее множество.

Перейдем к рассмотрению в H_0. Пусть $B_m(q_0) = \overline{\{b_{mj}\}_{j=1}^{\infty}}$ для всех m. Отметим, что

$$A_m(q_0) = M(q_0) \overset{*}{-} B_m(q_0) = \bigcap_{j=1}^{\infty} (M(q_0) - b_{mj}), \tag{4.2.30}$$

$$B_m(q_0) \to \{0\}. \tag{4.2.31}$$

Пусть $L_0 = L(q) \cap H_0$ и $f_0 \colon P_{L(q)}M \cap L_0 \to \mathbb{R}$ такая, что

$$f_0(x) = \min\{\mu \,|\, (x, \mu) \in M \bigcap H_0\}.$$

Введем $x_{mj} = P_{L_0} b_{mj}$. Так как $b_{mj} \in B_m(q_0) \subset M(q_0)$ (см. (4.2.29)), то $x_{mj} \in P_{L(q)}M \cap H_0$. Поэтому $b_{mj} = (x_{mj}; \alpha_{mj})$, где $\alpha_{mj} \geqslant f_0(x_{mj})$.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть выполнено условие

$$\exists\, m, \quad \exists\, c > 0 \quad \forall\, j \colon \|b_{mj} - (x_{mj}, f_0(x_{mj}))\| = \alpha_{mj} - f_0(x_{mj}) \geqslant c.$$

Тогда для этого m по формуле (4.2.30) получаем

$$[c(0; -1),\, (0; 0)] \subset A_m(q_0) \subset A_m,$$

что противоречит (4.2.28).

Случай 2. Пусть выполнено условие

$$\forall\, m, \quad \forall\, c > 0, \quad \exists\, j \colon \|b_{mj} - (x_{mj}, f_0(x_{mj}))\| < c.$$

Выбрав $c = 1/m$, определим j_m, для которого

$$\|b_{mj_m} - (x_{mj_m}, f_0(x_{mj_m}))\| < \frac{1}{m}.$$

В силу включения $b_{mj_m} \in B_m(q_0)$ и формулы (4.2.31) получаем, что $b_{mj_m} \to 0$, откуда $x_{mj_m} \to 0$ и $f_0(x_{mj_m}) \to 0$. В силу предположения индукции имеет место непрерывность f_0 на $P_{L(q)}M \cap L_0$, т. е.

$$0 = \lim f_0(x_{mj_m}) = f_0(0_{n-2}).$$

Но функция f_0 на множестве $P_{L(q)}M \cap L_0$ есть сужение функции $f_{M,q}$, откуда

$$f_0(0_{n-2}) = f_{M,q}(0_{n-1}) < 0.$$

Противоречие. □

Упражнение 4.2.1. С помощью теоремы 4.1.1 показать, что множество вида

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \geqslant -\sqrt{1 - x^2 - y^2}\,,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

не является порождающим.

Указание. Проверить, что для множества $A = M \cap (M + (1, 0, 2))$ и точки $m = (1/\sqrt{2}\,, 1/\sqrt{2}\,, 0) \in M$ не существует точки b такой, что выполнено включение $m \in A + b \subset M$.

§ 4.3. Простейшие свойства M-сильно выпуклых множеств

Аналогично тому, как это делалось в гл. 3, для M-сильно выпуклых множеств опишем их основные свойства как в общем случае, так и в случае специальных порождающих множеств.

Предложение 4.3.1. 1. *Пусть $A \subset E$ является M_1-сильно выпуклым множеством, а M_1 само является M_2-сильно выпуклым множеством. Тогда A является M_2-сильно выпуклым множеством.*

2. *Пусть даны непустые множества $A_1, A_2 \subset E$, причем множество A_1 является M-сильно выпуклым. Тогда множество $A_1 \overset{*}{-} A_2$, если оно непусто, является M-сильно выпуклым множеством.*

3. *Пусть даны два порождающих множества M_1 и M_2 в рефлексивном банаховом пространстве E таких, что $\operatorname{int} b(M_i) \neq \varnothing$, $i = 1, 2$, и множество $M = M_1 + M_2$ замкнуто. Пусть даны два множества A_1 и A_2, являющиеся соответственно M_1- и M_2-сильно выпуклыми. Тогда для множества $A = A_1 + A_2$ найдется выпуклое замкнутое множество B такое, что справедливо равенство $A + B = M$.*

4. *Пусть множество M является порождающим в рефлексивном банаховом пространстве E, причем $\operatorname{int} b(M) \neq \varnothing$. Выпуклое замкнутое множество $A \subset E$ является M-сильно выпуклым тогда и только тогда, когда разность опорных функций $s(p, M) - s(p, A)$ является собственной выпуклой пн.сн. функцией.*

5. *Пусть $f\colon E^* \to \mathbb{R}$ — собственная положительно однородная пн. сн. функция такая, что $\operatorname{co} f > -\infty$, а множество $M \subset E$ есть порождающее множество такое, что $\operatorname{int} b(M) \neq \varnothing$. Пусть разность функций $s(p, M) - f(p)$ оказалась собственной выпуклой и пн. сн. функцией, тогда и разность $s(p, M) - \overline{\operatorname{co}}\, f(p)$ также является собственной выпуклой и пн. сн. функцией.*

6. *Пусть дана последовательность ограниченных порождающих множеств M_k из рефлексивного банахова пространства E, для которой существует выпуклое замкнутое ограниченное множество M такое, что для всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы равенства $M_k + (M \overset{*}{-} M_k) = M$. Пусть $\{A_k\} \subset E$ — последовательность соответственно M_k-сильно выпуклых множеств, сходящаяся к замкнутому множеству A в метрике Хаусдорфа. Тогда существует выпуклое замкнутое множество B такое, что справедливо равенство $A + B = M$.*

Доказательство. Пункты 1 и 2 легко следуют из определений, пункт 4 — из теоремы 4.1.1.

Пункт 3. По условию существуют множества B_i такие, что $A_i + B_i = M_i$, $i \in \overline{1,2}$. Складывая эти равенства, получаем равенство $A + (B_1 + B_2) = M$.

Пункт 5. Из условия и следствия 1.11.2 следует, что найдется непустое выпуклое замкнутое множество X из E такое, что $s(p,X) = s(p,M) - f(p)$ для всех $p \in E^*$. Так как $\overline{\mathrm{co}}\, f \leqslant f$ и $\overline{\mathrm{co}}\, f > -\infty$, то $\overline{\mathrm{co}}\, f$ также является опорной функцией некоторого непустого множества $Y \subset E$, т. е. $\overline{\mathrm{co}}\, f(p) = s(p,Y)$. Итак,

$$s(p,Y) = \overline{\mathrm{co}}\,(s(p,M) - s(p,X)) \quad \forall\, p \in E^*,$$

и справедливо равенство $Y = M \overset{*}{-} X$, поэтому множество Y является M-сильно выпуклым множеством. Следовательно, функция

$$s(p,M) - \overline{\mathrm{co}}\, f(p) = s(p,M) - s(p,Y)$$

(по пункту 4) является собственной выпуклой и полунепрерывной снизу.

Пункт 6. Для любого номера $k \in \mathbb{N}$ найдется выпуклое множество B_k такое, что $A_k + B_k = M_k$. Отсюда $A_k + B_k + (M \overset{*}{-} M_k) = M$. Для всех $k \in \mathbb{N}$ определим $C_k = B_k + (M \overset{*}{-} M_k)$; получим $A_k + C_k = M$ для всех k. Из сходимости A_k к A в метрике Хаусдорфа следует сходимость последовательности множеств C_k к C в метрике Хаусдорфа, откуда по теореме 1.13.2 получаем равенство $A + C = M$. □

Определение 4.3.1. Если в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ в качестве порождающего множества выступает шар $B_R(0)$ радиуса $R > 0$, то всякое $B_R(0)$-сильно выпуклое множество

$$A = \bigcap_{x \in X} (B_R(0) + x) = \bigcap_{x \in X} B_R(x) \neq \varnothing$$

будем называть *сильно выпуклым множеством с радиусом* R. (Аналогично тому, как мы это делали в гл. 3 для $\mathbb{R}^n$.)

Отметим простой критерий сильной выпуклости множества A.

Теорема 4.3.1. *Замкнутое выпуклое множество $A \subset \mathcal{H}$ сильно выпукло с радиусом $R > 0$ тогда и только тогда, когда пересечение любого двумерного аффинного множества со множеством A есть двумерное сильно выпуклое множество с радиусом R (т. е. есть пересечение кругов радиуса не больше R).*

Доказательство. Если множество A сильно выпукло с радиусом R, то оно представимо как пересечение шаров радиуса R. Пусть L — двумерное аффинное множество. Так как по лемме 4.2.4

пересечение L с шаром радиуса R изометрически изоморфно кругу радиуса не более R, то пересечение $A \cap L$ изометрически изоморфно пересечению кругов радиуса не более R, следовательно, является двумерным сильно выпуклым множеством в L с радиусом R.

Обратно, пусть пересечение множества A с любым двумерным аффинным многообразием сильно выпукло с радиусом R. Допустим, что множество A не является сильно выпуклым множеством. Тогда по теореме 4.1.2 существует вектор $p \in \partial B_1(0)$ такой, что $A \not\subset B_R(x_p - pR)$, т. е. существует точка $z \in A \backslash B_R(x_p - pR)$. Выбрав множество $L = \mathrm{aff}\,\{x_p, x_p - pR, z\}$ и повторив доказательство теоремы 4.2.7, получаем, что множество $A_L = A \cap L$ сильно выпукло с радиусом R в аффинном многообразии L, множество $B_L = L \cap B_R(x_p - pR)$ изометрически изоморфно кругу радиуса R с центром в точке $x_p - pR$ и справедливо равенство $\langle p, x_p \rangle = s(p, A_L) = s(p, B_L)$. По теореме 4.1.2 и в силу того, что круг в $\mathbb{R}^2$ является порождающим множеством, отсюда получаем, что $A_L \subset B_L$, а это противоречит включению $z \in A_L \backslash B_L$. □

Лемма 4.3.1. *Пусть $\{A_k\}$ — последовательность сильно выпуклых множеств из $\mathcal{H}$ с радиусами $R_k > 0$ и $h(A_k, A) \to 0$ при $k \to \infty$. Пусть $R = \liminf\limits_{k \to \infty} R_k < +\infty$.*

Тогда множество A сильно выпукло с радиусом R.

Доказательство. По условию существуют множества B_k такие, что $A_k + B_k = B_{R_k}(0)$. Для любого вектора $p \in \partial B_1(0)$ выполнено

$$s(p, A_k) + s(p, B_k) = R_k \|p\|.$$

Пусть $\{R_{k_m}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{R_k\}$ такая, что $\lim\limits_{m \to \infty} R_{k_m} = R$. Тогда для любого вектора $p \in \partial B_1(0)$ получаем $s(p, A_{k_m}) \to s(p, A)$, откуда $s(p, B_{k_m}) \to (R\|p\| - s(p, A))$ при $m \to \infty$, поэтому предельная функция положительно однородна, непрерывна и выпукла. Это значит, что она является опорной функцией некоторого выпуклого замкнутого ограниченного множества

$$B = \{x \in \mathcal{H} \mid \langle p, x \rangle \leqslant R\|p\| - s(p, A)\},$$

причем $s(p, A) + s(p, B) = R\|p\| \ \ \forall\, p \in \partial B_1(0)$, откуда следует равенство $A + B = B_R(0)$, т. е. множество A является R-сильно выпуклым. □

Теорема 4.3.2. *Выпуклое замкнутое множество $A \subset \mathcal{H}$ является сильно выпуклым с радиусом R тогда и только тогда, когда опорная функция множества A имеет удовлетворяющий условию Липшица градиент, задаваемый на единичной сфере из гильбертова пространства $\mathcal{H}$, с константой Липшица R.*

Доказательство. Необходимость. Пусть множество A — сильно выпуклое множество с радиусом R. Тогда оно является строго выпуклым множеством. Поэтому, как показано в примере 1.16.2, субдифференциалом функции $s(p, A)$ в каждой точке $p = p_0$ является опорное множество $A(p_0) = \{x_{p_0}\}$, что по предложению 1.16.2 означает, что опорная функция имеет производную Гато в каждой точке $p_0 \neq 0$, равную x_{p_0}.

Зафиксируем векторы $p, q \in \partial B_1(0)$. По теоремам 4.1.3 и 4.2.7 справедливы включения

$$x_p \in B_R(x_q - qR), \quad x_q \in B_R(x_p - pR),$$

откуда следуют неравенства

$$\|x_p - x_q\|^2 \leqslant 2R\langle q, x_q - x_p\rangle, \quad \|x_p - x_q\|^2 \leqslant 2R\langle p, x_p - x_q\rangle.$$

Складывая два последних неравенства, получаем, что $2\|x_p - x_q\|^2 \leqslant$ $\leqslant 2R\langle p - q, x_p - x_q\rangle$, откуда следует неравенство $\|x_p - x_q\| \leqslant R \times$ $\times \|p - q\|$.

Достаточность. Допустим противное. Тогда по теореме 4.1.3 найдется вектор $p \in \partial B_1(0)$ такой, что $A \not\subset B_R(x_p - pR)$, где $\{x_p\} =$ $= A(p)$. Определим точку z по формуле $z = x_p - pR$.

Из существования градиента опорной функции на единичной сфере следует, что $s(q, A) < +\infty$ для всех $q \in \partial B_1(0)$, т. е. множество A ограничено. Поэтому значение

$$R_0 = \inf\{r > 0 \mid A \subset B_r(z)\}$$

конечно. Это значит, что $A \subset z + R_0 B_1(0)$ и $R_0 > R$.

Существует последовательность точек $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset A$ такая, что числа $R_i = \|x_i - z\| < R_0$ удовлетворяют условию $\lim\limits_{i\to\infty} R_i = R_0$. Будем считать, что для всех номеров i имеем $x_i \neq z$.

Пусть $q_i = (x_i - z)/R_i$ и

$$H^+_{qi} = \{x \in \mathcal{H} \mid \langle q_i, x\rangle \geqslant \langle q_i, x_i\rangle\}.$$

Пусть $\rho_i = \sqrt{R_0^2 - R_i^2}$ и опорные точки $\{x_{qi}\} = A(q_i)$. Тогда $\rho_i \to 0$ при $i \to \infty$.

Докажем включение

$$x_{qi} \in x_i + \rho_i B_1(0).$$

Поскольку $x_{qi} \in B_{R_0}(z) \cap H^+_{qi}$, то для этого достаточно доказать, что $B_{R_0}(z) \cap H^+_{qi} \subset x_i + \rho_i B_1(0)$. Пусть $x \in B_{R_0}(z) \cap H^+_{qi}$. Тогда

$$\|x - x_i\|^2 = \|x - z - q_i R_i\|^2 = \|x - z\|^2 + R_i^2 + 2R_i\langle z - x, q_i\rangle.$$

Так как $x \in H_{qi}^{+}$, то $\langle z-x, q_i\rangle \leqslant \langle z-x_i, q_i\rangle = -R_i$. Отсюда
$$\|x-x_i\|^2 \leqslant \|x-z\|^2 - R_i^2 \leqslant R_0^2 - R_i^2 = \rho_i^2.$$
Включение доказано. Из него следует, что для каждого номера $i \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $x_{qi} = z + q_iR_i + \rho_i e_i$, где $e_i \in B_1(0)$.

Введем бесконечно малую последовательность
$$\alpha_i = \rho_i^2 + 2\rho_i\langle e_i, q_i(R_i - R) + R(q_i - p)\rangle.$$
Имеем
$$\|x_p - x_{qi}\|^2 = \|q_iR_i - pR + \rho_i e_i\|^2 = \|q_iR_i + \rho_i e_i - Rp\|^2 =$$
$$= \alpha_i + (R_i - R)^2 + R^2\|q_i - p\|^2 + 2R(R_i - R)\langle q_i, q_i - p\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \alpha_i + (R_i - R)^2 + R^2\|q_i - p\|^2 \quad \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

Найдется такое i_1, что для всех $i > i_1$ выполнено неравенство $R_i - R > (R_0 - R)/2$. Поскольку последовательность α_i бесконечно малая, то найдется такое i_2, что для всех $i > i_2$ справедливо неравенство $|\alpha_i| < (R_0 - R)^2/8$.

Таким образом, для любого $i > \max\{i_1, i_2\}$ имеем
$$\|x_p - x_{qi}\|^2 \geqslant R^2\|p - q_i\|^2 + \frac{(R_0 - R)^2}{8},$$
что противоречит условию Липшица градиента опорной функции множества A на единичной сфере с константой R. $\square$

Обозначим через T^* оператор в гильбертовом пространстве, сопряженный к оператору T. Напомним, что он определяется равенством $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ для всех x, y из $\mathcal{H}$.

Теорема 4.3.3 (М.В. Балашов, Е.С. Половинкин [11]). *Пусть $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — линейный гомеоморфизм, $\alpha = \sup\limits_{\|p\|=1} \|T^*p\|$ и $\beta = \inf\limits_{\|p\|=1} \|T^*p\|$. Тогда множество $TB_1(0)$ является сильно выпуклым множеством с радиусом $R = \alpha^2/\beta$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что оператор T^* также является линейным гомеоморфизмом. При этом, в силу непрерывности операторов T^* и $(T^*)^{-1}$ число $\alpha < +\infty$, а число $\beta > 0$. Зафиксируем произвольный вектор $p \in \partial B_1(0)$. Тогда
$$s(p, TB_1(0)) = s(T^*p, B_1(0)) = \|T^*p\|.$$
Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что точка
$$x_p = \frac{TT^*p}{\sqrt{\langle p, TT^*p\rangle}}$$
является опорной точкой множества $TB_1(0)$ в направлении вектора p, т. е. $\langle p, x_p\rangle = s(p, TB_1(0))$.

Зафиксируем произвольный вектор $q \in \partial B_1(0)$, причем $q \neq p$. Пусть $r = q - p$. Тогда
$$\langle p, r\rangle = \langle p, q\rangle - 1 = -\frac{\langle p, p\rangle - 2\langle p, q\rangle + \langle q, q\rangle}{2} = -\frac{\langle r, r\rangle}{2}.$$
Пусть $r_1 = r/\|r\|$. Тогда, выражая $q = p + r$ и подставляя значение x_p, получаем
$$s(q,\, B_R(x_p - pR)) - s(q, TB_1(0)) = \langle p, x_p\rangle + \langle r, x_p\rangle - R\langle p + r,\, p\rangle +$$
$$+ R\|p + r\|^2 - \|T^*(p + r)\| = \sqrt{\langle p, TT^*p\rangle} + \frac{\langle p, TT^*r\rangle}{\sqrt{\langle p, TT^*p\rangle}} + \frac{1}{2}\, R\|r\|^2 -$$
$$- \sqrt{\langle p, TT^*p\rangle + 2\langle p, TT^*r\rangle + \langle r, TT^*r\rangle} \geqslant \frac{1}{2}\, \|r\|^2 \Big(R - \frac{\|T^*r_1\|^2}{\|T^*p\|}\Big). \quad (4.3.1)$$
Из определения чисел α и β получаем, что $R \geqslant \|T^*r_1\|^2/\|T^*p\|$. Отсюда и в силу неравенства (4.3.1) получаем
$$s(q, B_R(x_p - pR)) \geqslant s(q, TB_1(0)) \quad \forall\, q \in \partial B_1(0),$$
откуда $TB_1(0) \subset B_R(x_p - pR)$ для любого $p \in \partial B_1(0)$, т. е. для множества $TB_1(0)$ выполнен опорный принцип (теорема 4.1.3) для сильно выпуклых множеств с радиусом R. $\square$

Теорема 4.3.4. *Пусть функция $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ пн. сн., сильно выпукла с константой сильной выпуклости $\varkappa > 0$ и удовлетворяет условию Липшица на своем лебеговом множестве $L_\beta(f) = \{x \in \in \mathcal{H} \mid f(x) \leqslant$
$\leqslant \beta\}$ с константой Липшица L.*

Тогда множество $L_\beta(f)$ является сильно выпуклым с константой сильной выпуклости $R = L/\varkappa$.

Доказательство. Рассмотрим множество $L_\alpha(f)$, где $\alpha < \beta$. По лемме 1.19.8 множество $L_\alpha(f)$ содержится в $\operatorname{int} L_\beta(f)$, а по лемме 1.19.7 и теореме 4.3.2 множество $L_\alpha(f)$ является сильно выпуклым множеством с радиусом $R = L/\varkappa$. По лемме 1.19.9 и по лемме 4.3.1 множество $L_\beta(f)$ сильно выпуклое с тем же радиусом R. $\square$

§ 4.4. M-сильно выпуклая оболочка множеств

Введем понятие M-сильно выпуклой оболочки множества, обобщающее классическое понятие выпуклой оболочки множества и понятие R-сильно выпуклой оболочки множества, рассмотренной в гл. 3.

Определение 4.4.1. Пусть $M \subset E$ — выпуклое замкнутое множество. Для всякого множества A такого, что $M \overset{*}{-} A \neq \varnothing$, *$M$-сильно выпуклой оболочкой множества A* назовем множество вида
$$\operatorname{strco}_M A = M \overset{*}{-} (M \overset{*}{-} A).$$

Очевидно, что опорная функция M-сильно выпуклой оболочки множества A имеет вид

$$s(p, \operatorname{strco}_M A) = \overline{\operatorname{co}}\,(s(p,M) - \overline{\operatorname{co}}\,(s(p,M) - s(p,A))). \qquad (4.4.1)$$

Замечание 4.4.1. В случае, когда множество M ограничено, операцию замыкания выпуклых оболочек в формуле (4.4.1) можно опустить.

Действительно, так как $M \overset{*}{-} A \neq \varnothing$, то $\operatorname{co}\,(s(p,M) - s(p,A)) > > -\infty$; функция $s(p,M) - s(p,A)$ непрерывна на E^*. По теореме 1.7.1 функция $\operatorname{co}\,(s(p,M) - s(p,A))$, которая в каждой точке не превосходит $s(p,M) - s(p,A)$, непрерывна, следовательно, и полунепрерывна снизу. Аналогично проводится обоснование снятия замыкания для второй в формуле (4.4.1) выпуклой оболочки.

Лемма 4.4.1. *Пусть A, $M \subset E$ — произвольные выпуклые замкнутые подмножества банахова пространства E, причем $M \overset{*}{-} A \neq \neq \varnothing$. Тогда $M \overset{*}{-} (M \overset{*}{-} A)$ есть наименьшее по включению множество вида $\bigcap\limits_{x\in X} (M + x)$, содержащее A.*

Доказательство. Из включения $A + (M \overset{*}{-} A) \subset M$, которое верно всегда, получаем, что $A \subset M \overset{*}{-} (M \overset{*}{-} A)$. Покажем теперь минимальность по включению.

Пусть $A \subset \bigcap\limits_{x\in X} (M + x)$. Тогда для любой точки $x \in X$ справедливо включение $A \subset M + x$. Отсюда $-x \in M \overset{*}{-} A$ для любой точки $x \in X$, поэтому $M \overset{*}{-} (M \overset{*}{-} A) \subset M + x$ для любой точки $x \in X$, т. е. $M \overset{*}{-} (M \overset{*}{-} A) \subset \bigcap\limits_{x\in X} (M + x)$. $\square$

Теорема 4.4.1. *Пусть M — порождающее множество и A — такое множество из банахова пространства E, что $M \overset{*}{-} A \neq \varnothing$.*

Тогда множество $\operatorname{strco}_M A$ является наименьшим по включению M-сильно выпуклым множеством, содержащим множество A. При этом опорная функция этого множества задается формулами

$$s(p, \operatorname{strco}_M A) = s(p,M) - \overline{\operatorname{co}}\,(s(p,M) - s(p,A)), \quad p \in b(M), \quad (4.4.2)$$

$$s(p, \operatorname{strco}_M A) = +\infty, \quad p \notin b(M). \qquad (4.4.3)$$

Доказательство. Первая часть теоремы следует из леммы 4.4.1. В силу определения порождающего множества M имеем равенство $\operatorname{strco}_M A + (M \overset{*}{-} A) = M$. Отсюда следует формула для опорной функции $\operatorname{strco}_M A$. $\square$

Приведем некоторые свойства M-сильно выпуклой оболочки множеств.

Теорема 4.4.2. 1. *Пусть* $A_1 \subset A_2$ *и* $M \overset{*}{-} A_2 \neq \varnothing$. *Тогда* $\operatorname{strco}_M A_1 \subset \operatorname{strco}_M A_2$.

2. *Пусть* $M \overset{*}{-} A \neq \varnothing$. *Тогда для любого* $\alpha > 0$ *имеем* $\operatorname{strco}_{\alpha M} \alpha A = \alpha \operatorname{strco}_M A$.

3. *Пусть выпуклые замкнутые множества* M_1 *и* M_2 *—такие, что* $\operatorname{int} b(M_2) \neq \varnothing$ *и* $M_1 + (M_2 \overset{*}{-} M_1) = M_2$. *Пусть* A *— такое множество, что* $M_1 \overset{*}{-} A \neq \varnothing$. *Тогда* $\overline{\operatorname{co}}\, A \subset \operatorname{strco}_{M_2} A \subset \operatorname{strco}_{M_1} A$.

4. *Пусть* M_1 *и* M_2 *— порождающие множества, причем* $M_1 + M_2$ *— замкнутое множество. Пусть* A_1 *и* A_2 *— такие множества, что* $M_i \overset{*}{-} A_i \neq \varnothing$, $i \in \overline{1,2}$. *Тогда* $\operatorname{strco}_{M_1+M_2}(A_1 + A_2) \subset \operatorname{strco}_{M_1} A_1 + \operatorname{strco}_{M_2} A_2$. *Если* $A_2 \supset \partial M_2$, *то в последнем включении имеет место равенство.*

5. *Пусть* M *— выпуклое замкнутое множество,* A *и* B *— такие множества, что* $M \overset{*}{-} A \neq \varnothing$ *и* $A \overset{*}{-} B \neq \varnothing$. *Тогда* $\operatorname{strco}_M (A \overset{*}{-} B) \subset \operatorname{strco}_M A \overset{*}{-} B$.

Доказательство. Доказательства пунктов 1 и 2, очевидно, следуют из определения 4.4.1.

Пункт 3. Первое включение следует из определения 4.4.1 и того, что $M_2 \overset{*}{-} A = M_2 \overset{*}{-} \overline{\operatorname{co}}\, A$ и $A \subset \operatorname{strco}_{M_2} A$. По определению 4.4.1 имеем $\operatorname{strco}_{M_2} A + M_2 \overset{*}{-} A = M_2$, по условию теоремы

$$M_2 \overset{*}{-} A = \Big(M_1 + (M_2 \overset{*}{-} M_1)\Big) \overset{*}{-} A \supset (M_1 \overset{*}{-} A) + (M_2 \overset{*}{-} M_1).$$

Поэтому

$$\operatorname{strco}_{M_2} A \subset M_2 \overset{*}{-} ((M_1 \overset{*}{-} A) + (M_2 \overset{*}{-} M_1)) \subset$$
$$\subset ((M_1 + (M_2 \overset{*}{-} M_1)) \overset{*}{-} (M_2 \overset{*}{-} M_1)) \overset{*}{-} (M_1 \overset{*}{-} A) = \operatorname{strco}_{M_1} A.$$

Пункт 4. По определению 4.4.1 имеем

$$\operatorname{strco}_{M_1+M_2}(A_1 + A_2) = (M_1 + M_2) \overset{*}{-} ((M_1 + M_2) \overset{*}{-} (A_1 + A_2)) \subset$$
$$\subset (M_1 + M_2) \overset{*}{-} ((M_1 \overset{*}{-} A_1) + (M_2 \overset{*}{-} A_2)) =$$
$$= ((M_1 + M_2) \overset{*}{-} (M_1 \overset{*}{-} A_1)) \overset{*}{-} (M_2 \overset{*}{-} A_2) =$$
$$= (M_1 \overset{*}{-} A_1 + \operatorname{strco}_{M_1} A_1 + M_2) \overset{*}{-} (M_1 \overset{*}{-} A_1) \overset{*}{-} (M_2 \overset{*}{-} A_2) =$$
$$= (\operatorname{strco}_{M_1} A_1 + M_2) \overset{*}{-} (M_2 \overset{*}{-} A_2) = \operatorname{strco}_{M_1} A + \operatorname{strco}_{M_2} A.$$

Если $A_2 \supset \partial M_2$, то $\operatorname{co} A_2 = M_2$, и поэтому

$$\operatorname{strco}_{M_1+M_2}(A_1 + A_2) = (M_1 + M_2) \overset{*}{-} (((M_1 + M_2) \overset{*}{-} M_2) \overset{*}{-} A_1) =$$
$$M_2 + (M_1 \overset{*}{-} (M_1 \overset{*}{-} A_1)) = \operatorname{strco}_{M_2} A_2 + \operatorname{strco}_{M_1} A_1.$$

Пункт 5. Воспользовавшись верным для любых множеств M, A, B соотношением $M \overset{*}{-} (A \overset{*}{-} B) \supset M \overset{*}{-} A + B$, получаем

$$\operatorname{strco}_M(A \overset{*}{-} B) \subset M \overset{*}{-} ((M \overset{*}{-} A) + B) = \operatorname{strco}_M A \overset{*}{-} B. \ \square$$

Отметим, что, если множество A является M-сильно выпуклым, то M-сильно выпуклая оболочка любых двух точек из множества A, очевидно, содержится в A (это прямое следствие п. 1 теоремы 4.4.2). Ниже мы докажем обратное к этому утверждение.

Теорема 4.4.3 (М.В. Балашов, Е.С. Половинкин). *Пусть E — рефлексивное банахово пространство, $M \subset E$ — порождающее множество. Пусть $A \subset E$ — такое замкнутое множество, что $\operatorname{int} b(A) \neq \varnothing$, и для любых точек $a, b \in A$ непуста M-сильно выпуклая оболочка $\operatorname{strco}_M\{a, b\}$ и выполнено включение $\operatorname{strco}_M\{a, b\} \subset A$.*

Тогда множество A является M-сильно выпуклым.

Доказательство. Зафиксируем функционал $p_0 \in \operatorname{int} b(A)$. По лемме 1.13.2 опорное множество $A(p_0) = \{x \in A \mid \langle p_0, x\rangle = s(p_0, A)\}$ есть непустое выпуклое замкнутое и ограниченное множество, следовательно, найдется точка $a_0 \in A$ такая, что

$$\langle p_0, a_0\rangle = s(p_0, A). \tag{4.4.4}$$

Выберем любую точку $a \in A$, отличную от точки a_0. В силу условия имеем включение $\operatorname{strco}_M\{a_0, a\} \subset A$ и формулу (4.4.4), откуда следует равенство

$$s(p_0, \operatorname{strco}_M\{a_0, a\}) = \langle p_0, a_0\rangle < +\infty.$$

Поскольку в силу леммы 1.13.4 имеет место равенство $\operatorname{int} b(\operatorname{strco}_M\{a_0, a\}) = \operatorname{int} b(M)$, а функционал $p_0 \in \operatorname{int} b(A) \subset \operatorname{int} b(\operatorname{strco}_M\{a_0, a\})$, то $p_0 \in \operatorname{int} b(M)$. Итак, $\operatorname{int} b(A) \subset \operatorname{int} b(M)$. В силу леммы 1.13.2 $M(p_0)$ — ограниченное множество, поэтому $b(M(p_0)) = E^*$.

Покажем теперь, что $O^+A \subset O^+M$. Пусть $x \in O^+A$, $a_0 \in A(p_0)$; тогда

$$l = \{a_0 + \lambda x \mid \lambda > 0\}$$

есть асимптотический луч множества A. Пусть точки $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ лежат на луче l, причем $\|a_{k+1} - a_k\| = 1$ и $\lim \|a_k\| = +\infty$. По опорному принципу для M-сильно выпуклых множеств (см. теорему 4.1.3) для каждого номера $k \in \mathbb{N}$ найдется точка $m_k \in M(p_0)$ такая, что

$$[a_0, a_k] \subset \operatorname{strco}_M\{a_0, a_k\} \subset M - m_k + a_0 \subset M - M(p_0) + a_0.$$

Отсюда следует включение $l \subset M - M(p_0) + a_0$. Поскольку по лемме 1.3.1 справедливо равенство $b(M - M(p_0) + a_0) = b(M) \cap b(-M(p_0) + a_0) = b(M)$, то $x \in O^+M$. Итак, $O^+A \subset O^+M$.

По лемме 1.13.5 отсюда получаем, что $b(A)^- \subset b(M)^-$, а по свойству поляры $\overline{b(M)} \subset \overline{b(A)}$, и так как внутренности этих конусов непусты, то и $\operatorname{int} b(M) \subset \operatorname{int} b(A)$.

Таким образом, мы доказали равенство
$$\operatorname{int} b(A) = \operatorname{int} b(M). \tag{4.4.5}$$

Покажем, что на множестве $\operatorname{int} b(M)$ функция $f(p) = s(p, M) - s(p, A)$ выпукла. Рассмотрим функционалы p_1 и p_2 из $\operatorname{int} b(M)$. Выберем точки $a_i \in A(p_i)$, $i \in \overline{1,2}$, и зафиксируем число $\lambda \in (0,1)$. Имеем

$$f(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) = s(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2,\, M) - s(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2,\, A) \leqslant$$
$$\leqslant s(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2,\, M) - s(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2,\, \operatorname{strco}_M\{a_1, a_2\}).$$

Так как множество M является порождающим множеством, то в неравенстве последняя функция выпукла и пн. сн. по p (см. п. 4 предложения 4.3.1). Поэтому оценку можно записать в виде

$$f(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda s(p_1, M) + (1-\lambda)s(p_2, M) - \lambda\langle p_1, a_1\rangle - (1-\lambda)\langle p_2, a_2\rangle =$$
$$= \lambda(s(p_1, M) - s(p_1, A)) + (1-\lambda)(s(p_2, M) - s(p_2, A)).$$

Итак, функция f выпукла на $\operatorname{int} b(M)$, а в силу непрерывности функций $s(p, M)$ и $s(p, A)$ на $\operatorname{int} b(M)$ (следствие 1.7.1) функция f и непрерывна на $\operatorname{int} b(M)$. Это значит, что существует непустое выпуклое замкнутое множество B вида

$$B = \{x \in E \mid \langle p, x\rangle \leqslant f(p) \quad \forall\, p \in \operatorname{int} b(M)\}$$

такое, что $s(p, B) = f(p)$ для всех $p \in \operatorname{int} b(M)$, причем $\operatorname{int} b(B) \subset \operatorname{int} b(A)$.

Поскольку отсюда следует равенство

$$s(p, A) + s(p, B) = s(p, M) \quad \forall\, p \in \operatorname{int} b(M),$$

то, применяя предложение 1.13.1, получаем, что $\overline{A + B} = M$, причем в силу теоремы 1.13.2 в последнем равенстве замыкание можно убрать. □

П р и м е р 4.4.1. В качестве контрпримера к теореме 4.4.3 рассмотрим множество

$$M_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \max_{i \in \overline{1,3}} |x_i| \leqslant 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1 + x_2 + x_3| \leqslant 2\}$$

и две его грани D_+ и D_- вида $D_\pm = M_0 \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = \pm 2\}$. Очевидно, что множество M_0 не является порождающим, так как, например, для множества $A = M_0 \cap (M_0 + (-1, 1, 1))$, являющегося кубом, не существует множества B такого, что $A + B = M_0$. Для любой пары точек a, $b \in D_+$ множество $\operatorname{strco}_{M_0}\{a, b\}$ содержится в D_+, так как оно является пересечением некоторого семейства сдвигов треугольников D_+ и D_-. Однако само множество D_+ не может быть представлено в виде пересечения сдвигов множества M_0.

Пример 4.4.2. В случае неограниченного порождающего множества M условие $\operatorname{int} b(A) \neq \varnothing$ в теореме 4.4.3 не может быть ослаблено. Рассмотрим в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ множества $A = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geqslant 0\}$ и $M = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0\}$. Легко видеть, что $b(A) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, \ x_2 \leqslant 0)\}$, т. е. $\operatorname{int} b(A) = \varnothing$, и для любой пары точек $a, b \in A$ определена оболочка $\operatorname{strco}_M\{a, b\}$, которая содержится в A, но множество A не является M-сильно выпуклым.

Теорема 4.4.4 (М.В. Балашов, Е.С. Половинкин [11]). *Пусть $M \subset E$ — ограниченное порождающее множество, A_1 и A_2 — множества из банахова пространства E. Пусть существуют число $r_0 > 0$ и точки $a_i \in E$ такие, что $B_{r_0}(a_i) \subset M \overset{*}{-} A_i$, $i \in \overline{1,2}$. Тогда справедлива оценка*

$$h(\operatorname{strco}_M A_1, \operatorname{strco}_M A_2) \leqslant \frac{\operatorname{diam} M + r_0}{r_0}\, h(A_1, A_2). \tag{4.4.6}$$

Доказательство. Обозначим $\operatorname{diam} M$ через d, а $h(A_1, A_2)$ через h.

1. Пусть $h \leqslant r_0$. По формуле представления расстояния по Хаусдорфу через опорные функции (лемма 1.11.4) и по теореме 4.4.1 получаем

$$h(\operatorname{strco}_M A_1, \operatorname{strco}_M A_2) = \sup_{\|p\|_* = 1} |s(p, M) - s(p, M \overset{*}{-} A_1) - s(p, M) + s(p, M \overset{*}{-} A_2)| = h(M \overset{*}{-} A_1, M \overset{*}{-} A_2). \tag{4.4.7}$$

Обозначим число $(d - r_0)h/r_0$ через k, а множество $M \overset{*}{-} A_i$ через G_i, $i \in \overline{1,2}$.

Зафиксируем номер $i \in \overline{1,2}$ и точку $x \in \partial G_i$. Рассмотрим множество $\operatorname{co}(\{x\} \cup B_{r_0}(a_i)) \subset G_i$. Выберем на отрезке $[x_i, x]$ точку y_i так, чтобы $\|x - y_i\|/\|x - x_i\| = h/r_0$. В силу подобия (гомотетии с центром в точке x и коэффициентом r_0/h) приведенных ниже множеств, получаем включение одного в другое:

$$y_i + B_h(0) \subset \operatorname{co}(\{x\} \cup B_{r_0}(x_i)) \subset G_i,$$

откуда $\varrho(x, G_i \overset{*}{-} B_h(0)) \leqslant \|x - y_i\| \leqslant (d - r_0)h/r_0 = k$. В итоге

$$h(G_i, G_i \overset{*}{-} B_h(0)) = \sup_{x \in \partial G_i} \varrho(x, G_i \overset{*}{-} B_h(0)) \leqslant k. \tag{4.4.8}$$

Так как из включения $A_2 \subset \overline{A_1 + B_h(0)} = A_1 + B_h(0)$ следует включение $G_1 \overset{*}{-} B_h(0) \subset G_2$, то, используя оценку (4.4.8), получаем

$$G_1 \subset G_1 \overset{*}{-} B_h(0) + kB_1(0) \subset G_2 + kB_1(0).$$

Очевидно, что аналогичное включение будет справедливо при перестановке множеств A_1 и A_2. Отсюда получаем, что $h(G_1, G_2) \leqslant k$. Это в силу (4.4.7) влечет (4.4.6).

2. Пусть $h > r_0$. По теореме 4.4.2 для любого множества A такого, что $M \overset{*}{-} A \neq \varnothing$, справедливо включение $\overline{\text{co}}\, A \subset \text{strco}_M A$, т. е. $h(\overline{\text{co}}\, A, \text{strco}_M A) \leqslant \text{diam}\,(\text{strco}_M A) \leqslant d$. Отсюда для любого числа $t > 1$ получаем

$$\text{strco}_M A_1 \subset \overline{\text{co}}\, A_1 + tdB_1(0) \subset \overline{\text{co}}\, A_2 + tdB_1(0) + hB_1(0) \subset$$
$$\subset \text{strco}_M A_2 + (td + h)B_1(0) \subset \text{strco}_M A_2 + h(A_1, A_2)\left(\frac{td}{r_0} + 1\right) B_1(0).$$

Аналогичное включение будет также справедливо при перестановке множеств A_1 и A_2, откуда при предельном переходе $t \to 1 + 0$ следует оценка (4.4.6). $\square$

Упражнение 4.4.1. Показать, что условие непустой внутренности множеств $M \overset{*}{-} A_i$ в теореме 4.4.4 существенны. Для этого в $\mathbb{R}^2$ определим порождающее множество $M = B_1(0)$ и множества $A_1 = [(-1, 0), (1, 0)]$, $A_2(\varepsilon) = [(-1 + \varepsilon,\, 0), (1 - \varepsilon,\, 0)]$, где $\varepsilon \in (0, 1)$. Рассмотрев множества $\text{strco}_1 A_1$ и $\text{strco}_1 A_2(\varepsilon)$, показать, что при $\varepsilon \to +0$ условие Липшица

$$h(\text{strco}_1 A_1,\, \text{strco}_1 A_2(\varepsilon)) \leqslant Lh(A_1, A_2(\varepsilon))$$

не выполняется с любой константой $L > 0$.

Рассмотрим свойства сильно выпуклой оболочки множеств в случае, когда порождающее множество является шаром в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Теорема 4.4.5 (М.В. Балашов, Половинкин [11]). *Пусть числа r_0, R_1, R_2, точка $a_0 \in \mathcal{H}$ и множество $A \subset \mathcal{H}$ таковы, что $A \subset B_{r_0}(a_0)$, и $R_2 > R_1 \geqslant r_0 > 0$. Тогда справедливо неравенство*

$$h(\text{strco}_{R_1} A,\, \text{strco}_{R_2} A) \leqslant \left(\sqrt{\frac{R_2 + r_0}{R_2 - r_0}} - 1\right)(R_2 - R_1). \tag{4.4.9}$$

Доказательство. Из леммы 1.11.4 для выпуклых замкнутых ограниченных множеств $\text{strco}_{R_1} A$, $\text{strco}_{R_2} A$ и теоремы 4.4.1 имеем

$$h(\text{strco}_{R_1} A,\, \text{strco}_{R_2} A) =$$
$$= \sup_{\|p\|_* = 1} \Big(-(R_2 - R_1) - s(p,\, B_{R_1}(0) \overset{*}{-} A) + s(p,\, B_{R_2}(0) \overset{*}{-} A)\Big) =$$
$$= \sup_{\|p\|_* = 1} \Big(s(p,\, B_{R_2}(0) \overset{*}{-} A) - s(p,\, B_{R_1}(0) \overset{*}{-} A)\Big) - (R_2 - R_1) =$$
$$= h(B_{R_2}(0) \overset{*}{-} A,\, B_{R_1}(0) \overset{*}{-} A) - (R_2 - R_1).$$

Пусть число $h = R_2 - R_1$ и множество $G = B_{R_2}(0) \overset{*}{-} A$. Так как по условию $B_{R_1}(0) \overset{*}{-} A \neq \varnothing$ и поэтому $G \supset (B_{R_1}(0) \overset{*}{-} A) + B_h(0)$, то справедливо включение $B_h(a_1) \subset G$, где $a_1 \in B_{R_1}(0) \overset{*}{-} A$, т. е. $a_1 \in G \overset{*}{-} B_h(0)$. Пусть $B_\varrho(a)$ есть шар максимального радиуса, содержащийся во множестве G.

Поясним, почему такой шар существует. Поскольку множество G ограничено и $\operatorname{int} G \neq \varnothing$, то найдется последовательность шаров $B_{\varrho_i}(a_i) \subset G$ такая, что последовательность $\{\varrho_i\}$ сходится к числу $\varrho = \sup\{r > 0 \mid \exists\, x \in G\colon\ B_r(x) \subset G\}$.

Так как ограниченное замкнутое множество G слабо компактно в пространстве $\mathcal{H}$, то без ограничения общности последовательность точек $\{a_i\}$ сходится слабо к некоторой точке $a \in G$ при $i \to \infty$.

Из включения $B_{\varrho_i}(a_i) \subset G$ следует, что для любого вектора $p \in \partial B_1(0)$ справедливо неравенство

$$\varrho_i + \langle p, a_i \rangle \leqslant s(p, G) \quad \forall\, i \in \mathbb{N},$$

из которого, переходя в нем к пределу по $i \to \infty$, получаем неравенство

$$\varrho + \langle p, a \rangle \leqslant s(p, G) \quad \forall\, p \in \partial B_1(0),$$

означающее включение $B_\varrho(a) \subset G$. Очевидно, что $\varrho \geqslant R_2 - r_0 \geqslant h$.

Так как $G \overset{*}{-} B_h(0) \neq \varnothing$ и $G \overset{*}{-} B_h(0) \subset G$, то справедлива формула

$$h(G,\, G \overset{*}{-} B_h(0)) = \sup_{y \in \partial G} \varrho(y,\, G \overset{*}{-} B_h(0)). \tag{4.4.11}$$

Повторяя доказательство теоремы 4.4.4 (п. 1), получаем для любой точки $y \in \partial G$ оценку

$$\varrho(y, G \overset{*}{-} B_h(0)) \leqslant \|a - y\| \, \frac{h}{\varrho}. \tag{4.4.12}$$

Пусть $R_0 = \sqrt{R_2^2 - (R_2 - \varrho)^2}$.

Покажем, что справедливо неравенство

$$\|a - y\| \leqslant R_0 \quad \forall\, y \in \partial G. \tag{4.4.13}$$

Допустим, что найдется точка $y \in \partial G$, для которой

$$\|a - y\| > R_0.$$

Выберем на отрезке $[a, y]$ точку x так, чтобы выполнялось равенство

$$\|a - x\| = \frac{\|a - y\|}{2} - \frac{R_0^2}{2\|a - y\|}.$$

Рассмотрим произвольный шар $B_{R_2}(b)$, $b \in \mathcal{H}$, содержащий множество $\{y\} \cup B_\varrho(a)$. Такие шары существуют, так как $\{y\} \cup B_\varrho(a) \subset G = B_{R_2}(0) \overset{*}{-} A$.

Отметим, что $\|a - b\| \leqslant R_2 - \varrho$, а $\|b - y\| \leqslant R_2$.

Найдем длину отрезка $[b, x]$. Из треугольника yab получаем равенство

$$\langle y - a, a - b \rangle = \frac{\|a - y\|^2 + \|a - b\|^2 - \|y - b\|^2}{2}. \tag{4.4.14}$$

Поскольку по построению

$$\langle x-a, a-b\rangle = \frac{\|a-x\|}{\|a-y\|}\,\langle y-a, a-b\rangle$$

и

$$\|x-y\| = \|a-y\| - \|a-x\| = \frac{\|a-y\|}{2} + \frac{R_0^2}{2\|a-y\|},$$

то с учетом равенства (4.4.14) получаем

$$\begin{aligned}\|x-b\|^2 &= \|a-x\|^2 + \|a-b\|^2 - 2\frac{\|a-x\|}{\|a-y\|}\,\langle y-a, a-b\rangle = \\ &= \|a-x\|^2 + \frac{\|x-y\|}{\|a-y\|}\,\|a-b\|^2 + \frac{\|a-x\|}{\|a-y\|}\,\|y-b\|^2 - \|a-x\|\cdot\|a-y\| = \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{R_0^2}{2\|a-y\|^2}\right)\|a-b\|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{R_0^2}{2\|a-y\|^2}\right)\|y-b\|^2 - \\ &\qquad - \left(\frac{1}{4} - \frac{R_0^4}{4\|a-y\|^4}\right)\|a-y\|^2. \qquad (4.4.15)\end{aligned}$$

Покажем, что при $\|a-y\| > R_0$ величина $\|x-b\|$ удовлетворяет оценке $\|x-b\| \leqslant r < R_2 - \varrho$, где число $r > 0$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}r^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{R_0^2}{2\|a-y\|^2}\right)(R_2-\varrho)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{R_0^2}{2\|a-y\|^2}\right)R_2^2 - \\ - \left(\frac{1}{4} - \frac{R_0^4}{4\|a-y\|^4}\right)\|a-y\|^2. \qquad (4.4.16)\end{aligned}$$

Покажем, что $r < R_2 - \varrho$. Преобразовав формулу (4.4.16), получаем

$$\begin{aligned}r^2 = \frac{R_2^2 + (R_2-\varrho)^2}{2} - \frac{1}{4}\left(\|a-y\|^2 + \frac{R_0^4}{\|a-y\|^2}\right) < \\ < \frac{R_2^2 + (R_2-\varrho)^2}{2} - \frac{R_2^2 - (R_2-\varrho)^2}{2} = (R_2-\varrho)^2,\end{aligned}$$

причем неравенство строгое, так как $\|a-y\| > R_0$.

Неравенство $\|x-b\| \leqslant r$, очевидно, следует из определения числа r по формуле (4.4.16) и из равенства (4.4.15) с учетом неравенств $\|a-b\| \leqslant R_2 - \varrho$ и $\|b-y\| \leqslant R_2$.

Итак, для любого шара $B_{R_2}(b)$, содержащего множество $\{y\} \cup \cup B_\varrho(a)$, имеет место неравенство $\|x-b\| \leqslant r$, где $r < R_2 - \varrho$.

Зафиксировав такой шар $B_{R_2}(b)$, рассмотрим продолжение отрезка $[b, x]$ за точку x по прямой до пересечения с $\partial B_{R_2}(b)$ в точке x_1. Легко видеть, что $\|x-x_1\| = \|b-x_1\| - \|b-x\| \geqslant R_2 - r > \varrho$, поэтому шар $B_{R_2}(b)$ содержит шар $B_{R_2-r}(x)$. В силу произвольности шара $B_{R_2}(b)$ получаем, что

$$B_{R_2-r}(x) \subset \operatorname{strco}_{R_2}\{\{y\} \cup B_\varrho(a)\} \subset G = B_{R_2}(0) \overset{*}{-} A,$$

что противоречит максимальности радиуса ϱ шара, содержащегося во множестве G. Противоречие доказывает, что справедливо неравенство (4.4.13). Из формул (4.4.11), (4.4.12) и (4.4.13) получаем оценку

$$h(G, G \overset{*}{-} B_h(0)) \leqslant h\sqrt{\frac{2R_2}{\varrho} - 1}\,,$$

откуда в силу очевидного неравенства $\varrho \geqslant R_2 - r_0$ получаем

$$h(G,\, G \overset{*}{-} B_h(0)) \leqslant h\sqrt{\frac{2R_2}{R_2 - r_0} - 1} = h\sqrt{\frac{R_2 + r_0}{R_2 - r_0}}\,. \tag{4.4.17}$$

Так как $B_{R_1}(0) \overset{*}{-} A = G \overset{*}{-} B_h(0)$, то из формул (4.4.11), (4.4.10) и (4.4.17) получаем утверждение теоремы. □

Лемма 4.4.2. *Пусть даны множества A_1 и A_2 из $\mathcal{H}$ такие, что $A_i \subset B_{r_0}(a_i)$, где $a_i \in \mathcal{H}$, $i \in \overline{1,2}$ и пусть $R > r_0 + h(A_1, A_2)$.*

Тогда справедливо неравенство

$$h(\operatorname{strco}_R A_1,\, \operatorname{strco}_R A_2) \leqslant \sqrt{\frac{R + r_0}{R - r_0}}\; h(A_1, A_2).$$

Доказательство. Как показано в доказательстве теоремы 4.4.4, справедливо равенство

$$h(\operatorname{strco}_R A_1,\, \operatorname{strco}_R A_2) = h(B_R(0) \overset{*}{-} A_1,\, B_R(0) \overset{*}{-} A_2).$$

Пусть число $h = h(A_1, A_2)$ и множества $G_i = B_R(0) \overset{*}{-} A_i$, $i \in \overline{1,2}$. Выберем число $t_0 > 1$ такое, что $R > r_0 + t_0 h$. Рассмотрим следующую цепочку включений для $i \in \overline{1,2}$:

$$G_i \supset B_R(0) \overset{*}{-} B_{r_0}(a_i) = B_{R-r_0}(-a_i) \supset B_{th}(-a_i) \quad \forall\, t \in (1, t_0],$$

т. е. $G \overset{*}{-} B_{th}(0) \neq \varnothing$.

Как и в доказательстве теоремы 4.4.5, получаем, что

$$h(G_i,\, G_i \overset{*}{-} B_{th}(0)) \leqslant \sqrt{\frac{R + r_0}{R - r_0}}\; th \quad \forall\, i \in \overline{1,2}, \quad \forall\, t \in (1, t_0]. \tag{4.4.18}$$

Обозначим число $\sqrt{\dfrac{R + r_0}{R - r_0}}\, h$ через k. Из включения $A_1 \subset A_2 + B_{th}(0)$ для всех $t \in (1, t_0]$ следует

$$B_R(0) \overset{*}{-} A_1 \supset (B_R(0) \overset{*}{-} A_2) \overset{*}{-} B_{th}(0).$$

Но из оценки (4.4.18) для любого числа $\varepsilon > 0$ следует включение

$$G_2 \subset G_2 \overset{*}{-} B_{th}(0) + (tk+\varepsilon)B_1(0).$$

Объединяя это включение с предыдущим, получаем, что

$$G_2 \subset G_1 + (tk+\varepsilon)B_1(0) \quad \forall\, t \in (1, t_0], \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Аналогичное включение остается справедливым при перестановке в нем множеств G_1, G_2. Переходя к пределам при $t \to 1+0$ и $\varepsilon \to +0$, получаем утверждение леммы. □

Теорема 4.4.6 (М.В. Балашов, Е.С. Половинкин [11]). *Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ дано выпуклое замкнутое множество A, содержащееся в некотором шаре $B_r(a)$. Пусть $R > r > 0$. Тогда справедлива оценка*

$$h(A, \operatorname{strco}_R A) \leqslant \frac{r^2}{R}.$$

Доказательство. Очевидно включение $A \subset \operatorname{strco}_R A$. Зафиксируем произвольную граничную точку $x \in \partial(\operatorname{strco}_R A)$ такую, что $x \notin A$. Обозначим через P_A оператор ортогонального проектирования на выпуклое замкнутое множество A. Пусть $P_A x = y$. Без ограничения общности полагаем, что $y = 0$.

Пусть $p = x/\|x\|$, и множества $H_p^- = \{z \in \mathcal{H} \mid \langle p, z\rangle \leqslant 0\}$, $H_p^0 = \{z \in \mathcal{H} \mid \langle p, z\rangle = 0\}$, $H_p^+ = \{z \in \mathcal{H} \mid \langle p, z\rangle \geqslant 0\}$. Легко видеть, что $A \subset B_r(a) \cap H_p^-$. По лемме 4.2.4 множество $B_r(a) \cap H_p^0$ есть шар в подпространстве H_p^0 радиуса $\rho = \sqrt{r^2 - |\langle p, a\rangle|^2}$ с центром в точке $b = P_{H_p^0} a$. Определим множество $S = B_r(a) \cap B_R(b - p\sqrt{R^2-\rho^2}\,)$. Отметим, что $H_p^0 \cap B_R(b - p\sqrt{R^2-\rho^2}\,) = H_p^0 \cap B_r(a)$.

Покажем, что справедливо включение $A \subset S$. Для этого достаточно доказать, что $B_r(a) \cap H_p^- \subset S$. Зафиксируем точку $z \in B_r(a) \cap H_p^-$. Последнее включение означает, что $\langle p, z\rangle \leqslant 0$ и $\|z - a\| \leqslant r$. Легко показать, что справедливо равенство $a = b \pm p\sqrt{r^2-\rho^2}$. Подставляя значение a, получаем, что $\|z - b \pm p\,\sqrt{r^2-\rho^2}\,\| \leqslant r$.

Возведя последнее неравенство в квадрат и учитывая, что $\langle p, b\rangle = 0$, получим $\|z-b\|^2 \pm 2\,\sqrt{r^2-\rho^2}\,\langle p, z\rangle \leqslant \rho^2$. Так как $\langle p, z\rangle \leqslant 0$, то мы лишь усилим последнее неравенство, заменив коэффициент $\pm\sqrt{r^2-\rho^2}$ на больший $\sqrt{R^2-\rho^2}$. В итоге получим $\|z-b\|^2 + 2\,\sqrt{R^2-\rho^2}\,\langle p, z\rangle \leqslant \rho^2$, откуда следует $z \in B_R(b - \rho\,\sqrt{R^2-\rho^2}\,)$, т. е. $z \in S$.

Итак, $A \subset S$, следовательно, и $\operatorname{strco}_R A \subset S$, так как S является $B_R(0)$-сильно выпуклым множеством.

Покажем, что справедливо равенство

$$S \cap H_p^+ = H_p^+ \cap B_R(b - p\sqrt{R^2-\rho^2}\,). \tag{4.4.19}$$

Для доказательства равенства (4.4.19) достаточно доказать включение

$$H_p^+ \cap B_r(a) \supset H_p^+ \cap B_R(b - p\sqrt{R^2-\rho^2}\,).$$

Для определенности считаем, что $a = b - p\sqrt{R^2-\rho^2}$ (случай $a = b + p\sqrt{R^2-\rho^2}$ доказывается аналогично). Зафиксируем точку z из правой части последнего включения. Это значит, что $\langle p, z\rangle \geqslant 0$ и $\|z - b + p\sqrt{R^2-\rho^2}\,\| \leqslant R$, т. е. $\|z-b\|^2 + 2\sqrt{R^2-\rho^2}\,\langle p,z\rangle \leqslant \rho^2$, откуда, учитывая, $\langle p, z\rangle \geqslant 0$, получаем $\|z-b\|^2 + 2\sqrt{r^2-\rho^2}\,\langle p,z\rangle \leqslant \rho^2$, т. е. $z \in B_r(b - p\sqrt{r^2-\rho^2}\,) = B_r(a)$. Итак, равенство (4.4.19) доказано.

Из включения $\mathrm{strco}_R A \subset S$ и формулы (4.4.19) получаем, что

$$\varrho(x, A) = \|x - 0\| \leqslant \\ \leqslant \sup\{\varrho(z, H_p^0) \mid z \in \partial B_R(b - p\sqrt{R^2-\rho^2}\,),\ \langle p, z\rangle \geqslant 0\}.$$

Покажем, что последний супремум, который обозначим через I, равен $R^2 - \sqrt{R^2-\rho^2}$.

Взяв $z_0 = b - p\sqrt{R^2-\rho^2} + pR$, получим

$$\varrho(z_0, H_p^0) = R - \sqrt{R^2-\rho^2} \leqslant I.$$

Взяв произвольную точку $q \in \partial B_1(0)$ и соответствующую точку $z = b - p\sqrt{R^2-\rho^2} + qR$, из условия $\langle p, z\rangle \geqslant 0$ получаем, что $\langle p, q\rangle \geqslant \sqrt{R^2-\rho^2}/R$. Отсюда в силу того, что $\varrho(z, H_p^0) = |\langle p, z\rangle|$, получаем

$$|\langle p, z\rangle| = \langle p, z\rangle = \langle p, q\rangle R - \sqrt{R^2-\rho^2} \leqslant R - \sqrt{R^2-\rho^2}\,.$$

Итак, $I = R - \sqrt{R^2-\rho^2}$, откуда получаем, что $I \leqslant r^2/R$. Так как точка $x \in \partial(\mathrm{strco}_R A)$ выбрана произвольно, то

$$h(A, \mathrm{strco}_R A) = \sup\{\varrho(x, A) \mid x \in \partial(\mathrm{strco}_R A)\} \leqslant \frac{r^2}{R}. \ \square$$

Теорема 4.4.6 показывает, что любое выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве можно приблизить с любой точностью в метрике Хаусдорфа сильно выпуклым множеством, опорная функция которого гладкая на единичной сфере (см. теорему 4.3.2).

Лемма 4.4.3. *Пусть даны множества* A_1 *и* A_2 *из* $\mathcal{H}$ *такие, что* $A_i \subset B_{r_0}(a_i)$, *где* $a_i \in \mathcal{H}$, $i \in \overline{1,2}$, *и пусть* $R \leqslant r_0 + h(A_1, A_2)$.

Тогда справедливо неравенство

$$h(\mathrm{strco}_R A_1,\, \mathrm{strco}_R A_2) \leqslant L h(A_1, A_2), \tag{4.4.20}$$

где $L = 1 + r_0^2/(R(R - r_0))$.

Доказательство. Обозначим $h = h(A_1, A_2)$. Для любого числа $t > 1$ справедливо включение

$$A_1 \subset A_2 + B_{th}(0),$$

откуда получаем

$$\overline{\mathrm{co}}\, A_1 \subset \overline{\mathrm{co}}\, A_2 + B_{th}(0),$$

причем правое множество во включении выпукло и замкнуто (см. теорему 1.13.2). Следовательно, по теореме 4.4.6, имеем

$$\mathrm{strco}_R A_1 \subset \overline{\mathrm{co}}\, A_1 + \frac{r_0^2}{R}\, t B_1(0) \subset$$
$$\subset \overline{\mathrm{co}}\, A_2 + \Big(h + \frac{r_0^2}{R}\Big) t B_1(0) \subset \mathrm{strco}_R A_2 + \Big(h + \frac{r_0^2}{R}\Big) t B_1(0).$$

Аналогичное включение справедливо при перестановке множеств A_1 и A_2. Отсюда получаем оценку

$$h(\mathrm{strco}_R A_1,\, \mathrm{strco}_R A_2) \leqslant \Big(h + \frac{r_0^2}{R}\Big) t =$$
$$= t\Big(h + \frac{r_0^2}{R(R - r_0)}\,(R - r_0)\Big) \leqslant t\Big(1 + \frac{r_0^2}{R(R - r_0)}\Big) h.$$

Переходя к пределу при $t \to 1 + 0$, получаем оценку (4.4.20). $\square$

Из полученных лемм 4.4.2 и 4.4.3 следует теорема.

Теорема 4.4.7 (М.В. Балашов, Е.С. Половинкин [11]). *Пусть числа* r_0, R, $0 < r_0 < R$, *и множества* A_1, A_2 *из гильбертова пространства* $\mathcal{H}$ *таковы, что* $B_{r_0}(0) \overset{*}{-} A_i \neq \varnothing$, $i \in \overline{1, 2}$.

Тогда справедлива оценка

$$h(\mathrm{strco}_R A_1,\, \mathrm{strco}_R A_2) \leqslant L(R, r_0) h(A_1, A_2), \tag{4.4.21}$$

где константа Липшица $L(R, r_0)$ *имеет вид*

$$L(R, r_0) = \max\left\{ \sqrt{\frac{R + r_0}{R - r_0}},\ 1 + \frac{r_0^2}{R(R - r_0)} \right\}. \tag{4.4.22}$$

Лемма 4.4.4. *Пусть* E — *равномерно выпуклое банахово пространство с модулем выпуклости* $\delta(\varepsilon)$ *(см. определение* 2.7.1).

Тогда для любых точек $x, y \in E$, $0 < \|x - y\| < 2R$, *внутренность множества* $\mathrm{strco}_{B_R(0)}\{x, y\}$ *непуста, точнее, верно включение*

$$B_{R\delta\left(\frac{\|x-y\|}{R}\right)}\Big(\frac{x + y}{2}\Big) \subset \mathrm{strco}_{B_R(0)}\{x, y\}. \tag{4.4.23}$$

Доказательство. Множество $\operatorname{strco}_{B_R(0)}\{x, y\}$, очевидно, непусто, так как из условия $\|x - y\| < 2R$ следует, что существует шар

$$B_R\left(\frac{x+y}{2}\right) \supset \{x, y\}.$$

Рассмотрим произвольную точку a такую, что $B_R(a) \supset \{x, y\}$. Из последнего включения следует, что $\{(x-a)/R,\ (y-a)/R\} \subset B_1(0)$. По определению модуля выпуклости $\delta(\varepsilon)$ получаем включение

$$B_{\delta\left(\frac{\|x-y\|}{R}\right)}\left(\frac{x+y-a}{2R}\right) \subset B_1(0),$$

откуда, умножая обе части включения на $R > 0$, получаем

$$\frac{x+y}{2} + B_{R\delta\left(\frac{\|x-y\|}{R}\right)}(0) \subset B_R(a),$$

причем $\delta(\|x-y\|/R) > 0$ так как $x \neq y$. Поскольку шар $B_R(a)$ был произвольным, то по определению R-сильно выпуклой оболочки двух точек $\{x, y\}$ получаем включение (4.4.23). $\square$

§ 4.5. О телах постоянной ширины

В данном параграфе мы рассмотрим широко известный класс выпуклых множеств, которые называются *телами постоянной ширины* (см., например, [20, 65, 126]). Мы приведем явную формулу вычисления тел постоянной ширины.

В банаховом пространстве E *шириной множества* $A \subset E$ *в направлении* $p \in E^*$, $\|p\|_* = 1$, называется величина

$$\sup\{\langle p, x\rangle \mid x \in A\} - \inf\{\langle p, x\rangle \mid x \in A\} = s(p, A) + s(-p, A),$$

равная расстоянию между опорными к A гиперплоскостями вида $\{x \in E \mid \langle p, x\rangle = s(p, A)\}$ и $\{x \in E \mid \langle -p, x\rangle = s(-p, A)\}$.

Диаметром множества $A \subset E$ называется величина $\operatorname{diam} A = \sup\limits_{x,y \in A} \|x - y\|$.

Отметим некоторые свойства диаметра множества.

Лемма 4.5.1. *Пусть $A \subset E$ — ограниченное выпуклое замкнутое множество, и его диаметр* $\operatorname{diam} A$ *равен числу d.*

Тогда справедливы формула

$$\operatorname{diam} A = \sup_{\|p\|_*=1} (s(p, A) + s(-p, A)) \tag{4.5.1}$$

и включение

$$A + (-A) \subset B_d(0). \tag{4.5.2}$$

Доказательство. Так как функция $p \to (s(p, A) + s(-p, A))$, очевидно, является опорной функцией выпуклого множества $A + (-A)$, то из свойств опорной функции и из формулы (4.5.1) для диаметра множества следует второе включение.

Обозначим правую часть выражения (4.5.1) через d_1 и докажем равенство $d = d_1$. В силу определения $\operatorname{diam} A$ существуют точки a_n, $b_n \in A$ такие, что $d = \lim\limits_{n \to \infty} \|a_n - b_n\|$. По следствию из теоремы Хана–Банаха (см. упр. 1.9.10) существуют линейные функционалы $p_n \in E^*$, $\|p_n\|_* = 1$, такие, что справедливы равенства $\langle p_n, a_n - b_n \rangle = \|a_n - b_n\|$ для всех n. Поэтому

$$\|a_n - b_n\| = \langle p_n, a_n - b_n \rangle \leqslant s(p_n, A) + s(p_n, -A) \leqslant d_1.$$

Обратно, для любого $p \in E^*$, $\|p\|_* = 1$, и $\varepsilon > 0$ существуют точки $a_p, b_p \in A$ такие, что справедливы равенства $s(p, A) \leqslant \langle p, a \rangle + \varepsilon$, $s(p, -A) \leqslant \langle p, -b_p \rangle + \varepsilon$. Отсюда получаем, что для любого $p \in E^*$, $\|p\|_* = 1$, справедлива оценка

$$s(p, A) + s(p, -A) \leqslant \langle p, a_p - b_p \rangle + 2\varepsilon \leqslant \|a_p - b_p\| + 2\varepsilon \leqslant d + 2\varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$, откуда следует, что $d_1 \leqslant d$. Этим в итоге и доказано равенство (4.5.1). $\square$

Определение 4.5.1. Замкнутое ограниченное выпуклое множество $A \subset E$ называется *телом постоянной ширины* $d > 0$, если его ширина по всем направлениям $p \in E^*$, $\|p\|_* = 1$, постоянна и равна d, т. е. справедливо равенство

$$s(p, A) + s(-p, A) = d \quad \forall\, p \in \partial B_1^*(0).$$

Из определения тела постоянной ширины и из леммы 4.5.1, очевидно, следует

Лемма 4.5.2. *Ограниченное выпуклое замкнутое множество A из рефлексивного банахова пространства E является телом постоянной ширины d тогда и только тогда*, *когда справедливо равенство*

$$A + (-A) = B_d(0). \tag{4.5.3}$$

Приведем некоторые из известных утверждений, описывающих характеристические свойства тел постоянной ширины из $\mathbb{R}^n$. Для этого введем еще одно определение.

Ограниченное множество из $\mathbb{R}^n$ называется *полным множеством*, когда невозможно присоединить к нему точку без того, чтобы его диаметр не увеличился.

Предложение 4.5.1. *Выпуклый компакт из* $\mathbb{R}^n$ *является телом постоянной ширины тогда и только тогда, когда при* $m \geqslant 2$ *все ортогональные проекции этого компакта на* m*-мерное подпространство обладают постоянной шириной* (см. [119]).

Предложение 4.5.2. *У тела постоянной ширины из* $\mathbb{R}^n$ *вписанный и описанный шары концентричны и образуют минимальный шаровой слой* (см. [20, 120, 144]).

Предложение 4.5.3. *Множество из* $\mathbb{R}^n$ *является телом постоянной ширины тогда и только тогда, когда оно полно* (для $n = 2, 3$ см. [150], для любого n см. [139]).

Предложение 4.5.4. *Для каждого компакта диаметра* d *из конечномерного банахова пространства существует тело постоянной ширины* d, *содержащее данный компакт, если*:

1) *норма пространства евклидова* (для $n = 2$ см. [160, 164], для любого n см. [146]);

2) *для любых норм в двумерном пространстве* (см. [31, 126]);

3) *норма такова, что единичный шар является параллелотопом* (см. [126]);

4) *норма такова, что единичный шар является порождающим множеством* (см. [52]).

В свойстве 4) конечномерность пространства не обязательна.

Предложение 4.5.5. *Все плоские тела постоянной ширины* d *имеют длину* πd (*см.* [114]).

Тела постоянной ширины, принадлежащие евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, (со времени Эйлера; см. [131]), принято называть *орбиформами*. Простейший пример орбиформы, отличной от круга, дает так называемый *треугольник Рело* (см. [165]), т. е. правильный криволинейный треугольник, граница которого состоит из круговых дуг. Иными словами, треугольник Рело ширины 1 есть сильно выпуклая оболочка радиуса 1 равностороннего треугольника со стороной длины 1. Другим примером орбиформы является сильно выпуклая оболочка радиуса 1 выпуклого многоугольника с нечетным числом вершин, все диагонали которого равны 1 (рис. 19).

Рис. 19

В то время как в $\mathbb{R}^2$ существуют тела постоянной ширины, граница которых состоит из круговых дуг, в $\mathbb{R}^3$ уже не существуют тела постоянной ширины (кроме шара), граница которых состоит из конечного числа кусков сфер. Например, если P, Q, R, S — вершины правильного тетраэдра в $\mathbb{R}^3$ с длиной ребра d, то пересечение четырех шаров радиуса d с центрами в вершинах тетраэдра уже не является телом постоянной ширины d, так как расстояние между противоположными дугами, например, $\widehat{PQ}$ и $\widehat{RS}$, больше, чем d.

Простой пример тела постоянной ширины в $\mathbb{R}^3$ получается при вращении плоского тела постоянной ширины вокруг его оси симметрии (см, например, [20, 171, 151]). Отметим, что в работе [128] приведены примеры норм конечномерных банаховых пространств, в которых утверждение предложения 4.5.4 не справедливо.

Несмотря на активное исследование тел постоянной ширины в дифференциальной геометрии, теоретической механике и выпуклом анализе, общего алгоритма их построения даже в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ до сих пор не существовало. Ниже мы приводим алгоритм построения тела постоянной ширины d, содержащего заданное множество диаметра d.

Теорема 4.5.1 (Е.С. Половинкин [86]). *Пусть E — рефлексивное банахово пространство, в котором шар $B_1(0)$ является порождающим множеством. Для всякого ограниченного множества $A \subset \subset E$, диаметр которого равен $d > 0$, множество*

$$A_0 = \frac{1}{2}((B_d(0) \overset{*}{-} (-A)) + (B_d(0) \overset{*}{-} (B_d(0) \overset{*}{-} A))) \qquad (4.5.4)$$

является телом постоянной ширины d, содержащим данное множество A.

Доказательство. Так как по лемме 4.5.1 справедливо включение (4.5.2), то оно влечет включение $A \subset B_d(0) \overset{*}{-} (-A)$. Кроме того, из определения геометрической разности следует включение $A + (B_d(0) \overset{*}{-} A) \subset B_d(0)$, откуда в свою очередь получаем включение $A \subset B_d(0) \overset{*}{-} (B_d(0) \overset{*}{-} A)$. Поэтому множество A_0 из (4.5.4) как среднее арифметическое двух выпуклых множеств, содержащих множество A, также содержит множество A.

Поскольку по условию шар $B_d(0)$ в пространстве E является порождающим множеством, а также справедливо равенство $B_d(0) = -B_d(0)$, то для множества A справедливы соотношения (см. замечание 4.1.3)

$$\begin{gathered}(B_d(0) \overset{*}{-} A) + (B_d(0) \overset{*}{-} (B_d(0) \overset{*}{-} A)) = B_d(0),\\ (B_d(0) \overset{*}{-} (-A)) + (-(B_d(0) \overset{*}{-} (B_d(0) \overset{*}{-} A))) = B_d(0).\end{gathered} \qquad (4.5.5)$$

Для простоты обозначений определим отображение $f(A)$ по формуле $f(A) = B_d(0) \overset{*}{-} (-A)$. Мы показали, что справедливы включения

$A \subset f(A)$ и $A \subset f^2(A) = f(f(A)) = B_d(0) \overset{*}{-} (-(B_d(0) \overset{*}{-} (-A))) = B_d(0) \overset{*}{-} (B_d(0) \overset{*}{-} A)$. Поэтому приведенные выше соотношения (4.5.5) принимают вид

$$f^2(A) + (-f(A)) = B_d(0) = -f^2(A) + f(A).$$

Множество A_0 из (4.5.4) принимает вид $A_0 = \frac{1}{2}\,(f(A) + f^2(A))$. По доказанному выше $A \subset A_0$ и

$$\begin{aligned} A_0 + (-A_0) &= \frac{1}{2}\,(f(A) + f^2(A)) + \frac{1}{2}\,((-f(A)) + (-f^2(A))) = \\ &= \frac{1}{2}\,(f^2(A) + (-f(A))) + \frac{1}{2}\,(-f^2(A) + f(A)) = \\ &= \frac{1}{2}\,B_d(0) + \frac{1}{2}\,B_d(0) = B_d(0). \end{aligned}$$

В силу леммы 4.5.2 последнее равенство означает, что множество A_0 имеет постоянную ширину d. $\square$

Отметим следующие очевидные следствия.

Следствие 4.5.1. *Опорная функция тела A_0 постоянной ширины d из* (4.5.4) *имеет вид*

$$s(p, A_0) = \frac{1}{2}\,(d\|p\| + \mathrm{co}\,(d\|p\| - s(-p, A)) - \mathrm{co}\,(d\|p\| - s(p, A)))\,.$$

Следствие 4.5.2. *Если в рефлексивном банаховом пространстве, единичный шар которого является порождающим множеством, множество A диаметра d имеет центр симметрии в некоторой точке a, то телом постоянной ширины d, содержащим данное множество является шар $B_{d/2}(a)$.*

В самом деле, так как в силу симметрии множества справедливо равенство $-A = A - 2a$, то из формул (4.5.4) и (4.5.5) сразу следует утверждение следствия.

Таким образом, по формуле (4.5.4) нетривиальные тела постоянной ширины можно построить лишь для множеств, не являющихся центрально симметричными.

Для произвольного ограниченного множества (диаметра $d > 0$), очевидно, могут существовать целые семейства различных тел постоянной ширины d, каждое из которых содержит заданное множество. Формула (4.5.4) описывает одно из таких множеств.

Приведем пример использования теоремы 4.5.1.

В книге [29, с. 60] сформулирована проблема, поставленная Л. Данцером. *Пусть выпуклое тело $A \subset \mathbb{R}^n$ является гладким. Существует ли гладкое выпуклое тело постоянной ширины $d = \mathrm{diam}\,A$, содержащее заданное тело A?*

Ниже, опираясь на теорему 4.5.1, покажем, что данная проблема имеет положительное решение, причем не только для множеств из пространства $\mathbb{R}^n$, но и для множеств из произвольного гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Для простоты изложения будем считать, что диаметр заданного выпуклого тела $A \subset \mathcal{H}$ равен единице.

Напомним, что выпуклое множество $A \subset \mathcal{H}$ называется *гладким*, если в каждой его граничной точке существует единственная опорная гиперплоскость.

Лемма 4.5.3. *Пусть даны выпуклые замкнутые ограниченные множества A, $B \subset \mathcal{H}$, причем множество A является гладким телом (т. е. имеет непустую внутренность).*

Тогда множество $C = A + B$ также будет гладким телом.

Доказательство. Так как множество A является выпуклым телом, то и множество C является выпуклым телом. Следовательно, по теореме отделимости в каждой граничной точке множества C существует по крайней мере одна опорная гиперплоскость. Допустим, найдется точка $c \in \partial C$ такая, что в этой точке c существуют две опорные ко множеству C гиперплоскости с внешними единичными нормалями p_1 и p_2. Поскольку справедливо равенство для опорных множеств $A(p) + B(p) = C(p)$ при любом единичном векторе $p \in \mathcal{H}$, то в силу включения $c \in C(p_1) \cap C(p_2)$ существуют точки $a \in A(p_1) \cap \cap A(p_2)$ и $b \in B(p_1) \cap B(p_2)$, для которых справедливо равенство $c = a + b$. Таким образом, в точке $a \in A$ есть две опорные ко множеству A гиперплоскости с внешними нормалями p_1 и p_2, что противоречит гладкости множества A. $\square$

Теорема 4.5.2 (М.В. Балашов). *Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — замкнутое выпуклое гладкое множество (состоящее более чем из одной точки), и пусть $B_1(0) \overset{*}{-} A \neq \varnothing$.*

Тогда множество $\operatorname{strco}_1 A$ является гладким телом.

Доказательство. В силу леммы 4.4.1 множество $B_1(0) \overset{*}{-} (B_1(0) \overset{*}{-} A) = \operatorname{strco}_1 A$ как непустое пересечение шаров в гильбертовом пространстве является телом. Проведем доказательство его гладкости от противного. Допустим, что найдутся точка $x \in \partial \operatorname{strco}_1 A \backslash A$ и различные векторы $p_1, p_2 \in \mathcal{H}$ единичной длины такие, что $\langle p_k, x \rangle = s(p_k, \operatorname{strco}_1 A)$ при любых $k \in \overline{1,2}$. В силу опорного принципа (см. теорему 4.1.3) получаем включение

$$\operatorname{strco}_1 A \subset B_1(x - p_1) \cap B_1(x - p_2). \qquad (4.5.7)$$

Определим точки $z_k = x - p_k$, $k \in \overline{1,2}$, и число $r = \sqrt{1 - \|z_1 - z_2\|^2/4}$. Тогда с учетом включения (4.5.7) получаем цепочку включений
$$\operatorname{strco}_1 A \subset B_1(z_1) \cap B_1(z_2) \subset B_r\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right),$$
при этом справедливо включение $x \in \partial B_r((z_1 + z_2)/2)$. Определим единичный вектор $p = (2x - (z_1 + z_2)/\|2x - (z_1 + z_2)\|$. Тогда справедливо включение
$$B_r\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \subset B_1(x - p).$$
Для простоты будем далее считать, что $(z_1 + z_2)/2 = 0$. Отсюда, в частности, получаем, что $\|x\| = r$.

Так как $x \notin A$, то в силу замкнутости множества A существует число $\delta \in (0, r)$ такое, что $B_\delta(x) \cap A = \varnothing$.

Покажем, что справедливо включение $B_r(0) \backslash B_\delta(x) \subset B_r(0) \cap H_p^-$, где $H_p^- = \{z \in \mathcal{H} \mid \langle p, z\rangle \leqslant r - \delta^2/(2r)\}$.

Зафиксируем точку $z \in B_r(0) \backslash B_\delta(x)$, т. е. $\|z\| \leqslant r$ и $\|z - x\|^2 \geqslant \delta^2$. Из последних неравенств получаем $2\langle z, x\rangle \leqslant \|x\|^2 - \delta^2 + \|z\|^2 \leqslant 2r^2 - \delta^2$. Отсюда
$$\langle p, z\rangle = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, z\right\rangle = \frac{1}{r}\langle x, z\rangle \leqslant r - \frac{\delta^2}{2r},$$
т. е. $z \in H_p^-$, что и требовалось доказать.

Определим число $l = \delta^2/(2r)$ и шар вида $V = B_1(x - (l + \sqrt{1 + l^2 - \delta^2})p)$.

Во-первых, докажем неравенство $\langle p, x\rangle > s(p, V)$, т. е. $x \notin V$. Действительно,
$$s(p, V) = \langle p, x\rangle - l - \sqrt{1 + l^2 - \delta^2} + 1,$$
$$\langle p, x\rangle - s(p, V) = l + \sqrt{1 + l^2 - \delta^2} - 1 > 0,$$
так как $2l > \delta^2$ (ибо $r \in (0, 1)$).

Во-вторых, докажем включение $B_r(0) \cap H_p^- \subset V$. Для этого выберем произвольную точку $z \in B_r(0) \cap H_p^-$, т. е. $\langle p, z\rangle \leqslant r - l$ и $\|z\| \leqslant r$. Существуют вектор q и число $\lambda \in \mathbb{R}$ такие, что $\langle p, q\rangle = 0$, а точка z представима в виде $z = \lambda p + q$. Легко видеть, что в силу выбора точки z из множества $B_r(0) \cap H_p^-$ следует включение $\lambda \in [-r, r - l]$. Далее, $\|z\|^2 = \lambda^2 + \|q\|^2 \leqslant r^2$, и, учитывая, что $x = rp$, получаем
$$\begin{aligned}\|z + (l + \sqrt{1 + l^2 - \delta^2} - r)p\|^2 &= \\ = \|q + (\lambda + l + \sqrt{1 + l^2 - \delta^2} - r)p\|^2 &+ \|q\|^2 + \\ + (\lambda + l + \sqrt{1 + l^2 - \delta^2} - r)^2 &\leqslant r^2 - \lambda^2 + \\ + (\lambda + l + \sqrt{1 + l^2 - \delta^2} - r)^2 &= \varphi(\lambda).\end{aligned}$$

Так как функция $\varphi(\lambda)$ является линейной и возрастает, то максимальное значение $\varphi_{\max}$ функции φ на отрезке $[-r, r-l]$ достигается при значении $\lambda = r - l$. Отсюда в силу того, что $2rl = \delta^2$, получаем

$$\varphi_{max} = \varphi(r-l) = r^2 - (r-l)^2 + \\ + (r - l + l + \sqrt{1 + l^2 - \delta^2} - r)^2 = \\ = 2rl - l^2 + 1 + l^2 - \delta^2 = 1.$$

Итак, справедливо включение $z \in V$.

Таким образом, $A \subset B_1(z_1) \cap B_1(z_2) \subset B_r(0) \subset V$, а $x \notin V$. Но поскольку множество V является шаром радиуса 1, то по определению R-сильно выпуклой оболочки множества A (при радиусе $R = 1$) получаем, что $x \notin \operatorname{strco}_1 A$. Получили противоречие. Следовательно, $x \in A$. Но поскольку справедливо включение $x \in A \subset B_1(z_1) \cap B_1(z_2)$, то две гиперплоскости с нормалями p_1 и p_2, проходящие через точку x, являются опорными гиперплоскостями ко множеству A в одной точке x. Это противоречит гладкости множества A. □

Следствие 4.5.3. *Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — выпуклое гладкое множество диаметра $d = 1$. Тогда множество A_0, вычисляемое по формуле* (4.5.4) *при $d = 1$ (и являющееся в силу теоремы 4.5.1 множеством постоянной ширины 1, содержащим заданное множество A) есть гладкое множество.*

Доказательство. В силу теоремы 4.5.2 множество $\operatorname{strco}_1 A$ является гладким телом, а по лемме 4.5.3 множество A_0 как полусумма гладкого тела $\operatorname{strco}_1 A$ и выпуклого множества также является гладким телом. □

Замечание 4.5.1. Легко показать, что всякое тело постоянной ширины в конечномерном банаховом пространстве обладает непустой внутренностью.

Покажем, что это же свойство справедливо и для тел постоянной ширины в равномерно выпуклых банаховых пространствах, т. е., например, в гильбертовых пространствах.

Лемма 4.5.4. *Пусть A_0 — тело постоянной ширины $d > 0$ в равномерно выпуклом банаховом пространстве E. Тогда $\operatorname{int} A_0 \neq \varnothing$.*

Доказательство. Полагаем, что $d = 1$. По определению тела постоянной ширины справедливо равенство $A_0 + (-A_0) = B_1(0)$, откуда $A_0 = \bigcap\limits_{a \in A_0} B_1(a)$, т. е. $\operatorname{strco}_{B_1(0)} A_0 = A_0$. Для любых точек $x, y \in A_0$, $x \neq y$, по свойству M-сильно выпуклой оболочки справедливо включение $\operatorname{strco}_{B_1(0)}\{x, y\} \subset A_0$. Пусть $\delta(\varepsilon)$ есть модуль выпуклости прост-

ранства E (см. определение 2.7.1). По лемме 4.4.4 справедливо включение
$$B_{\delta(\|x-y\|)}\left(\frac{x+y}{2}\right) \subset \operatorname{strco}_{B_1(0)}\{x, y\},$$
что и доказывает лемму. $\square$

Упражнение 4.5.1. Доказать предложения 4.5.1–4.5.5.

Упражнение 4.5.2. Доказать, что всякое тело постоянной ширины в конечномерном банаховом пространстве имеет непустую внутренность.

Упражнение 4.5.3. Доказать, что тело постоянной ширины из $\mathbb{R}^3$, получаемое вращением треугольника Рело вокруг его оси симметрии, не является порождающим множеством.

§ 4.6. Теорема Каратеодори для M-сильно выпуклых оболочек

Докажем теорему, являющуюся обобщением теоремы Каратеодори и теоремы 3.4.1 в случае, когда вместо обычной выпуклой оболочки или R-сильно выпуклой оболочки множества из $\mathbb{R}^n$ рассматривается M-сильно выпуклая оболочка множества, причем выбранное порождающее множество M является строго выпуклым компактом из $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4.6.1 (М.В. Балашов, Е.С. Половинкин [11]). *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ есть компактное строго выпуклое порождающее множество. Пусть A — компактное подмножество из $\mathbb{R}^n$ такое, что $M \overset{*}{-} A \neq \varnothing$.*

Тогда любая точка множества $\operatorname{strco}_M A$ принадлежит M-сильно выпуклой оболочке некоторого подмножества из A, состоящего не более чем из $n+1$ точек.

Доказательство. 1. Предположим, что $\operatorname{int}(M \overset{*}{-} A) \neq \varnothing$.

Зафиксируем произвольную точку $u \in \partial(\operatorname{strco}_M A)$. Так как множество M строго выпукло, то и множество $\operatorname{strco}_M A$ также является строго выпуклым, т. е. все его граничные точки являются выступающими.

По определению выступающей точки для точки u найдется вектор $p \in \partial B_1(0)$ такой, что $\langle p, u\rangle = s(p, \operatorname{strco}_M A)$ и
$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x\rangle = \langle p, u\rangle\} \cap \operatorname{strco}_M A = \{u\}. \tag{4.6.1}$$

По теореме 4.4.1 и по лемме 1.14.3 получаем
$$s(p, \operatorname{strco}_M A) = s(p, M) - \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} (s(p_i, M) - s(p_i, A)) \,\Big|\, \sum_{i=1}^{n} p_i = p \right\},$$

а в силу непустоты внутренности множества $M \overset{*}{-} A$ по теореме 1.14.4 инфимум при вычислении выпуклой оболочки разности опорных функций $s(p,M)-s(p,A)$ достигается. Поэтому найдется набор векторов $\{p_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\sum\limits_{i=1}^n p_i = p$ и

$$s(p, \operatorname{strco}_M A) = s(p,M) - \sum_{i=1}^n (s(p_i,M) - s(p_i,A))$$

При $p_i \neq 0$ выберем $x_i \in A$ так, чтобы $\langle p_i, x_i\rangle = s(p_i, A)$. При $p_i = 0$ выберем $x_i \in A$ произвольно. Обозначим множество точек $\{x_i\}_{i=1}^n \subset A$ через S. Тогда по теореме 4.4.2 справедливо включение $\operatorname{strco}_M S \subset$ $\subset \operatorname{strco}_M A$, откуда $s(p, \operatorname{strco}_M S) \leqslant s(p, \operatorname{strco}_M A)$. С другой стороны,

$$s(p, \operatorname{strco}_M S) = s(p,M) - \inf\left\{ \sum_{i=1}^n (s(q_i,M) - s(q_i,S)) \,\Big|\, \sum_{i=1}^n q_i = p \right\} \geqslant$$
$$\geqslant s(p,M) - \sum_{i=1}^n (s(p_i,M) - s(p_i,S)) = s(p, \operatorname{strco}_M A).$$

Отсюда следует равенство $s(p, \operatorname{strco}_M S) = s(p, \operatorname{strco}_M A)$, которое вместе с равенством (4.6.1) доказывает включение $u \in \operatorname{strco}_M S$.

Итак, любая точка границы множества $\operatorname{strco}_M A$ содержится в M-сильно выпуклой оболочке подмножества из A, содержащего не более чем n точек.

Пусть $x \in \operatorname{strco}_M A \backslash \partial(\operatorname{strco}_M A)$. Найдутся точки $u_0 \in \partial(\operatorname{strco}_M A)$ и $w_0 \in A$ такие, что $x \in [u_0, w_0]$. Как показано выше, для граничной точки u_0 найдется множество S_0, состоящее не более чем из n точек компакта A и такое, что точка u_0 принадлежит $\operatorname{strco}_M S_0$. Из теоремы 4.4.2 получаем

$$x \in \operatorname{co}\{(\operatorname{strco}_M S_0) \cup \{w_0\}\} \subset \operatorname{strco}_M\{(\operatorname{strco}_M S_0) \cup \{w_0\}\} \subset$$
$$\subset \operatorname{strco}_M\{S_0 \cup \{w_0\}\}.$$

2. Пусть $\operatorname{int}(M \overset{*}{-} A) = \varnothing$. Без ограничения общности будем считать, что $0 \in \operatorname{co} A \subset M$ и $0 \in \operatorname{int} M$. Пусть число $\lambda \in (0,1)$. Тогда $\operatorname{co}(\lambda A) \subset \operatorname{co} A$, откуда следует, что $M \overset{*}{-} A \subset M \overset{*}{-} (\lambda A)$. С другой стороны, поскольку геометрическая разность является полунепрерывным сверху многозначным отображением (см. теорему 2.8.2), то получаем, что $h(M \overset{*}{-} (\lambda A), (M \overset{*}{-} A)) \to 0$ при $\lambda \to 1-0$. Отсюда, воспользовавшись формулой для опорной функции M-сильно выпуклой оболочки (см. теорему 4.4.1), получаем, что

$$\lim_{\lambda \to 1-0} h(\operatorname{strco}_M(\lambda A), \operatorname{strco}_M A) = 0. \tag{4.6.2}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\operatorname{int}(M \overset{*}{-} (\lambda A)) \neq \varnothing \quad \forall\, \lambda \in (0,1). \tag{4.6.3}$$

Зафиксируем точку $x \in \operatorname{strco}_M A$ такую, что $x \notin A$, и выберем последовательность чисел $\lambda_k \in (0,1)$, сходящуюся при $k \to \infty$ к числу 1. В силу равенства (4.6.2) найдется последовательность точек $x_k \in \operatorname{strco}_M(\lambda_k A)$, сходящаяся к точке x. В силу (4.6.3) и п. 1 доказательства теоремы для каждого номера $k \in \overline{1,\infty}$ найдутся точки $\{u_{ik}\}_{i=1}^{n+1} \subset (\lambda_k A)$ такие, что $x_k \in \operatorname{strco}_M\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n+1}\{u_{ik}\}\Big)$. Без ограничения общности можно считать, что найдутся точки $u_i \in A$, $i \in \overline{1,n+1}$, такие, что для каждого номера i последовательность $u_{ik} \to u_i$ при $k \to \infty$.

Как следует из теоремы 2.8.4, операция непустого пересечения фиксированного числа сдвигов одного и того же строго выпуклого множества непрерывна, откуда следует, что

$$h\bigg(M \overset{*}{-} \bigcup_{i=1}^{n+1}\{u_{ik}\},\ M \overset{*}{-} \bigcup_{i=1}^{n+1}\{u_i\}\bigg) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Так как, кроме того, по определению сильно выпуклой оболочки для каждого номера k справедливо равенство

$$\operatorname{strco}_M\bigg(\bigcup_{i=1}^{n+1}\{u_{ik}\}\bigg) + \bigg(M \overset{*}{-} \bigg(\bigcup_{i=1}^{n+1}\{u_{ik}\}\bigg)\bigg) = M,$$

то в итоге получаем, что

$$h\bigg(\operatorname{strco}_M\bigg(\bigcup_{i=1}^{n+1}\{u_{ik}\}\bigg),\ \operatorname{strco}_M\bigg(\bigcup_{i=1}^{n+1}\{u_i\}\bigg) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Последнее эквивалентно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся достаточно большие k, при которых

$$x \in x_k + B_\varepsilon(0) \subset \operatorname{strco}_M\bigg(\bigcup_{i=1}^{n+1}\{u_{ik}\}\bigg) + B_\varepsilon(0) \subset$$
$$\subset \operatorname{strco}_M\bigg(\bigcup_{i=1}^{n+1}\{u_i\}\bigg) + B_{2\varepsilon}(0).$$

Отсюда следует, что $x \in \operatorname{strco}_M\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1}\{u_i\}\Big)$. $\square$

З а м е ч а н и е 4.6.1. Доказанная выше теорема верна и в случае произвольного компактного порождающего множества M (а не только строго выпуклого). Однако доказательство этого факта выходит за рамки данной книги.

У п р а ж н е н и е 4.6.1. Выведите из теоремы 4.6.1 теорему Каратеодори (теорему 1.14.1) для случая компактного множества.

§ 4.7. Обобщение теоремы Крейна–Мильмана

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}$. Введем полезные обозначения: определим луч с вершиной в точке $a \in \mathcal{H}$ и направлением $q \in \partial B_1(0)$ по формуле

$$l(a,q) = \{a + \lambda q \,|\, \lambda \geqslant 0\}$$

и <верхнюю> (в смысле направления q) полусферу сферы $\partial B_r(a)$

$$\partial B_r(a,q) = \{x \in \mathcal{H} \,|\, \|x-a\| = r,\ \langle q, x-a\rangle \geqslant 0\}.$$

Определение 4.7.1. Для множества $A \subset \mathcal{H}$ точка $x \in A$ называется *R-сильно крайней*, если для любых двух точек $y, z \in A$, $y \neq x$, $z \neq x$, выполнено $x \notin \operatorname{strco}_R\{y,z\}$. Будем обозначать множество R-сильно крайних точек A через $\operatorname{extr}_R A$.

Определение 4.7.2. Для множества $A \subset \mathcal{H}$ точка $x \in A$ называется *R-выступающей*, если существует шар радиуса R с центром в точке z такой, что $A \subset B_R(z)$ и $A \cap \partial B_R(z) = \{x\}$. Будем обозначать множество R-выступающих точек A через $\exp_R A$.

Отметим, что если $\operatorname{strco}_R A \cap \operatorname{extr}_R A \neq \varnothing$, то $\operatorname{extr}_R A \subset \operatorname{extr} A$ и $\overline{\operatorname{co}}\, A \subset \operatorname{strco}_R A$.

Лемма 4.7.1. *Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — замкнутое ограниченное множество, и пусть $x \in \exp_R A$. Тогда $x \in \operatorname{extr}_R A$.*

Доказательство. Поскольку точка x является R-выступающей, то найдется шар $B_R(z_0)$ такой, что

$$A \subset B_R(z_0), \quad A \cap \partial B_R(z_0) = \{x\}. \tag{4.7.1}$$

Допустим, что $x \notin \operatorname{extr}_R A$, т. е. существуют точки $y, z \in A$ такие, что $y \neq x$, $z \neq x$ и $x \in \operatorname{strco}_R\{y,z\}$. В силу условия (4.7.1) имеем $y, z \in \operatorname{int} B_R(z_0)$. Определим вектор $p = (z_0 - x)/\|z_0 - x\|$ и рассмотрим шары $B_R(z_0 + \varepsilon p)$ при различных $\varepsilon > 0$. Выбирая достаточно малое число $\varepsilon > 0$, легко добиться выполнения включений $y, z \in B_R(z_0 + \varepsilon p)$. Но для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $x \notin B_R(z_0 + \varepsilon p)$, откуда по определению R-сильно выпуклой оболочки получаем выражение $x \notin \operatorname{strco}_R\{y,z\}$. $\square$

Лемма 4.7.2. *Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — замкнутое ограниченное множество. Тогда существует всюду плотное множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$, для которого при любом выборе точки $x \in \mathcal{B}$ задача $\sup\limits_{y \in A} \|x - y\|$ имеет единственное решение.*

Указанная лемма есть частный случай теоремы 2.7.1. Докажем с помощью леммы 4.7.2 следующую лемму.

Лемма 4.7.3. *Пусть* $A \subset \mathcal{H}$ — *замкнутое множество, причем* $A \subset B_r(z_0)$, *где* $r < R$. *Тогда множество* $\exp_R A$ *непусто.*

Доказательство. Зафиксируем вектор $q \in \partial B_1(0)$. Определим число λ_q по формуле

$$\lambda_q = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid A \subset B_r(z_0 - \lambda q)\}. \tag{4.7.2}$$

Очевидно, что $\lambda_q \in [0, +\infty)$. Пусть $\{\lambda_k\}$ — максимизирующая последовательность для вычисления точной верхней грани в определении числа λ_q. Тогда $\|x - z_0 + \lambda_k q\| \leqslant r$ для $\forall\, x \in A$, откуда в пределе получаем $\|x - z_0 + \lambda_q q\| \leqslant r$ $\forall\, x \in A$, т. е. $A \subset B_r(z_0 - \lambda_q q)$.

Далее для упрощения доказательства полагаем, что $z_0 - \lambda_q q = 0$.

Зафиксируем число $\varepsilon \in (0,\ \min\{1,\ r/2,\ (R-r)/2,\ 1/\sqrt{3r}\,\})$. Тогда, очевидно, справедливы следующие соотношения (4.7.3)–(4.75):

$$B_{\varepsilon^4}(-\varepsilon q) \subset B_r(0), \tag{4.7.3}$$

$$2\varepsilon^2\sqrt{r^2 + \varepsilon^2} + \varepsilon^3 - \varepsilon^6 \leqslant 1, \tag{4.7.4}$$

$$r + \varepsilon + \varepsilon^4 < R. \tag{4.7.5}$$

По лемме 4.7.2 найдется точка $z_\varepsilon \in B_{\varepsilon^4}(-\varepsilon q)$, для которой существует единственная точка $a \in A$, удовлетворяющая равенству

$$\|z_\varepsilon - a\| = \sup_{x \in A} \|z_\varepsilon - x\| = r_\varepsilon. \tag{4.7.6}$$

Таким образом, $A \subset B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon)$ и $\partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon) \cap A = \{a\}$. Отметим, что

$$\|z_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon + \varepsilon^4. \tag{4.7.7}$$

Лемма будет доказана, если мы покажем, что $a \in \exp_R A \cap$ $\cap\ \partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon, q)$.

Зафиксируем произвольную точку $\xi \in B_{\varepsilon^4}(-\varepsilon q)$. Легко увидеть, что в силу определения шара $B_r(0)$ (где $0 = z_0 - \lambda_q q$) найдутся последовательности точек $a_k \in A$ и точек $x_k \in \partial B_r(0, q)$ такие, что $\|a_k\| \to r$ и $\alpha_k = \|x_k - a_k\| \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда

$$\sup_{x \in A} \|\xi - x\| \geqslant \|\xi - a_k\| \geqslant \|\xi - x_k\| - \alpha_k \geqslant \varrho(\xi, \partial B_r(0, q)) - \alpha_k,$$

т. е. в пределе получаем

$$\sup_{x \in A} \|\xi - x\| \geqslant \varrho(\xi,\ \partial B_r(0, q)) \geqslant \varrho(-\varepsilon q,\ \partial B_r(0, q)) - \varepsilon^4 = \sqrt{r^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon^4. \tag{4.7.8}$$

С другой стороны,

$$\sup_{x \in A} \|\xi - x\| \leqslant \sup_{x \in B_r(0)} \|\xi - x\| \leqslant r + \varepsilon + \varepsilon^4. \tag{4.7.9}$$

Из формул (4.7.8) и (4.7.9) получаем

$$\sqrt{r^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon^4 \leqslant r_\varepsilon \leqslant r + \varepsilon + \varepsilon^4. \tag{4.7.10}$$

Для векторов $-q$ и $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$, определим угол $\varphi = \varphi(x)$ между ними, точнее, определим $\cos\varphi = \langle -q, x\rangle/\|x\|$. Определим функцию $g(r,\varepsilon)$ по формуле

$$g(r,\varepsilon) = \frac{2\varepsilon^3\sqrt{r^2+\varepsilon^2} - \varepsilon^7}{r}.$$

В силу выбора числа ε легко показать, что $g(r,\varepsilon) \in (0,1)$. Поэтому определим угол φ_0:

$$\varphi_0 = \arccos g(r,\varepsilon) \in (0, \pi/2),$$

и острый конус K, симметричный относительно прямой $\mathrm{lin}[q]$, по формуле

$$K = \left\{x \in \mathcal{H} \,\middle|\, \left\langle -q, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle \geqslant \cos\varphi_0\right\} \cup \{0\}.$$

Отметим, что в силу выбора угла φ_0 для всех углов $\varphi \in [0,\varphi_0]$ имеем $\cos\varphi \geqslant g(r,\varepsilon)$, откуда в силу неравенства $r^2+\varepsilon^2-2r\varepsilon\cos\varphi \leqslant$ $\leqslant r^2+\varepsilon^2-2\varepsilon^4(\,2\sqrt{r^2+\varepsilon^2}-\varepsilon^4) < (\sqrt{r^2+\varepsilon^2}-2\varepsilon^4)^2$ получаем неравенство

$$\sqrt{r^2+\varepsilon^2-2r\varepsilon\cos\varphi} + \varepsilon^4 < \sqrt{r^2+\varepsilon^2} - \varepsilon^4. \tag{4.7.11}$$

Выбирая $\xi = z_\varepsilon$, по формуле (4.7.8) получаем неравенство

$$\|z_\varepsilon - a\| \geqslant \varrho(z_\varepsilon,\, \partial B_r(0,q)). \tag{4.7.12}$$

Допустим, что точка a, определенная в формуле (4.7.6), удовлетворяет включению $a \in K$. Это значит, что $\varphi(a) \in [0,\varphi_0]$, откуда в силу неравенства (4.7.11), выбора числа ε и того, что $a \in A \subset B_r(0)$, получаем оценки

$$\begin{gathered}\|z_\varepsilon - a\| \leqslant \|a+\varepsilon q\| + \varepsilon^4 = \sqrt{\|a\|^2+\varepsilon^2-2\|a\|\varepsilon\cos\varphi(a)} + \varepsilon^4 \leqslant \\ \leqslant \sqrt{r^2+\varepsilon^2-2r\varepsilon\cos\varphi(a)} + \varepsilon^4 < \sqrt{r^2+\varepsilon^2} - \varepsilon^4 \leqslant \varrho(z_\varepsilon,\, \partial B_r(0,q)),\end{gathered} \tag{4.7.13}$$

где заключительное неравенство следует из неравенства (4.7.8) при $\xi = z_\varepsilon$. Получили, что формулы (4.7.12), (4.7.13) противоречат друг другу, следовательно, $a \in B_r(0)\backslash K$.

Докажем включение

$$B_r(0)\backslash K \subset \{x \in \mathcal{H} \mid \langle q, x + (\varepsilon-\varepsilon^4)q\rangle \geqslant 0\} = \Pi_q. \tag{4.7.14}$$

Выберем точку $x \in B_r(0)\backslash K$, причем $x \neq 0$. Тогда очевидно, что $rx/\|x\| \in B_r(0)\backslash K$, поэтому без ограничения общности будем считать, что $\|x\| = r$.

Соотношение $x \notin K$ возможно в двух случаях:

а) $x \in \partial B_r(0,q)$, тогда включение $x \in \Pi_q$ очевидно;

б) $x \in \partial B_r(0,-q)$, причем угол между векторами x и $-q$ больше φ_0.

Тогда $(1/r)\langle x, -q\rangle \leqslant \cos\varphi_0 = g(r,\varepsilon)$, т. е.

$$\langle x, -q\rangle \leqslant r\, g(r,\varepsilon) \leqslant (\varepsilon-\varepsilon^4)\,\langle q, q\rangle,$$

последнее неравенство следует из неравенства (4.7.4). Отсюда получаем неравенство

$$\langle q,\, x + q(\varepsilon - \varepsilon^4)\rangle \geqslant 0,$$

т. е. $x \in \Pi_q$.

Включение $a \in \partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon)$ вместе с включением (4.7.14) и следующим из неравенства (4.7.7) включением

$$\Pi_q \subset \{x \in \mathcal{H} \mid \langle q, x - z_\varepsilon\rangle \geqslant 0\}$$

влечет включение $a \in \partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon, q)$. В силу неравенств (4.7.5) и (4.7.10) получаем, что $r_\varepsilon < R$. Отсюда, определяя вектор $p = (a - z_\varepsilon)/\|a - z_\varepsilon\|$, получаем, что $A \subset B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon) \subset B_R(a - Rp)$. В итоге получаем

$$\partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon) \cap \partial B_R(a - Rp) = \{a\},$$

что по определению означает включение $a \in \exp_R A \cap \partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon, q)$. $\square$

Теорема 4.7.1 (М.В. Балашов, Е.С. Половинкин [11]). *Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — замкнутое множество, причем $A \subset B_\rho(z_0)$, где $\rho < R$. Тогда справедливо включение*

$$A \subset \mathrm{strco}_R \exp_R A.$$

Доказательство. Пусть $B = \mathrm{strco}_R \exp_R A$. По лемме 4.7.3 это множество непусто.

Допустим, что существует точка $x \in A \backslash B$. В силу определения R-сильно выпуклой оболочки множества найдется шар $B_R(z)$ такой, что $B \subset B_R(z)$ и $x \notin B_R(z)$. Очевидно, что $z \neq z_0$, так как в противном случае из соотношения $x \notin B_R(z_0) \supset A$ следует соотношение $x \notin$ $\notin A$, что неверно.

Пусть точка y является проекцией точки x на шар $B_R(z)$, а число $\gamma = \|x - y\| > 0$. Положим

$$r = \begin{cases} \max\{\rho,\, (R + \gamma + \sqrt{(R-\gamma)^2 - \gamma^2}\,)/2\}, & \text{если } R \geqslant 2\gamma,\\ \rho, & \text{если } R < 2\gamma. \end{cases} \tag{4.7.15}$$

Отметим, что $\rho \leqslant r < R$.

1. Определим вектор $q = (z_0 - z)/\|z_0 - z\|$. Поскольку $B \subset B_R(z) \cap$ $\cap B_r(z_0)$ и существует точка $x \in B_r(z_0) \backslash B_R(z)$, то $\|z - z_0\| \in (R - r,$ $R + r)$. Отсюда следует включение

$$z + Rq \in B_r(z_0). \tag{4.7.16}$$

Положим

$$a_0 = z_0 + \|z_0 - x\| q \in B_r(z_0). \tag{4.7.17}$$

Тогда

$$\|a_0 - z\| = \|z - z_0\| + \|x - z_0\| \geqslant \|x - z\| > R, \tag{4.7.18}$$

т. е. $a_0 \notin B_R(z)$. Отметим, что проекция точки a_0 на шар $B_R(z)$ есть точка $z + Rq$. Так как $\|x - y\| = \|x - z\| - R$ и $\|a_0 - (z + qR)\| = \|a_0 - z\| - R$, то с учетом неравенства (4.7.18) получаем

$$\|a_0 - (z + Rq)\| = \|a_0 - z\| + \|x - y\| - \|x - z\| \geqslant \|x - y\| = \gamma. \tag{4.7.19}$$

Из включений (4.7.16), (4.7.17) и оценки (4.7.19) следует включение

$$[z + Rq,\, z + (R + \gamma)q] \subset [z + Rq,\, a_0] \subset B_r(z_0).$$

Легко видеть, что для любой точки $z_1 \in l(z, q)$ такой, что $A \subset B_r(z_1)$, отрезок $[z + Rq,\, z + (R + \gamma)q]$ принадлежит $B_r(z_1)$.

2. По лемме 4.7.3 для выбранного вектора q определим число $\lambda_q \geqslant 0$ из (4.7.2), т. е. такое, что $A \subset B_r(z_0 - \lambda_q q)$. Без ограничения общности считаем, что $z_0 - \lambda_q q = 0$, откуда $A \subset B_r(0)$.

В силу п. 1 доказательства для точки $z_1 = 0$ найдется число $\delta \geqslant \gamma$, для которого $[z + Rq,\, z + (R + \delta)q] \subset B_r(0)$ и $z + (R + \delta)q \in \partial B_r(0)$. Из последнего включения, так как $z_0 = \lambda_q q$ и $q \in \operatorname{lin}[z_0 - z]$, следует что $z + (R + \delta)q = rq$, т. е. $z = -(R - r + \delta)q$.

Зафиксируем произвольную точку $u \in \partial B_r(0, q)$, т. е. $\|u\| = r$ и $\langle u, q\rangle \geqslant 0$. В силу выбора r по формуле (4.7.15) получаем неравенство

$$\|u - z\|^2 - R^2 \geqslant 2r^2 - 2r(R + \gamma) + 2\gamma R + \gamma^2 > 0,$$

откуда

$$\exists\, \alpha > 0 \quad \forall\, u \in \partial B_r(0, q) \quad \varrho(u, B_R(z)) \geqslant \alpha. \tag{4.7.20}$$

По лемме 4.7.3 для любого $\varepsilon > 0$ найдется шар $B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon)$ (в обозначениях леммы 4.7.3) такой, что $A \subset B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon)$ и $\partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon) \cap A = \partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon, q) \cap A = \{a\}$. Выбирая малые $\varepsilon > 0$, удовлетворяющие соотношениям (4.7.3)–(4.7.5), можно удовлетворить условиям $r_\varepsilon \in [r - \alpha/4,\, r + \alpha/4]$, $\|z_\varepsilon\| \leqslant \alpha/4$ (см. (4.7.7), (4.7.10)). Зафиксируем такое ε и соответствующие ему z_ε, r_ε. Получаем

$$\begin{aligned} h(\partial B_r(0, q),\, \partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon, q)) \leqslant h(\partial B_r(0, q),\, \partial B_{r_\varepsilon}(0, q)) + \\ + h(\partial B_{r_\varepsilon}(0, q),\, \partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon, q)) \leqslant |r - r_\varepsilon| + \|z_\varepsilon\| \leqslant \alpha/4. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом условия (4.7.20) будем иметь

$$\partial B_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon, q) \cap B_R(z) = \varnothing. \tag{4.7.21}$$

Из формулы (4.7.21) следует, что $a \notin B_R(z)$. Поскольку $r_\varepsilon < R$ (см. (4.7.5) и (4.7.10)), то, повторяя рассуждения леммы 4.7.3, получаем, что $a \in \exp_R A$. Это противоречит включению $\exp_R A \subset B \subset B_R(z)$. $\square$

Из леммы 4.7.1 следует, что для любого множества $A \subset \mathcal{H}$ включение $x \in \exp_R A$ влечет включение $x \in \operatorname{extr}_R A$. Отсюда и из теоремы 4.7.1 получаем следующую теорему.

Теорема 4.7.2 (М.В. Балашов, Е.С. Половинкин [11]). *Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — замкнутое множество, $A \subset B_\rho(z_0)$, где $\rho < R$. Тогда справедливо включение $A \subset \operatorname{strco}_R \operatorname{extr}_R A$.*

§ 4.8. Порождающие функции. m-сильно выпуклые функции

Исследуем класс порождающих множеств, каждое их которых является надграфиком некоторой выпуклой полунепрерывной снизу функции. Легко показать, что, как и в общем случае, далеко не всякая выпуклая функция обладает надграфиком, удовлетворяющим определению порождающего множества.

В случае, когда порождающее множество M является надграфиком некоторой выпуклой функции, всякое M-сильно выпуклое множество также является надграфиком некоторой выпуклой функции. Поэтому в этом параграфе естественно перейти от понятий порождающих множеств и M-сильно выпуклых множеств к понятиям порождающих функций и m-сильно выпуклых функций.

Напомним (см. определение 1.11.2 и предложение 1.11.1), что геометрический смысл надграфика функции $f \oplus g$ — операции инфимальной конволюции функций f и g — есть сумма надграфиков $\operatorname{epi} f$ и $\operatorname{epi} g$.

При выполнении дополнительного условия $\operatorname{int}\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \neq \varnothing$ в силу теоремы 1.11.3 получаем равенство $f \oplus g = (f^* + g^*)^*$, т. е. функция $f \oplus g$ является собственной полунепрерывной снизу выпуклой функцией. Из дополнительного условия также следует, что найдется число $r > 0$ такое, что $B_r(p_0) \subset \operatorname{dom} f^*$. В силу того, что опорная функция к надграфику f и сопряженная функция f^* связаны соотношением $s((p, -1), \operatorname{epi} f) = f^*(p)$, получаем, что $p \in \operatorname{dom} f^*$ тогда и только тогда, когда $(p, -1) \in b(\operatorname{epi} f)$. Поэтому справедливо включение $\operatorname{cone}\{(p, -1) \mid p \in B_r(p_0)\} \subset b(\operatorname{epi} f)$. Так как при этом по условию $(p_0, -1) \in b(\operatorname{epi} g)$, то в итоге следует включение

$$0 \in \operatorname{int}\{b(\operatorname{epi} f) - b(\operatorname{epi} g)\}.$$

Из последнего включения и теоремы 1.13.2 следует, что множество $\operatorname{epi} f + \operatorname{epi} g$ замкнуто.

Замечание 4.8.1. Будем называть инфимальную конволюцию функций f и g также *эпи-суммой* двух функций.

Определение 4.8.1. *Эпи-разностью* функций f и $g\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ при условии, что $\operatorname{dom} g\neq\varnothing$, назовем функцию вида

$$(f\ominus g)(x)=\sup_{y\in\operatorname{dom} g}\{f(x+y)-g(y)\}. \tag{4.8.1}$$

Из данного определения 4.8.1, очевидно, следует предложение.

Предложение 4.8.1. *Пусть даны две собственные функции f, $g\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$, причем f полунепрерывна снизу и выпукла. Функция $f\ominus g$ будет собственной функцией тогда и только тогда, когда множество $\operatorname{epi} f\overset{*}{-}\operatorname{epi} g$ непусто. При этом, если $f\ominus g$ является собственной, то она выпукла и полунепрерывна снизу, и для ее надграфика справедлива формула*

$$\operatorname{epi}(f\ominus g)=\operatorname{epi} f\overset{*}{-}\operatorname{epi} g. \tag{4.8.2}$$

Доказательство. Первая часть предложения очевидна.

Так как $h(x)=(f\ominus g)(x)$ есть верхняя грань полунепрерывных снизу функций, то h также является пн. сн. функцией.

Докажем формулу (4.8.2). Пусть $(x,\mu)\in\operatorname{epi} h$. Тогда по определению функции h для любой точки $y\in\operatorname{dom} g$ выполнено неравенство $\mu\geqslant f(x+y)-g(y)$, то $(x,\mu)+(y,g(y))\in\operatorname{epi} f$. Так как точка $y\in\operatorname{dom} g$ произвольная, то и $(x,\mu)+\operatorname{epi} g\subset\operatorname{epi} f$, т. е. $(x,\mu)\in\operatorname{epi} f\overset{*}{-}\operatorname{epi} g$.

Если же $(x,\mu)\in\operatorname{epi} f\overset{*}{-}\operatorname{epi} g$, то для любого $y\in\operatorname{dom} g$ выполнено включение $(x,\mu)+(y,g(y))\in\operatorname{epi} f$, откуда $\mu+g(y)\geqslant f(x+y)$, т. е. $\mu\geqslant h(x)$. $\square$

Предложение 4.8.2. *Пусть даны функции f, g, g_1, $g_2\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$, причем $g_1\leqslant g_2$. Тогда справедливы неравенства*

$$f\oplus g_1\leqslant f\oplus g_2,\quad f\ominus g_1\geqslant f\ominus g_2,\quad g_1\ominus f\leqslant g_2\ominus f, \tag{4.8.3}$$

$$(f\ominus g)\oplus g\geqslant f,\quad (f\oplus g)\ominus g\leqslant f. \tag{4.8.4}$$

Доказательство предложения, очевидно, следует из определений 1.11.2 и 4.8.1.

Определение 4.8.2. Собственную полунепрерывную снизу выпуклую функцию $m\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ назовем *порождающей* функцией, если для любой собственной функции $h\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ такой, что $h\geqslant m$, найдется собственная выпуклая полунепрерывная снизу функция $g\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ такая, что справедливо равенство

$$(m\ominus h)\oplus g=m. \tag{4.8.5}$$

Определение 4.8.3 Пусть $m\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ — некоторая порождающая функция. Собственную функцию $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ назовем *m-сильно выпуклой*, если найдется такая собственная функция h, при которой справедливо равенство

$$f=m\ominus h. \tag{4.8.6}$$

Введем следующее обобщение преобразования Юнга–Фенхеля данной собственной функции.

Определение 4.8.4. Пусть $m\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ — порождающая функция. Для всякой собственной функции $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ функцию $f^{\#}\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ вида
$$f^{\#} = m \ominus f \tag{4.8.7}$$
назовем *m-сильно выпуклым преобразованием* функции f.

Вторым m-сильно выпуклым преобразованием функции f назовем функцию
$$f^{\#\#} = m \ominus (m \ominus f). \tag{4.8.8}$$

Предложение 4.8.3. *Для всякой собственной функции $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ справедливы неравенства*
$$f(x) + f^{\#}(y) \geqslant m(x+y), \tag{4.8.9}$$
$$f^{\#\#} \leqslant f. \tag{4.8.10}$$

Доказательство. Неравенство (4.8.9) следует из определений 4.8.4 и 4.8.1, т. е.
$$f^{\#}(y) = \sup_{z\in E}\{m(z+y) - f(z)\} \geqslant m(x+y) - f(x).$$
Из формулы (4.8.8) и неравенства (4.8.9) получаем
$$f^{\#\#}(x) = \sup_{y\in E}\{m(x+y) - f^{\#}(y)\} \leqslant f(x).\ \square$$

Предложение 4.8.4. *Пусть $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ — m-сильно выпуклая функция. Тогда ее m-сильно выпуклое преобразование $f^{\#}$ также будет собственной полунепрерывной снизу выпуклой функцией.*

Доказательство. Выбирая точку $x_0 \in \operatorname{dom} f$, в силу неравенства (4.8.9) получаем $f^{\#}(y) \geqslant m(x_0+y) - f(x_0) > -\infty \quad \forall\, y \in E$. По определению 4.8.3 существует функция h такая, что $f = m \ominus h = h^{\#}$. Поэтому в силу неравенства (4.8.10) получаем, что $f^{\#} = h^{\#\#} \leqslant h$, т. е. $\operatorname{dom} f^{\#} \supset \operatorname{dom} h$. Итак, $\operatorname{dom} f^{\#} \neq \varnothing$, т. е. функция $f^{\#}$ является собственной. В силу предложения 4.8.1 собственная функция $f^{\#}$ является m-сильно выпуклой и полунепрерывной снизу. $\square$

Теорема 4.8.1 (Е.С. Половинкин [83]). *Собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция $m\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ будет порождающей тогда и только тогда, когда для всякой собственной функции f вида $f = m \ominus h$ справедливо равенство*
$$f \oplus f^{\#} = m. \tag{4.8.11}$$

Если же функция m такова, что $\operatorname{int}\operatorname{dom} m^* \neq \varnothing$, то в равенстве (4.8.11) *инфимум достигается, т. е. для всякой точки $x_0 \in$*

$\in \operatorname{dom} m$ *найдется точка* $y_0 \in \operatorname{dom} f$, *для которой выполняется равенство*

$$f(y_0) + f^{\#}(x_0 - y_0) = m(x_0), \tag{4.8.12}$$

которое в свою очередь эквивалентно неравенству

$$f(y) - f(y_0) \geqslant m(x_0 - y_0 + y) - m(x_0) \quad \forall\, y \in E. \tag{4.8.13}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу неравенства (4.8.9) всегда справедливо неравенство

$$(f \oplus f^{\#})(x) = \inf_{y\in E} \{f(x-y) + f^{\#}(y)\} \geqslant m(x). \tag{4.8.14}$$

1) Пусть для всякой собственной функции f вида $f = m \ominus h$ справедливо равенство (4.8.11). Тогда условия определения 4.8.2 выполнены, если в качестве g взять функцию $f^{\#}$, т.е. функция m является порождающей.

2) Пусть m есть порождающая функция. По определению 4.8.2 для всякой собственной функции f вида $f = m \ominus h$ найдется собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция $g\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что справедливо равенство (4.8.5), т.е. $m = f \oplus g$. Отсюда в силу определения 1.11.2 получаем $m(x) \leqslant f(x-y) + g(y) \ \ \forall\, x,\, y \in E$, т.е.

$$g(y) \geqslant \sup_{z\in E}\{m(z+y) - f(z)\} = f^{\#}(y).$$

Воспользовавшись предложением 4.8.2, получаем неравенство $f \oplus \oplus f^{\#} \leqslant f \oplus g = m$. Объединяя полученное неравенство с неравенством (4.8.14), получаем равенство (4.8.11).

Как следует из теоремы 1.11.3, преобразование Юнга–Фенхеля инфимальной конволюции двух функций f и $f^{\#}$ в силу равенства (4.8.11) равно сумме преобразований, т.е.

$$m^* = f^* + (f^{\#})^*, \quad \operatorname{dom} m^* = \operatorname{dom} f^* \cap \operatorname{dom}(f^{\#})^*. \tag{4.8.15}$$

Отсюда и в силу того, что по условию теоремы внутренность множества $\operatorname{dom} m^*$ непуста, следует, что существует точка $p_0 \in \in \operatorname{dom} f^* \cap \operatorname{dom}(f^{\#})^*$, в которой функция f^* непрерывна, а множество $\operatorname{int}(\operatorname{epi} f^*)$ непусто. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in \operatorname{dom} m$. Покажем, что непустое выпуклое множество

$$A = \{(p,\alpha) \in E^* \times \mathbb{R} \mid \alpha \leqslant \langle x_0, p\rangle - (f^{\#})^*(p) - m(x_0)\}$$

не пересекается со множеством $\operatorname{int}(\operatorname{epi} f^*)$. В самом деле, если бы существовала точка $(p_1, \alpha_1) \in A \cap \operatorname{int}(\operatorname{epi} f^*)$, то были бы справедливы неравенства

$$f^*(p_1) < \alpha_1 \leqslant \langle x_0, p_1\rangle - (f^{\#})^*(p_1) - m(x_0),$$

откуда получили бы

$$m(x_0) < \langle x_0, p_1\rangle - f^*(p_1) - (f^{\#})^*(p_1) \leqslant (f^* + (f^{\#})^*)^*(x_0) = m(x_0),$$

т. е. получили противоречие. По теореме отделимости существует ненулевой линейный функционал $(y, \beta) \in E \times \mathbb{R}$, разделяющий множества A и $\operatorname{int}(\operatorname{epi} f^*)$, т. е.

$$\sup\{\beta\alpha + \langle y, p\rangle \mid (p, \alpha) \in \operatorname{epi} f^*\} \leqslant \inf\{\beta\alpha + \langle y, p\rangle \mid (p, \alpha) \in A\}. \tag{4.8.16}$$

Очевидно, что $\beta \leqslant 0$. Допустим, что $\beta = 0$. Тогда по условию $y \neq 0$ и из неравенства (4.8.16) получаем

$$\sup\{\langle y, p\rangle \mid p \in \operatorname{dom} f^*\} \leqslant \inf\{\langle y, p\rangle \mid p \in \operatorname{dom}(f^\#)^*\}.$$

Это в силу теоремы отделимости означает, что $\operatorname{dom} f^* \cap \operatorname{dom}(f^\#)^* = \varnothing$, т. е. неверно в силу равенства (4.8.15). Итак, число $\beta < 0$. Пусть $y_0 = |\beta|^{-1} y$; тогда $(y_0, -1)$ также разделяет множества A и $\operatorname{int}(\operatorname{epi} f^*)$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} f(y_0) = \sup_{p \in E^*}\{\langle y_0, p\rangle - f^*(p)\} = \sup\{\langle y_0, p\rangle - \alpha \mid (p, \alpha) \in \operatorname{epi} f^*\} \leqslant \\ \leqslant \inf\{\langle y_0, p\rangle - \alpha \mid (p, \alpha) \in A\} = \inf_{p \in E^*}\{\langle y_0, p\rangle - \langle x_0, p\rangle + (f^\#)^*(p)\} + \\ + m(x_0) = -f^\#(x_0 - y_0) + m(x_0), \end{aligned}$$

что и влечет равенство (4.8.12).

В свою очередь из равенства (4.8.12) и определения 4.8.4 следует неравенство (4.8.13). □

З а м е ч а н и е 4.8.2. Достаточное условие теоремы 4.8.1 о непустоте внутренности $\operatorname{dom} m^*$ можно ослабить. В самом деле, это условие в силу второго равенства в (4.8.15) необходимо для замкнутости суммы множеств $\operatorname{epi} f + \operatorname{epi} f^\#$, что влечет равенство $\operatorname{epi} f + \operatorname{epi} f^\# = \operatorname{epi} m$ и равенство (4.8.12). Замкнутость множества $\operatorname{epi} f + \operatorname{epi} f^\#$ возможна и при более слабых условиях. Так, например, в случае, когда $E = \mathbb{R}^n$, для выполнения равенства (4.8.12) достаточно потребовать непустоты множества $\operatorname{ri} \operatorname{dom} m^*$.

Понятие m-сильно выпуклой функции можно обобщить следующим образом.

О п р е д е л е н и е 4.8.5. Собственная функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *локально m-сильно выпуклой функцией на множестве D*, если существует m-сильно выпуклая функция $\widetilde{f}\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что $\widetilde{f}(x) = f(x) \ \ \forall x \in D$.

Обозначим через $f|_D$ сужение функции f следующего вида: $f|_D(x) = f(x)$ при $x \in D$ и $f|_D(x) = +\infty$ при $x \notin D$.

Теорема 4.8.2 (Е.С. Половинкин [83]). *Пусть* $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ *— собственная полунепрерывная снизу функция. Функция f будет локально m-сильно выпуклой на замкнутом выпуклом множестве D тогда и только тогда, когда справедливо равенство*

$$(f|_D)^{\#\#}(x)=f(x)\quad\forall\, x\in D. \tag{4.8.17}$$

Доказательство. 1) Из предложения 4.8.1 следует, что функция $(f|_D)^{\#\#}$ является m-сильно выпуклой полунепрерывной снизу функцией, откуда в силу равенства (4.8.17) функция f является локально m-сильно выпуклой на множестве D.

2) Пусть верно обратное, т. е. пусть полунепрерывная снизу функция f локально m-сильно выпукла на множестве D, и пусть в силу определения 4.8.5 выбрана m-сильно выпуклая функция $\widetilde{f}$. Докажем равенство (4.8.17). В силу предложения 4.8.3 достаточно доказать, что $(f|_D)^{\#\#}(x)\geqslant f(x)$ $\forall\, x\in D$. По определению 4.8.3 для m-сильно выпуклой функции $\widetilde{f}$ существует собственная функция h такая, что $\widetilde{f}=m\ominus h$, т. е. $f|_D\geqslant\widetilde{f}=h^{\#}$. В силу предложений 4.8.2 и 4.8.3 (неравенств (4.8.3) и (4.8.10)) получаем, что $(f|_D)^{\#}\leqslant\widetilde{f}^{\#}\leqslant h$, откуда в силу неравенств (4.8.3) получаем неравенство $(f|_D)^{\#\#}\geqslant m\ominus\widetilde{f}^{\#}\geqslant$ $\geqslant m\ominus h=\widetilde{f}$. $\square$

Следствие 4.8.1. *Пусть* $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ *— собственная функция. Функция f будет m-сильно выпуклой полунепрерывной снизу тогда и только тогда, когда справедливо равенство*

$$f^{\#\#}=f. \tag{4.8.18}$$

Теорема 4.8.2 (Е.С. Половинкин [83]). *Пусть порождающая функция m такова, что* $\operatorname{dom} m^*=E^*$. *Пусть* $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ *— собственная полунепрерывная снизу функция.*

1) *Если функция f является m-сильно выпуклой, то для всякой точки $y_0\in\operatorname{dom}(\partial f)$ найдется точка $x_0\in\operatorname{dom} m$ такая, что справедливо неравенство* (4.8.13).

2) *Если для всякой точки $y_0\in\operatorname{dom}(\partial f)$ найдется точка $x_0\in$ $\in\operatorname{dom} m$ такая, что справедливо неравенство* (4.8.13), *то функция f является локально m-сильно выпуклой на множестве* $\operatorname{dom} f$.

Доказательство. 1) Пусть f есть m-сильно выпуклая функция. По теореме 4.8.1 из равенства (4.8.11) по свойству инфимальной конволюции следуют равенства (4.8.15), из которых в свою очередь по теореме Моро–Рокафеллара следует равенство для субдифференциалов

$$\partial f^*(p)+\partial(f^{\#})^*(p)=\partial m^*(p). \tag{4.8.19}$$

Зафиксируем произвольную точку $y_0 \in \operatorname{dom}(\partial f)$. Тогда существует точка $p_0 \in \operatorname{dom} f^*$ такая, что $p_0 \in \partial f(y_0)$. Последнее включение эквивалентно включению $y_0 \in \partial f^*(p_0)$. Из условий теоремы следует, что для любого $p \in E^*$ множество $\partial m^*(p)$ непусто, т. е. в силу (4.8.19) непусто и множество $\partial (f^{\#})^*(p)$. Поэтому, выбирая произвольную точку $z_0 \in \partial (f^{\#})^*(p_0)$, в силу (4.8.19) получаем включение $y_0 + z_0 \in \partial m^*(p_0)$. Таким образом, мы получили, что $p_0 \in \partial f(y_0) \cap \cap\, \partial f^{\#}(z_0) \cap \partial m(y_0 + z_0)$. В силу теоремы 1.16.4 последнее включение влечет равенства

$$f(y_0) + f^*(p_0) = \langle y_0, p_0\rangle, \quad f^{\#}(z_0) + (f^{\#})^*(p_0) = \langle z_0, p_0\rangle,$$

$$-m(y_0 + z_0) - m^*(p_0) = -\langle y_0 + z_0, p_0\rangle,$$

складывая которые, получаем

$$f(y_0) + f^{\#}(z_0) - m(y_0 + z_0) + f^*(p_0) + (f^{\#})^*(p_0) - m^*(p_0) = 0.$$

Сокращая последние три слагаемых, которые в силу равенства (4.8.15) в сумме дают нуль, получаем равенство

$$f(y_0) + f^{\#}(z_0) - m(y_0 + z_0) = 0.$$

В полученном равенстве обозначим через x_0 сумму $y_0 + z_0$, воспользуемся определением 4.8.4 и в итоге получим

$$m(x_0) - f(y_0) = f^{\#}(x_0 - y_0) \geqslant m(x_0 - y_0 + y) - f(y) \quad \forall\, y \in E,$$

т. е. получили неравенство (4.8.13).

2) Допустим обратное, т. е. пусть для любой точки $y_0 \in \operatorname{dom}(\partial f)$ найдется точка $x_0 \in \operatorname{dom} m$ такая, что выполнено неравенство (4.8.13). Это означает, что

$$m(x_0) - f(y_0) \geqslant \sup_{y \in E} \{m(x_0 - y_0 + y) - f(y)\} = f^{\#}(x_0 - y_0),$$

т. е. $m(x_0) - f(y_0) = f^{\#}(x_0 - y_0)$. Поэтому

$$f(y_0) = m(x_0) - f^{\#}(x_0 - y_0) \leqslant \sup_{z \in E} \{m(z) - f^{\#}(z - y_0)\} = f^{\#\#}(y_0).$$

В силу предложения 4.8.3, в котором доказано обратное неравенство, мы доказали равенство

$$f(y_0) = f^{\#\#}(y_0) \quad \forall\, y_0 \in \operatorname{dom}(\partial f). \tag{4.8.20}$$

Так как по теореме 2.10.2 множество $\operatorname{dom}(\partial f)$ плотно во множестве $\operatorname{dom} f$, а функция f полунепрерывна снизу, то равенство (4.8.20) справедливо на множестве $\operatorname{dom} f$, откуда по теореме 4.8.2 следует, что функция f является локально m-сильно выпуклой функцией на множестве $\operatorname{dom} f$. $\square$

Замечание 4.8.3. Утвержение теоремы 4.8.3 и неравенство (4.8.13) означают, что для всякой точки $x_0 \in \operatorname{dom}(\partial f)$ найдется точка $z_0 \in \operatorname{dom} f^{\#}$ такая, что справедливо равенство

$$f(x_0) + f^{\#}(z_0) = m(x_0 + z_0). \tag{4.8.21}$$

Указанное равенство похоже на равенство, связывающее значения выпуклой функции, ее преобразования Фенхеля–Моро и субдифференциал. Поэтому по аналогии введем понятие m-субдифференцируемости для m-сильно выпуклой функции f.

Скажем, что m-сильно выпуклая функция f является *m-субдифференцируемой в точке* $x_0 \in \operatorname{dom} f$, если существует точка z_0, удовлетворяющая равенству (4.8.21). Совокупность таких точек z_0 назовем *m-субдифференциалом* $\partial_m f(x_0)$ функции f.

Напомним (см. определение 1.19.2), что функция f называется *сильно выпуклой функцией с константой* $\varkappa > 0$, если функция вида $g(x) = f(x) - \frac{\varkappa}{2}\|x\|^2$ является собственной выпуклой функцией.

Приведем естественное обобщение этого понятия в случае, когда вместо числового параметра $\varkappa$ стоит линейный оператор.

Для всякого линейного оператора $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ определим квадратичную форму

$$m_T(x) = \frac{1}{2}\langle Tx, x\rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{H}. \tag{4.8.22}$$

Определение 4.8.6. Пусть $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — нетривиальный самосопряженный линейный оператор, причем $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{H}$. Функция $f\colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *сильно выпуклой с данным* (*операторным*) *параметром* T, если функция вида $g(x) = f(x) - m_T(x)$ является собственной полунепрерывной снизу выпуклой функцией, причем, если $g(x_1) = g(x_2)$, то $x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} T$.

Лемма 4.8.1. *Пусть $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — нетривиальный самосопряженный линейный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, причем такой, что квадратичная форма m_T* (4.8.22) *неотрицательно определена.*

Функция f будет сильно выпуклой с параметром T (*по определению* 4.8.6) *тогда и только тогда, когда найдется собственная выпуклая функция h такая, что $f = m_T \ominus h$.*

Доказательство. 1) Пусть функция f удовлетворяет определению 4.8.6. Так как для любой точки $x \in \mathcal{H}$ справедливо представление $x = x^0 + x^{\perp}$, где $x^0 \in \operatorname{Ker} T$, $x^{\perp} \in \operatorname{Im} T$. Поэтому из определения 4.8.6 следует, что $g(x) = g(x^{\perp})$, $\operatorname{dom} g^{\star} \subset \operatorname{Im} T$ и $g(x) = g^{\star\star}(x) = \sup\limits_{y \in \mathcal{H}} \{\langle x, Ty\rangle - g^{\star}(Ty)\}$. Определим функцию $h(y)$ по формуле $h(y) = m_T(y) + g^\star(Ty)$. В силу сказанного, проделав простые выкладки, убеждаемся, что $f = m_T \ominus h$.

2) Пусть собственная функция f имеет вид $f = m_T \ominus h$. В соответствии с определением 4.8.1, вычисляя $f(x_0)$, где $x_0 \in \operatorname{dom} f$, для всякого $y \in \mathcal{H}$ получаем неравенство $h(y) - m_T(y) \geqslant \langle Tx_0, y\rangle - f(x_0) - m_T(x_0)$. Отсюда следует, что функция $(h - m_T)^\star$ будет собственной выпуклой функцией. Обозначим $\widetilde{g} = (h - m_T)^\star$ и $g(x) = \widetilde{g}(Tx)$. Тогда простой проверкой из равенства $f = m_T \ominus h$ по определению 4.8.1 получаем равенство $f = m_T + g$, причем $g(x) = g(x^\perp)$. □

Теорема 4.8.4 (Е.С. Половинкин [83]). *Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ даны самосопряженный линейный оператор $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ такой, что соответствующая ему квадратичная форма m_T* (см. (4.8.22)) *положительно определена, и собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция $g\colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$.*

Тогда для всякой точки $x \in \mathcal{H}$ существует единственное решение $y = y_x$ включения

$$x \in y + T^{-1}\,\partial g(y). \tag{4.8.23}$$

Доказательство. Определим функцию $h = g \oplus m_T$. Так как $\operatorname{dom} m_T = \mathcal{H}$, а $g(y)$, как и всякая собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция, ограничена снизу некоторой аффинной функцией $\langle p, y\rangle + a$, где $p \in \mathcal{H}$, $a \in \mathbb{R}$, то для любой точки $x \in \mathcal{H}$ получаем оценку

$$g(y) + m_T(y - x) \geqslant m_T\Big(y - x + \frac{1}{2}\,T^{-1}p\Big) - \\ - \frac{1}{8}\,\langle T^{-1}p,\, p\rangle + a + \langle p, x\rangle \quad \forall\, y \in \mathcal{H},$$

т. е. $h(x) \geqslant -\frac{1}{8}\,\langle T^{-1}p,\, p\rangle + a + \langle p, x\rangle$, откуда следует, что h — собственная выпуклая функция и $\operatorname{dom} h = \mathcal{H}$.

Так как в силу условий теоремы $\operatorname{dom} m_T^* = \mathcal{H}$ и справедливо равенство $h^* = g^* + m_T^*$, то по теореме 1.11.3 следует, что для любой точки $x \in \mathcal{H}$ найдется точка $y_x \in \mathcal{H}$ такая, что $h(x) = g(y_x) + m_T(x - y_x)$.

Так как функция m_T строго выпукла, то (например, методом от противного) легко показать, что точка y_x, в которой достигается инфимум, единственна.

Пусть $\lambda \in (0, 1)$, $z \in \mathcal{H}$. Выберем точку $y = y_x - \lambda(y_x - z)$ и получим

$$g(y_x) + m_T(x - y_x) \leqslant g(y) + m_T(x - y)) \leqslant \\ \leqslant (1 - \lambda) g(y_x) + \lambda g(z) + m_T(x - y_x + \lambda(y_x - z)).$$

В полученном двойном неравенстве выбрасываем промежуточный член, затем вычитаем из обеих частей $g(y_x)$ и затем делим на λ; в итоге получая неравенство

$$g(y_x) - g(z) \leqslant \langle T(x - y_x), y_x - z\rangle + \lambda m_T(y_x - z) \quad \forall\, z \in \mathcal{H}.$$

Устремив λ к нулю, получаем неравенство

$$g(y_x) - g(z) \leqslant \langle T(x - y_x), y_x - z\rangle \quad \forall\, z \in \mathcal{H},$$

которое по определению субдифференциала означает, что функция g субдифференцируема в точке y_x и $T(x - y_x) \in \partial g(y_x)$. $\square$

Теорема 4.8.5 (Е.С. Половинкин [83]). *Пусть* $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — *нетривиальный самосопряженный линейный оператор*, *причем соответствующая квадратичная форма* m_T, *определенная в* (4.8.22), *неотрицательно определена.*

Тогда квадратичная форма m_T *является порождающей функцией.*

Доказательство. В силу теоремы 4.8.1 достаточно доказать, что для всякой собственной функции вида $f = m_T \ominus h$ справедливо равенство (4.8.14), т. е. что для любой точки $x \in \mathcal{H}$ существует точка $y \in \operatorname{dom} f$ такая, что

$$f(y) + f^{\#}(x - y) = m_T(x). \tag{4.8.24}$$

В силу леммы 4.8.1 существует собственная выпуклая функция g такая, что $f = m_T + g$, причем $f^{\#} = m_T + g^{\star}T$, а $g(x) = g(x^{\perp})$, где $x = x^0 + x^{\perp}$, $x^0 \in \operatorname{Ker} T$, $x^{\perp} \in \operatorname{Im} T$. Подставляя эти выражения в равенство (4.8.24), после сокращений получаем уравнение $g(y) + g^{\star}(T(x - y)) = \langle y, T(x - y)\rangle$, которое в силу свойств функции g эквивалентно уравнению относительно неизвестного $y^{\perp} \in \operatorname{Im} T$ вида $g(y^{\perp}) + g^{\star}(T(x^{\perp} - y^{\perp})) = \langle y^{\perp}, T(x^{\perp} - y^{\perp})\rangle$ при соответствующем $x^{\perp} \in \operatorname{Im} T$. Последнее равенство по теореме 1.16.4 означает включение $T(x^{\perp} - y^{\perp}) \in \partial g(y^{\perp})$. Так как оператор $T\colon \operatorname{Im} T \to \operatorname{Im} T$ является самосопряженным линейным оператором и квадратичная форма m_T на подпространстве $\operatorname{Im} T$ положительно определена, то по теореме 4.8.4 решение такого включения существует. $\square$

Перейдем к изучению достаточных условий порождаемости в конечномерном случае, т. е. условий когда выпуклая функция $m\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ является порождающей функцией. Как и прежде, через $m^{\star}(p)$ обозначаем преобразование Фенхеля–Моро функции m.

Теорема 4.8.6 (Е.С. Половинкин [83]). *Пусть* $m\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *есть собственная выпуклая полунепрерывная снизу функция*, *причем* $\operatorname{int}\operatorname{dom} m \neq \varnothing$. *Пусть для любого вектора* $p_0 \in \operatorname{ri}\operatorname{dom} m^{\star}$ *выбраны* *такие* $k \leqslant n+1$ *произвольных точек* $x_i \in \operatorname{dom} m$, *где* $i \in \overline{1,k}$, *что субдифференциалы* $\partial m(x_i)$ *непусты, и существуют числа* $\lambda_i > 0$ *такие, что* $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ *и* $p_0 \in \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i\, \partial m(x_i)$. *Пусть для всякого такого набора* $(p_0, x_1, \ldots, x_k)$ *найдется точка* $x_0 \in \operatorname{dom} m$ *такая, что* $p_0 \in \partial m(x_0)$, *и справедливо неравенство*

$$\max_{i\in\overline{1,k}} \{m(x+x_i) - m(x_i)\} \geqslant m(x+x_0) - m(x_0) \quad \forall\, x \in \operatorname{dom} m - x_0. \tag{4.8.25}$$

Тогда функция m *будет порождающей функцией.*

Доказательство. Покажем, что данное утверждение является прямым следствием теоремы 4.2.5, переведенным с языка множеств на язык функций. Полагаем $M = \operatorname{epi} m$. Легко проверить, что из включения $(p,\alpha) \in b(M)$ следует, что $\alpha \leqslant 0$. Более того, справедливо равенство

$$\operatorname{ri} b(M) = \{\beta(p,-1) \,|\, p \in \operatorname{ri}\, \operatorname{dom} m^\star,\ \beta > 0\}.$$

По основному свойству субдифференциалов включение $p_i \in \partial m(x_i)$, где $i \in \overline{0,k}$, эквивалентно равенству $\langle p_i, x_i\rangle - m(x_i) = m^\star(p_i) = s((p_i,-1), M)$. Это означает, что указанное включение эквивалентно включению $(x_i, m(x_i)) \in M(p_i,-1)$, т. е. точка графика $(x_i, m(x_i))$ является опорной точкой к множеству M в направлении $(p_i,-1)$. Преобразуем векторы $(p_i,-1)$ к векторам $\widetilde{p}_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ единичной длины вида

$$\widetilde{p}_i = \left(\frac{p_i}{\sqrt{1+\|p_i\|^2}},\ \frac{-1}{\sqrt{1+\|p_i\|^2}} \right).$$

По условиям теоремы 4.2.5 должно быть выполнено условие $\widetilde{p}_0 = \sum\limits_{i=1}^{k} \widetilde{\lambda}_i \widetilde{p}_i$, которое заменой $\lambda_i = \widetilde{\lambda}_i \sqrt{(1+\|p_0\|^2)/(1+\|p_i\|^2)}$ превращается в условия $p_0 = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Очевидно следующее равенство множеств:

$$M - (x_i, m(x_i)) = \{(x,\beta) \,|\, \beta \geqslant m(x+x_i) - m(x_i),\ x \in \operatorname{dom} m - x_i\}.$$

В итоге несложно проверить, что включение (4.2.8) в нашем случае эквивалентно неравенству (4.8.25). □

Приведем очевидный упрощенный вариант достаточных условий, эквивалентный приведенным выше условиям в случае строго выпуклости функции m.

Следствие 4.8.2. *Пусть* $m\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *есть собственная выпуклая полунепрерывная снизу функция, причем* $\operatorname{int} \operatorname{dom} m \neq \varnothing$. *Пусть* *для любого* $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom} m$ *выбраны такие* $k \leqslant n+1$ *произвольных точек* $x_i \in \operatorname{dom} m$, *где* $i \in \overline{1,k}$, *что субдифференциалы* $\partial m(x_i)$ *непусты, и существуют числа* $\lambda_i > 0$ *такие, что* $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ *и* $\partial m(x_0) \cap \cap \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \, \partial m(x_i) \neq \varnothing$. *Пусть для всякого такого набора* $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ *справедливо неравенство* (4.8.25).

Тогда функция m *будет порождающей функцией.*

Приведем несколько классов порождающих функций, получаемых с помощью данного следствия 4.8.2.

Теорема 4.8.7 (Е.С. Половинкин [83]). *Всякая собственная выпуклая полунепрерывная снизу функция* $m\colon \mathbb{R}^1 \to \overline{\mathbb{R}}$ *является порождающей.*

Доказательство. Пусть $p_i \in \partial m(x_i)$, где $i = 0, 1, 2$. Покажем, что в одномерном случае включение $p_0 \in [p_1, p_2]$ эквивалентно включению $x_0 \in [x_1, x_2]$.

По определению субдифференциала выпуклой функции имеем

$$m(x) - m(x_i) \geqslant p_i(x - x_i) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^1,$$

откуда следуют неравенства

$$(p_0 - p_1)(x_1 - x_0) \leqslant 0, \quad (p_0 - p_2)(x_2 - x_0) \leqslant 0.$$

Так как $(p_0 - p_1) \geqslant 0$, а $(p_0 - p_2) \leqslant 0$, то из неравенств следует включение $x_0 \in [x_1, x_2]$. Таким образом, в следствии 4.8.2 условие согласования точек x_0, x_1, $x_2 \in \operatorname{dom} m$ по субдифференциалам состоит в том, что $x_0 \in (x_1, x_2)$. Без ограничения общности можем считать, что $m(x_i) < 0$ при всех $i = 0, 1, 2$. В силу выпуклости множества $\operatorname{epi} m$ точка $(0, m(x_0)) \in \mathbb{R}^2$ содержится в конической оболочке отрезка $[(x_1 - x_0, m(x_1)), (x_2 - x_0, m(x_2))]$. Поэтому найдутся числа λ_1, $\lambda_2 > 0$ такие, что

$$(0, m(x_0)) = \lambda_1(x_1 - x_0,\, m(x_1)) + \lambda_2(x_2 - x_0,\, m(x_2)),$$

причем $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \geqslant 1$. Полагаем $\mu_i = \lambda_i/\lambda$. Тогда $\mu_1 + \mu_2 = 1$, $\mu_i > 0$, $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = x_0$ и $\lambda^{-1} m(x_0) = \mu_1 m(x_1) + \mu_2 m(x_2)$.

В силу выпуклости функции m для всех точек x таких, что $x + x_0 \in \operatorname{dom} m$, справедливо неравенство

$$m(x + x_0) \leqslant \sum_{i=1}^{2} \mu_i m(x + x_i).$$

Отсюда для любой точки x такой, что $x+x_0 \in \operatorname{dom} m$, получаем

$$\max_{i=1,2}(m(x+x_i)-m(x_i)) \geqslant \sum_{i=1}^{2}\mu_i(m(x+x_i)-m(x_i)) \geqslant$$
$$\geqslant m(x+x_0)-\lambda^{-1}m(x_0) \geqslant m(x+x_0)-m(x_0).$$

Таким образом, неравенство (4.8.25) доказано. □

Теорема 4.8.8 (Е.С. Половинкин [83]). *Пусть* $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— самосопряженный линейный оператор такой, что квадратичная форма* $m(x) = \frac{1}{2}\langle Tx, x\rangle$, *положительно определена.*

Тогда эта функция $m(x)$ *является порождающей.*

Доказательство. В любой точке $x \in \mathbb{R}^n$ у данной функции существует градиент, и условие согласования точек $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ по субдифференциалам в этих точках из следствия 4.8.2, очевидно, сводится к тому, что для них найдутся числа $\mu_i > 0$ такие, что $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{k}\mu_i x_i$, где $\sum\limits_{i=1}^{k}\mu_i = 1$. Так как здесь $m(x+x_i)-m(x_i) = \frac{1}{2}\langle Tx, x\rangle + \langle Tx, x_i\rangle$, то получаем

$$\max_{i\in\overline{1,k}}(m(x+x_i)-m(x_i)) \geqslant \sum_{i=1}^{k}\mu_i(m(x+x_i)-m(x_i)) =$$
$$= \frac{1}{2}\langle Tx, x\rangle + \langle Tx, x_0\rangle = m(x+x_0)-m(x_0),$$

т. е. неравенство (4.8.25) доказано. □

§ 4.9. Еще раз о конечных аппроксимациях

В этом параграфе сначала мы разберем случаи, когда оценки погрешности многогранных аппроксимаций множеств, полученные в § 2.6, можно улучшить. Для этого напомним некоторые определения из § 2.6.

Определение 4.9.1. *Единичной сеткой* $\mathbf{C}$ *мелкости* $\Delta \in (0,1)$ *в* $\mathbb{R}^n$ называется конечный набор единичных векторов $\{p_i\}_{i=1}^{I}$ такой, что для любого вектора $p \neq 0$ найдется подмножество индексов $I_p = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{\overline{1,I}\}$ таких, что $\|p_i - p_j\| < \Delta$ для всех i и j из I_p, и вектор p лежит в относительной внутренности выпуклой конической оболочки векторов $\{p_i\}_{i\in I_p}$, т. е. $p = \sum\limits_{i\in I_p}\alpha_i p_i$, $\alpha_i > 0$.

Напомним, что *сеточными операторами* $\mathcal{C}$ и $\mathcal{U}$ для сетки $\mathbf{C}$ называются операторы, действующие на положительно однородную функцию $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по правилу

$$(\mathcal{C}f)(p) = \begin{cases} f(p), & p/\|p\| \in \mathbf{C}, \\ +\infty, & p/\|p\| \notin \mathbf{C}, \end{cases} \qquad (\mathcal{U}f)(p) = \begin{cases} f(p), & p/\|p\| \in \mathbf{C}, \\ \sum\limits_{i\in I_p} \alpha_i f(p_i), & p/\|p\| \notin \mathbf{C}, \end{cases}$$

где для каждого вектора $p \neq 0$ множество индексов I_p, векторы p_i, $i \in I_p$, и числа $\alpha_i > 0$ смотри в определении 4.9.1.

Пусть M — выпуклый компакт. Сформулируем предположения, которым может удовлетворять положительно однородная функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Предположение 1). Существует число $L > 0$ такое, что справедливо неравенство $\operatorname{co} f(p) - \langle p, x\rangle \leqslant L\|p\| \ \ \forall\, p$.

Предположение 2). Существуют точка $x \in \mathbb{R}^n$ и число $r > 0$ такие, что $r\|p\| + \langle p, x\rangle \leqslant f(p) \ \ \forall\, p \in \mathbb{R}^n$.

Предположение 3). Функция $s(p, M) - f(p)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что опорные функции M-сильно выпуклых компактов с непустой внутренностью удовлетворяют предположениям 1)–3).

Определение 4.9.2. *Невязкой выпуклого компакта M на сетке* $\mathbf{C}$ будем называть величину

$$\delta(\mathbf{C}, M) = \max_{\|p\|=1} (\operatorname{co}\mathcal{C}s(p, M) - s(p, M)).$$

Геометрический смысл невязки состоит в том, что она является расстоянием в метрике Хаусдорфа между множеством M и его многогранной аппроксимацией на сетке $\mathbf{C}$ вида $\bigcap\limits_{p\in\mathbf{C}} \{x \mid \langle p, x\rangle \leqslant s(p, M)\}$.

Предложение 4.9.1. *В частном случае, когда невязка на сетке* $\mathbf{C}$ *мелкости* $\Delta < 1/2$ *вычисляется для шара* $B_R(0)$, *справедлива оценка невязки второго порядка относительно* Δ, *т. е.*

$$\delta(\mathbf{C}, B_R(0)) \leqslant 4R\Delta^2. \tag{4.9.1}$$

Доказательство. Так как опорная функция шара имеет вид $s(p, B_R(0)) = R\|p\|$, то, воспользовавшись леммой 2.6.2, п. 5), получим

$$0 \leqslant \operatorname{co}(R\|p\|) - R\|p\| \leqslant R\,\frac{\Delta^2}{1-\Delta^2}\,\|p\| \leqslant 4R\Delta^2\|p\|,$$

откуда следует оценка (4.9.1). □

Теорема 4.9.1 (М. В. Балашов, Е. С. Половинкин). *Пусть* $M \subset \mathbb{R}^n$ *— выпуклый компакт и* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— положительно однородная функция, удовлетворяющая предположениям* 1)–3).

Тогда справедлива оценка

$$\operatorname{co} f(p) \leqslant \operatorname{co}\mathcal{C}f(p) \leqslant \operatorname{co} f(p) + \delta(\mathbf{C}, M)\, \frac{L}{r}\, \|p\|. \tag{4.9.2}$$

Если к тому же функция f выпукла, то имеет место более точная оценка

$$f(p) \leqslant \operatorname{co}\mathcal{C}f(p) \leqslant f(p) + \delta(\mathbf{C}, M)\|p\|. \tag{4.9.3}$$

Доказательство. Поскольку $f(p) \leqslant \mathcal{C}f(p)$, то левые неравенства в (4.9.2) и (4.9.3), очевидно, выполнены.

Имеем равенство

$$\mathcal{C}f(p) + \mathcal{C}(s(p, M) - f(p)) = \mathcal{C}s(p, M),$$

откуда по свойству выпуклой оболочки суммы функций (предложение 1.6.3) получаем

$$\operatorname{co}\mathcal{C}f(p) + \operatorname{co}\mathcal{C}(s(p, M) - f(p)) \leqslant \operatorname{co}\mathcal{C}s(p, M).$$

По определению оператора $\mathcal{C}$ в силу предположения 3) на функцию f получаем

$$\operatorname{co}\mathcal{C}(s(p, M) - f(p)) \geqslant s(p, M) - f(p),$$

что вместе с предыдущими неравенствами дает

$$\operatorname{co}\mathcal{C}f(p) \leqslant (\operatorname{co}\mathcal{C}s(p, M) - s(p, M)) + f(p).$$

Учитывая положительную однородность всех функций, входящих в последнее неравенство, и определение невязки $\delta(\mathbf{C}, M)$, получаем неравенство

$$\operatorname{co}\mathcal{C}f(p) \leqslant f(p) + \delta(\mathbf{C}, M)\|p\| \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^n.$$

Из последней формулы следует, в частности, правое неравенство в формуле (4.9.3).

Докажем теперь правое неравенство в формуле (4.9.2). Из предположения 2) на функцию f получаем неравенство

$$\|p\| \leqslant \frac{f(p) - \langle p, x\rangle}{r}.$$

Объединяя последние два неравенства, получаем оценку

$$\operatorname{co}\mathcal{C}f(p) \leqslant f(p) + \delta(\mathbf{C}, M)\, \frac{f(p) - \langle p, x\rangle}{r}.$$

Вычисляя выпуклую оболочку от обеих частей последнего неравенства и учитывая предположение 3) на функцию f, получаем правое неравенство в оценке (4.9.2). □

Из теоремы 4.9.1 и предложения 4.9.1 получаем следствие.

Следствие 4.9.1. *Пусть положительно однородная функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяет предположениям* 1)–2), *сетка* $\mathbf{C}$ *имеет мелкость* $\Delta < 1/2$ *и существует число* $R_0 > 0$ *такое, что функция* $R_0\|p\| - f(p)$ *выпукла на* $\mathbb{R}^n$.

Тогда справедлива оценка второго порядка относительно Δ

$$\operatorname{co} f(p) \leqslant \operatorname{co} \mathbf{C} f(p) \leqslant \operatorname{co} f(p) + 4R_0 L\Delta^2 \frac{\|p\|}{r}. \tag{4.9.4}$$

Если к тому же функция f *выпукла, то*

$$f(p) \leqslant \operatorname{co} \mathbf{C} f(p) \leqslant f(p) + 4R_0\Delta^2\|p\|.$$

Из теоремы 4.9.1 и следствия 4.9.1 легко получить новые оценки многогранных аппроксимаций M-сильно выпуклых компактов, аналогичные тому, как это сделано в § 2.6.

Для положительно однородных функций введем понятие M-сильно выпуклой оболочки.

Определение 4.9.3. Для положительно однородной функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и для выпуклого компакта $M \subset \mathbb{R}^n$ *M-сильно выпуклой оболочкой функции f* называется функция

$$\operatorname{strco}_M f(p) = \operatorname{co}\,(s(p, M) - \operatorname{co}\,(s(p, M) - \operatorname{co} f(p))).$$

Заметим, что если компакт M является порождающим множеством, то определение M-сильно выпуклой оболочки можно задать проще:

$$\operatorname{strco}_M f(p) = s(p, M) - \operatorname{co}\,(s(p, M) - \operatorname{co} f(p)).$$

Для случая, когда компакт M есть порождающее множество, можно сделать следующие замечания. В случае, когда все функции, входящие в последнее равенство, являются собственными, получаем в силу предложения 4.3.1, п. 4, что функция $\operatorname{strco}_M f$ есть опорная функция некоторого M-сильно выпуклого множества. Отсюда следует, что функция $\operatorname{strco}_M f$ непрерывна и выпукла. В общем случае справедливо неравенство $\operatorname{strco}_M f \geqslant \operatorname{co} f$, если же функция f является предопорной функцией некоторого M-сильно выпуклого множества, то в этом неравенстве имеет место равенство.

В силу сделанных выше замечаний легко увидеть, что свойства M-сильно выпуклых оболочек множеств, описанные в теореме 4.4.2, легко могут быть переформулированы как свойства M-сильно выпуклых оболочек положительно однородных собственных функций.

Говорят, что *множество B полностью выметает множество A*, если $(A \overset{*}{-} B) + B = A$.

Теорема 4.9.2 (М. В. Балашов, Е. С. Половинкин). *Пусть положительно однородная функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяет предположениям 1)–3) для выпуклого компакта $M = M_0$. Пусть компакт M_0 является порождающим множеством, а множество $(1 + \delta(\mathbf{C}, M_0)/r)M_0$ полностью выметает некоторый выпуклый компакт M_1.*

Тогда справедлива оценка

$$\operatorname{co}\mathcal{C}f(p) \leqslant \operatorname{strco}_{M_1}\mathcal{C}f(p) \leqslant \operatorname{co} f(p) + \delta(\mathbf{C}, M_0)\,\frac{L}{r}\,\|p\|. \qquad (4.9.5)$$

Если к тому же функция f выпукла, компакт M_0 является порождающим множеством и множество $M_0 + \delta(\mathbf{C}, M_0)B_1(0)$ полностью выметает некоторый выпуклый компакт M_1, то справедлива оценка

$$\operatorname{co}\mathcal{C}f(p) \leqslant \operatorname{strco}_{M_1}\mathcal{C}f(p) \leqslant f(p) + \delta(\mathbf{C}, M_0)\|p\|. \qquad (4.9.6)$$

Доказательство. Пусть $\delta = \delta(\mathbf{C}, M_0)$. Из доказательства теоремы 4.9.1 следует, что

$$\operatorname{co}\mathcal{C}f(p) \leqslant \left(1 + \frac{\delta}{r}\right)\operatorname{co} f(p) - \frac{\langle p, x\rangle}{r}\,\delta.$$

Возьмем от обеих частей последнего неравенства M_1-сильно выпуклую оболочку и воспользуемся свойствами M-сильно выпуклой оболочки. Мы усилим неравенство, взяв от правой части $M_0(1 + \delta/r)$-оболочку. Второе линейное по p слагаемое в правой части неравенства можно вынести за оператор взятия оболочки. Применяя свойства 1–3 теоремы 4.4.2 к правой части, имеем

$$\operatorname{strco}_{M_1}\mathcal{C}f(p) \leqslant \left(1 + \frac{\delta}{r}\right)\operatorname{strco}_{M_0} f(p) - \frac{\langle p, x\rangle}{r}\,\delta.$$

Поскольку из предположения 3) и свойств M-сильно выпуклых множеств следует равенство $\operatorname{co} f(p) = \operatorname{strco}_{M_0} f(p)$, то получаем правое неравенство в оценке (4.9.5). Левое неравенство в оценке (4.9.5) очевидно.

Левое неравенство в формуле (4.9.6) следует из определений. Докажем правое неравенство. В силу теоремы 4.4.2 из формулы (4.9.3) получаем

$$\operatorname{strco}_{M_1}\mathcal{C}f(p) \leqslant \operatorname{strco}_{(M_0 + B_\delta(0))}(f(p) + \delta\|p\|) = \operatorname{strco}_{M_0} f(p) + \delta\|p\|.$$

В силу предположения 1) и свойств M-сильно выпуклых множеств (предложение 4.3.1, п. 3 и п. 4) получаем равенство $\operatorname{strco}_{M_0} f(p) = \operatorname{co} f(p)$. $\square$

Определение 4.9.4. Для данной сетки $\mathbf{C} \subset \partial B_1(0)$ и данного выпуклого компакта $M \subset \mathbb{R}^n$ определим *оператор* $\Re_M$, *действующий на положительно однородную функцию* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\Re_M f(p) = s(p, M) - \operatorname{co}\mathcal{C}(s(p, M) - f(p)). \qquad (4.9.7)$$

Лемма 4.9.1. *Пусть дана сетка $\mathbf{C}$ мелкости $\Delta \in (0, 1)$, и пусть компакт $M \subset \mathbb{R}^n$ является порождающим множеством.*

Тогда для любой положительно однородной функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *выполнено равенство*

$$\mathrm{co}\,\Re_M f(p) = \mathrm{strco}_M \Re_M f(p). \tag{4.9.8}$$

Если к тому же функция $s(p, M) - f(p)$ *выпукла, то справедлива оценка*

$$\mathrm{co}\,\Re_M f(p) \leqslant \mathrm{co}\, f(p). \tag{4.9.9}$$

Доказательство. Поскольку компакт M является порождающим множеством, то функция

$$s(p, M) - \mathrm{co}\,\mathcal{C}(s(p, M) - f(p)) \tag{4.9.10}$$

является предопорной функцией некоторого M-сильно выпуклого множества. Поэтому выпуклая оболочка функции (4.9.10) и M-сильно выпуклая оболочка функции (4.9.10) совпадают. Отсюда следует формула (4.9.8).

Пусть функция $s(p, M) - f(p)$ выпукла. В силу определения оператора $\mathcal{C}$ имеем

$$s(p, M) - f(p) \leqslant \mathrm{co}\,\mathcal{C}(s(p, M) - f(p)),$$

откуда

$$f(p) \geqslant s(p, M) - \mathrm{co}\,\mathcal{C}(s(p, M) - f(p)) = \Re_M f(p).$$

Следовательно, $\mathrm{co}\, f(p) \geqslant \mathrm{co}\,\Re_M f(p)$. $\square$

Теорема 4.9.3 (М. В. Балашов, Е. С. Половинкин). *Пусть компакт* $M_0 \subset \mathbb{R}^n$ *является порождающим множеством, и пусть* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — *положительно однородная функция, для которой выполнены предположения* 1)–3) (*при* $M = M_0$). *Пусть задана сетка* $\mathbf{C}$ *мелкости* $\Delta \in (0, 1/2)$ *такая, что* $\delta(\mathbf{C}, M_0)/r < 1$. *Пусть множество* $M_0/(1 - \delta(\mathbf{C}, M_0)/r)$ *полностью выметает некоторый выпуклый компакт* M_1.

Тогда справедлива оценка

$$\mathrm{co}\,\Re_{M_0} f(p) \leqslant \mathrm{co}\, f(p) \leqslant \mathrm{strco}_{M_1} \mathcal{C} f(p) \leqslant \mathrm{co}\,\Re_{M_0} f(p) + \\ + L\frac{\delta(\mathbf{C}, M_0)}{r}\left(1 + \frac{\delta(\mathbf{C}, M_0)}{r}\right)\|p\|. \tag{4.9.11}$$

Доказательство. Первые два неравенства в оценке (4.9.11) следуют из леммы 4.9.1, определения оператора $\mathcal{C}$ и свойств M-сильно выпуклой оболочки. Докажем третье неравенство. Пусть $\delta = \delta(\mathbf{C}, M_0)$.

Из свойств выпуклой оболочки суммы функций, из равенства

$$\mathcal{C} f(p) + \mathcal{C}(s(p, M_0) - f(p)) = \mathcal{C} s(p, M_0)$$

и теоремы 4.9.1 следует неравенство

$$\mathrm{co}\,\mathcal{C} f(p) + \mathrm{co}\,\mathcal{C}(s(p, M_0) - f(p)) \leqslant \mathrm{co}\,\mathcal{C} s(p, M_0) \leqslant s(p, M_0) + \delta\|p\|,$$

откуда
$$\Re_{M_0} f(p) \geqslant \operatorname{co}\mathcal{C} f(p) - \delta\|p\|.$$
Отсюда в силу предположения 2), оценивая $\|p\|$ с помощью неравенства $\operatorname{co}\mathcal{C} f(p) \geqslant \operatorname{co} f(p) \geqslant \langle p, x\rangle + r\|p\|$, справедливого для всех p, получаем
$$\Re_{M_0} f(p) \geqslant \operatorname{co}\mathcal{C} f(p)\Big(1 - \frac{\delta}{r}\Big) + \langle p, x\rangle\, \frac{\delta}{r}.$$

Взяв M_0-сильно выпуклые оболочки от обеих частей последнего неравенства и воспользовавшись леммой 4.9.1, условием теоремы 4.9.3 и теоремой 4.4.2, п. 3, получим
$$\operatorname{strco}_{M_0} \Re_{M_0} f(p) = \operatorname{co} \Re_{M_0} f(p) \geqslant \operatorname{strco}_{M_1}\mathcal{C} f(p)\Big(1 - \frac{\delta}{r}\Big) + \langle p, x\rangle\, \frac{\delta}{r}.$$
Из последнего неравенства получаем неравенство
$$\operatorname{strco}_{M_1}\mathcal{C} f(p) \leqslant \operatorname{co} \Re_{M_0} f(p) + (\operatorname{strco}_{M_1}\mathcal{C} f(p) - \langle p, x\rangle)\, \frac{\delta}{r}.$$

Учитывая условие теоремы 4.9.3, мы можем воспользоваться оценкой (4.9.5) теоремы 4.9.2, откуда получаем неравенство
$$\operatorname{strco}_{M_1}\mathcal{C} f(p) \leqslant \operatorname{co} \Re_{M_0} f(p) + \Big(1 + \frac{\delta}{r}\Big)\frac{L}{r}\, \delta\|p\|,$$
что и требовалось доказать. $\square$

Отметим, что, если компакт $M \subset \mathbb{R}^n$ не является порождающим множеством, а $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — положительно однородная функция, удовлетворяющая предположениям 1)–3), то функция $\operatorname{strco}_M \mathcal{C} f(p)$ является верхней аппроксимацией функции $\operatorname{co} f(p)$, а функция $\operatorname{co} \Re_M f(p)$ — нижняя аппроксимация функции $\operatorname{co} f(p)$. Теоремы 4.9.1–4.9.3 определяют погрешности при операции взятия выпуклой оболочки, возникающие из-за перехода от исходной положительно однородной функции к ее сеточной выпуклой аппроксимации.

Следствие 4.9.2. *Если в качестве функции f рассмотреть опорную функцию R_0-сильно выпуклого множества A из $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью* (*для которого*, *очевидно*, *выполнены предположения* 1)–3)), *то в силу теорем* 4.9.2 *и* 4.9.3 *для любой сетки* $\mathbf{C}$ *мелкости* $\Delta < 1/2$ *можно указать конечнопорожденные* (*сеточные*) *R_0-сильно выпуклые множества A_* и A^* такие*, *что справедливы включение $A_* \subset A \subset A^*$ и неравенство*
$$h(A_*, A^*) \leqslant \frac{4R_0\|A\|}{r}\Big(1 + \frac{4R_0\Delta^2}{r}\Big)\,\Delta^2.$$

ДОПОЛНЕНИЕ

1. Слабо и сильно выпуклые функции. Задача математического программирования. Необходимые условия экстремума.

В известной монографии А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова [50] четвертая и пятая главы посвящены доказательству принципа Лагранжа для нахождения решения в локально выпуклых экстремальных задачах. В этих задачах используются классы локально выпуклых и регулярно локально выпуклых функций. В другой известной монографии Ф. Кларка [54] наряду с построением общей теории негладкого анализа автор выделяет класс невыпуклых функций, названный им «регулярными», для которого им получены достаточно полные аналоги теории выпуклых функций. Заметим, что понятия регулярно локально выпуклой функции по Иоффе—Тихомирову и регулярной функции по Кларку очень близки. И наконец, в работе Ж.-Ф. Виаля [175] приведен и исследован более простой подкласс локально выпуклых функций — класс сильно выпуклых и слабо выпуклых функций. Последний класс функций более всего соответствует тематике нашей книги.

Покажем, как можно достаточно просто развить и обосновать принцип Лагранжа для экстремальных задач в классе сильно и слабо выпуклых функций, а также для некоторых обобщений этого класса.

Напомним необходимые обозначения и понятия.

Через E будем обозначать банахово пространство, через $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, через $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ — расширенную действительную прямую.

Для функции $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ определим множества $\operatorname{dom} f = \{x \in E \mid f(x) < +\infty\}$ и $\operatorname{epi} f = \{(x, \alpha) \in E \times \mathbb{R} \mid \alpha \geqslant f(x)\}$. Функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется собственной, если $\operatorname{dom} f \neq \varnothing$.

Через $f'(x;y)$ обозначим производную по направлению $y \in E$ собственной функции $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ в точке $x \in \operatorname{dom} f$, т. е.

$$f'(x;y) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x+\lambda y) - f(x)}{\lambda},$$

если такой предел (конечный или бесконечный) существует.

Определение 1.1. [50] Собственную функция $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется локально выпуклой в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$, если существует производная по всем направлениям $y \to f'(x_0;y)$, которая к тому же является собственной выпуклой функцией.

Если дополнительно к указанным условиям функция $y \to f'(x_0;y)$ оказалась непрерывной, то говорят, что функция f является регулярно локально выпуклой в точке x_0.

Определение 1.2. [50] Субдифференциалом в точке x_0 локально выпуклой в этой точке функции f называется множество в E^*

$$\partial f(x_0) = \partial g(0), \quad \text{где} \quad g(y) = f'(x_0;y), \quad \text{т. е.}$$
$$\partial f(x_0) = \{p \in E^* \mid \langle p, y\rangle \leqslant f'(x_0;y)\, \forall y \in E\}.$$

Следуя работе [175], определим более простой класс функций — *класс r-выпуклых функций*.

Определение 1.3. Пусть задано число $r \in \mathbb{R}$. r — выпуклой функцией называют собственную функцию $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ такую, что для любых точек $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$ и $\forall \lambda \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - \lambda(1-\lambda) r \|x_1 - x_2\|^2. \qquad (1.1)$$

Из определения очевидно следует, что если $r = 0$, то функция f является просто *выпуклой функцией*, а если $r > 0$, то функция f является *сильно выпуклой функцией*, см. § 1.19. Если же $r < 0$, то неравенство (1.1) является более слабым условием, чем условие на выпуклые функции. Такие функции еще называют *слабо выпуклыми функциями*.

Обобщая приведенное выше определение введем следующий более широкий класс функций.

Определение 1.4. Собственная функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется локально r-выпуклой функцией в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$, если существуют числа $r = r(x_0) \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon = \varepsilon(x_0) > 0$ такие, что для любых точек $x_1, x_2 \in (\operatorname{dom} f) \bigcap B_\varepsilon(x_0)$ и чисел $\lambda \in [0,1]$ справедливо неравенство (1.1).

Лемма 1.1. *Функция $f\colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ является локально r-выпуклой функцией в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$ тогда и только тогда, когда существует* собственная выпуклая функция $h\colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что в некоторой окрестности $(\operatorname{dom} f) \bigcap B_\varepsilon(x_0)$ справедливо равенство

$$f(x) = h(x) + r\|x\|^2. \tag{1.2}$$

Доказательство. Для любых точек $x_1, x_2 \in (\operatorname{dom} f) \bigcap B_\varepsilon(x_0)$ и числа $\lambda \in [0, 1]$ определим точку $x_\lambda = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. Из неравенства (1.1) следует, что $x_\lambda \in \operatorname{dom} f$. Кроме того,

$$\|x_1\|^2 = \|x_\lambda\|^2 + 2\langle x_1 - x_\lambda, x_\lambda\rangle + \|x_1 - x_\lambda\|^2,$$
$$\|x_2\|^2 = \|x_\lambda\|^2 + 2\langle x_2 - x_\lambda, x_\lambda\rangle + \|x_2 - x_\lambda\|^2.$$

Умножая первое из написанных выше неравенств на λ, второе — на $1 - \lambda$, и складывая их, получаем

$$\begin{aligned}\lambda\|x_1\|^2 + (1-\lambda)\|x_2\|^2 = \|x_\lambda\|^2 + 2\langle\lambda(x_1 - x_\lambda) + {}\\ + (1-\lambda)(x_2 - x_\lambda), x_\lambda\rangle + \lambda\|x_1 - x_\lambda\|^2 + (1-\lambda)\|x_2 - x_\lambda\|^2 = \\ = \|x_\lambda\|^2 + \lambda(1-\lambda)^2\|x_1 - x_2\|^2 + (1-\lambda)\lambda^2\|x_1 - x_2\|^2.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\|x_\lambda\|^2 = \lambda\|x_1\|^2 + (1-\lambda)\|x_2\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x_1 - x_2\|^2. \tag{1.3}$$

Определим функцию $h(x) = f(x) - r\|x\|^2$. Тогда из выражений (1.1) и (1.3) легко показать справедливость неравенства $h(x_\lambda) \leqslant \lambda h(x_1) + {} + (1 - \lambda)h(x_2)$, означающего выпуклость функции h. $\square$

Следствие 1.1. *Любая r-выпуклая функция $f : \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$, у которой* $\operatorname{int}\operatorname{epi} f \neq \varnothing$, *является локально липшицевой функцией.*

Доказательство следует из леммы 1.1 и теоремы 1.7.1.

Лемма 1.2. *Функция $f\colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$, локально r-выпуклая в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$, имеет в этой точке выпуклую производную по направлениям. При этом справедливо равенство*

$$f'(x_0; y) = h'(x_0; y) + 2r\langle x_0, y\rangle, \quad \forall y \in \mathcal{H}, \tag{1.4}$$

где функция h получена в формуле (1.2).

Доказательство. В силу леммы 1.1 получаем

$$\begin{aligned}f'(x_0; y) &= \lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{h(x_0 + \lambda y) - h(x_0) + r\|x_0 + \lambda y\|^2 - r\|x_0\|^2}{\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{h(x_0 + \lambda y) - h(x_0)}{\lambda} + r\cdot\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{2\lambda\langle x_0, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2}{\lambda} = \\ &= h'(x_0; y) + 2r\cdot\langle x_0, y\rangle.\end{aligned}$$

$\square$

Следствие 1.2. *Если функция $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ является локально r-выпуклой в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$, то она является локально выпуклой* *функцией в этой точке (см. определение 1.1), а в силу леммы 1.1 (формулы (1.4)) и определения 1.2 ее субдифференциал в точке x_0 может быть вычислен по формуле*

$$\partial f(x_0) = \partial h(x_0) + \{2rx_0\}. \tag{1.5}$$

Следствие 1.3. *Если функция $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ является локально r-выпуклой в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$, то функция*

$$\widetilde{h(x)} = f(x) - r\|x - x_0\|^2, \qquad \text{где} \quad x \in B_\varepsilon(x_0) \bigcap \operatorname{dom} f;$$
$$\widetilde{h(x)} = +\infty, \qquad \text{где} \quad x \notin B_\varepsilon(x_0) \bigcap \operatorname{dom} f;$$

также является собственной выпуклой функцией и справедливо равенство

$$\partial f(x_0) = \partial \widetilde{h(x_0)}. \tag{1.6}$$

Следствие 1.4. *Пусть функция $f : \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ является локально r-выпуклой в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Тогда включение $p \in \partial f(x_0)$ выполнено в том и только в том случае, когда*

$$f(x) - f(x_0) \geqslant \langle p, x - x_0\rangle + r\|x - x_0\|^2, \quad \forall x \in B_\varepsilon(x_0). \tag{1.7}$$

Доказательство. Из включения $p \in \partial f(x_0)$ в силу формулы (1.6) получаем включение $p \in \partial \widetilde{h(x_0)}$. По определению субдифференциала выпуклой функции получаем неравенство

$$\widetilde{h(x)} - \widetilde{h(x_0)} \geqslant \langle p, x - x_0\rangle, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Выражая в этом неравенстве функцию $\widetilde{h}$ через функцию f по формуле из следствия 1.3, получаем неравенство (1.7). □

Следствие 1.5. *Для функций $f_i\colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$, $i = 1, 2$, локально r_i-выпуклых в точке x_0, справедливы аналоги теорем Моро–Рокафеллара и Дубовицкого–Милютина в этой точке.*

Следствие 1.6. *Если функции f_i являются локально r_i-выпуклыми в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f_1 \bigcap \operatorname{dom} f_2$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$, то функция $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$ является локально $\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2$-выпуклой функцией в точке x_0.*

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{cases} \min\limits_{x \in A} f_0(x), \quad \text{где } A = \bigcap\limits_{k=1}^{m} A_k, \\ A_k = \{x \in \mathcal{H} \mid f_k(x) \leqslant 0\}, \end{cases} \tag{1.8}$$

где функции f_k являются локально r_k-выпуклыми функциями (при $k = \overline{0, m}$) в подозрительной на локальный минимум точке x_0, причем без ограничения общности полагаем наличие общей для всех функций f_k окрестности $B_\varepsilon(x_0)$, фигурирующей в определении 1.4.

Теорема 1.1. (Е.С. Половинкин) Пусть точка x_0 — локальное решение задачи (1.8) и пусть выполнено усиленное условие Слейтера: существует точка $x_1 \in A \bigcap B_\varepsilon(x_0)$ такая, что для всех $k \in \overline{1, m}$ справедливо неравенство $f_k(x_1) < \min\{0, r_k\}\|x_1 - x_0\|^2$. Тогда существует вектор $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $\lambda_k \geqslant 0$, такой, что

1) $\lambda_k f_k(x_0) = 0 \ \forall k \in \overline{1, m}$,

2) $0 \in \partial L(x_0, \lambda)$, где $L(x, \lambda) = f_0(x) + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k f_k(x)$.

Если обратно, точка $x_0 \in A$ и числа $\lambda_k \geqslant 0$, $k \in \overline{1, m}$, таковы, что выполнены условия 1), 2) и условие

3) $r_0 + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k r_k \geqslant 0$,

то точка x_0 есть точка локального минимума задачи (1.8).

Доказательство. Определим функции $h_k(x) = f_k(x) - \min\{0, r_k\}\|x - x_0\|^2$, $\operatorname{dom} h_k = \operatorname{dom} f_k \bigcap B_\varepsilon(x(0))$. По лемме 1.1 эти функции выпуклы.

Определим множества $\widetilde{A}_k = \{x \in B_\varepsilon(0) \mid h_k(x) \leqslant 0\}$, $\widetilde{A} = \bigcap\limits_{k=1}^{m} \widetilde{A}_k$. Так как при всех $k \in \overline{1, m}$ выполнено включение $x_0 \in \widetilde{A}_k \subset A_k$, то $x_0 \in \widetilde{A} \subset A$.

Для любого $x \in \widetilde{A}$ имеем

$$h_0(x) \geqslant f_0(x) \geqslant f_0(x_0) = h_0(x_0).$$

Таким образом, x_0 есть решение следующей задачи выпуклого программирования

$$\min_{x \in \widetilde{A}} h_0(x).$$

При этом из усиленного условия Слейтера следует, что $x_1 \in \operatorname{int} \widetilde{A}$. По результатам § 1.16 и § 2.4 найдутся числа $\lambda_k \geqslant 0$, $k \in \overline{1, m}$, такие, что

1) $\lambda_k h_k(x_0) = 0 \ \forall k \in \overline{1, m}$, т. е. $\lambda_k f_k(x_0) = 0$.

2) $0 \in \partial h_0(x_0) + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \, \partial h_k(x_0)$, что в силу равенства (1.6) дает включение 2) теоремы, т. е. по обобщенной теореме Моро—Рокафеллара $0 \in \partial L(x_0, \lambda)$.

Если существуют $\lambda_k \geqslant 0$, $k \in \overline{1, m}$, и точка x_0 такие, что выполнены условия 1), 2), 3) теоремы, то из 3) следует, что функция $L(x, \lambda)$ является выпуклой в некоторой окрестности $B_\varepsilon(x_0)$, а из 2) следует, что $L(x_0,\lambda) \leqslant L(x,\lambda)$ для всех $x \in B_\varepsilon(x_0)$. В силу условия 1) имеем $L(x_0,\lambda) = f_0(x_0)$, откуда для всех $x \in A \bigcap B_\varepsilon(x_0)$ выполнено неравенство

$$f_0(x_0) \leqslant f_0(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k(x) \leqslant f_0(x),$$

поэтому x_0 — точка локального минимума задачи (1.8). $\square$

2. Удаленные точки множеств

Для выпуклого замкнутого ограниченного множества в банаховом пространстве мы рассмотрим вопрос существования и единственности точки этого множества, наиболее удаленной от заданной точки пространства. В терминах существования и единственности наиболее удаленной точки, а также липшицевой зависимости этой точки от точки пространства в данном разделе получены необходимые и достаточные условия сильной выпуклости множества в некоторых бесконечномерных пространствах, в частности, — в гильбертовом пространстве. Мы покажем, что условие «для каждой точки пространства, достаточно удаленной от множества, существует единственная наиболее удаленная точка множества», является критерием сильной выпуклости множества в конечномерном нормированном пространстве, в котором шар нормы является строго выпуклым и порождающим множеством. Результаты этого параграфа получены М. В. Балашовым совместно с Г. Е. Ивановым в [174].

Для ограниченного множества $A \subset E$ определим *функцию удаленности* $f_A : E \to \mathbb{R}$: $f_A(x) = \sup\limits_{a \in A} \|x - a\|$.

Для числа $r > 0$ определим множество

$$T_r = T_r(A) = \{x \in E \mid f_A(x) > r\}.$$

Заметим, что граница этого множества $\partial T_r = \{x \in E \mid f_A(x) = r\}$.

Напомним, что для любого вектора $p \in E^* \backslash \{0\}$ через x_p^A обозначим опорный элемент множества A, т. е. $x_p^A \in \operatorname{Arg}\max\limits_{a \in A} \langle p, a\rangle$.

Определение 2.1. Пусть $A \subset E$ — выпуклое замкнутое множество, $x \in E$. Будем говорить, что точка $a(x) \in A$ *удаленная* от точки x точка множества A, если $\|x - a(x)\| = f_A(x)$ и для всех других точек $a \in A$ выполнено неравенство $\|x - a\| < f_A(x)$. Будем далее обозначать удаленную от точки x точку множества A через $a(x)$.

Напомним, что порождающими множествами являются, например, шар в гильбертовом пространстве или произвольное выпуклое замкнутое множество на плоскости, см. главу 4.

Напомним, что шар называется *строго выпуклым*, если его граница не содержит отрезков.

Теорема 2.1. *Пусть E — рефлексивное банахово пространство, в котором шар является строго выпуклым и порождающим множеством. Тогда если $A \subset E$ есть сильно выпуклое множество с радиусом r, то для любого $x_0 \in T_r(A)$ существует удаленный элемент $a(x_0) \in A$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in T_r(A)$. Обозначим $R = f_A(x_0)$.

В силу определения 4.1.1 существует замкнутое выпуклое множество B такое, что $A + B = B_r(0)$. Покажем, что $0 \notin x_0 + B$.

Действительно, если $0 \in x_0 + B$, то $-x_0 \in B$ и для всех $a \in A$ выполнено $a - x_0 \in B_r(0)$, т. е. $\|a - x_0\| \leqslant r$, что противоречит включению $x_0 \in T_r$.

Рассмотрим точку y_0 — метрическую проекцию нуля на замкнутое выпуклое множество $x_0 + B$. Эта точка существует в силу рефлексивности E и единственна в силу строгой выпуклости шара в E.

Из равенств

$$\begin{aligned} R = f_A(x_0) &= \inf\{t > 0 \mid A \subset B_t(x_0)\} = \\ &= \inf\{t > 0 \mid A + B \subset B_t(x_0) + B\} = \\ &= \inf\{t > 0 \mid B_r(0) \subset B_t(x_0) + B\} = \\ &= \inf\{t > 0 \mid 0 \in B_{t-r}(x_0) + B\} = \|y_0\| + r \end{aligned}$$

следует равенство

$$\|y_0\| = R - r.$$

Пусть $p \in E^*$ — единичный вектор, разделяющий множества $B_{\|y_0\|}(0) = B_{R-r}(0)$ и $x_0 + B$, т. е.

$$\sup_{y \in B_{R-r}(0)} \langle -p, y\rangle = R - r = \langle -p, y_0\rangle = \inf_{x \in x_0 + B} \langle -p, x\rangle.$$

Отсюда в силу строгой выпуклости шара вытекают равенства

$$y_0 = -x_p^{B_{R-r}(0)} = x_0 + x_p^B = x_0 + x_p^{B_r(0)} - x_p^A,$$

т. е.

$$x_p^A = x_0 + x_p^{B_r(0)} + x_p^{B_{R-r}(0)} = x_0 + x_p^{B_R(0)}.$$

В силу опорного принципа для порождающих множеств получаем

$$A \subset B_r\left(x_p^A - x_p^{B_r(0)}\right)$$

и поэтому

$$A \subset B_r\left(x_p^A - x_p^{B_r(0)}\right) = B_r\left(x_0 + x_p^{B_{R-r}(0)}\right) \subset B_R\left(x_0\right).$$

Следовательно, в силу строгой выпуклости шара в E граница шара $B_R\left(x_0\right)$ не может иметь более одной общей точки с шаром

$B_r\left(x_0+x_p^{B_{R-r}(0)}\right)$. Отсюда и из соотношений $x_p^A=x_0+x_p^{B_R(0)}\subset$ $\subset B_r\left(x_0+x_p^{B_{R-r}(0)}\right)\bigcap\partial B_R\left(x_0\right)$ следует включение

$$A\subset\{x_p^A\}\bigcup\mathrm{int}B_R\left(x_0\right),$$

Итак, $a(x_0)=x_p^A$. □

Лемма 2.1 *Пусть $A\subset\mathcal{H}$ — сильно выпуклое с радиусом $R>0$ множество. Тогда для любых векторов $p_1,p_2\in\mathcal{H}$ таких, что $\|p_1\|\geqslant 1$, $\|p_2\|\geqslant 1$, выполнено неравенство*

$$\|a_1-a_2\|^2\leqslant R\langle p_1-p_2,a_1-a_2\rangle,$$

где $a_i=\arg\max\limits_{a\in A}\langle p_i,a\rangle$ при $i=1,2$.

Доказательство. Зафиксируем векторы p_1,p_2 длины не менее 1.

В силу опорного принципа для сильно выпуклых множеств (теорема 4.1.3)

$$A\subset B_R\left(a_1-\frac{R}{\|p_1\|}p_1\right)\cap B_R\left(a_2-\frac{R}{\|p_2\|}p_2\right),$$

откуда следуют неравенства

$$\left\|a_2-a_1+\frac{R}{\|p_1\|}p_1\right\|^2\leqslant R^2,\qquad \left\|a_1-a_2+\frac{R}{\|p_2\|}p_2\right\|^2\leqslant R^2,$$

поэтому

$$2R\langle a_1-a_2,p_1\rangle\geqslant\|p_1\|\cdot\|a_1-a_2\|^2\geqslant\|a_1-a_2\|^2,$$
$$2R\langle a_1-a_2,-p_2\rangle\geqslant\|p_2\|\cdot\|a_1-a_2\|^2\geqslant\|a_1-a_2\|^2.$$

Складывая два последних неравенства, получаем требуемое неравенство. □

Теорема 2.2. *Пусть множество $A\subset\mathcal{H}$ сильно выпукло с радиусом $r>0$. Тогда для любой точки $x\in T_r$ существует $a(x)$ — удаленная точка множества A. При этом для любых $R>r$ и $x_1,x_2\in T_R$ справедливо неравенство*

$$\|a(x_1)-a(x_2)\|\leqslant\frac{r}{R-r}\|x_1-x_2\|. \tag{2.1}$$

Доказательство. Существование удаленной точки следует из теоремы 2.1 и того, что шар в гильбертовом пространстве — порождающее множество.

Зафиксируем число $R > r$ и точки $x_1, x_2 \in T_R$. Определим векторы $a_i = a(x_i)$, $p_i = \dfrac{1}{R}(a_i - x_i)$ при $i = 1, 2$. Заметим, что $\|p_i\| \geqslant 1$, $a_i = \arg\max\limits_{a \in A}\langle p_i, a\rangle$ при $i = 1, 2$. В силу леммы 2.1 имеем:

$$\|a_1 - a_2\|^2 \leqslant r\left\langle \frac{a_1 - x_1}{R} - \frac{a_2 - x_2}{R}, a_1 - a_2\right\rangle = \\ = \frac{r}{R}\|a_1 - a_2\|^2 - \frac{r}{R}\langle x_1 - x_2, a_1 - a_2\rangle.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant \|a_1 - a_2\|^2\left(1 - \frac{r}{R}\right) \leqslant -\frac{r}{R}\langle x_1 - x_2, a_1 - a_2\rangle \leqslant \frac{r}{R}\|x_1 - x_2\| \cdot \|a_1 - a_2\|,$$

откуда и получаем формулу (2.1). □

Лемма 2.2. *Пусть заданы число $R > 0$ и точки $x_1, x_2 \in E$, удовлетворяющие условиям $\|x_1\| \geqslant R$, $\|x_2\| \geqslant R$. Тогда*

$$\left\|\frac{x_1}{\|x_1\|} - \frac{x_2}{\|x_2\|}\right\| \leqslant \frac{2}{R}\|x_1 - x_2\|.$$

Лемма 2.3 *Пусть заданы множество $A \subset E$ и точка $x_0 \in E$, для которой существует $a(x_0)$ — удаленная точка множества A. Тогда точка $a(x_0)$ является удаленной от любой точки $x \in E$ такой, что $x_0 \in [a_0; x]$.*

Доказательство лемм 2.2, 2.3 элементарно.

Определение 2.2 Множество $A \subset E$ называется *сильным r-солнцем*, если любая точка $a(x)$, удаленная от точки $x \in T_r$, является также удаленной от любой точки w отрезка $[x; a(x)]$, удовлетворяющей неравенству $\|w - a(x)\| > r$.

Теорема 2.3. *Пусть заданы выпуклое замкнутое ограниченное множество $A \subset E$ и число $r > 0$. Пусть для любого $x \in T_r = T_r(A)$ существует удаленный элемент $a(x) \in A$. Пусть также для любого числа $R > r$ существует число $L > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in T_R$ выполнено неравенство*

$$\|a(x_1) - a(x_2)\| \leqslant L \cdot \|x_1 - x_2\|. \tag{2.2}$$

Тогда множество A есть сильное r-солнце.

Доказательство. Зафиксируем точку $x_0 \in T_r$. Пусть точка $y \in [x_0; a(x_0)]$ удовлетворяет неравенству $\|y - a(x_0)\| > r$. Требуется доказать равенство $a(y) = a(x_0)$.

Определим число

$$R = \inf\{\|w - a(x_0)\| \mid w \in [x_0; a(x_0)],\ a(w) = a(x_0)\}. \tag{2.3}$$

Если $R \leqslant r$, то существует точка $w \in [x_0; a(x_0)]$ такая, что $a(w) = a(x_0)$ и $\|w - a(x_0)\| < \|y - a(x_0)\|$. Следовательно $win[y; a(x_0)]$ и в силу леммы 2.3 справедливо равенство $a(y) = a(x_0)$.

Покажем, что случай $R > r$ не реализуется. Предположим $R > r$.

Зафиксируем число $\delta > 0$ такое, что

$$\delta < \min\left\{\frac{r}{2L}, \frac{R-r}{2}\right\}.$$

Определим точку

$$z = a(x_0) + \frac{R + \delta/2}{\|x_0 - a(x_0)\|}(x_0 - a(x_0)). \tag{2.4}$$

Отметим, что для любого $x \in B_\delta(z)$ справедливы неравенства

$$f_A(x) \geqslant \|x - a(x_0)\| \geqslant \|z - a(x_0)\| - \delta > R - \delta > (R + r)/2 \tag{2.5}$$

и

$$\|z - a(x)\| \geqslant \|x - a(x)\| - \delta \geqslant \|x - a(x_0)\| - \delta \geqslant \\ \geqslant \|z - a(x_0)\| - 2\delta > R - 2\delta \geqslant r. \tag{2.6}$$

В силу неравенств (2.5) имеем: $B_\delta(z) \subset T_{(R+r)/2} \subset T_r$. Поэтому, согласно условиям теоремы, для любой точки $x \in B_\delta(z)$ найдется $a(x)$ — удаленная точка множества A. Определим функцию $b : B_\delta(z) \to B_\delta(z)$:

$$b(x) = z + \frac{\delta}{\|a(x) - z\|}(a(x) - z). \tag{2.7}$$

В силу леммы 2.2 и неравенств (2.6) для любых $x_1, x_2 \in B_\delta(z)$ справедливо неравенство

$$\|b(x_1) - b(x_2)\| \leqslant \frac{2\delta}{r}\|a(x_1) - a(x_2)\|.$$

Поскольку $B_\delta(z) \subset T_{(R+r)/2}$, $(R + r)/2 > r$, то согласно неравенству (2.2) имеем:

$$\|b(x_1) - b(x_2)\| \leqslant \frac{2L\delta}{r}\|x_1 - x_2\|.$$

Поскольку $\dfrac{2L\delta}{r} < 1$, то отображение $b : B_\delta(z) \to B_\delta(z)$ является сжимающим и, следовательно, имеет неподвижную точку $u \in B_\delta(z)$, т. е.

$$u = z + \frac{\delta}{\|a(u) - z\|}(a(u) - z).$$

Поэтому $u \in [z; a(u)]$. Отсюда в силу леммы 2.3 справедливо равенство $a(z) = a(u)$.

Поскольку $\|z - a(x_0)\| = R + \delta/2 > R$, то в силу равенства (2.3) существует точка $w \in [x_0; a(x_0)]$ такая, что $a(w) = a(x_0)$ и $\|w - a(x_0)\| < \|z - a(x_0)\|$. Следовательно $w \in [z; a(x_0)]$ и в силу леммы 2.3 справедливо равенство $a(z) = a(x_0)$. Итак, $a(u) = a(x_0)$. Кроме того, из включения $u \in [z; a(u)] = [z; a(x_0)]$ следуют соотношения

$$\|u - a(x_0)\| = \|z - a(x_0)\| - \|z - u\| = R + \delta/2 - \delta < R,$$

что противоречит равенству (2.3). $\square$

Вопрос о том, можно ли в теореме 2.3 отказаться от условия Липшица для отображения $x \mapsto a(x)$ и требовать только существование удаленной точки для каждого элемента $T_r(A)$ в случае хотя бы гильбертова пространства $\mathcal{H}$, нами не решен. По-видимому, решение этого вопроса равносильно решению известной проблемы выпуклости чебышевского множества в гильбертовом пространстве.

Теорема 2.4. *Пусть E — рефлексивное банахово пространство с дифференцируемой по Фреше нормой на $\partial B_1(0)$. Пусть выпуклое замкнутое ограниченное множество $A \subset E$ является сильным r-солнцем и для любого $x \in T_r(A)$ существует удаленная точка $a(x)$ в A. Тогда*

$$A = \bigcap_{x \in \partial T_r} B_r(x). \tag{2.8}$$

Доказательство. Положим

$$\widetilde{A} = \bigcap_{x \in \partial T_r} B_r(x).$$

Если $x \in \partial T_r$, то $f_A(x) = r$ и, следовательно, $A \subset B_r(x)$. Поэтому $A \subset \widetilde{A}$.

Допустим, найдется точка $c \in \widetilde{A} \backslash A$. Пусть c_0 есть метрическая проекция точки c на A, которая существует в силу рефлексивности E. Пусть $x_0 = \dfrac{c - c_0}{\|c - c_0\|}$ и функционал $p_0 \in E^*$ таков, что $\langle p_0, x_0 \rangle = \|x_0\| = 1$, $\|p_0\|_* = 1$.

Рассмотрим точки $c_k = c_0 - kx_0$ при $k > r$, $k \in \mathbb{N}$. Для таких точек по условию теоремы существует удаленная точка $a_k = a(c_k)$ в A. Пусть $x_k = \dfrac{a_k - c_k}{\|a_k - c_k\|}$. Из ограниченности множества A и включений $a_k \in A$ следует, что $x_k = \dfrac{a_k - c_0 + kx_0}{\|a_k - c_0 + kx_0\|} \to x_0$ при $k \to \infty$. Пусть для каждого k вектор $p_k \in E^*$ таков, что $\langle p_k, x_k \rangle = \|x_k\| = 1$ и $\|p_k\|_* = 1$.

Поскольку для любого $x \in \partial B_1(0)$ норма $\|\cdot\|$ пространства E дифференцируема по Фреше, то в силу известных результатов [37, теорема 1 § 2 гл. 2] получаем, что

$$\|p_k - p_0\|_* \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{2.9}$$

Так как A является сильным r-солнцем, $a(a_k - \|a_k - c_k\| x_k) = a(c_k) = a_k$, $\|a_k - c_k\| \geqslant \|c_0 - c_k\| = k$, то для любого номера $k > r$ и для любого числа $R \in (r; k)$ справедливо равенство $a(a_k - Rx_k) = a_k$. Поэтому $f_A(a_k - Rx_k) = R$. Переходя в этом равенстве к пределу при $R \to r + 0$, получаем равенство $f_A(a_k - rx_k) = r$, т. е. $a_k - rx_k \subset \subset \partial T_r$. Отсюда по определению множества $\widetilde{A}$ следует включение $\widetilde{A} \subset B_r(a_k - rx_k)$. Поэтому $c \in \widetilde{A} \subset B_r(a_k - rx_k)$, а значит, $\|c - a_k +$

$+ rx_k\| \leqslant r$. Следовательно, $\langle p_k, c - a_k + rx_k\rangle \leqslant r\|p_k\|_* = r$. Отсюда и из равенства $\langle p_k, x_k\rangle = 1$ следует неравенство

$$\langle p_k, c - a_k\rangle \leqslant 0 \quad \text{для любого} \quad k > r. \tag{2.10}$$

Вектор p_0 по построению содержится в нормальном конусе к A в точке c_0, поэтому $\langle p_0, c_0 - a_k\rangle \geqslant 0$ для всех $k > r$. Следовательно,

$$\|c - c_0\| = \|c - c_0\|\langle p_0, x_0\rangle = \langle p_0, c - c_0\rangle \leqslant \langle p_0, c - a_k\rangle.$$

Поэтому, согласно (2.10) имеем:

$$\|c - c_0\| \leqslant \langle p_0 - p_k, c - a_k\rangle \leqslant \|p_0 - p_k\|_* \cdot \|c - a_k\|.$$

Отсюда, из ограниченности $\|c - a_k\|$ и соотношения (2.9) вытекает равенство $c = c_0$, которое противоречит условиям $c_0 \in A$, $c \notin A$. $\square$

Из теорем 2.2, 2.3, 2.4 вытекает следующий критерий сильной выпуклости множества в гильбертовом пространстве.

Теорема 1.2.5. *Пусть A — выпуклое замкнутое ограниченное множество в гильбертовом пространстве. Множество A сильно выпукло с константой $r > 0$ тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in T_r(A)$ существует $a(x)$ — удаленная точка множества A и для любого числа $R > r$ функция $x \mapsto a(x)$ удовлетворяет условию Липшица на множестве $T_R(A)$.*

Далее мы покажем, что в конечномерном случае теоремы 2.3 и 2.5 остаются справедливыми и без условия Липшица на функцию $x \mapsto$ $\to a(x)$.

Лемма 2.4. *Пусть A — выпуклый компакт в конечномерном нормированном пространстве E; $r > 0$. Пусть для любого $x \in T_r(A)$ существует $a(x)$ — удаленный элемент множества A. Тогда множество A есть сильное r-солнце.*

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 2.3, определим число R по формуле (2.3). В случае $R \leqslant r$ получаем требуемое утверждение. Покажем, что случай $R > r$ не реализуется.

Предположим $R > r$. Зафиксируем число $\delta \in \left(0; \dfrac{R - r}{2}\right)$. Определим вектор z по формуле (2.4) и функцию $b : B_\delta(z) \to B_\delta(z)$ по формуле (2.7).

Заметим, что для любого $x \in B_\delta(z)$ множество $\partial B_{f_A(x)}(x) \bigcap A$ состоит из единственного элемента $a(x)$. Поскольку функция $x \mapsto f_A(x)$ непрерывна, то многозначное отображение $x \mapsto \partial B_{f_A(x)}(x)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа. Отсюда и из компактности множества A следует, что многозначное отображение $x \mapsto \partial B_{f_A(x)}(x) \bigcap A$ имеет компактный график. Отсюда по теореме 2.8.1 следует полунепрерывность сверху многозначного отображения $x \mapsto \partial B_{f_A(x)}(x) \bigcap A$, т.е. непрерывность функции $x \mapsto a(x)$ на множестве $B_\delta(z)$. Поэтому функция $b\colon B_\delta(z) \to B_\delta(z)$ непрерывна.

По теореме Брауэра о неподвижной точке существует точка $u \in B_\delta(z)$ такая, что $b(u) = u$. Далее доказательство повторяет доказательство теоремы 2.3. □

Лемма 2.5. *Пусть E — конечномерное нормированное пространство; $r > 0$. Пусть выпуклый компакт $A \subset E$ есть сильное r-солнце. Тогда*

$$A = \bigcap_{x \in \partial T_r} B_r(x).$$

Доказательство. Повторяет доказательство теоремы 2.4 за тем исключением, что вектор p_0 мы определим, как предел $\{p_k\}$. Поскольку $\{p_k\} \subset \partial B_1^*(0)$, а сфера $\partial B_1^*(0)$ в конечномерном пространстве компактна, то без ограничения общности $p_k \to p_0$. В силу полунепрерывности субдифференциала функции нормы $x \mapsto \|x\|$ сверху (следствие 1.17.2) получаем, что $p_0 \in \partial \|x_0\|$, или $\langle p_0, x_0 \rangle = \|x_0\|$. Далее повторяем доказательство теоремы 2.4. □

Из лемм 2.4, 2.5 и теоремы 2.1 вытекает следующий критерий сильной выпуклости множества в конечномерном пространстве.

Теорема 2.6. *Пусть E — конечномерное нормированное пространство, в котором шар является порождающим и строго выпуклым (например, $E = \mathbb{R}^n$). Выпуклый компакт $A \subset E$ является сильно выпуклым с радиусом r тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in T_r(A)$ существует удаленная точка множества A.*

Отметим, что в теореме 2.6 условие, что шар является порождающим множеством, фактически необходимо. Более точно, верна следующая теорема, частично обращающая теорему 2.1.

Теорема 2.7 *Пусть E — конечномерное пространство, в котором шар является строго выпуклым; $r > 0$. Пусть для каждого множества $A \subset E$, сильно выпуклого с радиусом r, и для любой точки $x \in T_r(A)$ существует $a(x)$ — удаленная точка множества A. Тогда шар в E является порождающим множеством.*

Доказательство. Зафиксируем непустое множество $A \subset E$, сильно выпуклое с радиусом r. Покажем, что для множества A справедлив опорный принцип. Зафиксируем $p \in E^*$, $\|p\|_* = 1$. Пусть $x_0 \in E$ такой, что $\|x_0\| = 1 = \langle p, x_0 \rangle$.

Зафиксируем произвольную точку $a_0 \in A$, пусть $x_k = a_0 - kx_0$, $k > 2r$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $a_k = a(x_k) \in A$ — удаленные точки для точек x_k. Поскольку по лемме 2.4 множество A есть сильное r-солнце, то для точки $y_k \in [a_k; x_k]$ такой, что $\|a_k - y_k\| = r\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$ выполнено равенство $a(y_k) = a_k$.

Так как множество A ограничено, $a_k \in A$, $\|a_k - y_k\| \leqslant 2r$, то последовательность $\{y_k\}$ ограничена. Поэтому можно считать, что $y_k \to y_0$ при $k \to \infty$. В силу непрерывности отображения $x \mapsto a(x)$ в точке $x = y_0$ (см. доказательство леммы 2.4) имеем
$$\frac{a_k - y_k}{\|a_k - y_k\|} \to \frac{a(y_0) - y_0}{\|a(y_0) - y_0\|} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$
С другой стороны,
$$\frac{a_k - y_k}{\|a_k - y_k\|} = \frac{a_k - x_k}{\|a_k - x_k\|} = \frac{a_k - a_0 + kx_0}{\|a_k - a_0 + kx_0\|} \to x_0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$
Следовательно,
$$\frac{a(y_0) - y_0}{\|a(y_0) - y_0\|} = x_0. \tag{2.11}$$

Переходя к пределу в равенстве $\|a_k - y_k\| = r\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$, получаем равенство $\|a(y_0) - y_0\| = r$. Поэтому
$$A \subset B_r(y_0). \tag{2.12}$$

Следовательно, для любого $a \in A$ справедливо неравенство $\|a - y_0\| \leqslant r$, а значит,
$$\langle p, a - y_0\rangle \leqslant r = \|a(y_0) - y_0\| = \|a(y_0) - y_0\|\langle p, x_0\rangle = \langle p, a(y_0) - y_0\rangle.$$
Поэтому $x_p^A = a(y_0)$. В силу определения вектора x_0 выполняется равенство $x_p^{B_r(0)} = rx_0$. Отсюда и из (2.11) следует равенство $y_0 = a(y_0) - rx_0 = x_p^A - x_p^{B_r(0)}$. Поэтому согласно включению (2.12) для любого единичного вектора $p \in E^*$ выполняется включение
$$A \subset B_r\left(x_p^A - x_p^{B_r(0)}\right).$$
Поскольку в силу строгой выпуклости шара точки x_p^A и $x_p^{B_r(0)}$ определяются по p однозначно, то в силу теоремы 4.1.2 шар в E является порождающим множеством. □

3. P-множества и свойство зажатости

В данном разделе мы рассмотрим некоторые свойства P-множеств и их применение к одной комбинаторной задаче. Раздел написан совместно с И. И. Богдановым, которому принадлежит доказательство леммы 3.3 и теоремы 3.3. Ему также принадлежит определение точечной зажатости и пример 4.

В теореме 3.1 показано, что пересечение P-множества с аффинным подпространством непрерывно в метрике Хаусдорфа. Как простое следствие этого факта, получен новый результат о достаточных условиях непрерывности многозначного отображения с выпуклым замкнутым графиком на всем своем эффективном множестве (а не только на его внутренности). Оказывается, для непрерывности достаточно, чтобы график был P-множеством. При этом нет никаких предположений об условии «непустой внутренности», что характерно для имеющихся на сегодня теорем о непрерывности пересечения [68, глава 3]. В теореме 3.2 дана новая характеризация P-множеств.

Хорошо известен классический результат Юнга (теорема 1.17.5) о том, что для любого компакта существует шар минимального радиуса, содержащий данный компакт. При этом в пересечении границы шара с данным компактом содержатся вершины симплекса и для этого симплекса шар также является шаром минимального радиуса, содержащим симплекс. Иными словами, можно выбрать из компакта не более чем $n+1$ точку так, что эти точки нельзя параллельно перенести на любой ненулевой вектор, чтобы они остались в шаре. Таким образом, компакт «зажат»в шаре. Нами рассматриваются задачи о зажатости компактов в произвольных множествах и в частности в P-множествах, а не только в телах нормы. Таким образом, идет речь об обобщении результата Юнга со случая тела евклидовой нормы на произвольные множества. Данныое обобщение возникает и как частный случай теоремы 4.6.1 без условия строгой выпуклости и порождаемости множества M. При исследовании этого вопроса возникают несколько разных определений зажатости. В лемме 3.2 показано, что для P-множества определения зажатости и точечной зажатости эквивалентны. В лемме 3.3 приведены новые результаты о полунепрерывности многозначного отображения, существенно использующее свойства P-множеств. В теореме 3.3 и ее следствии показано, что для компакта из $\mathbb{R}^n$, точечно зажатого в P-множестве, всегда найдется конечное точечно зажатое подмножество не более чем из $2n$ элементов. Как показано в примере 4, для произвольных вложенных выпуклых компактов это неверно, т. е. конечного подмножества может не найтись. Отметим, что просматривается серьезная аналогия между теоремой 3.3 и теоремой Штейница [31, Теорема 3.2, С. 36], однако свести теорему 3.3 к последней авторам не удалось.

Теорема 3.1. *Пусть* $A \subset \mathbb{R}^n$ — *выпуклый компакт,* $L \subset \mathbb{R}^n$ — *подпространство. Пусть либо 1)* $\dim L = n-1$, *либо 2)* A *является P-множеством. Тогда многозначное отображение* $(z \in A) \mapsto$ $\mapsto (z+L) \cap A$ *непрерывно в метрике Хаусдорфа.*

Доказательство. 1) Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — произвольный выпуклый компакт и $\dim L = n-1$. Рассмотрим $F(z) = (z+L) \cap A$ для всех $z \in A$.

По теореме 2.8.1 о замкнутом графике многозначное отображение F полунепрерывно сверху в любой точке $z_0 \in A$. Это означает, что для любой последовательности $\{z_k\} \subset A$, $z_k \to z_0$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется k_ε такое, что для любого $k > k_\varepsilon$

$$F(z_k) \subset F(z_0) + B_\varepsilon(0). \tag{3.1}$$

Допустим, в некоторой точке $z_0 \in A$ нарушается условие полунепрерывности снизу, т. е. существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $\{z_k\} \subset A$ такие, что $\lim z_k = z_0$ и

$$F(z_0) \not\subset F(z_k) + B_{\varepsilon_0}(0). \tag{3.2}$$

Отсюда следует, что $z_k \notin z_0 + L$ для всех k. Условие (3.2) означает, что для любого k существует точка $w_k \in F(z_0)$ такая, что $w_k \notin F(z_k) + B_{\varepsilon_0}(0)$. В силу компактности множества $F(z_0)$ можно без ограничения общности считать, что $w_k \to w_0 \in F(z_0)$ и

$$w_0 \notin F(z_k) + B_{\varepsilon_0/2}(0). \tag{3.3}$$

Будем считать, что $\|z_1 - w_0\| > \dfrac{\varepsilon_0}{2}$, т. к. в противном случае мы можем уменьшить ε_0. Пусть φ — угол между отрезком $[w_0, z_1]$ и гиперплоскостью L. Без ограничения общности будем считать, что в полупространстве с границей $z_0 + L$, содержащем z_1, содержатся все элементы последовательности $\{z_k\}$.

Выберем такой номер k, что расстояние от точки z_k до гиперплоскости $z_0 + L$ достаточно мало:

$$\varrho(z_k, z_0 + L) < \frac{\varepsilon_0}{2}\sin\varphi.$$

Определим точку $w = w_0 + \dfrac{z_1 - w_0}{\|z_1 - w_0\|}\dfrac{\varepsilon_0}{2}$. Тогда

$$\varrho(w, z_0 + L) = \frac{\varepsilon_0}{2}\sin\varphi > \varrho(z_k, z_0 + L).$$

Отсюда и из того, что $w_0 \in z_0 + L$, а точки z_k и z_1 (а значит, и w) лежат с одной стороны от гиперплоскости $z_0 + L$ следует, что точки w_0 и w лежат по разные стороны от гиперплоскости $z_k + L$. Поэтому

$$[w_0, w] \cap (z_k + L) = \varnothing. \tag{3.4}$$

Так как $w_0 \in F(z_0)$, $z_1 \in A$, то $[w_0, w] \subset [w_0, z_1] \subset A$. Отсюда и из равенства $\|w_0 - w\| = \dfrac{\varepsilon_0}{2}$ следует, что $[w_0, w] \subset A \cap B_{\varepsilon_0/2}(w_0)$. Поэтому, согласно (3.4),

$$A \cap B_{\varepsilon_0/2}(w_0) \cap (z_k + L) = \varnothing,$$

т. е. $w_0 \in (A \cap (z_k + L)) + B_{\varepsilon_0/2}(0)$, что противоречит включению (3.3).

Итак, полунепрерывность снизу многозначного отображения $F(z)$ доказана, а вместе с полунепрерывностью сверху (3.1) это дает непрерывность в метрике Хаусдорфа.

2) Пусть теперь $\dim L = m$, $1 \leqslant m \leqslant n$, и $A \subset \mathbb{R}^n$ является P-множеством. Так же, как и в пункте 1 доказательства, полунепрерывность сверху $F(z) = (z + L) \cap A$ имеет место и вопрос стоит о полунепрерывности снизу F в произвольной точке $z_0 \in A$.

Рассуждая от противного, как и в пункте 1), получаем, что существуют $\varepsilon_0 > 0$, $w_0 \in F(z_0)$ и последовательность $\{z_k\} \subset A$, $\lim z_k = z_0$ такие, что

$$w_0 \notin F(z_k) + B_{\varepsilon_0/2}(0).$$

Легко видеть, что $w_0 = z_0$. Пусть $q = \dfrac{z_0 - w_0}{\|z_0 - w_0\|} \in \partial B_1(0)$. Рассмотрим функцию $f_{A,q}$ из определения 1.8.1. Пусть $w_0 = (x_0, \mu_0)$, $z_k = (x_k, \mu_k)$. При этом $f_{A,q}(x_0) \leqslant \mu_0$. Но для достаточно больших k (когда $\|z_0 - z_k\| < \varepsilon_0/4$) $f_{A,q}(x_k) \geqslant \mu_0 + \dfrac{\varepsilon_0}{4}$, так как $(z_k + l(q)) \cap B_{\varepsilon_0/4}(w_0) = \varnothing$ при таких k. Отсюда следует, что функция $f_{A,q}$ не полунепрерывна сверху в точке $x_0 \in P_{L(q)}A$, что противоречит определению P-множества. $\square$

Напомним, что для многозначного отображения $F : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^m}$ эффективным множеством, называется множество $\operatorname{dom} F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \neq \varnothing\}$, графиком называется множество $\operatorname{graph} F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid x \in \operatorname{dom} F,\ y \in F(x)\}$.

Следствие 3.1. *Пусть $F : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^m}$ многозначное отображение с выпуклым замкнутым графиком.* 1) *Если $n = 1$ и график F есть выпуклый компакт, то отображение F непрерывно на* $\operatorname{dom} F$. 2) *Если график F является P-множеством, то отображение F непрерывно на* $\operatorname{dom} F$.

Доказательство следствия получается из теоремы 3.1 и того, что

$$\{x_0\} \times F(x_0) = \operatorname{graph} F \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid x = x_0\}.$$

Отметим, что пункт 1 следствия тривиален, но мы приводим его для полноты картины.

Без условия, что $\operatorname{graph} F$ есть P-множество, утверждение следствия не верно. Действительно, пусть $q = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Пусть $\operatorname{graph} F = A_0$, где A_0 из примера 1.8.1, $\operatorname{dom} F = \{(x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$, $F(x_1, x_2) = \{\lambda \mid (x_1, x_2, \lambda) \in A_0\}$. Тогда отображение F не полунепрерывно снизу в точке $(0, 0)$.

Пример 1. *Пусть выпуклые компакты A, B и C из $\mathbb{R}^n$ таковы, что $A + B = C$ и C есть P-множество. Тогда существуют непрерывные функции $a(\cdot) : C \to A$ и $b(\cdot) : C \to B$ такие, что для любого $c \in C$ выполнено равенство $a(c) + b(c) = c$.*

Доказательство. Пусть $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, $L(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Поскольку L сюръективен, то для любого $c \in \mathbb{R}^n$ многозначное отображение $L^{-1}(c) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = c\}$ является непрерывным по Липшицу в метрике Хаусдорфа (следствие 6 главы 3 [68]) и его значения представляют из себя параллельные аффинные множества одной размерности. Поскольку C есть P-множество, то таковы же A, B и $A \times B$. В силу теоремы 1.3.1 многозначное отображение $C \ni c \to (A \times B) \cap L^{-1}(c)$ непрерывно. Взяв центр Штейнера $s(\cdot)$ этого отображения, получим

$$(a(c), b(c)) = s\left((A \times B) \cap L^{-1}(c)\right).$$

$\square$

Отметим, что пример 1 есть частная постановка вопроса о расщеплении для селекций (splitting problem for selections). Пусть $i = 1, 2$, $F_i : X \to 2^{Y_i}$ — многозначные отображения с выпуклыми значениями и $L : Y_1 \times Y_2 \to Y$ — линейный сюръективный оператор. Задача расщепления заключается в том, чтобы для любого непрерывного селектора $f \in L(F_1 \times F_2)$ найти непрерывные селекторы $f_i \in F_i$ такие, что $f = L(f_1, f_2)$. Легко видеть, что даже в случае когда все пространства конечномерные, эта задача может не иметь решения. В случае, когда график $\operatorname{graph} F_1 \times F_2$ многозначного отображения $F_1 \times F_2$ является P-множеством в $\mathbb{R}^n$, решение существует. Действительно,

$$(x, f_1(x), f_2(x)) = s\left((\operatorname{graph} F_1 \times F_2) \cap (x, L^{-1}(f(x)))\right),$$

причем отображение $x \to (x, L^{-1}(f(x)))$ непрерывно в силу следствия 6 главы 3 [68], а пересечение непрерывно в силу теоремы 3.1.

Постановки вопроса из примера 1 и вопроса о расщеплении для селекций сообщены нам П. В. Семеновым.

Лемма 3.1. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ выпуклый компакт и в обозначениях определения 1 для любого вектора $q \in \partial B_1(0)$ оператор $P_{L(q)}$ проектирования на $L(q)$ является открытым отображением $P_{L(q)} \colon A \to P_{L(q)}A$. Тогда A есть P-множество.*

Доказательство. проведем от противного. Пусть A не является P-множеством. Тогда для некоторого $q \in \partial B_1(0)$ найдется последовательность $\{x_k\} \subset P_{L(q)}A$ такая, что $\lim x_k = x_0$, $\lim f_{A,q}(x_k) = \mu_0 > f(x_0)$. Пусть $z_0 = (x_0, f_{A,q}(x_0))$, $\widetilde{z}_0 = (x_0, \mu_0)$, $z = \frac{1}{2}(\widetilde{z}_0 + z_0) = (x_0, \frac{1}{2}(\mu_0 + f_{A,q}(x_0)))$, $\varepsilon = \frac{1}{4}\|\widetilde{z}_0 - z_0\| = \frac{1}{4}\left(\mu_0 - f_{A,q}(x_0)\right)$. Тогда $x_k \notin P_{L(q)}(B_\varepsilon(z) \cap A)$ для всех k, что противоречит открытости $P_{L(q)}$. $\square$

Теорема 3.2. *Выпуклый компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ есть P-множество тогда и только тогда, когда для любого натурального m и любого линейного отображения $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ отображение $T : A \to TA$ открыто.*

Доказательство. Если A есть P-множество, то открытость T доказана в теореме 1.8.2.

Из леммы 3.1 следует, что если обратное верно для $T = P_{L(q)}$, то A есть P-множество. $\square$

Далее мы рассматриваем вопрос о зажатости множеств в выпуклых компактах.

Определение 3.1. Пусть заданы компакты $A \subset M \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что A зажат в M, если $A+v \not\subset M$ для любого $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что A точечно зажат в M, если для любого единичного вектора e найдется точка $x_e \in A$ такая, что $(x_e + \mathbb{R}_+ e) \cap M = \varnothing$.

Ясно, что точечно зажатое множество является зажатым. Обратное неверно.

Пример 2. *Пусть $M = \operatorname{co}(D \cup I)$ — выпуклая оболочка круга $D = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ и отрезка $I = \{(x, 0, 1) : -1 \leqslant x \leqslant 1\}$. Пусть $A = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 + y^8 \leqslant 1\}$ — компактное подмножество в D. Тогда A зажато в M, но не точечно зажато в нем.*

Первый факт легко проверяется для любого вектора $v = (a, b, c)$, $a^2 + b^2 > 0$, выбором точки $x_v = (1, 0, 0)$ при $a \geqslant 0$ или $x_v = (-1, 0, 0)$ при $a < 0$. Пусть $v = (0, 0, t)$. Заметим, что как кривизна кривой $x^2 + y^2 + y^8 = 1$, так и кривизна окружности $x^2 + y^2 = 1$ в точке их касания $(1, 0, 0)$ равна 1. Кривизна же сечения множества ∂M плоскостью $z = t$ равна $(1-t)^{-1} > 1$. Поэтому при сдвиге на v точки кривой $x^2 + y^2 + y^8 = 1$, близкие к $(1, 0, 0)$, выйдут за пределы M, и A зажато в M.

Наоборот, пусть $A^0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — конечное подмножество в A. Легко проверяется, что для каждой точки $x \in A$ существует $\varepsilon_x > 0$ такое, что $x + (0, 0, \varepsilon_x) \in M$. Тогда, выбирая $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{x_1}, \ldots, \varepsilon_{x_n}\}$, получаем, что $A^0 + (0, 0, \varepsilon) \subset M$, т. е. точечной зажатости A в M нет.

Лемма 3.2. *Для P-множества $M \subset \mathbb{R}^n$ и компакта $A \subset M$ определения зажатости и точечной зажатости A в M эквивалентны.*

Доказательство. Зафиксируем единичный вектор q и рассмотрим разложение $\mathbb{R}^n = L(q) \oplus l(q)$. Как в определении 1.8.1, введем функции $f_{M,q} : P_{L(q)}M \to \mathbb{R}$ и $f_{A,q} : P_{L(q)}A \to \mathbb{R}$. Как отмечалось ранее, функция $f_{A,q}$ полунепрерывна снизу на $P_{L(q)}A$; функция же $f_{M,q}$ непрерывна на $P_{L(q)}M \supset P_{L(q)}A$, так как M — P-множество. Поэтому функция $f_{A,q} - f_{M,q}$ полунепрерывна снизу на $P_{L(q)}A$ и, следовательно, принимает на нем наименьшее значение $f_{A,q}(x_0) - f_{M,q}(x_0) = \mu_0$. Если $\mu_0 > 0$, то A не зажат в M, а если $\mu_0 = 0$, то можно положить в определении точечной зажатости $x_q = (x_0, \mu_0)$. $\square$

Зафиксируем выпуклый компакт M и подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$. Для точки $a \in M$ обозначим через N_a нормальный конус (в пространстве L) ко множеству $M \cap (a+L)$ в точке a, т. е.

$$N_a = \{v \in L\colon \forall x \in M \cap (a+L) \quad \langle v, x\rangle \leqslant \langle v, a\rangle\}.$$

Ясно, что $N_a \neq \{0\}$ только в точках границы M. Пусть $\widetilde{N}_a = N_a \cap \cap\, \partial B_1(0)$.

Лемма 3.3. *Предположим, что либо* 1) $\dim L \geqslant n-1$, *либо* 2) M — P-*множество. Тогда отображение* $a \mapsto \widetilde{N}_a$ *полунепрерывно сверху на* M.

Доказательство. Пусть $a_0 \in M$, $v_0 \in L$, $\|v_0\| = 1$, $v_0 \notin \widetilde{N}_{a_0}$. Покажем, что существуют такие $\delta_a > 0$, $\delta_v > 0$, что для любых $a \in \in B_{\delta_a}(a_0)$, $v \in B_{\delta_v}(v_0)$, $\|v\| = 1$, выполняется $v \notin \widetilde{N}_a$.

Поскольку $v_0 \notin \widetilde{N}_{a_0}$, существует такое $x_0 \in M \cap (a_0 + L)$, что $\cos(\widehat{x_0 - a_0, v_0}) = d > 0$. Пусть $\ell = \|x_0 - a_0\|$. Выберем тогда $\varepsilon_a = \ell d/3$. Согласно теореме 1.3.1, существует такое δ, что

$$\forall a \in B_\delta(a_0) \cap M\colon\ M \cap (a_0 + L) \subset M \cap (a+L) + B_{\varepsilon_a}(0)$$

(при $\dim L = n$ это утверждение очевидно). Положим $\delta_a = \min\{\varepsilon_a, \delta\}$. Тогда $\forall a \in B_{\delta_a}(a_0)\colon x_0 \in M \cap (a+L) + B_{\varepsilon_a}(0)$, т. е. $\exists x \in M \cap (a + + L)\colon \|x - x_0\| < \varepsilon_a$. Заметим, что

$$\sin(\widehat{x-a, x_0-a_0}) = \frac{\varrho(x_0-a_0, \mathbb{R}(x-a))}{\|x_0-a_0\|} \leqslant \frac{\|(x-a)-(x_0-a_0)\|}{\|x_0-a_0\|} \leqslant \frac{2\varepsilon_a}{\ell} = \frac{2d}{3}.$$

Тогда $(\widehat{x-a, v_0}) \leqslant (\widehat{x-a, x_0-a_0}) + (\widehat{x_0-a_0, v_0}) \leqslant \arcsin(2d/3) + \arccos d = = \varphi(d) < \pi/2$. Поэтому при всех v, $\|v\| = 1$, таких, что $(\widehat{v, v_0}) < \pi/2 - - \varphi(d)$, выполняется $(\widehat{x-a, v}) < \pi/2$, т. е. $v \notin \widetilde{N}_a$, что и требовалось.

Пусть теперь данное отображение не является полунепрерывным сверху в точке a_0, т. е. существуют $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{a_n\}$ такая, что $a_n \to a_0$, $n \to \infty$, но $\widetilde{N}_{a_n} \not\subset \widetilde{N}_{a_0} + B_\varepsilon(0)$ для любого n. Таким образом, существует $v_n \in \widetilde{N}_{a_n} \setminus (\widetilde{N}_{a_0} + B_\varepsilon(0))$. Поскольку $\|v_n\| = 1$, то последовательность $\{v_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность, и мы можем предполагать $v_n \to v$, $n \to \infty$. Но тогда $\varrho(v, \widetilde{N}_{a_0}) \geqslant \geqslant \varepsilon$, и $v \notin \widetilde{N}_{a_0}$, но $v_n \in \widetilde{N}_{a_n}$, что невозможно по доказанному. $\square$

Теорема 3.3. *Пусть* $M \subset \mathbb{R}^n$ — *выпуклый компакт,* $A \subset M$ — *компакт,* L — k-*мерное векторное подпространство в* $\mathbb{R}^n$. *Предположим, что для любого единичного вектора* $e \in L$ *найдется точка* $x_e \in A$ *такая, что* $(x_e + \mathbb{R}_+ e) \cap M = \varnothing$. *Предположим также, что либо* 1) $n \leqslant 3$, *либо* 2) M — P-*множество. Тогда существует такое конечное подмножество* $A^0 \subset A$, $|A^0| \leqslant 2k$, *что для него выполняется то же условие.*

Доказательство. Индукция по k. Если $k = 1$, то $L = \mathbb{R}e$ для некоторого e, и тогда можно положить $A^0 = \{x_e, x_{-e}\}$.

Пусть $k > 1$. Тогда либо $\dim L \geqslant n - 1$, либо M — P-множество. Положим $D = \partial M \cap \partial A$ (очевидно, D — непустой компакт). Из леммы 1.3.3 вытекает, что $\widetilde{N} = \cup_{a \in D} \widetilde{N}_a$ — компакт, как образ компакта при полунепрерывном сверху отображении с компактными значениями в $\mathbb{R}^n$ [68, Глава 3, § 1, Предложение 11].

Заметим, что для любого $0 \neq e \in L$ существует такой $0 \neq b \in \widetilde{N}$, что $\langle b, e\rangle \geqslant 0$. Действительно, поскольку выпуклые компакты $M \cap \cap (x_e + L)$ и $[x_e, x_e + e]$ пересекаются только по x_e, то их можно разделить гиперплоскостью (в пространстве $x_e + L$); единичный нормальный вектор b этой гиперплоскости, направленный в полупространство, не пересекающее M, очевидно, удовлетворяет условию и лежит в $\widetilde{N}_{x_e} \subset \widetilde{N}$. Из этого следует, что $0 \in \operatorname{co} \widetilde{N}$, т. к. 0 и $\widetilde{N}$ нельзя строго разделить.

Выберем минимальный набор $\{c_i\}_{i=1}^d \subset \widetilde{N}$ такой, что $0 \in \operatorname{co}\{c_i\}$; согласно теореме Каратеодори, $d - 1 \leqslant k$. Пусть $C = \operatorname{lin}\{c_i\}$, $L^1 = C^\perp$ — ортогональное дополнение к C в пространстве L; тогда на самом деле $d - 1 \leqslant c = \dim C$ (из минимальности набора $\{c_i\}$). Выберем для каждого c_i такую точку $a_i \in D$, что $c_i \in \widetilde{N}_{a_i}$ и обозначим $A^2 = \{a_i\}_{i=1}^d$.

Согласно предположению индукции, существует такое множество $A^1 \subset A$, $|A^1| \leqslant 2 \dim L^1 = 2(k - c)$, что для любого единичного вектора $e \in L^1$ найдется точка $x_e \in A^1$ такая, что $(x_e + \mathbb{R}_+ e) \cap M = \varnothing$. Докажем, что множество $A^0 = A^1 \cup A^2$ обладает требуемыми свойствами. Рассмотрим единичный вектор $e \in L$. Если $e \in L^1$, то требуемый элемент найдется по предположению индукции. Иначе $e \notin C^\perp$, и существует такое j, что $\langle e, c_j\rangle \neq 0$. Из выбора набора $\{c_i\}$ существуют такие $\lambda_1, \ldots, \lambda_d > 0$, что

$$\sum_i \lambda_i c_i = 0 \tag{3.5}$$

(действительно, если бы $\lambda_i = 0$, то набор не был бы минимальным). Если теперь $\langle e, c_j\rangle < 0$, то из (3.5) следует, что $\langle e, c_i\rangle > 0$ для некоторого i. Тогда, очевидно, $(a_i + \mathbb{R}_+ e) \cap M = \varnothing$, поскольку $\langle a_i + \alpha e, c_i\rangle > > \langle a_i, c_i\rangle \geqslant \langle x, c_i\rangle$ для любых $\alpha > 0$, $x \in M$; поэтому можно положить $x_e = a_i \in A^2$.

Осталось заметить, что $|A^0| \leqslant |A^1| + |A^2| \leqslant 2(k - c) + d \leqslant 2(k - - c) + (c + 1) \leqslant 2k$, ибо $c > 0$. □

Из доказательства теоремы 3.3 видно, что условие, что M является P-множеством, можно заменить на условие полунепрерывности сверху отображения $a \mapsto \widetilde{N}_a$ для любого подпространства L.

Следствие 3.2. *Если компакт A точечно зажат в P-множестве $M \subset \mathbb{R}^n$, то существует конечное точечно зажатое в M подмножество $A^0 \subset A$, $|A^0| \leqslant 2n$.*

Доказательство. Достаточно положить $L = \mathbb{R}^n$.

Пример 3. *Оценка $2n$ точна; меньшим количеством нельзя обойтись, например, если $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \max\limits_i |x_i| \leqslant 1\}$ — куб, а $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_i |x_i| \leqslant 1\}$ — вписанный в него октаэдр.*

Отметим, что в следствии 3.2 в случае строгой выпуклости множества M можно выбрать подмножество $A^0 \subset A$ так, что $|A^0| \leqslant n+1$.

Пример 4. *Пусть $M = \operatorname{co}(D \cup S)$ — выпуклая оболочка декартова произведения двух кругов $D = \{(x,y,z,t)\colon x^2+y^2 \leqslant 1, z^2+t^2 \leqslant 1\}$ и круга $S = \{(x,y,1,0) : x^2+y^2 \leqslant 9\}$. Пусть $A = \{(x,y,x,y) : x^2 + y^2 = 1, y \geqslant 0\}$ — компактное подмножество в M. Тогда A точечно зажато в M, но любое конечное подмножество A не зажато в M. (Вместо A можно рассматривать выпуклый компакт* $\operatorname{co} A$.)

Покажем, что A точечно зажато в M. Рассмотрим вектор $0 \neq v = (a,b,c,d)$. Тогда можно положить

$$x_v = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign}(c)}{\sqrt{c^2+d^2}}(-d,c,-d,c), & \text{если } c \neq 0;\\ (-1,0,-1,0), & \text{если } c = 0 = d;\\ \dfrac{\operatorname{sign}(a)}{\sqrt{a^2+b^2}}(-b,a,-b,a), & \text{если } c = d = 0,\ a = 0;\\ (-1,0,-1,0), & \text{если } v = (0,\pm 1,0,0). \end{cases}$$

Пусть $\alpha = \{(0,0,z,t) : z,t \in \mathbb{R}^2\}$, $\pi : \mathbb{R}^4 \to \alpha$ — ортогональная проекция на плоскость α, тогда $\pi(M) = \{(z,t) : z^2+t^2 \leqslant 1\}$. В первых двух случаях заметим, что при сдвиге вдоль вектора v точка $\pi(x_v)$ выходит за пределы круга $\pi(M)$. Пусть $c = d = 0$. Легко проверить, что для любого $\tau > 0$ точка $w = x_v + \tau v \notin D \cup S$. Проверим, что $w \notin M$. Если допустить обратное, то $w = \lambda d + (1-\lambda)s$, где $d \in D$, $s \in S$, $\lambda \in (0,1)$. Пусть $d = (d_1,d_2,d_3,d_4)$, $s = (s_1,s_2,1,0)$. Пусть $a = 0$. Тогда точка $\lambda(d_3,d_4) + (1-\lambda)(1,0)$ в плоскости α должна в силу определения x_v лежать на границе единичного круга с центром в нуле, причем в силу определения D выполнено $d_3^2 + d_4^2 \leqslant 1$. Это противоречит строгой выпуклости круга. Если же $a = 0$, то аналогично получаем, что $\lambda(d_3,d_4) + (1-\lambda)(1,0) = (-1,0)$, что невозможно.

Рассмотрим теперь конечное подмножество $A^0 = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \subset A$*; пусть* $a_i = (x_i, y_i, x_i, y_i)$*. Пусть* x_j *— максимальное число среди* x_i *таких, что* $x_i < 1$*. Рассмотрим вектор* $v = (1 - x_j, -y_j, 0, 0)$*. Если* $x_i < 1$*, то непосредственным вычислением проверяется, что* $\|(x_i + (1 - x_j), y_i - y_j)\| \leqslant 1$ *и поэтому* $a_i + v \in D$*. Если же* $x_i = 1$*, то* $y_i = 0$*, и* $a_i + v = (2 - x_j, -y_j, 1, 0) \in S$*. В любом случае,* $A^0 + v \subset M$*, а значит,* A^0 *не является точечно зажатым.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. — М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
2. *Алексеев В. М.*, *Тихомиров В. М.*, *Фомин С. В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
3. *Алексеев В. М.*, *Галеев Э. М.*, *Тихомиров В. М.* Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. — М.: Наука, 1984.
4. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.
5. *Арутюнов А. В.* Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Сер. Мат. ан. — 1989. — Т. 27. — С. 147–235.
6. *Арутюнов А. В.* Выпуклые свойства преобразования Лежандра // Матем. заметки. — 1980. — Т. 28, № 2.
7. *Арутюнов А. В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. — М.: Факториал, 1997.
8. *Афанасьев А. П., Дикусар В. В., Милютин А. А., Чуканов С. А.* Необходимое условие в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1990.
9. *Балакришнан А.* Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1974.
10. *Балашов М. В., Половинкин Е. С.* Сильно выпуклая оболочка и ее свойства // Некоторые проблемы современной математики и их приложения к задачам физики и механики. Междувед. сборник. — М.: Изд-во МФТИ, 1995. — С. 27–36.
11. *Балашов М. В., Половинкин Е. С.* M-сильно выпуклые множества и их порождающие подмножества // Матем. сб. — 2000. — Т. 191, № 1. — С. 27–64.
12. *Балашов М. В.* О геометрической разности многозначных отображений // Матем. заметки. — 2001. — Т. 70, № 2. — С. 163–169.
13. *Балашов М. В.* Об аналоге теоремы Крейна–Мильмана для сильно выпуклой оболочки в гильбертовом пространстве // Матем. заметки. — 2002. — Т. 71, № 3. — С. 37–42.
14. *Балашов М. В.* О P-свойстве выпуклых компактов // Матем. заметки. — 2002. — Т. 71, № 3. — С. 323–333.

15. *Белоусов Е. Г.* Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование. — М.: Изд-во МГУ, 1977.

16. *Благодатских В. И.* Введение в оптимальное управление (линейная теория). — М.: Высшая школа, 2001.

17. *Бляшке В.* Круг и шар. — М.: Наука, 1967.

18. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности. — М.–Л.: ОНТИ, 1935.

19. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969.

20. *Боннезен Т.*, *Фенхель В.* Теория выпуклых тел. — М.: ФАЗИС, 2002. [*Bonnesen T.*, *Fenchel W.* Theorie der konvexen körper. — Berlin: Springer, 1934.]

21. *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Геометрические неравенства. — Л.: Наука, 1980.

22. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения оптимальных задач. — М.: Наука, 1980. (2-е изд., 1988.)

23. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. — М.: Факториал Пресс, 2002.

24. *Власов Л. П.* Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Успехи мат. наук. — 1973. — Т. 28, вып. 6. — С. 3–66.

25. *Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Краткий курс теории экстремальных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1989.

26. *Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Оптимизация: теория, примеры, задачи. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.

27. *Гирсанов И. В.* Лекции по математической теории экстремальных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1970.

28. *Гольштейн Е. Г.*, *Третьяков Н. В.* Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. — М.: Наука, 1989.

29. *Грюнбаум Б.* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. — М.: Наука, 1971.

30. *Данфорд Н.*, *Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.

31. *Данцер Л.*, *Грюмбаум Б.*, *Кли В.* Теорема Хелли и ее применения. — М.: Мир, 1968.

32. *Данциг Дж.* Линейное програмирование, его применения и обобщения. — М.: Прогресс, 1966.

33. *Демьянов В. Ф.* Негладкий анализ. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.

34. *Демьянов В. Ф.*, *Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972.

35. *Демьянов В. Ф.*, *Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. — М.: Наука, 1981.

36. *Демьянов В. Ф.*, *Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. — М.: Наука, 1990.

37. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств. — Киев: Вища школа, 1980.

38. *Дубовицкий А. Я.*, *Милютин А. А.* Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления. — М.: Наука, 1971.

39. *Дудов С. И.* Внутренняя оценка выпуклого множества телом нормы // ЖВМиМФ. — 1996. — Т. 36, № 5. — С. 153–159.

40. *Ефимов Н. В.*, *Стечкин С. Б.* Опорные свойства множеств в банаховых пространствах и чебышевские множества // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 2. — С. 254–257.

41. *Ефимов Н. В., Стечкин С. Б.* Аппроксимативная компактность и чебышевские множества // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 140, № 3. — С. 522–524.

42. *Ефимов Н. В., Стечкин С. Б.* Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Стечкин С.Б. Избранные труды. — М.: Физматлит, 1998. — С. 270–281. [Pevue de Math. pures et appl. — 1963. — Т. 8, № 1. — С. 5–18.]

43. *Зеликин М. И.* Оптимальное управление и вариационное исчисление. — М.: Изд-во МГУ, 1985.

44. *Зорич В. А.* Математический анализ. — М.: МЦНМО, 1998.

45. *Иванов Г. Е.* Оценка погрешности алгоритма вычисления альтернированного интеграла Понтрягина, связанной с дискретизацией по пространству // Численные методы интегральных уравнений в прикладных задачах: Научно-метод. матер. — М.: ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1994. — С. 75–90.

46. *Иванов Г. Е.*, *Половинкин Е. С.* Второй порядок сходимости алгоритма вычисления цены линейной дифференциальной игры // Докл. РАН. — 1995. — Т. 340, № 2. — С. 151–154.

47. *Иванов Г. Е.*, *Половинкин Е. С.* О сильно выпуклых линейных дифференциальных играх // Диффер. уравнения. — 1995. — Т. 31, № 10. — С. 1641–1648.

48. *Иваницкий А. Ю., Васильев Ф. П.* Линейное программирование. — М.: Факториал, 1998.

49. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.

50. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.

51. *Канторович Л.В.* Математические методы оптимизации и планирования производством. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1939.

52. *Карасев Р. Н.* О характеризации порождающих множеств // Моделирование и анализ информационных систем. — 2001. — Т. 8, № 2. — С. 3–9.

53. *Карасев Р. Н.* Об аналоге теоремы Каратеодори для M-сильно выпуклых множеств // Моделирование и анализ информационных систем. — 2001. — Т. 8, № 2. — С. 17–22.

54. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1988.

55. *Красносельский М. А.*, *Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. — М.: Наука, 1983.

56. *Колмогоров А. Н.*, *Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — 6-е изд. — М.: Наука, 1989.

57. *Красовский Н. Н.*, *Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.

58. *Кусраев А. Г.*, *Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление. — Новосибирск: Наука, 1987.

59. *Кутателадзе С. С.*, *Рубинов А. М.* Двойственность Минковского и ее приложения. — Новосибирск: Наука, 1976.

60. *Левин В. Л.* Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике. — М.: Наука, 1985.

61. *Левитин Е. С.*, *Поляк Б. Т.* Методы минимизации при наличии ограничений // ЖВМиМФ. — 1966. — Т. 6, № 5. — С. 787-823.

62. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. — М.: Наука, 1985.

63. *Магарил-Ильяев Г. Г.*, *Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.

64. *Матерон Ж.* Случайные множества и интегральная геометрия. — М.: Мир, 1978.

65. *Минковский Г.* О телах постоянной ширины // Матем. сб. — 1905. — Т. 25. — С. 505–508. [Gesammeite Abhandlungen. Bd. 2. — Leipzig–Berlin: Teubner, 1911. — S. 277–279.]

66. *Мордухович Б. Ш.* Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1988.

67. *Никольский М. С.*, *Силин Д. Б.* О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддиала // Труды Матем. ин-та АН СССР. — 1985. — Т. 211. — С. 338–354.

68. *Обен Ж.-П.*, *Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1984.

69. *Обен Ж.-П.* Нелинейный анализ и его экономические приложения. — М.: Мир, 1988.

70. *Орлова Г. Б.*, *Силин Д. Б.* Приближенное вычисление выпуклой оболочки положительно однородной функции // Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 1997. — Т. 2. — С. 32—35.

71. *Половинкин Е. С.* Элементы теории многозначных отображений: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МФТИ, 1982.

72. *Половинкин Е. С.* Теория многозначных отображений: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МФТИ, 1983.

73. *Половинкин Е. С.* Об интегрировании многозначных отображений // Докл. АН СССР. — Т. 271, № 5. — 1983. — С. 1069–1074.

74. *Половинкин Е. С.*, *Смирнов Г. В.* Дифференцирование многозначных отображений и свойства решений дифференциальных включений // Докл. АН СССР. — 1986. — Т. 288, № 2. — С. 296–301.

75. *Половинкин Е. С.*, *Смирнов Г. В.* Об одном подходе к дифференцированию многозначных отображений и необходимые условия оптимальности решений дифференциальных включений // Диффер. уравнения. — 1986. — Т. 22, № 6. — С. 944–954.

76. *Половинкин Е. С.*, *Смирнов Г. В.* О задаче быстродействия для дифференциальных включений // Диффер. уравнения. — 1986. — Т. 22, № 8. — С. 1351–1365.

77. *Половинкин Е. С.* О свойствах сильно выпуклых множеств // Моделирование процессов управления и обработки информации. Междувед. сборник. — М.: Изд-во МФТИ, 1994. — С. 182–189.

78. *Половинкин Е. С.* Необходимые условия оптимальности с дифференциальными включениями // Тр. Матем. ин-та РАН. — 1995. — Т. 211. — С. 387–400.

79. *Половинкин Е. С.* О выпуклых и сильно выпуклых аппроксимациях множеств // Докл. РАН. — 1996. — Т. 350, № 3. — С. 308–311.

80. *Половинкин Е. С.* Сильно выпуклый анализ // Матем. сборник. — 1996. — Т. 187, № 2. — С. 103–130.

81. *Половинкин Е. С.* Обобщение теорем Каратеодори и Крейна–Мильмана для сильно выпуклых множеств // Докл. РАН. — 1997. — Т. 355, № 2. — С. 164–166.

82. *Половинкин Е. С.* О новых классах порождающих множеств // Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики. Междувед. сборник. — М.: Изд-во МФТИ, 1998. — С. 81–93.

83. *Половинкин Е. С.* О сильно выпуклых множествах и сильно выпуклых функциях // Итоги науки и техники. Сер. Совр. матем. и ее приложения. Т. 61. — М.: ВИНИТИ, 1999. — С. 66–138.

84. *Половинкин Е. С.*, *Иванов Г. Е.*, *Балашов М. В.*, *Константинов Р. В.*, *Хорев А. В.* Об одном алгоритме численного решения линейных дифференциальных игр // Матем. сборник. — 2001. — Т. 192, № 10. — С. 95–122.

85. *Половинкин Е. С.*, *Балашов М. В.* О вложении пространства выпуклых компактов в линейное топологическое пространство и его следствия // Тр.

конф. "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования". — М.: Физматлит, 2003. — С. 311–326.

86. *Половинкин Е. С.* О телах постоянной ширины // Докл. РАН. — 2004. — Т. 397, № 3. — С. 313–315.

87. *Поляк Б. Т.* Теоремы существования и сходимости минимизирующих последовательностей для задач на экстремум при наличии ограничений // Докл. АН СССР. — 1966. — Т. 166, № 2. — С. 287–290.

88. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983.

89. *Понтрягин Л. С.*, *Болтянский В. Г.*, *Гамкрелидзе Р. В.*, *Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969.

90. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. Нов. сер. — 1980. — Т. 112, № 3. — С. 307–330.

91. *Понтрягин Л. С.* Избранные научные труды. Т. II. — М.: Наука, 1988.

92. *Посицельский Е. Д.* О характеризации штейнеровской точки // Матем. заметки. — 1973. — Т. 14, № 2. — С. 243–247.

93. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980.

94. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума. — М.: Наука, 1982.

95. *Пшеничный Б. Н.* Метод линеаризации. — М.: Наука, 1983.

96. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973.

97. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.

98. *Самсонов С. П.* Восстановление выпуклого множества по его опорной функции с заданной точностью // Вестник МГУ. Сер. 15. Вычислит. матем. и киберн. — 1983. — № 1. — С. 68–71.

99. *Солтан В. П.* Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. — Кишинев: Штиинца, 1984.

100. *Субботин А. И.*, *Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981.

101. *Сухарев А. Г.*, *Тимохов А. В.*, *Федоров В. В.* Курс методов оптимизации. — М.: Наука, 1986.

102. *Тер-Крикоров А. М.* Оптимальное управление и математическая экономика. — М.: Наука, 1977.

103. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. — М.: Изд-во МГУ, 1976.

104. *Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ. Теория приближений // Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. матем., фундам. направ. Т. 14. — М.: ВИНИТИ, 1987.

105. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. — М.–Л.: ОНТИ, 1937.

106. *Черноусько Ф. Л.*, *Меликян А. А.* Игровые задачи управления и поиска. — М.: Наука, 1978.

107. *Экланд И.*, *Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — М.: Мир, 1979.

108. *Шварц Л.* Анализ. В 2-х т. — М.: Мир, 1972.

109. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969.

110. *Яглом И. М.*, *Болтянский В. Г.* Выпуклые фигуры. — М.: Гостехиздат, 1951.

111. *Alfsen E. M.* Compact convex sets, and boundary integrals. — Berlin: Springer, 1971.

112. *Aubin J.-P.*, *Cellina A.* Differential Inclusions. — Berlin: Springer-Verlag, 1984.

113. *Aubin J.-P.*, *Francowska H.* Set-Valued Analysis. — Boston–Basel–Berlin: Birkhauser, 1990.

114. *Barbier E.* Note sur le problèm de l'aiguille et le jeu du joint couvert // J. Math. Pures Appl. (2). — 1860. — V. 5. — P. 273–286.

115. *Ben-Tal A., Ben-Israel A.* F-convex functions: properties and applications // Generalized Concavity in Optimization and Economics. — Academic Press, 1981. — P. 301–334.

116. *Berger M.* Geometrie. — Paris: CEDIC/Fernand Nathan, 1977.

117. *Blaschke W.* Konvexe Bereiche gegebener konstanter Breite und kleinsten // Inhalts. Math. Ann. — 1915. — Bd. 76. — S. 504–513.

118. *Blaschke W.* Einige Bemerkungen über Kurven und Flächen konstanter Breite // Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig. — 1915. — Bd. 67. — S. 290–297.

119. *Blaschke W.*, *Hessenberg G.* Lehsätze über konvexe Körper // Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. — 1917. — Bd. 26. — S. 215–220.

120. *Bonnesen T.* Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes. — Paris: Gauthier-Villars, 1929.

121. *Borisov V. F.*, *Zelikin M. I.* Theory of chattering control. — Boston: Berkhäuser, 1994.

122. *Bouligand G.* Sur les surfaces dépourvues de points hyperlimites // Ann. Soc. Polon. Math. — 1930. — V. 9. — P. 32–41.

123. *Bronsted A.*, *Rockafellar R. T.* On the subdifferentiability of convex functions // Proc. Am. Math. Soc. — 1965. — V. 16. — P. 605–611.

124. *Carathéodory C.* Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen // Math. Ann. — 1907. — Bd. 64. — S. 95–115.

125. *Carathéodory C.* Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1911. — V. 32. — P. 193–217.

126. *Chakerian G.D.*, *Groemer H.* Convex Bodies of Constant Width // Convexity and its Applications / Eds P. M. Gruber, J. M. Wills. — Basel–Boston–Stuttgart: Birkhauser, 1983.

127. *Dolecki S.*, *Kurcyusz S.* On Φ-convexity in extremal problems // SIAM J. Contr. and Opt. — 1978. — V. 16. — P. 277–300.

128. *Eggleston H.G.* Sets of constant width in finite dimentional Banach spaces // Israel J. Math. — 1965. — V. 3. — P. 163–172.

129. *Ekeland I.* On the variational principle // J. Math. Anal. Appl. — 1974. — V. 47. — P. 324–353.

130. *Edelstein M.* Farthest points of sets in uniformly convex Banach spaces // Israel J. Math. — 1966. — V. 4, № 3. — P. 171–176.

131. *Euler L.* De curvis triangularibus // Acta Acad. Sci. Imp. Petrop. — 1778. — V. 2. — P. 3–30.

132. *Fenchel W.* On conjugate convex-functions // Can. J. Math. — 1949. — № 1. — P. 73–77.

133. *Fenchel W.* Convex Cones, Sets and Functions // Mimeographed Lecture Notes. — Princeton: Princeton University, 1951.

134. *Frankowska H.*, *Olech C.* *R*-convexity of the Integral of the Set-Valued Functions // Contributions to Analysis and Geometry. — Baltimore, Md.: Johns Hopkins Univ. Press, 1981. — P. 117–129.

135. *Grunbaum B.* On intersection of similar sets // Portugal Math. — 1959. — V. 18. — P. 155–164.

136. *Helly E.* Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten // Mh. Math. Phys. — 1921. — V. 31. — P. 60–91.

137. *Helly E.* Über Systeme von abgeschlossenen Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten // Mh. Math. Phys. — 1930. — V. 37. — P. 281–302.

138. *Hiriart-Urruty J. B.*, *Lemareshal C.* Convex Analysis and Minimization Algorithms. V. I, II. — N.Y., B., L.: Springer, 1993.

139. *Jessen B.* Über Konvexe Punktmengen konstanter Breite // Math. Z. — 1928. — V. 29. — P. 378–380.

140. *Jung H. W. E.* Uber die Kleinste Kugel, die eine raumliche Figur einschließt // J. Reine Angew. Math. — 1901. — Bd. 123. — S. 241–257.

141. *Klee V. L.* Convex sets in linear spaces. II // Duke Math. J. — 1951. — V. 18. — P. 875–883.

142. *Klee V. L.*, *Minty G. I.* How good is simplex algorithm? // Inequalities-III / Ed. N. Y. Shisha. — London: Academic Press, 1972. — P. 159–175.

143. *Krein M. G.*, *Milman D.P.* On extreme points of regularly convex sets // Studia Math. — 1940. — V. 9. P. 133–138.

144. *Kritikos N.* Über konvexe Flächen und einschließende Kugeln // Math. Ann. — 1927. — V. 96. — — P. 583–586.

145. *Kurzhanski A. B.*, *Valyi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. — Boston: Birkhauser, 1997.

146. *Lebesgue H.* Sur quelques questions de minimum, relatives aux courbes orbifornes, et sur leurs rapports avec le calcul des variations // J. Math. Pures Appl. (8). — 1921. — V. 4. — P. 67–96.

147. *Levi F. W.* On Helly's theorem and the axioms of convexity // J. Indian Math. Soc. Part A. — 1951. — V. 15. — P. 65–76.

148. *Lojasiewicz St. (Jr.)* Some properties of accessible sets in non linear control systems // Ann. Polon. Math. — 1979. — V. XXXVII, № 2. — P. 123–127.

149. *Mazur S.* Úber konvexe mengen in linearen normierten Räumen // Stud. Math. — 1933. — V. 4. — P. 70–84.

150. *Meissner E.* Über Punktmengen konstanter Breite // Vjschr. Naturforsch. Ges. Zürich. — 1911. — Bd. 56. — S. 42–50.

151. *Meissner E.* Drei Gipsmodelle von Flächen konstanter Breite // Z. Math. Phys. — 1912. — Bd. 60. — S. 92–94.

152. *Michael E.* Continuous selections 1 // Ann. Math. Ser. 2. — 1957. — V. 63, № 2. — P. 361–382.

153. *Minkowski H.* Allgemeine Lehrsätze über die konvexen Polyeder // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1897. — S. 198–219; Gesammeite Abhandlungen. Bd. 2. — Leipzig–Berlin: Teubner, 1911. — S. 103–121.

154. *Minkowski H.* Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs // Gesammeite Abhandlungen. Bd. 2. — Leipzig–Berlin: Teubner, 1911. — S. 131–229.

155. *Minkowski H.* Volumen und Oberfläche // Math. Ann. — 1903. — V. 57. P. 447–495; Gesammeite Abhandlungen. Bd. 2. — Leipzig–Berlin: Teubner, 1911. — S. 230–276.

156. *Minkowski H.* Geometrie der Zahlen. — Leipzig–Berlin: Teubner, 1910.

157. *Moreau J. J.* Fonctionnelles Convexes. — Paris: Collige de France, 1967.

158. *Motzkin T.* Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembes convexes // Rend. Accad. Naz. Lincei, Red. VI. — 1935. — V. 21. — P. 562–567.

159. *Ornelas A.* Parametrization of Caratheodory Multifunctions // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1990. — V. 83. — P. 33–44.

160. *Pál J.* Über ein elementares Variationproblem // Mat.-Fys. Medd., Danske Vid. Selsk. — 1920–1921. — Bd. 3, № 2. — S. 1–35.

161. *Pierre J. S.* Point de Steiner et sections lipschitziennes // Seminaire D'analyse Convexe. Exposè n 7. — Montpellier, 1985.

162. *Pli's A.* Accessible Sets in Control Theory, int. Conf. on Diff. Eqs. — Academic Press, 1975. — P. 646–650.

163. *Polovinkin E. S.* On Strongly Convex Sets // Phystech Journal. — 1996. — V. 2, № 1. — P. 43–59.

164. *Reinhardt K.* Extremale Polygone gegbenen Durchmessers // Jber. Deutsch. Math. — 1922. — Bd. 31. — S. 251–270.

165. *Reuleaux F.* Lehrbruch der Kinematik. I. — Braunschweig: F. Vieweg, 1875.

166. *Singer I.* Surrogate Conjugate Functions and Surrogate Convexity // Applicable Analysis. — 1983. — V. 16. — P. 291–327.

167. *Schneider R.* Convex Bodies: the Brunn–Minkowski Theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.

168. *Straszewicz S.* Uber exponierte Punkte abgeschlossener Punktmengen // Fund. Math. — 1935. — V. 24. — P. 139–143.

169. *Steiner J.* Von der Krummungsschwerpunkte ebener Curven // J. Reine Angew. Math. — 1840. — Bd. 21. — S. 33–63, 101–122; Gesammelte-Vereinig. Werke. Bd. 2. — Berlin: Reiner, 1882. — S. 99–159.

170. *Steiner J.* Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsatze // J. Reine Angew. Math. — 1838. — Bd. 18. — S. 289–296; Gesammelte-Vereinig. Werke. Bd. 2. — Berlin: Reiner, 1882. — S. 77–91.

171. *Tiercy G.* Sur les surfaces sphériformes // Tôhoku Math. J. — 1921. — V. 19. — P. 149–163.

172. *Valentine F. A.* Convex Sets. — N. Y.–Toronto–L.: McGraw Hill, 1964.

173. *Valadier M.* Contribution à l'analyse convexe. — Paris: Thesis, 1970.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

174. *Балашов М. В., Иванов Г. Е.* Об удаленных точках множеств // Матем. заметки, 2006, 80:2, 163–170.

175. *Vial J.-P.* Strong and weak convexity of sets and functions // Mathematics of operations research — V. 8. — No. 2. — May 1983. — P. 231–259.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ