Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

В. В. Редкозубов

ЛЕКЦИИ

ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
Функции одной переменной

Учебное пособие

МОСКВА
МФТИ
2024

Оглавление

1. Действительные числа

1.1. Некоторые теоретико-множественные конструкции [1]

Мы начинаем с обсуждения основ теории множеств. Это обеспечит нам язык, на котором будут выражены основные понятия математического анализа.

Для множества A и любого x верно ровно одно: либо x является элементом A (пишут $x \in A$), либо — не является (пишут $x \notin A$). Множество A можно мыслить как своего рода черный ящик, который для всякого x дает ответ на вопрос: «x является элементом A?»

Будем работать с множествами, существование которых гарантировано следующими правилами (аксиомами).

I. Множество определяется своими элементами, т.е. множества, состоящие из одних и тех же элементов, равны.

II. Пусть A — множество, а $Q(x)$ — формула (т.е. при фиксированном $x \in A$ утверждение $Q(x)$ либо истинно, либо ложно). Тогда определено множество B, элементами которого являются только те элементы $x \in A$, для которых выполняется $Q(x)$. Будем писать $B = \{x \in A \colon Q(x)\}$ и говорить, что B задано *характеристическим свойством* $Q(x)$.

Простейшие формулы $Q(x)$ задают условия $x \in A$, $x = a$. Более сложные строятся при помощи отрицания «не ...», логических связок «... и ...», «... или ...», «$\Rightarrow$» (читается «если ..., то...») и «$\Leftrightarrow$» («... тогда и только тогда, когда ...»), а также кванторов $\forall x$ («для любого x») и $\exists\, x$ («существует x»).

Характеристическим свойством можно задать *пустое множество* (предполагая наличие хотя бы одного множества A): положим $\varnothing = \{x \in A \colon x \neq x\}$.

Согласно правилу I множество $\varnothing$ определено однозначно.

Пример. Покажем, что не существует универсального множества Ω, элементами которого являются все множества. Если Ω существует, то определено множество $X = \{A \in \Omega \colon A \notin A\}$. Вер-

[1] Данный раздел носит вспомогательный характер. Чтение можно начинать со следующего пункта, обращаясь к данному при необходимости.

но ли, что $X \in X$? Любой из ответов очевидно приводит к противоречию (*парадокс Рассела*).

III. Определим для множеств A, B операции *объединения* $A \cup B$, *пересечения* $A \cap B$ и *разности* $A \setminus B$ (см. рис. 1.1):

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$;
$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in B$;
$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin B$.

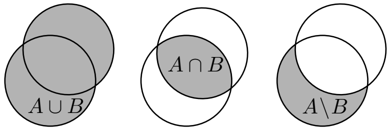

Рис. 1.1

Операции пересечения и разности корректно определены по правилу II, так как

$$A \cap B = \{x \in A\colon x \in B\} \quad \text{и} \quad A \setminus B = \{x \in A\colon x \notin B\}.$$

Корректность объединения гарантируется отдельным правилом.

Говорят, что множество A есть *семейство*, *индексированное* элементами Λ, если задана функция (см. ниже) $\varphi\colon \Lambda \to A$ со множеством значений A. Пишут $A = \{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, где $a_\lambda = \varphi(\lambda)$.

Более обще, для семейства множеств $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ определим

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x\colon \exists \lambda \in \Lambda\ (x \in A_\lambda)\}, \qquad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x\colon \forall \lambda \in \Lambda\ (x \in A_\lambda)\}.$$

Будем пользоваться следующими формулами.

Теорема 1.1 (де Морган). *Для любого множества E верно*

$$E \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (E \setminus A_\lambda), \qquad E \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (E \setminus A_\lambda).$$

□ Докажем первое равенство:

$$x \in E \setminus \bigcup\nolimits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \Leftrightarrow x \in E \text{ и } x \notin \bigcup\nolimits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in E \text{ и } (\forall \lambda \in \Lambda\ x \notin A_\lambda) \Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda\ (x \in E \text{ и } x \notin A_\lambda) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda\ (x \in E \setminus A_\lambda) \Leftrightarrow x \in \bigcap\nolimits_{\lambda \in \Lambda} (E \setminus A_\lambda).$$

Доказательство второго равенства аналогично. ■

IV. Существует множество, элементами которого являются только заданные a и b. Это множество обозначается $\{a, b\}$ и называется *парой*. Другими словами, $x \in \{a, b\} \Leftrightarrow x = a$ или $x = b$. Пара $\{a, a\}$ обозначается как $\{a\}$.

Отметим, что по правилу I верно равенство $\{a, b\} = \{b, a\}$, кроме того, $\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$.

Пример. Определена пара $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Для произвольных объектов a, b и c определена тройка $\{a, b, c\} = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$.

На множествах определено отношение *быть подмножеством*: $(A \subset B) \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

V. Для всякого множества A существует множество $\mathcal{P}(A)$ всех подмножеств A.

Отметим, что $\varnothing \subset A$ (иначе должен найтись элемент $\varnothing$, не принадлежащий A). Поэтому множество $\mathcal{P}(A)$ всегда непусто.

Пример. Если $A = \{a, b\}$, то $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Перейдем к функциям. Неформально говоря, функция f из множества X в множество Y — это операция, которая каждому $x \in X$ сопоставляет ровно один элемент $f(x) \in Y$ (см. рис. 1.2).

Дадим формальное определение.

Определение. Пусть X, Y — множества. Говорят, что задана *функция* $f\colon X \to Y$, если задана такая формула $P(x, y)$, что для каждого $x \in X$ существует ровно один $y \in Y$, при котором $P(x, y)$ истинна. При этом пишут $y = f(x)$ или $f\colon x \mapsto y$.

Функцию можно мыслить как устройство, которое каждому x на входе выдает $f(x)$ на выходе (см. рис. 1.3). Наряду с функцией будем использовать термин *отображение*.

Определение. Функции $f, g\colon X \to Y$ называются *равными*, если $f(x) = g(x)$ для всех $x \in X$. Пишут $f = g$.

Терминология. Пусть $f\colon X \to Y$. Тогда

- X — *область определения* функции f;
- запись $y = f(x)$ читают: «y есть *значение* функции f на *аргументе* x (в точке x)»;
- $f(A) = \{f(x)\colon x \in A\}$ — *образ* множества $A \subset X$ (при f); образ $f(X)$ называется *множеством значений* функции f;
- $f^{-1}(B) = \{x \in X\colon f(x) \in B\}$ — *прообраз* множества $B \subset Y$.
- Пусть $A \subset X$. *Сужением* f на множество A называется функция $f|_A\colon A \to Y$, такая что $(f|_A)(x) = f(x)$ для всех $x \in A$.
- *Композицией* функций $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ называется функция $g \circ f\colon X \to Z$, определяемая соотношением $g \circ f(x) = g(f(x))$ для всех $x \in X$.

Задача. Проверьте, что всегда $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

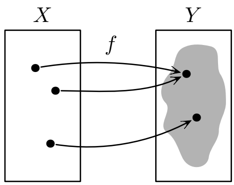

Рис. 1.2

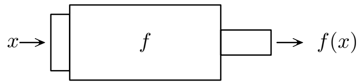

Рис. 1.3

Функция $id_X : X \to X$, $id_X(x) = x$, называется *тождественной*.

Определение. Функция $f\colon X \to Y$ называется
1) *инъекцией*, если $\forall x_1, x_2 \in X$ $(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$;
2) *сюръекцией*, если $f(X) = Y$;
3) *биекцией*, если она одновременно является инъекцией и сюръекцией.

Если $f\colon X \to Y$ — биекция, то для каждого $y \in Y$ уравнение $y = f(x)$ имеет единственное решение. Определим функцию $f^{-1}\colon Y \to X$ по правилу $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$. Функция f^{-1} называется *обратной* к f. Очевидно, выполняются равенства $f^{-1} \circ f = id_X$, $f \circ f^{-1} = id_Y$.

Задача. Докажите, что а) композиция двух инъекций (сюръекций, биекций) есть инъекция (сюръекция, биекция); б) функция, обратная к биекции, есть биекция.

Следующее правило можно считать отправной точкой математического анализа.

VI. Существует множество $\mathbb{N}$ и $0 \notin \mathbb{N}$. Пусть $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, и предположим, что существует инъекция $s\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, удовлетворяющая *аксиоме индукции*:

если $M \subset \mathbb{N}_0$ содержит 0 и вместе со всяким своим элементом n содержит $s(n)$, то $M = \mathbb{N}_0$.

Множество $\mathbb{N}$ называется *множеством натуральных чисел*, а его элементы *натуральными числами*. Элемент 0 называется *нулем*, а $1 := s(0)$ — *единицей*.

При помощи функции s определяется операция «добавления 1»: $s(n) = n + 1$. Если положить $M = \{0\} \cup s(\mathbb{N}_0)$, то по аксиоме индукции $M = \mathbb{N}_0$. Следовательно, s сюръективна, а значит, является биекцией.

На определении $\mathbb{N}_0$ основан

Принцип математической индукции. Пусть имеются утверждения $P(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Если утверждение $P(0)$ истинно и для всякого n верно $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, то все утверждения $P(n)$ истинны.
$\square$ Положим $M = \{n \in \mathbb{N}_0\colon\ P(n)$ истинно$\}$. По условию множество M удовлетворяет аксиоме индукции. Поэтому $M = \mathbb{N}_0$. $\blacksquare$

По индукции определяются арифметические операции на $\mathbb{N}_0$. Для $x \in \mathbb{N}_0$ положим $x + 0 = x$, и если определено $x + n$, то положим $x + (n+1) = (x+n) + 1$. Аналогично $0 \cdot x = 0$ и $(n+1)x = nx + x$. Далее, можно определить порядок на $\mathbb{N}_0$: $x < y \Leftrightarrow y = x + n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Будем писать $x \leqslant y$ (или $y \geqslant x$), если $x < y$ или $x = y$. Отметим, что поскольку натуральное $n \geqslant 1$, то из условия $x < y$ следует, что $x + 1 \leqslant y$.

Пример. По индукции определим множества
$A_1 = \{n \in \mathbb{N}\colon n > 1,\ n \neq 2m$ для любого $m \in \mathbb{N},\ m > 1\}$,
$A_{k+1} = \{n \in A_k\colon n \neq m(k+2)$ для любого $m \in \mathbb{N},\ m > 1\}$.
Тогда $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ есть множество всех простых чисел.

Теорема 1.2. *Если A есть непустое подмножество $\mathbb{N}_0$, то A имеет минимальный элемент, т.е. такой элемент $m \in A$, что $m \leqslant n$ для всякого $n \in A$.*

$\square$ Предположим, что в A нет минимального элемента. Определим множество $M = \{x \in \mathbb{N}_0\colon\ \forall n \in A\,(x < n)\}$. Пусть $x \in M$. Если предположить, что $x + 1 \notin M$, то $x + 1 \geqslant m$ для некоторого $m \in A$. По определению M для всякого $n \in A$ верно $x < n$ и, значит, $x + 1 \leqslant n$. Поэтому $m \leqslant n$, т.е. m — минимальный элемент A, противоречие. Также верно, что $0 \in M$ (ведь $0 \notin A$).

Имеем $0 \in M$, и если $x \in M$, то $x + 1 \in M$. По аксиоме индукции $M = \mathbb{N}_0$, но это противоречит непустоте множества A. $\blacksquare$

Задача. Пусть $R_m = \{x \in \mathbb{N}\colon x \geqslant m\}$, $m \in \mathbb{N}$. Покажите, что $\bigl(m \in M,\ n \in M \Rightarrow n + 1 \in M\bigr) \Longrightarrow M = R_m$.

Кратко обсудим алгебраическую процедуру, позволяющую расширить $\mathbb{N}$ до множества рациональных чисел.

Определение. *Целое число* — это выражение вида $x - a$, где $x,\ a \in \mathbb{N}_0$. Два целых числа $x - a$ и $y - b$ называются *равными*, если $x + b = y + a$. Множество целых чисел обозначается как $\mathbb{Z}$.

На $\mathbb{Z}$ определены операции сложения и умножения:
$(x-a)+(y-b)=(x+y)-(a+b)$,
$(x-a)\cdot(y-b)=(xy+ab)-(ay+xb)$.

Замечание. 1) Определение операций корректно. Проверим это для умножения «$\cdot$». Пусть $x-a=x'-a'$. Покажем, что $(x-a)\cdot(y-b)=(x'-a')\cdot(y-b)$ или $(xy+ab)-(ay+xb)=(x'y+a'b)-(a'y+x'b)$. Последнее утверждение равносильно $(x+a')y+(x'+a)b=(x'+a)y+(x+a')b$, которое следует из равенства чисел $x-a$ и $x'-a'$.

2) Целое число $n-0$ будем отождествлять с $n\in\mathbb{N}_0$. Такое отождествление согласовано с операциями, т.к. $(n-0)+(m-0)=(n+m)+0$ и $(n-0)(m-0)=nm-0$. В этом смысле $\mathbb{N}_0\subset\mathbb{Z}$. Для числа $n\in\mathbb{N}$ определим $-n=0-n$, и $-\mathbb{N}$ — множество всех таких чисел. Тогда $\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup(-\mathbb{N})$.

3) Пусть $\alpha,\ \beta\in\mathbb{Z}$. По определению считаем, что $\alpha<\beta$, если $\beta=\alpha+n$ для некоторого $n\in\mathbb{N}$.

Определение. *Рациональное число* — это выражение вида $\frac{p}{q}$, где $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$. Два рациональных числа $\frac{p}{q}$ и $\frac{m}{n}$ *равны*, если $pn=qm$. Множество рациональных чисел обозначается как $\mathbb{Q}$.

На $\mathbb{Q}$ определены операции сложения и умножения:
$\frac{p}{q}+\frac{m}{n}=\frac{pn+qm}{qn}$, $\qquad \frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}=\frac{pm}{qn}$.

Нетрудно проверить корректность операций. Число $\frac{p}{1}$ будем отождествлять с $p\in\mathbb{Z}$. Такое отождествление согласовано с операциями, т.к. $\frac{p}{1}+\frac{m}{1}=\frac{p+m}{1}$ и $\frac{p}{1}\cdot\frac{m}{1}=\frac{pm}{1}$ и, значит, $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.

Наряду с операциями объединения, пересечения и разности основной является операция произведения множеств.

Определение. Если в паре $\{a,\ b\}$ известно, что a является первым элементом, а b — вторым, то пара называется *упорядоченной* и обозначается $(a,\ b)$. Характеристическое свойство упорядоченных пар: $(a,\ b)=(c,\ d)\Leftrightarrow a=c$ и $b=d$.[2] *Декартовым произведением* множеств A и B называется множество $A\times B=\{(a,\ b)\colon a\in A$ и $b\in B\}$.

[2]Существование упорядоченных пар можно требовать отдельным правилом, а можно определить исходя из уже приведенных правил, например, как $(a,\ b)=\{\{a\},\ \{a,\ b\}\}$.

Подмножество R произведения $X \times Y$ называется *отношением.* Пишут xRy, если $(x, y) \in R$. Говорят, что R есть отношение на X, если $X = Y$.

Приведем важнейшие примеры отношений.

Определение. Пусть задана функция $f\colon X \to Y$. Множество $\Gamma_f = \{(x, f(x))\colon x \in X\}$ называется *графиком* функции f.

Очевидно, что если функции $f, g\colon X \to Y$ равны, то их графики совпадают. В то же время, пусть отношение Γ, такое что для всякого $x \in X$ множество $\{y \in Y\colon (x, y) \in \Gamma\}$ состоит из одного элемента. Тогда существует единственная функция, для которой Γ является графиком: такая функция задается условием $(x, y) \in \Gamma$. Таким образом, функция полностью отождествляется со своим графиком (*функциональное отношение*). Это позволяет, например, говорить о множестве всех функций из X в Y.

Следующее отношение формализует понятие классификации объектов.

Определение. Непустое отношение $\sim$ на X называется *отношением эквивалентности*, если для любых $x, y, z \in X$ выполнено:

1) $x \sim x$ (рефлексивность);

2) если $x \sim y$, то $y \sim x$ (симметричность);

3) если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$ (транзитивность).

Множество $[x] = \{y \in X\colon x \sim y\}$ называется *классом эквивалентности* с представителем x.

Замечание. Из определения сразу следует, что $[x] \subset X$ и $x \in$ $\in [x]$. Более того, $[x]$ и $[y]$ либо не пересекаются, либо совпадают. Действительно, если найдется $a \in [x] \cap [y]$, то $x \sim y$, т.к. $a \sim x$ и $a \sim y$. Но тогда для любого z верно $z \sim x \Leftrightarrow z \sim y$, т.е. $[x] = [y]$.

Определим *фактормножество* $X/\!\sim\, = \{[x]\colon x \in X\}$. Набор $X/\!\sim$ задает разбиение X: множество X представимо в виде объединения классов эквивалентности.

В теории множеств $\mathbb{Z}$ строится следующим образом. На множестве пар из $\mathbb{N}_0$ отношение $(x, a) \sim (y, b) \Leftrightarrow x + b = y + a$ является отношением эквивалентности. Тогда символ $x - a$ можно интерпретировать как соответствующий класс эквивалентности

$[(x,\,a)]$, а $\mathbb{Z}$ как фактормножество, $\mathbb{Z} = \{[(x,\,a)]\}$. Этот комментарий относится также и к построению $\mathbb{Q}$.

Определение. Непустое отношение $\leqslant$ на X называется *отношением частичного порядка*, если для любых x, y, $z \in X$ выполнено:

1) $x \leqslant x$ (рефлексивность);
2) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $y = x$ (антисимметричность);
3) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$ (транзитивность).

В качестве примера можно рассмотреть на $\mathcal{P}(X)$ отношение включения: $A \leqslant B \Leftrightarrow A \subset B$.

Если в дополнение $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$ для всех x, $y \in X$, то $\leqslant$ называют *отношением линейного порядка*. Примером может служить отношение $\leqslant$ на $\mathbb{N}$ или $\mathbb{Z}$.

Безоговорочно примем следующее правило.

VII. Для любого множества A существует функция $c\colon \mathcal{P}(A) \setminus \setminus \{\varnothing\} \to A$, такая что $c(B) \in B$ для всех $B \subset A$ (*аксиома выбора*).

В конкретных случаях функцию выбора можно выписать в явном виде. Например, для непустого $B \subset \mathbb{N}_0$ можно положить $c(B) = \min B$.

Покажем, как при помощи функций разделить множества на конечные и бесконечные.

Положим $I_n = \{k \in \mathbb{N}\colon k \leqslant n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.3 (принцип Дирихле). *Если $f\colon I_n \to I_m$ — инъекция, то $n \leqslant m$.*

□ Доказательство проведем индукцией по n. При $n = 1$ утверждение верно. Пусть $f\colon I_{n+1} \to I_m$ — инъекция. Отметим, что поскольку $n + 1 \geqslant 2$, то $m \geqslant 2$.

Определим функцию $\tau\colon I_m \to I_m$, которая переставляет m и $f(n + 1)$, а остальные элементы оставляет на месте, и рассмотрим композицию $\tau \circ f\colon I_{n+1} \to I_m$. Функция $\tau \circ f$ инъективна как композиция инъекций, и отображает I_n в I_{m-1} (т.к. $n+1$ переходит в m). По предположению индукции $n \leqslant m - 1$, а значит, $n + 1 \leqslant m$. ■

Определение. Множество A называется *конечным*, если оно пустое или существует биекция $f\colon I_n \to A$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Если множество не является конечным, то оно называется *бесконечным.*

Следствие 1. *Если непустое множество A конечно, то существует* единственное n, *для которого определена биекция* $f\colon I_n \to A$ (*говорят, что* «A состоит из n элементов»).

$\square$ Пусть функции $f\colon I_n \to A$ и $g\colon I_m \to A$ — биекции. Композиции $g^{-1} \circ f\colon I_n \to I_m$ и $f^{-1} \circ g\colon I_m \to I_n$ являются инъекциями, поэтому по теореме $n \leqslant m$ и $m \leqslant n$, т.е. $n = m$. $\blacksquare$

Следствие 2. *Множество $\mathbb{N}$ бесконечно.*

$\square$ Если $\mathbb{N}$ конечно, то существует биекция $f\colon I_n \to \mathbb{N}$. Так как $I_{n+1} \subset \mathbb{N}$, то отображение $\sigma\colon I_{n+1} \to \mathbb{N}$, $\sigma(k) = k$, — инъекция. Но тогда композиция $f^{-1} \circ \sigma\colon I_{n+1} \to I_n$ является инъекцией, что противоречит теореме 1.3. $\blacksquare$

Теорема 1.4. *Если множество A бесконечно, то существует инъекция $f\colon \mathbb{N} \to A$.*

$\square$ Пусть A бесконечно. Построим функцию f следующим образом: выберем некоторое $a \in A$ и определим по индукции $f(1) = a$, $f(n+1) = c(A \setminus \{f(1), \ldots, f(n)\})$. Полученная функция будет инъекцией по построению. $\blacksquare$

1.2. Аксиоматическое определение поля действительных чисел

Определение. Непустое множество $\mathbb{F}$ называется *полем*, если на нем заданы операции $+\colon \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ и $\cdot\colon \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, удовлетворяющие следующим аксиомам:

A1 (коммутативность) $\forall a, b \in \mathbb{F} \quad a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$;

A2 (ассоциативность) $\forall a, b, c \in \mathbb{F} \quad (a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

A3 (существование нуля) $\exists 0 \in \mathbb{F}\ \forall a \in \mathbb{F} \quad a + 0 = a$;

A4 (существование противоположного элемента) $\forall a \in \mathbb{F}$ $\exists (-a) \in \mathbb{F} \quad a + (-a) = 0$;

A5 (существование единицы) $\exists 1 \in \mathbb{F} \setminus \{0\}\ \forall a \in \mathbb{F} \quad a \cdot 1 = a$;

A6 (существование обратного элемента) $\forall a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ $\exists a^{-1} \in \mathbb{F} \quad a \cdot a^{-1} = 1$;

A7 (дистрибутивность) $\forall a, b, c \in \mathbb{F} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Будем использовать стандартные обозначения:

$$a - b = a + (-b), \quad ab = a \cdot b, \quad \frac{a}{b} = a/b = ab^{-1}.$$

Пример. Множество $\mathbb{Q}$ является полем относительно введенных операций с нулем $\frac{0}{1}$ и единицей $\frac{1}{1}$. Выполнение аксиом следует из свойств сложения и умножения целых чисел. Напротив, множество $\mathbb{Z}$ не является полем: уравнение $2x = 1$ не имеет решений в целых числах.

Непосредственно из определения вытекают следующие простейшие свойства полей.

1) если $a + 0' = a$ для всех $a \in \mathbb{F}$, то $0' = 0$.

Действительно, по А3 и А1 имеем $0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$. Последнее равенство получено по определению $0'$.

Аналогично устанавливается единственность единицы поля, а также однозначность противоположного и обратного элементов.

2) $a \cdot 0 = 0$ и $(-1)a = -a$.

По А7 и А3 $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$. Осталось прибавить к обеим частям $-a0$. Проверим второе равенство. Так как $(-1)a + 1 \cdot a = ((-1) + 1)a = 0a = 0$, то $(-1)a = -a$.

Определение. Поле $\mathbb{F}$ называется *упорядоченным*, если на нем выполняется

Аксиома порядка. Существует непустое множество $P \subset \mathbb{F}$ такое, что

а) если $a, b \in P$, то $a + b \in P$, $ab \in P$ (замкнутость относительно сложения и умножения);

б) для каждого $a \in \mathbb{F}$ верно ровно одно: либо $a \in P$, либо $-a \in P$, либо $a = 0$.

Элемент $a \in \mathbb{F}$ называется *положительным*, если $a \in P$, и *отрицательным*, если $-a \in P$.

Будем писать $a < b$ (или $b > a$), если $b - a \in P$, будем писать $a \leqslant b$ ($b \geqslant a$), если $a < b$ или $a = b$.

Замечание. Из п. (б) аксиомы порядка следует, что для любых $a, b \in \mathbb{F}$ выполнено ровно одно: $a < b$, $b < a$ или $a = b$.

Пример. Поле $\mathbb{Q}$ упорядоченное: множество положительных элементов $\mathbb{Q}_+ = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}\}$.

Лемма 1.1. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— упорядоченное поле и* a, b, c, $d \in \mathbb{F}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) *если* $a < b$ *и* $b < c$, *то* $a < c$;

б) *если* $a < b$ *и* $c < d$, *то* $a + c < b + d$;

в) *если* $a < b$ *и* $c > 0$, *то* $ac < bc$;

г) *если* $a \neq 0$, *то* $a^2 > 0$.

В частности, $1 > 0$.

□ а) По условию $b - a$, $c - b \in P$. Тогда в силу замкнутости P относительно сложения $c - a = (b - a) + (c - b) \in P$, т.е. $a < c$. Пункт (б) устанавливается аналогично.

в) По условию $b - a$, $c \in P$. Тогда в силу замкнутости P относительно умножения $c(b - a) = cb - ca \in P$, т.е. $ac < bc$.

г) Если $a>0$, то $a^2>0$ в силу замкнутости P относительно умножения. Если $a < 0$, то $-a > 0$, а значит, $(-a)(-a) > 0$. Осталось заметить, что $(-a)(-a) = (-1)(-1)a^2 = -(-a^2) = a^2$. ■

Замечание. Свойства (а)–(в) очевидно сохранятся, если знак $<$ заменить на $\leqslant$.

Определение. *Модулем* или *абсолютной величиной* $x \in \mathbb{F}$ называется

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Лемма 1.2. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— упорядоченное поле и* x, $y \in \mathbb{F}$. *Тогда*

а) $|x| \geqslant 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; б) $|-x| = |x|$; в) $|xy| = |x||y|$;

г) $|x| \leqslant y \Leftrightarrow -y \leqslant x \leqslant y$; д) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

□ Свойства (а)–(г) устанавливаются по определению разбором случаев. Проверим п. (г). Пусть $|x| \leqslant y$. Если $x \geqslant 0$, то $x \leqslant y$ и $-y \leqslant 0 \leqslant x$. Если $x < 0$, то $|x| \leqslant y$ записывается как $-x \leqslant y$ или $x \geqslant -y$. Так как $y \geqslant 0$, то $y \geqslant 0 > x$. В любом случае $-y \leqslant x \leqslant y$. Обратно, пусть $-y \leqslant x \leqslant y$. Так как верно $|x| = x$ или $|x| = -x$, то одно из неравенств совпадает с $|x| \leqslant y$.

Докажем п. (д). По п. (г) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$, $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$. Откуда $-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|$ и, значит, $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. ■

Определение. Пусть A и B — подмножества упорядоченного поля. Говорят, что множество A *лежит левее* множества B, если $a \leqslant b$ для любых $a \in A$ и $b \in B$.

Говорят, что элемент c *разделяет* множества A и B, если A лежит левее $\{c\}$, а $\{c\}$ лежит левее B, то есть

$$\forall a \in A \ \forall b \in B \ (a \leqslant c \leqslant b).$$

Определение. Упорядоченное поле $\mathbb{F}$ называется *полным*, если на нем выполняется

Аксиома полноты. Пусть A, B — непустые подмножества поля $\mathbb{F}$, причем A лежит левее B, тогда существует $c \in \mathbb{F}$, разделяющий A и B.

Полное упорядоченное поле, содержащее $\mathbb{Q}$, называется *полем действительных чисел* и обозначается $\mathbb{R}$. Элементы $\mathbb{R}$ называются *действительными числами.*

Удобно $\mathbb{R}$ интерпретировать как числовую прямую, а его элементы — как точки числовой прямой. Мы будем использовать это соответствие исключительно в качестве иллюстрации — дополнительно геометрических аксиом вводиться не будет.

Следующее простейшее наблюдение дает важный способ доказательства неравенств в анализе.

Лемма 1.3. *Если $x \in \mathbb{R}$, такое что $x \leqslant \varepsilon$ для всех $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, то $x \leqslant 0$.*

□ Если $x > 0$, то $0 < \frac{x}{2} < x$. Полагая $\varepsilon = \frac{x}{2}$, приходим к противоречию. ■

Определение. Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если существует такое $M \in \mathbb{R}$, что $x \leqslant M$ для всех $x \in E$. При этом число M называется *верхней гранью* множества E.

Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу*, если существует такое $m \in \mathbb{R}$, что $x \geqslant m$ для всех $x \in E$. При этом число m называется *нижней гранью* множества E.

Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если оно ограничено и сверху, и снизу.

Задача. Докажите, что ограниченность $E \subset \mathbb{R}$ равносильна условию $\exists K > 0 \ \forall x \in E \ (|x| \leqslant K)$.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ непусто. Наименьшая из верхних граней множества E называется *точной верхней гранью* (*супремумом*) множества E и обозначается как $\sup E$.

Наибольшая из нижних граней множества E называется *точной нижней гранью* (*инфимумом*) множества E и обозначается как $\inf E$ (см. рис. 1.4).

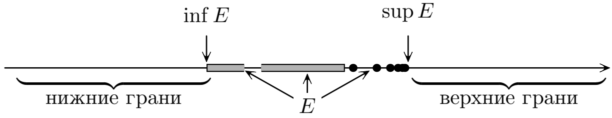

Рис. 1.4

Определения точных граней можно записать с помощью неравенств:

$$c = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \ (x \leqslant c), \\ \forall c' < c \ \exists x \in E \ (x > c'), \end{cases}$$

$$b = \inf E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \ (x \geqslant b), \\ \forall b' > b \ \exists x \in E \ (x < b'). \end{cases}$$

Действительно, в определении супремума первое условие означает, что c — верхняя грань E, второе — что число $c' < c$ не является верхней гранью E, т.е. c — минимальная верхняя грань.

Не всякое непустое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань: необходимым условием является ограниченность множества сверху (снизу). Замечательно, что это условие является и достаточным.

Теорема 1.5 (принцип полноты Вейерштрасса). *Всякое непустое ограниченное сверху* (*снизу*) *множество имеет точную верхнюю* (*нижнюю*) *грань.*

$\square$ Пусть $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ и A ограничено сверху. Рассмотрим B — множество верхних граней A. По условию $B \neq \varnothing$, и A лежит левее B. Тогда по аксиоме полноты

$$\exists c \in \mathbb{R} \ \forall a \in A \ \forall b \in B \ (a \leqslant c \leqslant b).$$

Из левой части последнего неравенства следует, что $a \leqslant c$ для всех $a \in A$. Пусть $c' < c$. Из правой части последнего неравенства следует, что $c' < b$ для всех $b \in B$. Значит, $c' \notin B$, т.е. c' не является верхней гранью множества A. Таким образом, c — наименьшая из верхних граней A.

Существование инфимума у непустого ограниченного снизу множества устанавливается аналогично. ■

Теорема 1.6 (аксиома Архимеда). *Пусть a, $b \in \mathbb{R}$ и $a > 0$. Тогда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $na > b$.*

□ Предположим, что $na \leqslant b$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда множество $A = \{na\colon n \in \mathbb{N}\}$ ограничено сверху. По теореме 1.5 существует $c = \sup A$. Число $c - a$ не является верхней гранью A, т.к. $a > 0$. Поэтому найдется такое n, что $na > c - a$. Но тогда $(n+1)a \in A$ и $(n+1)a = na + a > (c - a) + a = c$, а это противоречит тому, что c является верхней гранью A. ■

Следствие 1.

1) *Для любого $b \in \mathbb{R}$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $n > b$.*

2) $\inf\{\frac{1}{n}\colon n \in \mathbb{N}\} = 0$, *т.е. если $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, то существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\frac{1}{n} < \varepsilon$.*

□ Для проверки п. 1 применяем теорему при $a = 1$. Докажем п. 2. Для всех $n \in \mathbb{N}$ верно $\frac{1}{n} \geqslant 0$, и если $\varepsilon > 0$, то найдется такое n, что $n > \frac{1}{\varepsilon}$ или $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Следовательно, $0 = \inf\{\frac{1}{n}\colon n \in \mathbb{N}\}$. ■

Следствие 2. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ найдется единственное число $m \in \mathbb{Z}$, такое что $m \leqslant x < m + 1$ (m называется* целой частью *числа x и обозначается как $[x]$).*

□ Пусть $x \geqslant 0$. Тогда $S = \{n \in \mathbb{N}\colon n > x\}$ непусто. По теореме 1.2 множество S имеет минимальный элемент p. Положим $m = p - 1$. Тогда по определению p выполнено $m + 1 > x$ и $m \leqslant x$.

Если $x < 0$, то по доказанному найдется такое $m' \in \mathbb{Z}$, что $m' \leqslant -x < m' + 1$. Осталось положить $m = -m'$, если $-x = m'$, и $m = -m' - 1$ в противном случае.

Пусть $m_1 \leqslant x < m_1 + 1$, $m_2 \leqslant x < m_2 + 1$ для некоторых m_1, $m_2 \in \mathbb{Z}$. Вычитая одно неравенство из другого, получаем $-1 < m_1 - m_2 < 1$, откуда следует, что $m_1 = m_2$. ■

Следствие 3. *Пусть a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Тогда найдется такое $r \in \mathbb{Q}$, что $a < r < b$.*

□ Найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\dfrac{1}{n} < b - a$. Положим $r = \dfrac{[na] + 1}{n}$. Тогда $r \in \mathbb{Q}$ и $r > \dfrac{na - 1 + 1}{n} = a$, $r \leqslant \dfrac{na + 1}{n} = a + \frac{1}{n} < b$. ■

Задача. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $A = \{r \in \mathbb{Q}\colon r < a\}$. Найдите $\sup A$.

Определение. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Определим операцию возведения в степень $n \in \mathbb{N}_0$ следующим образом: $a^0 = 1$, и если уже определено a^n, то $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

По индукции a^n определено для всех $n \in \mathbb{N}_0$.

Пример. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Для любого $y \geqslant 0$ существует единственное $x \geqslant 0$, такое что $x^n = y$. Пишут $x = \sqrt[n]{y}$.

$\square$ Из тождества

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1})$$

(верно в любом поле) при $0 \leqslant a < b$ следует

$$b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a). \tag{1.1}$$

В частности, если $0 \leqslant a < b$, то $a^n < b^n$, и уравнение $x^n = y$ имеет не более одного решения.

Установим существование. Для $y = 0$ подходит $x = 0$, поэтому предполагаем, что $y > 0$. Определим $S = \{t \geqslant 0\colon t^n < y\}$. Множество S непусто (содержит 0). Далее, если $t > 1 + y$, то $t^n > (1+y)^n > 1 + y > y$, а значит, $t \notin S$. Итак, $t \leqslant 1 + y$ для всех $t \in S$, т.е. S ограничено сверху. В силу полноты $\mathbb{R}$ существует $x = \sup S$. Покажем, что $x^n = y$.

Предположим, что $x^n < y$. Полагая в (1.1) $a = x$ и $b = x + h$, получим $(x+h)^n - x^n < hn(x+h)^{n-1}$. Поэтому при $0 < h < 1$ и $h < (y - x^n)/n(x+1)^{n-1}$ верно $(x+h)^n < y$. Тогда $x + h \in S$, что противоречит определению x. Пусть $x^n > y$. При $0 < h < x$, полагая в (1.1) $a = x - h$ и $b = x$, имеем $x^n - (x-h)^n < hnx^{n-1}$. Если к тому же $h < (x^n - y)/nx^{n-1}$, то $(x-h)^n > y$. Теперь $t > x - h$ влечет $t^n > y$. Поэтому $t \leqslant x - h$ для всех $t \in S$ и, значит, $x - h$ — верхняя грань S, что противоречит определению x. $\blacksquare$

Задача. 1) Покажите, что $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2) Пусть $\mathbb{F} = \{q + r\sqrt{2}\colon q,\ r \in \mathbb{Q}\}$. Покажите, что $\mathbb{F}$ с операциями, наследуемыми из $\mathbb{R}$, является упорядоченным полем.

Множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ называется множеством *иррациональных чисел*.

Лемма 1.4 (неравенство Бернулли). *Если* $n \in \mathbb{N}$ *и* $x \geqslant -1$, *то* $(1+x)^n \geqslant 1 + xn$.

□ Проведем доказательство методом математической индукции. При $n = 1$ неравенство верно: $(1 + x)^1 \geqslant 1 + 1 \cdot x$ (превращается в равенство). Пусть неравенство верно для n. Тогда $(1 + x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x$ и, значит, неравенство верно для $n + 1$. ■

Введем обозначения: если n, $m \in \mathbb{Z}$, $m \leqslant n$, то полагаем

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + \ldots + a_n, \qquad \prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot \ldots \cdot a_n.$$

В случае $n < m$ определим пустую сумму как 0 и пустое произведение как 1.

Следующее тождество имеет приложения во многих разделах математики.

Теорема 1.7 (бином Ньютона). *Для любых* $a, b \in \mathbb{R}$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено* $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$, *где* $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, *а* $n!$ *определяется рекурсивно*: $0! = 1$, $n! = (n-1)! \cdot n$.

□ Снова воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ утверждение верно. Пусть равенство выполняется для n. Тогда

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{n-(k-1)} =$$

$$= C_n^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) a^k b^{n+1-k} + C_n^n a^{n+1}.$$

Так как $C_n^0 = C_{n+1}^0 = 1$, $C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1$ и

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{(n+1-k)\cdot n! + k \cdot n!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

то утверждение теоремы верно и для $n + 1$. ■

Следствие. *Пусть* $a > 0$, n, $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$. *Тогда справедливо неравенство*

$$(1+a)^n \geqslant 1 + C_n^k a^k.$$

Множество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ называется *расширенной числовой прямой.* Считают, что $-\infty < x < +\infty$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Определим допустимые операции с $\pm\infty$. Для $x \in \mathbb{R}$ полагают

$$x + (+\infty) = x - (-\infty) = +\infty, \quad x + (-\infty) = x - (+\infty) = -\infty,$$
$$\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0,$$
$$x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \text{ при } x > 0, \qquad x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \text{ при } x < 0.$$

Кроме того,

$$+\infty + (+\infty) = +\infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty,$$
$$+\infty \cdot (+\infty) = -\infty \cdot (-\infty) = +\infty, +\infty \cdot (-\infty) = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Недопустимыми считаются следующие операции:

$$+\infty - (+\infty), \quad +\infty + (-\infty), \quad -\infty - (-\infty),$$
$$-\infty + (+\infty), \quad 0 \cdot \pm\infty, \quad \pm\infty \cdot 0, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Соглашение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Если множество E не ограничено сверху, то полагают $\sup E = +\infty$, а если множество E не ограничено снизу, то полагают $\inf E = -\infty$.

Определение. *Промежутком* называется всякое множество $I \subset \mathbb{R}$, которое вместе с любыми двумя своими точками содержит и все точки, лежащие между ними (т.е. $\forall a, b \in I \ \forall x \in \mathbb{R} \ (a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow x \in I)$).

Рассмотрим очевидные примеры промежутков. Для $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$ определим

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leqslant x \leqslant b\}, \quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\},$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leqslant b\}, \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leqslant x < b\},$$
$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon x \leqslant b\}, \qquad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon x < b\},$$
$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leqslant x\}, \qquad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x\}.$$

Оказывается, эти примеры вместе с $\mathbb{R}$ исчерпывают все промежутки.

Лемма 1.5. *Любой промежуток — одно из следующих множеств*: $\varnothing$, $\mathbb{R}$, *луч* $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, *отрезок* $[a, b]$, *интервал* (a, b), *полуинтервал* $(a, b]$, $[a, b)$, *где* $a, b \in \mathbb{R}$.

$\square$ Пусть I — промежуток, и $I \neq \varnothing$. Положим $a = \inf I$, $b = \sup I$ ($a,\, b \in \overline{\mathbb{R}}$). Если $a = b$, то $I = \{a\}$ (вырожденный отрезок). Пусть $a < b$ (невырожденный промежуток). Если $a < x < b$, то по определению точных граней найдутся такие $x',\, x'' \in I$, что $x' < x < x''$. Но тогда $x \in I$. Следовательно, $(a,\, b) \subset I \subset [a,\, b]$ (в $\overline{\mathbb{R}}$), т.е. I — одно из перечисленных множеств. $\blacksquare$

Если $a,\, b \in \mathbb{R}$, то промежуток I называется *конечным*, в противном случае — *бесконечным*.

2. Предел последовательности

Если задана функция $a\colon \mathbb{N} \to A$, то говорят, что задана *последовательность* элементов множества A. Значение $a(n)$ называют n-м *членом*, и вместо $a(n)$ пишут a_n. Для самой последовательности используют обозначения $\{a_n\}$, или $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, или a_n, $n \in \mathbb{N}$. Если $A = \mathbb{R}$, то последовательность называется *числовой*. В этом разделе обсуждаются числовые последовательности, поэтому в дальнейшем прилагательное «числовая» будет опускаться.

Примеры. 1) Пусть $c \in \mathbb{R}$ произвольно. Последовательность $a\colon \mathbb{N} \to \{c\}$ называется *постоянной*. Здесь $a_n = c$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

2) $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

3) $a_n = 1 + q + \ldots + q^n =: \sum_{k=0}^{n} q^k$, $n \in \mathbb{N}$.

Последовательность может быть задана *рекурсивно*. Это способ, когда последующие члены последовательности определяются через предыдущие.

Пример. Пусть $m \in \mathbb{N}$ произвольно, и пусть $a_1 = m$, а для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n/2, & \text{если } a_n \text{ четно}, \\ 3a_n + 1, & \text{если } a_n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

По индукции проверяется, что эти условия однозначно определяют последовательность $\{a_n\}$.

С последовательностью $\{a_n\}$ связана следующая проблема. Л. Коллац предположил (1937), что при любом выборе a_1 последовательность $\{a_n\}$ в какой-то момент примет значение 1, после чего будет повторяться цикл: 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1 ... На момент написания текста проблема остается открытой, хотя ее справедливость установлена для «почти всех» n.[3]

2.1. Предел последовательности

Последовательности позволяют наиболее просто ввести концепцию предела, центральную тему анализа.

Определение. Число a называется *пределом* последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N,

[3] T. Tao *Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values.* arXiv e-prints, page arXiv:1909.03562v3 Jun 2020.

что $|a_n - a| < \varepsilon$ для всех номеров $n \geqslant N$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, или $a_n \to a$ при $n \to \infty$, или $a_n \to a$.

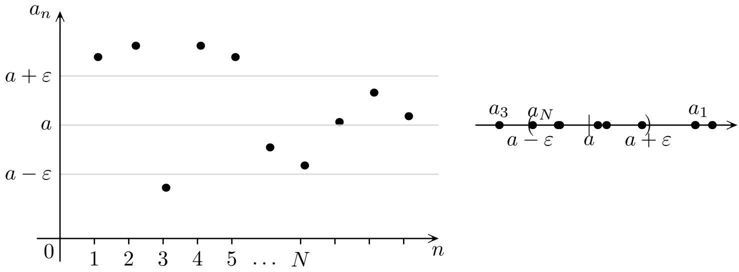

Рис. 2.1

Замечание. Поскольку $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, то запись $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ означает, что для *всякого* $\varepsilon > 0$ множество M_ε тех номеров n, для которых a_n не лежит в интервале $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, конечно (быть может, пусто). Если n трактовать как дискретное время, то можно сказать, что в $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ попадают все члены, начиная с некоторого момента (см. рис. 2.1).

В общем случае номер N в определении зависит от ε.

На определение предела полезно смотреть как на игру: игрок A задает $\varepsilon > 0$, игрок B должен предоставить номер N, начиная с которого заданная точность достигается. Число a — предел $\{a_n\}$, если игрок B имеет выигрышную стратегию.

Определение. Последовательность, имеющая некоторое число своим пределом, называется *сходящейся*; в противном случае — *расходящейся*.

Пример. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

$\square$ Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Неравенство $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ равносильно $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Положим $N = [1/\varepsilon] + 1$. Тогда для $n \geqslant N$ выполнено $n > \frac{1}{\varepsilon}$ и, значит, $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ — любое, то $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$. $\blacksquare$

Пример. Последовательность $\{(-1)^n\}$ расходящаяся. Если предположить, что $(-1)^n \to a$, то (для $\varepsilon = 1$) найдется такой номер N, что $a-1<(-1)^n<a+1$ при всех $n \geqslant N$. Поэтому, если $n \geqslant N$ четно, то $1<a+1$, а если $n \geqslant N$ нечетно, то $a-1<$ <-1. Складывая эти неравенства, получаем $a<a$.

Теорема 2.1 (о единственности). *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$*, то* $a=b$*.*

□ Зафиксируем $\varepsilon>0$. По определению предела найдутся такие номера N_1 и N_2, что $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ при всех $n \geqslant N_1$, и $|a_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$ при всех $n \geqslant N_2$. Положим $N=\max\{N_1, N_2\}$, тогда

$$|a-b| = |(a-a_N)+(a_N-b)| \leqslant |a_N-a|+|a_N-b| < \varepsilon.$$

Поскольку $|a-b|<\varepsilon$ верно для всех $\varepsilon>0$, то $|a-b|=0$, а значит, $a=b$. ■

Запись $a_n \to a$ для $a \in \mathbb{R}$ подразумевает две вещи: во-первых, что $\{a_n\}$ сходится, и, во-вторых, что предел равен a.

Задача. Докажите, что если $a_n \to a$, то $|a_n| \to |a|$. Верно ли обратное?

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если множество ее значений $\{a_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ ограничено. Аналогично определяется ограниченность сверху (снизу).

Теорема 2.2 (об ограниченности). *Если последовательность* $\{a_n\}$ *сходится, то она ограничена.*

□ Пусть $a_n \to a$. По определению предела найдется такой номер N, что $a-1<a_n<a+1$ при всех $n \geqslant N$. Положим $m=$ $=\min\{a-1, a_1, \ldots, a_{N-1}\}$, $M=\max\{a+1, a_1, \ldots, a_{N-1}\}$. Тогда $m \leqslant a_n \leqslant M$ при всех $n\in\mathbb{N}$. ■

Лемма 2.1. *Для всякого* $m\in\mathbb{N}$ *последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$*, где* $b_n=a_{n+m}$ *при всех* $n\in\mathbb{N}$*, имеют предел одновременно и, если имеют, то пределы равны.*

□ Зафиксируем $\varepsilon>0$. Если неравенство $|a_n-a|<\varepsilon$ верно при $n \geqslant N_a$, то при таких n верно и $|b_n-a|<\varepsilon$. Обратно, если неравенство $|b_n-a|<\varepsilon$ верно при $n\geqslant N_b$, то $|a_n-a|<\varepsilon$ верно при $n \geqslant N_b+m$. Следовательно, утверждения $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n =$ $=a$ равносильны. ■

Последовательность $\{b_n\}$ называют *m-хвостом* $\{a_n\}$ и обозначают $\{a_n\}_{n=m+1}^{\infty}$.

Теорема 2.3 (о пределе в неравенствах). *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Тогда*

1) *если* $a < b$, *то существует такое* $N \in \mathbb{N}$, *что* $a_n < b_n$ *при всех* $n \geqslant N$;
2) *если* $a_n \leqslant b_n$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$, *то* $a \leqslant b$.

□ Докажем первое утверждение. Пусть $\varepsilon = (b-a)/2$. По определению предела найдутся такие номера N_1 и N_2, что $a_n < a + \varepsilon$ при всех $n \geqslant N_1$ и $b - \varepsilon < b_n$ при всех $n \geqslant N_2$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n \geqslant N$ выполнено

$$a_n < a + \varepsilon = (a+b)/2 = b - \varepsilon < b_n.$$

Второе утверждение вытекает из первого по правилу контрапозиции: если $a > b$, то $a_n > b_n$ при всех $n \geqslant N$, что противоречит условию. ■

Замечание. Предельный переход не обязан сохранять строгие неравенства.

Пример. Имеем $1/n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, но $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Теорема 2.4 (о зажатой последовательности). *Если* $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ (см. рис. 2.2).

□ Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела найдутся такие номера N_1, N_2, что $a - \varepsilon < a_n$ при всех $n \geqslant N_1$ и $b_n < a + \varepsilon$ при всех $n \geqslant N_2$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n \geqslant N$ имеем

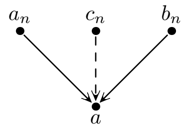

Рис. 2.2

$$a - \varepsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < a + \varepsilon$$

и, значит, $|c_n - a| < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ — любое, то $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$. ■

Отметим частный случай теоремы 2.4: если $|c_n| \leqslant b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $b_n \to 0$, то $c_n \to 0$.

Пример. Покажем, что $q^n \to 0$ при $|q| < 1$.

□ Случай $q = 0$ очевиден, поэтому считаем, что $q \neq 0$.

Так как $\dfrac{1}{|q|} > 1$, то $\dfrac{1}{|q|} = 1 + \alpha$ для некоторого $\alpha > 0$. По неравенству Бернулли имеем

$$\left(\tfrac{1}{|q|}\right)^n = (1+\alpha)^n \geqslant 1 + \alpha n > \alpha n,$$

так что $|q^n| < \frac{1}{\alpha n}$. Поскольку $\frac{1}{\alpha n} \to 0$, утверждение доказано. ■

Теорема 2.5 (арифметические операции с пределами). *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Тогда*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;

3) *если* $b \neq 0$ *и* $b_n \neq 0$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

□ 1) Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела найдутся такие номера N_1 и N_2, что $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $n \geqslant N_1$ и $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $n \geqslant N_2$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n \geqslant N$ имеем

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что доказывает п. 1.

2) Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По теореме 2.2 последовательность $\{a_n\}$ ограничена. Поэтому существует такое $C > 0$, что $|a_n| \leqslant C$ при всех n. Увеличивая C, если необходимо, можно считать, что $|b| \leqslant C$. По определению предела найдутся такие номера N_1 и N_2, что $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C}$ при всех $n \geqslant N_1$ и $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2C}$ при всех $n \geqslant N_2$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n \geqslant N$ имеем

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n b_n - a_n b) + (a_n b - ab)| \leqslant$$
$$\leqslant |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a| < C\frac{\varepsilon}{2C} + C\frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon,$$

что доказывает п. 2.

3) Поскольку $a_n/b_n = a_n(1/b_n)$, то ввиду п. 2 достаточно показать, что $1/b_n \to 1/b$.

Так как $b \neq 0$, то найдется такой номер N_1, что $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ при всех $n \geqslant N_1$. При этом

$$|b| = |b - b_n + b_n| \leqslant |b_n - b| + |b_n| < \frac{|b|}{2} + |b_n|,$$

откуда $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ и, значит, $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдется такой номер N_2, что $|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\varepsilon$ при всех $n \geqslant N_2$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при

$n \geqslant N$ имеем

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b-b_n|}{|b_n b|} < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{|b|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Замечание. Обратные высказывания к утверждениям теоремы 2.5 неверны.

Пример. Последовательности $a_n = (-1)^n$ и $b_n = -a_n$ расходятся, однако последовательности $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n b_n\}$ и $\{a_n/b_n\}$ сходятся: $a_n + b_n = 0$, $a_n b_n = a_n/b_n = -1$.

Определение. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Замечание. $\lim a_n = a \Leftrightarrow a_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Действительно, если положить $\alpha_n = a_n - a$, то утверждение будет следовать непосредственно из определения предела.

Такая переформулировка бывает весьма полезной.

Пример. Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, а $\{\beta_n\}$ — ограниченная последовательность. Покажем, что последовательность $\{\alpha_n\beta_n\}$ является бесконечно малой.

$\square$ Так как $\{\beta_n\}$ ограничена, то существует такое $C > 0$, что $|\beta_n| \leqslant C$ при всех n. Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку $\alpha_n \to 0$, то найдется такой номер N, что $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{C}$ при всех $n \geqslant N$. Тогда $|\alpha_n\beta_n| < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Это означает, что $\alpha_n\beta_n \to 0$. $\blacksquare$

2.2. Монотонные последовательности

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *нестрого возрастающей* (*строго возрастающей*), если $a_n \leqslant a_{n+1}$ ($a_n < a_{n+1}$) для всех $n \in \mathbb{N}$.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *нестрого убывающей* (*строго убывающей*), если $a_n \geqslant a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$) для всех $n \in \mathbb{N}$.

Нестрого возрастающие, нестрого убывающие последовательности называются *монотонными*.

Замечание. Если $a_n \leqslant a_{n+1}$ для всех n, то по индукции устанавливается, что $a_n \leqslant a_m$ для всех n, m, где $n < m$. Это верно и для других типов неравенств.

Теорема 2.6 (о пределе монотонной последовательности). 1) *Пусть последовательность* $\{a_n\}$ *нестрого возрастает и ограничена сверху. Тогда* $\{a_n\}$ *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$.

2) *Пусть последовательность* $\{a_n\}$ *нестрого убывает и ограничена снизу. Тогда* $\{a_n\}$ *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$.

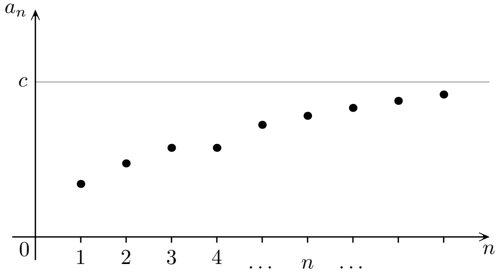

Рис. 2.3

□ Докажем первое утверждение. Так как $\{a_n\}$ ограничена сверху, то существует число $c = \sup\{a_n\}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению супремума $a_n \leqslant c$ для всех n, и найдется такой номер N, что $a_N > c - \varepsilon$. Так как $\{a_n\}$ нестрого возрастает, то $a_n \geqslant a_N$ при всех $n \geqslant N$. Поэтому при $n \geqslant N$ имеем

$$c - \varepsilon < a_N \leqslant a_n \leqslant c < c + \varepsilon,$$

так что $|a_n - c| < \varepsilon$. Следовательно, $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (см. рис. 2.3).

Доказательство второго утверждения аналогично. ■

Пример. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, заданную рекурсивно:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что $\{a_n\}$ сходится.

□ Очевидно, что $a_n > 0$ для всех n. Кроме того,

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\left(a_n + \tfrac{2}{a_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} > 0;$$

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \tfrac{1}{2}\left(a_n + \tfrac{2}{a_n}\right) = \frac{a_n^2 - 2}{2a_n} > 0.$$

Следовательно, $\{a_n\}$ строго убывает и ограничена снизу $\sqrt{2}$. По теореме 2.6 заключаем, что $a_n \to a$. Перейдем в равенстве

$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ к пределу при $n \to \infty$. Так как $a_{n+1} \to a$, то по теореме 2.5 $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$. Из условия $a_n > 0$ следует, что $a \geqslant 0$ и, значит, $a = \sqrt{2}$. ■

Задача. Покажите, что $a_n - \sqrt{2} = \sqrt{2}\frac{2q^{2^{n-1}}}{1-q^{2^{n-1}}}$, где $q = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

Указание: $a_{n+1} \pm \sqrt{2} = \dfrac{(a_n \pm \sqrt{2})^2}{2a_n}$.

Задача. Обобщите предыдущий пример на случай $a = \sqrt[k]{\alpha}$.

Пример. Покажем, что для любого $x \in \mathbb{R}$ последовательность $a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ сходится.

□ Зафиксируем натуральное $m > |x|$. Тогда $a_n(x) > 0$ при всех $n \geqslant m$ и

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1}.$$

Выражение $-\dfrac{\frac{x}{n(n+1)}}{1 + \frac{x}{n}} > 0$ при $x < 0$ и $\geqslant -1$ при $x \geqslant 0$, поэтому по неравенству Бернулли:

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \geqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{\frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right) = 1.$$

Следовательно, последовательность $\{a_n(x)\}$ нестрого возрастает при $n \geqslant m$. Так как $a_n(-x) \geqslant a_m(-x)$ при $n \geqslant m$ и $a_n(x)a_n(-x) = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \leqslant 1$, то $a_n(x) \leqslant \dfrac{1}{a_n(-x)} \leqslant \dfrac{1}{a_m(-x)}$. Следовательно, $\{a_n(x)\}$ ограничена сверху. По теореме 2.6 последовательность $\{a_n(x)\}$ сходится.

Определение. $e := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ — число «e».

К последовательности для числа e приводит следующая задача. Банк выдает займ по следующему правилу: весь год разбивается на n периодов и в конце каждого начисляется $\frac{100}{n}\%$ от имеющейся к этому моменту суммы долга. Какой будет сумма долга по истечению года, если изначально банк выдал 1 флорин?

2.3. Принцип вложенных отрезков

Определение. Последовательность отрезков $\{[a_n,\, b_n]\}$ называется *вложенной*, если $[a_n,\, b_n] \supset [a_{n+1},\, b_{n+1}]$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если к тому же $b_n - a_n \to 0$, то последовательность $\{[a_n,\, b_n]\}$ называется *стягивающейся*.

Теорема 2.7 (Кантор). *Всякая последовательность вложенных отрезков имеет общую точку. Кроме того, если последовательность стягивающаяся, то такая точка единственная.*

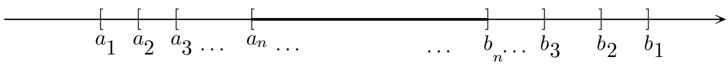

Рис. 2.4

□ Пусть $\{[a_n,\, b_n]\}$ — последовательность вложенных отрезков. Поскольку $a_1 \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b_1$ для всех n, то последовательность $\{a_n\}$ нестрого возрастает и ограничена сверху (числом b_1), а последовательность $\{b_n\}$ нестрого убывает и ограничена снизу (числом a_1) (см. рис. 2.4). По теореме 2.6 обе последовательности сходятся, $a_n \to \alpha$ и $b_n \to \beta$.

Переходя в неравенстве $a_n \leqslant b_n$ к пределу при $n \to \infty$, по теореме 2.3 получим $\alpha \leqslant \beta$. Итак, $a_n \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_n$ для всех n и, значит, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n,\, b_n] \supset [\alpha,\, \beta]$.

Пусть $\{[a_n,\, b_n]\}$ — стягивающаяся последовательность, и $x, y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n,\, b_n]$. Для каждого n точки x, y принадлежат $[a_n,\, b_n]$ и, значит, $|x - y| \leqslant b_n - a_n$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим $x = y$. Поэтому $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n,\, b_n] = \{x\}$, где $x = \alpha = \beta$. ■

Задача. Докажите, что пересечение любой совокупности попарно пересекающихся отрезков является отрезком.

2.4. Бесконечные пределы

Выделим классы последовательностей, расходящиеся специальным образом.

Определение. Говорят, что последовательность $\{a_n\}$ *стремится к* $+\infty$, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, или $a_n \to +\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \big(n \geqslant N \Rightarrow a_n > \tfrac{1}{\varepsilon}\big).$$

Говорят, что последовательность $\{a_n\}$ *стремится к* $-\infty$, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, или $a_n \to -\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \big(n \geqslant N \Rightarrow a_n < -\tfrac{1}{\varepsilon}\big).$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

Из определений следует, что $a_n \to -\infty \Leftrightarrow -a_n \to +\infty$.

Задача. Докажите, что если $\{a_n\}$ является бесконечно большой, то она неограничена.

Замечание. Ясно, что последовательность не может одновременно стремится к числу и к символу $+\infty$ ($-\infty$), а также к бесконечностям разных знаков. Поэтому, если последовательность имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, то он единственный.

Дополним теорему о зажатой последовательности.

Теорема 2.4$'$. *Пусть $a_n \leqslant b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

1) *если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$;*

2) *если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.*

□ Докажем первое утверждение. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию найдется такой номер N, что $a_n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ при всех $n \geqslant N$. Тогда $b_n \geqslant a_n > \frac{1}{\varepsilon}$ при всех $n \geqslant N$. Это означает, что $b_n \to +\infty$.

Второе утверждение вытекает из первого: $(-b_n) \to +\infty$ и $-b_n \leqslant -a_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, тогда $(-a_n) \to +\infty$. ■

Задача. Докажите, что теорема 2.5 верна для a, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ (с допустимыми операциями).

Пример. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

□ Из сходимости $\{a_n\}$ следует ее ограниченность снизу, т.е. существует такое $C > 0$, что $a_n \geqslant -C$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $b_n \to +\infty$, то найдется такой номер N, что $b_n > \dfrac{1 + \varepsilon C}{\varepsilon}$ при всех

$n \geqslant N$. Тогда $a_n + b_n > \frac{1}{\varepsilon}$ при всех $n \geqslant N$. Это означает, что $a_n + + b_n \to +\infty$. ■

Теорема 2.6′. *Пусть последовательность* $\{a_n\}$ *монотонна и неограничена. Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *равен* $+\infty$*, если* $\{a_n\}$ *нестрого возрастает, и равен* $-\infty$*, если* $\{a_n\}$ *нестрого убывает.*

□ Пусть $\{a_n\}$ нестрого возрастает. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Если $\{a_n\}$ неограничена, то найдется такое N, что $a_N > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда в силу возрастания $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$ при всех $n \geqslant N$. Это означает, что $a_n \to +\infty$.

Доказательство второго утверждения аналогично. ■

Таким образом, любая монотонная последовательность имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$: для нестрого возрастающей последовательности $\lim a_n = \sup\{a_n\}$, для нестрого убывающей последовательности $\lim a_n = \inf\{a_n\}$.

Теорема 2.8* (Штольц). *Пусть* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *— две последовательности, причем* $\{b_n\}$ *— строго возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел. Если существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L$*, то существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$*.*

□ Пусть сначала $L = 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем такое K, что при всех $k \geqslant K$ выполнено

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{k+1}-a_k}{b_{k+1}-b_k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

По условию $b_{k+1} - b_k > 0$, поэтому

$$-\frac{\varepsilon}{2}(b_{k+1}-b_k) < a_{k+1}-a_k < \frac{\varepsilon}{2}(b_{k+1}-b_k).$$

Складывая такие неравенства при $k = K,\ K+1,\ \ldots,\ n-1$, имеем

$$-\frac{\varepsilon}{2}(b_n-b_K) < a_n-a_K < \frac{\varepsilon}{2}(b_n-b_K).$$

Так как $b_n \to +\infty$, то найдется такое $N > K$, что $\left|\frac{a_K}{b_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $n \geqslant N$. Тогда при $n \geqslant N$ получаем

$$-\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{b_K}{b_n}\right) + \frac{a_K}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{b_K}{b_n}\right) + \frac{a_K}{b_n},$$

а значит, $-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$.

Случай $L \in \mathbb{R}$. Положим $a'_n = a_n - Lb_n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a'_{n+1} - a'_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - L = 0$. По доказанному $\lim\limits_{n\to\infty} a'_n/b_n = 0$, так что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = L$. ■

Задача. Покажите, что теорема 2.8 верна и для $L = \pm\infty$. *Указание.* Перейдите к обратным дробям.

Следствие. *Если $a_n \to L$, то $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to L$.*

Задача. Пусть $x_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2.5. Подпоследовательности и частичные пределы

Определение. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность, $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $\{b_k\}$, где $b_k = a_{n_k}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, называется *подпоследовательностью* $\{a_n\}$ и обозначается $\{a_{n_k}\}$.

Отметим, что подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ — это композиция строго возрастающей функции $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sigma(k) = n_k$, и самой последовательности $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a(n) = a_n$.

Пример. $\left\{\frac{1}{2^k}\right\}$ — подпоследовательность $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ $(n_k = 2^{k-1})$.

Замечание. Если $\{a_{n_k}\}$ — подпоследовательность $\{a_n\}$, то $n_k \geqslant k$ для всех k. Установим это по индукции: $n_1 \geqslant 1$, и из неравенства $n_k \geqslant k$ следует, что $n_{k+1} > n_k \geqslant k$, откуда $n_{k+1} \geqslant k + 1$.

Лемма 2.2. *Если последовательность имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.*

□ Пусть $a_n \to a$ и $\{a_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{a_n\}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела найдется такой номер N, что $|a_n - a| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Но тогда $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ при всех $k \geqslant N$, т.к. $n_k \geqslant k \geqslant N$. Это означает, что $a_{n_k} \to a$.

Заменяя в доказательстве неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ на $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$ $(a_n < -\frac{1}{\varepsilon})$, устанавливаем лемму для $a = +\infty$ $(a = -\infty)$. ■

Теорема 2.9 (Больцано-Вейерштрасс). *Всякая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.*

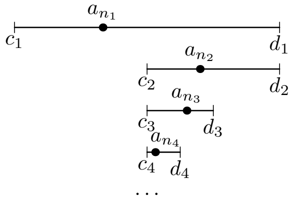

Рис. 2.5

☐ Пусть последовательность $\{a_n\}$ ограничена, тогда все ее члены принадлежат некоторому отрезку $[c, d]$. Определим индуктивно последовательность отрезков $\{[c_k,\, d_k]\}$. Положим $[c_1,\, d_1] = [c,\, d]$. Пусть отрезок $[c_k,\, d_k]$ уже определен. Разделим его пополам, $y = (c_k + d_k)/2$. Если существует бесконечно много номеров m, что $a_m \in [c_k,\, y]$, то положим $[c_{k+1},\, d_{k+1}] = [c_k,\, y]$. В противном случае существует бесконечно много номеров m, что $a_m \in [y,\, d_k]$. Тогда положим $[c_{k+1},\, d_{k+1}] = [y,\, d_k]$ (см. рис. 2.5).

Последовательность отрезков $\{[c_k,\, d_k]\}$ стягивающаяся, и каждый из них содержит a_m для бесконечного множества номеров m. По теореме 2.7 Кантора существует точка $a = \lim\limits_{k\to\infty} c_k = \lim\limits_{k\to\infty} d_k$. Построим теперь строго возрастающую последовательность номеров $\{n_k\}$: $n_1 = 1$, и если n_k уже найден, то выберем такой номер $n_{k+1} > n_k$, что $a_{n_{k+1}} \in [c_{k+1},\, d_{k+1}]$. По построению $c_k \leqslant a_{n_k} \leqslant d_k$ для всех k. Поэтому по теореме 2.4 о зажатой последовательности $a_{n_k} \to a$. ■

Теорема 2.9′. *Если последовательность не ограничена сверху (снизу), то она имеет подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$ $(-\infty)$.*

☐ Пусть последовательность $\{a_n\}$ не ограничена сверху. Пользуясь неограниченностью, по индукции определим последовательность членов a_{n_k}: $a_{n_1} > 1$ и $a_{n_k} > \max\{2,\, a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{n_{k-1}}\}$ при $k > 1$. Отметим, что a_{n_k} не совпадает ни с каким a_m при $m \leqslant n_{k-1}$, поэтому $n_k > n_{k-1}$ при всех k, т.е. последовательность $\{a_{n_k}\}$ является подпоследовательностью $\{a_n\}$. Кроме того, $a_{n_k} > k$ при всех k, поэтому $a_{n_k} \to +\infty$ по п. 1 теоремы 2.4’.

Случай неограниченности $\{a_n\}$ снизу рассматривается аналогично. ■

Следствие. *Из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность, имеющую предел в $\overline{\mathbb{R}}$.*

Определение. Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *частичным пределом* последовательности $\{a_n\}$, если существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, для которой a является пределом.

Например, числа 1 и -1 — частичные пределы последовательности $a_n = (-1)^n$, так как $a_{2k} \to 1$ и $a_{2k-1} \to -1$.

Для числовой последовательности $\{a_n\}$ определим

$$M_n = \sup_{k \geqslant n}\{a_k\}, \qquad m_n = \inf_{k \geqslant n}\{a_k\}.$$

Если $\{a_n\}$ ограничена сверху, то все $M_n \in \mathbb{R}$. Поскольку при переходе к подмножеству супремум не увеличивается, то последовательность $\{M_n\}$ нестрого убывает, а значит, существует $\lim\limits_{n\to\infty} M_n$. Если $\{a_n\}$ не ограничена сверху, то все $M_n = +\infty$. По определению положим $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = +\infty$.

Аналогично устанавливается, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} m_n$ в $\overline{\mathbb{R}}$, и следующее определение корректно.

Определение. Величина $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} M_n$ называется *верхним пределом* последовательности $\{a_n\}$.

Величина $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} m_n$ называется *нижним пределом* последовательности $\{a_n\}$.

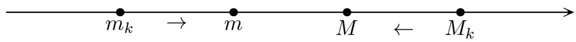

Рис. 2.6

Так как $m_n \leqslant M_n$ для всех n, то $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ (см. рис. 2.6).

Пример. Пусть $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{n} + 1$. Тогда

$$M_k = \sup_{n \geqslant k}\{a_n\} = \begin{cases} \frac{2k+1}{k}, & \text{если } k \text{ нечетно}, \\ \frac{2k+3}{k+1}, & \text{если } k \text{ четно}, \end{cases}$$

$$m_k = \inf_{n \geqslant k}\{a_n\} = \begin{cases} -\frac{1}{k+1}, & \text{если } k \text{ нечетно}, \\ -\frac{1}{k}, & \text{если } k \text{ четно}. \end{cases}$$

Откуда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 2$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 0$.

Задача. Докажите, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(-a_n) = -\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

Теорема 2.10. *Верхний (нижний) предел последовательности — наибольший (соответственно наименьший) из ее частичных пределов в $\overline{\mathbb{R}}$.*

□ Пусть $M = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ и $m = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$. Нужно показать, что M и m являются частичными пределами $\{a_n\}$ и все частичные пределы лежат между m и M.

Пусть $M \in \mathbb{R}$. Так как $M = \inf\{M_k\}$, то $M - 1 < M_1 = \sup\{a_n\}$ и по определению супремума существует номер n_1, такой что $M - 1 < a_{n_1}$. Так как $M - \frac{1}{2} < M_{n_1+1} = \sup\limits_{n\geqslant n_1+1} \{a_n\}$, то существует номер $n_2 > n_1$, такой что $M - \frac{1}{2} < a_{n_2}$ и т.д. По индукции будет построена подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, такая что $M - \frac{1}{k} < a_{n_k}$ для всех k. Кроме того, $a_{n_k} \leqslant M_{n_k}$ для всех k. Поскольку последовательности $\{M - \frac{1}{k}\}$ и $\{M_{n_k}\}$ сходятся к M, то по теореме 2.4 о зажатой последовательности $a_{n_k} \to M$.

Пусть $M = +\infty$. Тогда $\{a_n\}$ не ограничена сверху. По теореме 2.9' существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, такая что $a_{n_k} \to +\infty$.

Пусть $M = -\infty$. Так как $a_k \leqslant M_k$ для всех k, то $a_k \to -\infty$ по п. 2 теоремы 2.4'.

Итак, в каждом из трех логически возможных случаев M — частичный предел $\{a_n\}$. Доказательство для нижнего предела аналогично.

Пусть $\{a_{n_k}\}$ — подпоследовательность $\{a_n\}$, и $a_{n_k} \to a$. Так как $n_k \geqslant k$ для всех k, то $m_k \leqslant a_{n_k} \leqslant M_k$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим $m \leqslant a \leqslant M$. ■

В качестве следствия получим полезный признак существования предела.

Следствие. *Для последовательности $\{a_n\}$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ в $\overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$. В этом случае все три предела равны.*

□ Поскольку верхний и нижний пределы являются частичными пределами, то по лемме 2.2 $\underline{\lim}\, a_n = \lim a_n = \overline{\lim}\, a_n$. Обратно, поскольку верно $m_k \leqslant a_k \leqslant M_k$ для любого k и крайние последовательности стремятся к одному пределу a, то $\{a_k\}$ также стремится к a. ■

Задача. Покажите, что теорема Больцано–Вейерштрасса является следствием теоремы 2.10.

Пример. Покажем, что

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n$$

при условии, что суммы в левой и правой частях определены.

□ Установим первое неравенство.

Если $\varliminf a_n = -\infty$, то по условию $\varlimsup b_n < +\infty$, левая часть равна $-\infty$ и неравенство очевидно.

Если $\varlimsup b_n = +\infty$, то по условию $\varliminf a_n > -\infty$. Тогда $\{a_n\}$ ограничена снизу (все $a_n \geqslant L$) и существует подпоследовательность $b_{n_k} \to +\infty$. Последовательность $a_{n_k} + b_{n_k} \to +\infty$. Следовательно, $\varlimsup(a_n + b_n) = +\infty$ и неравенство верно.

Остается рассмотреть случай $\varliminf a_n, \varlimsup b_n \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $a_m + b_m \leqslant \sup_{n\geqslant k}\{a_n + b_n\}$ для всех $m \geqslant k$. Первое слагаемое заменим на $\inf_{n\geqslant k}\{a_n\}$, неравенство сохранится. Далее, переходя к супремуму по всем $m \geqslant k$, получим $\inf_{n\geqslant k}\{a_n\} + \sup_{n\geqslant k}\{b_n\} \leqslant$ $\leqslant \sup_{n\geqslant k}\{a_n + b_n\}$. Для завершения доказательства в полученном неравенстве перейдем к пределу при $k \to \infty$.

Предельным переходом в $\sup_{n\geqslant k}\{a_n + b_n\} \leqslant \sup_{n\geqslant k}\{a_n\} +$ $+ \sup_{n\geqslant k}\{b_n\}$ аналогично устанавливается второе неравенство.

Пример $a_n = 2(-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$ показывает, что оба неравенства могут быть строгими. ■

2.6. Критерий Коши

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при всех n, $m \geqslant N$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geqslant N\ \ (|a_n - a_m| < \varepsilon).$$

Лемма 2.3. *Всякая фундаментальная последовательность ограничена.*

□ Пусть последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна. Тогда существует такой номер N, что $|a_n - a_m| < 1$ при всех n, $m \geqslant N$. В частности, $a_N - 1 < a_n < a_N + 1$ для всех $n \geqslant N$. Положим $\alpha = \min\{a_N - 1, a_1, \ldots, a_{N-1}\}$ и $\beta = \max\{a_N + 1, a_1, \ldots, a_{N-1}\}$. Тогда $\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta$ для любого n. ■

Теорема 2.11 (Коши). *Последовательность в $\mathbb{R}$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

$\square$ ($\Rightarrow$) Если $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\varepsilon > 0$, то найдется такой номер N, что $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $n \geqslant N$. Значит, если $n,\ m \geqslant N$, то

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

так что $\{a_n\}$ фундаментальна.

($\Leftarrow$) Пусть $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность. По лемме 2.3 она ограничена и, значит, по теореме 2.9 Больцано–Вейерштрасса имеет сходящуюся подпоследовательность $a_{n_k} \to a$. Покажем, что $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Пусть $\varepsilon > 0$. По определению фундаментальности найдется такой номер N, что $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $n,\ m \geqslant N$. Покажем, что N искомый для ε в определении предела. Существует такой номер K, что $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $k \geqslant K$. Положим $M = \max\{N,\ K\}$, тогда $n_M \geqslant M \geqslant N$ и $n_M \geqslant M \geqslant K$. Следовательно, при любом $n \geqslant N$ имеем

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_M}| + |a_{n_M} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ — любое, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. $\blacksquare$

Замечание. Критерий Коши позволяет доказывать существование предела последовательности, не используя само значение предела. С другой стороны, он дает оценку скорости приближения к пределу: устремляя в определении фундаментальности m к ∞, получаем, что $|a_n - a| \leqslant \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$.

Пример. Пусть $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}$, $a_1 = 2$. Покажем, что последовательность $\{a_n\}$ сходится.

$\square$ Очевидно, что $a_n \geqslant 2$ при всех n. Поскольку

$$|a_{n+1} - a_n| = \left|2 + \frac{1}{a_n} - 2 - \frac{1}{a_{n-1}}\right| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{a_n a_{n-1}},$$

то $|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{4}|a_n - a_{n-1}|$ при всех $n > 1$. По индукции устанавливаем, что $|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}|a_2 - a_1|$ и, значит,

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что $\{a_n\}$ фундаментальна. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $\frac{1}{4^n} \to 0$, то найдется такой номер N, что $\frac{1}{6 \cdot 4^{n-2}} < \varepsilon$. Пусть

$n > m \geqslant N$. Тогда по неравенству треугольника

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a_{n-1}| + \ldots + |a_{m+1} - a_m| \leqslant \frac{1}{2\cdot 4^{n-2}} + \ldots + \frac{1}{2\cdot 4^{m-1}}.$$

По формуле геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2\cdot 4^{n-2}} + \ldots + \frac{1}{2\cdot 4^{m-1}} = \frac{1}{2\cdot 4^{m-1}} \frac{1 - 1/4^{n-m}}{1 - 1/4}.$$

Поэтому

$$|a_n - a_m| < \frac{1}{6\cdot 4^{m-2}} < \varepsilon.$$

По критерию Коши $a_n \to a$ для некоторого $a \geqslant 2$. Переходя в равенстве $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}$ к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $a = a + \frac{1}{a}$, откуда $a = 1 + \sqrt{2}$.

Например, чтобы добиться точности $|a_n - a| < 10^{-6}$, достаточно взять номер n из условия $\frac{1}{6\cdot 4^{n-2}} < 10^{-6}$, т.е. $n \geqslant 9$. ∎

Пример. Покажем, что $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ расходится. Для этого достаточно показать, что при некотором $\varepsilon > 0$ и любом N найдутся номера n, $m \geqslant N$, такие что $|a_n - a_m| \geqslant \varepsilon$. Положим $m = N$ и $n = 2N$. Тогда

$$|a_n - a_m| = \frac{1}{N+1} + \ldots + \frac{1}{2N} \geqslant \frac{1}{2N} + \ldots + \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\forall N\ \exists n,\ m \geqslant N\ (|a_n - a_m| \geqslant \frac{1}{2})$, т.е. $\{a_n\}$ не является фундаментальной. По критерию Коши последовательность $\{a_n\}$ расходится. Отметим, что при этом $|a_{n+1} - a_n| \to 0$.

Задача. Покажите, что из фундаментальности последовательности следует сходимость, используя следствие теоремы 2.10.

Понятие предела и фундаментальности можно ввести для последовательностей в произвольном упорядоченном поле.

Задача. Пусть $\mathbb{F}$ — упорядоченное поле, в котором выполняется аксиома Архимеда. Покажите, что поле $\mathbb{F}$ полное тогда и только тогда, когда всякая фундаментальная последовательность в нем сходится.

2.7. Конструктивное построение $\mathbb{R}$ *

Действительные числа мы ввели аксиоматически. Но существуют ли они «на самом деле»? При построении модели $\mathbb{R}$ будем следовать идее Кантора и Гейне (1872), согласно которой действительные числа — «это и есть» сами фундаментальные последовательности рациональных чисел.

Отметим, что в определениях предела и фундаментальности последовательностей можно считать, что $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$. Эквивалентность определений обеспечивается аксиомой Архимеда. Так что для последовательности из $\mathbb{Q}$ мы можем говорить о пределе (когда он лежит в $\mathbb{Q}$) и фундаментальности.

Обозначим через C множество фундаментальных последовательностей рациональных чисел. На этом множестве введем следующее отношение: $\{a_n\} \sim \{b_n\} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Отношение «$\sim$» является отношением эквивалентности. Класс эквивалентности, содержащий последовательность $\{a_n\}$, обозначим $[\{a_n\}]$, а фактормножество $C/\sim$ обозначим как $\mathbf{R}$.

Лемма 2.4. *Пусть $\{a_n\} \in C$. Тогда имеется ровно одна возможность*:

1) $a_n \to 0$;

2) $\exists r \in \mathbb{Q}_+ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \ (a_n > r)$;

3) $\exists r \in \mathbb{Q}_+ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \ (a_n < -r)$.

Кроме того, если $\{a_n\} \sim \{b_n\}$, то $\{b_n\}$ удовлетворяет тому же условию, что и $\{a_n\}$.

$\square$ Предположим, что $\{a_n\}$ не сходится к нулю. Тогда существует $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$, такое что для любого номера K найдется такой номер $m \geqslant K$, что $|a_m| \geqslant \varepsilon$. Так как последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна, то найдется такой номер N, что $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ при всех n, $m \geqslant N$. Зафиксируем такое $m \geqslant N$, что $|a_m| \geqslant \varepsilon$.

Если $a_m \geqslant \varepsilon$, то $a_n > a_m - \varepsilon/2 \geqslant \varepsilon/2$ для всех $n \geqslant N$, т.е. выполнено (2) для $r = \varepsilon/2$.

Если $a_m \leqslant -\varepsilon$, то $a_n < a_m + \varepsilon/2 \leqslant -\varepsilon/2$ для всех $n \geqslant N$, т.е. выполнено (3) для $r = -\varepsilon/2$.

Пусть $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ и последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет п. 2. По определению отношения $\sim$ найдется такой номер N', что $|b_n - a_n| < r/2$ при всех $n \geqslant N'$. Тогда $b_n \geqslant a_n - |b_n - a_n| >$

$> r/2$ при всех $n \geqslant \max\{N, N'\}$. Следовательно, последовательность $\{b_n\}$ также удовлетворяет условию 2. Остальные случаи рассматриваются аналогично. ■

Итак, все последовательности из одного класса эквивалентности либо одновременно удовлетворяют условию леммы 2.4, либо не удовлетворяют ему.

Определим на $\mathbf{R}$ операции сложения и умножения:

$$[\{a_n\}] + [\{b_n\}] = [\{a_n + b_n\}], \quad [\{a_n\}] \cdot [\{b_n\}] = [\{a_n b_n\}].$$

Лемма 2.5. *Операции «+», «·» на* $\mathbf{R}$ *определены корректно.*

□ Проверим корректность операции умножения. Покажем сначала, что последовательность $\{a_n b_n\}$ фундаментальна. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ ограничены. Поэтому $|a_n| \leqslant M$ и $|b_n| \leqslant M$ для некоторого $M \in \mathbb{Q}_+$. Зафиксируем $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$. По определению фундаментальности найдется такой номер N, что $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2M}$ и $|b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2M}$ для всех $n, m \geqslant N$. Но тогда при $n, m \geqslant N$ имеем

$$|a_n b_n - a_m b_m| = |a_n b_n - a_n b_m + a_n b_m - a_m b_m| \leqslant$$
$$\leqslant |a_n||b_n - b_m| + |b_m||a_n - a_m| < M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Теперь предположим, что $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ и $\{b_n\} \sim \{b'_n\}$. Поскольку

$$|a_n b_n - a'_n b'_n| = |a_n b_n - a'_n b_n + a'_n b_n - a'_n b'_n| \leqslant$$
$$\leqslant |b_n||a_n - a'_n| + |a'_n||b_n - b'_n|$$

и выражение в правой части стремится к нулю, то $\{a_n b_n\} \sim \{a'_n b'_n\}$.

Доказательство для сложения проводится по той же схеме. ■

Теорема 2.12. *Множество* $\mathbf{R}$ *с операциями «+», «·» является упорядоченным полем.*

□ Так как сложение/умножение рациональных чисел коммутативно, ассоциативно и умножение дистрибутивно относительно сложения то, исходя из определения, такими свойствами обладают операции «+», «·» на $\mathbf{R}$.

$\mathbf{0} = [\{0\}]$ — нейтральный элемент относительно «+».

Пусть $\mathbf{x} = [\{a_n\}]$. Если определить $-\mathbf{x} = [\{-a_n\}]$, то $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, т.е. $-\mathbf{x}$ — противоположный элемент к $\mathbf{x}$.

$\mathbf{1} = [\{1\}]$ — нейтральный элемент относительно «·».

Пусть $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Если $\mathbf{x} = [\{a_n\}]$, то по лемме 2.4 последовательность $\{a_n\}$ отделима от нуля (случай 2 или 3), т.е. $\exists r \in \mathbb{Q}_+ \ \exists N \in \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \ (|a_n| > r)$. Определим последовательность $\{b_n\}$ следующим образом: $b_n = 1$ при $n < N$ и $b_n = \frac{1}{a_n}$ при $n \geqslant N$. Тогда при $n, m \geqslant N$ имеем

$$|b_n - b_m| = \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m}\right| = \frac{|a_n - a_m|}{|a_n a_m|} \leqslant \frac{|a_n - a_m|}{r^2},$$

так что $\{b_n\}$ — фундаментальная последовательность. Положим $\mathbf{x}^{-1} = [\{b_n\}]$. Так как $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^{-1} = 1$, то $\mathbf{x}^{-1}$ — обратный элемент к $\mathbf{x}$.

Положим $\mathbf{R}_+ = \{[\{a_n\}] \colon \exists r \in \mathbb{Q}_+ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \ (a_n > r)\}$. Согласно лемме 2.4 определение $\mathbf{R}_+$ корректно, и для любого $\mathbf{x} \in \in \mathbf{R}$ верно ровно одно: $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_+$ или $-\mathbf{x} \in \mathbf{R}_+$. Кроме того, нетрудно установить, что если две последовательности удовлетворяют п. 2 леммы 2.4, то их сумма и произведение также удовлетворяют п. 2. Таким образом, $\mathbf{R}_+$ является множеством положительных элементов $\mathbf{R}$ и, значит, $\mathbf{R}$ упорядочено. ■

Замечание. Если $[\{x_n\}] < [\{y_n\}]$, то существуют такие $r \in \mathbb{Q}$ и номер N, что $x_n < r < y_n$ для всех $n \geqslant N$. Действительно, из определения порядка и п. 2 леммы 2.4 найдем такое $c \in \mathbb{Q}_+$, что $y_n - x_n > c$ при всех $n \geqslant N_1$. Из фундаментальности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ найдем такой номер N_2, что $|x_n - x_m| < \frac{c}{3}$ и $|y_n - y_m| < \frac{c}{3}$ при всех $n \geqslant N_2$. Тогда для $N = \max\{N_1, N_2\}$ и $r = \frac{x_N + y_N}{2}$ выполняется $x_n < r < y_n$ при всех $n \geqslant N$.

Отметим, что последовательность рациональных чисел $\{a_n\}$ сходится к $r \in \mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда $\{a_n\} \sim \{r\}$. Определим функцию $i \colon \mathbb{Q} \to \mathbf{R}$, $i(r) = [\{r\}]$. Тогда i инъективна и сохраняет порядок, т.е. обеспечивает вложение $\mathbb{Q}$ в $\mathbf{R}$.

Теорема 2.13. *Поле* $\mathbf{R}$ *является полным.*

□ Пусть A, B — непустые подмножества $\mathbf{R}$, причем A лежит левее B.

Выберем $a \in \mathbb{Q}$ так, что $[\{a\}]$ не является верхней гранью A. Для этого рассмотрим $[\{\alpha_n\}] \in A$. Последовательность $\{\alpha_n\}$ ограничена, поэтому найдется такое $a \in \mathbb{Q}$, что $\alpha_n \geqslant a + 1$ для всех n. Поскольку $[\{\alpha_n\}] > [\{a\}]$, то a подходит. Аналогичным образом выберем $b \in \mathbb{Q}$ так, что $[\{b\}]$ — верхняя грань множества A.

Определим последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ следующим образом. Пусть $c_1 = \frac{a+b}{2}$. Если $[\{c_1\}]$ — верхняя грань A, то положим $a_1 = a$ и $b_1 = c_1$, в противном случае положим $a_1 = c_1$ и $b_1 = b$. Пусть $c_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Если $[\{c_2\}]$ — верхняя грань A, то положим $a_2 = a_1$ и $b_2 = c_2$, иначе положим $a_2 = c_2$ и $b_2 = b_1$ и т.д. По индукции будут построены последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, такие что $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ и при фиксированном N выполнено $[\{b_N\}]$ — верхняя грань A, а $[\{a_N\}]$ не является верхней гранью A.

Покажем, что $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in C$ и $\{a_n\} \sim \{b_n\}$. Зафиксируем $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ и выберем номер K так, чтобы $2^{-K}(b-a) < \varepsilon$. Тогда при $n > m \geqslant K$ имеем $a_K \leqslant a_m \leqslant a_n < b_n \leqslant b_m \leqslant b_K$ и, значит, $|a_n - a_m|$, $|b_n - b_m|$ и $|a_n - b_n|$ не превосходят $b_K - a_K = 2^{-K}(b-a) < \varepsilon$.

Следовательно, $[\{a_n\}] = [\{b_n\}] \in \mathbf{R}$. Обозначим этот элемент через $\mathbf{s}$.

Покажем, что $\mathbf{s}$ разделяет множества A и B. Предположим, что существует $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{x} = [\{x_n\}]$, такой что $\mathbf{x} > \mathbf{s} = [\{b_n\}]$. По замечанию выше найдем $r \in \mathbb{Q}$ и номер N, такие что $x_n > r > b_n$ для всех $n \geqslant N$. Поскольку $x_n > r > b_N$ при $n \geqslant N$, то $[\{x_n\}] \geqslant [\{r\}] > [\{b_N\}]$ (второе неравенство строгое, т.к. $\{r\}$ и $\{b_N\}$ — различные постоянные последовательности в $\mathbb{Q}$). Следовательно, $\mathbf{x} > \mathbf{u} = [\{b_N\}]$, но это противоречит выбору $[\{b_N\}]$.

Если предположить, что существует $\mathbf{y} \in B$, $\mathbf{y} = [\{y_n\}]$, такой что $\mathbf{y} < \mathbf{s} = [\{a_n\}]$, то аналогичными рассуждениями можно найти такой номер N, что $\mathbf{y} < \mathbf{v} = [\{a_N\}]$. Тогда, учитывая, что множество A лежит левее B, имеем $\mathbf{x} < \mathbf{v} = [\{a_N\}]$ для всех $x \in A$, но это противоречит выбору $[\{a_N\}]$.

Итак, $\mathbf{x} \leqslant \mathbf{s} \leqslant \mathbf{y}$ для всех $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{y} \in B$, т.е. $\mathbf{s}$ разделяет A и B. ■

Вывод: $\mathbf{R}$ — модель поля действительных чисел $\mathbb{R}$.

Используя целую часть, каждое действительное число можно записать в виде $n + x$, где n — целое, а $x \in (0,\, 1]$. Представим x в виде «бесконечной десятичной дроби».

Пусть задана последовательность $\{a_j\}$, где a_j — целое число от 0 до 9 (цифра). Будем выражение $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ называть *представлением* числа x, если

$$x = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}\right) =: \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Поскольку при $n > m$ выполнено

$$A_n - A_m = \frac{a_{m+1}}{10^{m+1}} + \frac{a_{m+2}}{10^{m+2}} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \leqslant \frac{9}{10^{m+1}} \frac{1-\frac{1}{10^{n-m}}}{1-\frac{1}{10}} < \frac{1}{10^m},$$

последовательность $\{A_n\}$ фундаментальна, а значит, сходится. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $0 \leqslant x - A_m \leqslant \frac{1}{10^m}$, т.е. $A_n \leqslant x \leqslant A_n + \frac{1}{10^n}$ для всех n.

Теорема 2.14. *Для каждого числа $x \in (0, 1]$ существует представление. Существует единственное представление, такое что $A_n < x \leqslant A_n + \frac{1}{10^n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

$\square$ Положим $A_0 = 0$, тогда $A_0 < x \leqslant A_0 + \frac{1}{10^0}$ $(10^0 = 1)$. Предположим, что уже определены цифры a_1, a_2, …, a_n, причем $A_k < x \leqslant A_k + \frac{1}{10^k}$ при $k = 0, 1, \ldots, n$. Определим цифру a_{n+1}. По аксиоме Архимеда найдем натуральное j, такое что $x - A_n \leqslant \leqslant \frac{j}{10^{n+1}}$. Считая j наименьшим из таких чисел, имеем

$$\frac{j-1}{10^{n+1}} < x - A_n \leqslant \frac{j}{10^{n+1}}.$$

Положим $a_{n+1} = j - 1$. Очевидно, $a_{n+1} \geqslant 0$. С другой стороны, поскольку $x - A_n \leqslant \frac{1}{10^n}$, то $j \leqslant 10$ и, значит, $a_{n+1} \leqslant 9$, т.е. a_{n+1} — цифра. Так как $A_{n+1} = A_n + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}$, то

$$A_{n+1} < x \leqslant A_n + \frac{j}{10^{n+1}} = A_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}}.$$

Таким образом, по индукции определена последовательность цифр $\{a_n\}$. Так как $\frac{1}{10^n} \to 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = x$. Единственность следует из того, что выбор j, а значит, и a_{n+1}, однозначен. $\blacksquare$

Замечание. Если представление x неединственное, то $A_n = = x$ для некоторого n, т.е. $0,a_1a_2a_3\ldots a_n00\ldots$ и $a_n > 0$. Пусть $0,b_1b_2b_3\ldots$ — представление x из теоремы. Тогда $B_k < A_n \leqslant B_k + + \frac{1}{10^k}$ при всех k. Откуда $0,b_1b_2b_3\ldots = 0,a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}(a_n - - 1)99\ldots$

Задача. Пусть $x \in (0,\, 1] \cap \mathbb{Q}$ и $x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$ Покажите, что существуют такие $N,\, p \in \mathbb{N}$, что $a_{n+p} = a_n$ при всех $n \geqslant N$.

2.8. Счетные множества

Определение. Множество A называется *счетным*, если существует биекция $f\colon \mathbb{N} \to A$.

Другими словами, множество счетно, если его элементы можно занумеровать натуральными числами так, что каждый элемент будет занумерован ровно один раз и все натуральные числа израсходованы.

Пример. Множество $\mathbb{Z}$ счетно. Биекцию $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ можно задать правилом

$$h(n) = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно;} \\ -\dfrac{n}{2}, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Лемма 2.6. *Всякое подмножество $\mathbb{N}$ конечно или счетно.*

$\square$ Допустим, $A \subset \mathbb{N}$ бесконечно. Положим $n_1 = \min A$, и если числа $n_1,\, \ldots,\, n_k$ определены, то положим $n_{k+1} = \min A \setminus \{n_1,\, \ldots,\, n_k\}$. Поскольку при переходе к подмножеству минимум не уменьшается и число n_k не лежит во множестве $A \setminus \{n_1,\, \ldots,\, n_k\}$, то $n_k < n_{k+1}$. По индукции будет определена строго возрастающая последовательность номеров $\{n_k\}$.

Если предположить, что некоторое $m \in A$ не встречается среди чисел n_k, то по индукции устанавливаем, что $n_k < m$ при всех k. Но тогда $m > n_m \geqslant m$, противоречие.

Таким образом, функция $\sigma\colon \mathbb{N} \to A$, $\sigma(k) = n_k$, является строго возрастающей биекцией. $\blacksquare$

Конечные или счетные множества называются *не более чем счетными*.

Следствие. *Всякое подмножество счетного множества не более чем счетно.*

$\square$ Пусть множество X счетно и функция $g\colon X \to \mathbb{N}$ биекция. Если $A \subset X$ непусто, то сужение $g|_A$ устанавливает биекцию между множествами A и $g(A) \subset \mathbb{N}$. По лемме 2.6 множество $g(A)$, а значит, и A, не более чем счетно. Пустое множество является конечным множеством, а значит, оно не более чем счетно. $\blacksquare$

Задача. Покажите, что если существует сюръекция $\mathbb{N}$ на множество A, то A не более чем счетно.

Теорема 2.15. *Множество* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *счетно.*

$\square$ Определим $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(k,\,m)=g(k+m-1)+m$, где $g(p)=\dfrac{p(p-1)}{2}$. Функция f при каждом $p=1,\,2,\,\ldots$ биективно отображает множество

$$M_p=\{(k,\,m)\colon\ 1\leqslant k\leqslant p,\ \ m=p+1-k\}$$

элементов $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, стоящих на p-й диагонали, на отрезок натуральных чисел

$$N_p=\{n\colon\ g(p)+1\leqslant n\leqslant g(p)+p=g(p+1)\}.$$

Поскольку отрезки N_p попарно не пересекаются и в объединении дают $\mathbb{N}$, то f — биекция между $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$. $\blacksquare$

Следствие. *Множество* $\mathbb{Q}$ *счетно.*

$\square$ Любое рациональное число r можно однозначно записать в виде несократимой дроби p/q. Это означает, что функция $f_1\colon\mathbb{Q}\to\to\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, $f_1(r)=(p,\,q)$, — инъекция.

Функция $p\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$, где $p(n)=2n+1$ при $n\geqslant 0$ и $p(n)=-2n$ при $n<0$, — биекция (как обратная к биекции h из примера). Поэтому $f_2\colon\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $f_2(n,\,k)=(p(n),\,k)$, также является биекцией.

Пусть $f_3=f$ — биекция $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$ из теоремы 2.15. Тогда композиция $F=f_3\circ f_2\circ f_1\colon\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$ является инъекцией. По лемме 2.6 множество $F(\mathbb{Q})$, а значит, и $\mathbb{Q}$, не более чем счетно. Множество $\mathbb{Q}$ бесконечно, поэтому оно счетно. $\blacksquare$

Теорема 2.16. *Множество* $\mathbb{R}$ *несчетно.*

$\square$ Предположим противное, тогда $\mathbb{R}=\{x_n\colon n\in\mathbb{N}\}$. Рассмотрим невырожденный отрезок $[a,\,b]$. Разделим его на три равных отрезка и обозначим через $[a_1,\,b_1]$ тот из них, который не содержит x_1 (для определенности всегда выбираем самый левый отрезок). Разделим $[a_1,\,b_1]$ на три равных отрезка и обозначим через $[a_2,b_2]$ тот из них, который не содержит x_2, и т.д. По индукции будет построена последовательность вложенных отрезков $\{[a_n,b_n]\}$, таких что $x_n\notin[a_n,\,b_n]$ для каждого n.

По теореме 2.7 Кантора о вложенных отрезках существует точка $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n,\, b_n]$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ точка x лежит в отрезке $[a_n,\, b_n]$, а точка x_n не лежит в $[a_n,\, b_n]$. Значит, $x \neq x_n$, что приводит к противоречию. $\blacksquare$

3. Топология действительных чисел

В этом разделе определяется топология $\mathbb{R}$ — набор открытых множеств на прямой. Открытые множества теснейшим образом связаны с понятием предела.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $a \in \mathbb{R}$. Введем следующие обозначения:

$B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon,\, a + \varepsilon)$ — ε-окрестность точки a;

$\mathring{B}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon,\, a) \cup (a,\, a + \varepsilon)$ — проколотая ε-окрестность точки a, т.е. $\mathring{B}_\varepsilon(a) = B_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$

Классифицируем точки по отношению к заданному множеству.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$.

1) Точка x называется *внутренней точкой* множества E, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(x) \subset E$. Множество всех внутренних точек E называется *внутренностью* E и обозначается как $\operatorname{int} E$.

2) Точка x называется *внешней точкой* множества E, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus E$. Множество всех внешних точек E называется *внешностью* E и обозначается как $\operatorname{ext} E$.

3) Точка x называется *граничной точкой* множества E, если для любого $\varepsilon > 0$ верно $B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$ и $B_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \setminus E) \neq \varnothing$. Множество всех граничных точек E называется *границей* E и обозначается как ∂E.

Замечание. Непосредственно из определения следует, что $\mathbb{R} = \operatorname{int} E \cup \operatorname{ext} E \cup \partial E$ и множества $\operatorname{int} E$, $\operatorname{ext} E$ и ∂E попарно не пересекаются, т.е. всякая точка x является либо внутренней, либо внешней, либо граничной точкой E. Также очевидно, что $\operatorname{ext} E = \operatorname{int}(\mathbb{R} \setminus E)$ и $\partial(\mathbb{R} \setminus E) = \partial E$.

Пример. Пусть $E = [0,\, 1)$. Тогда $\operatorname{int} E = (0,\, 1)$, поскольку для $x \in (0,\, 1)$ и $\varepsilon = \min\{x,\, 1 - x\}$ выполнено $\varepsilon > 0$ и $B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon,\, x + \varepsilon) \subset E$ (ведь $\varepsilon \leqslant x \Rightarrow x - \varepsilon \geqslant 0$ и $\varepsilon \leqslant 1 - x \Rightarrow x + \varepsilon \leqslant 1$). Также $\partial E = \{0,\, 1\}$ и $\operatorname{ext} E = (-\infty,\, 0) \cup (1,\, +\infty)$.

Задача. Пусть A, $B \subset \mathbb{R}$. Докажите, что

а) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$,

б) $\operatorname{int}(A \cup B) \supset \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$,

в) $\partial(\partial A) \subset \partial A$.

Определение. Множество $G \subset \mathbb{R}$ называется *открытым*, если все его точки являются внутренними (т.е. $G = \operatorname{int} G$). Множество $F \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если $\mathbb{R} \setminus F$ открыто.

Примеры. Интервал (a, b) — открытое множество, отрезок $[a, b]$ — замкнутое множество.

Лемма 3.1. *Объединение любого семейства открытых множеств открыто, пересечение конечного семейства открытых множеств открыто, множества $\mathbb{R}$, $\varnothing$ открыты.*

$\square$ Пусть $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство открытых множеств, $G = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$, и пусть $x \in G$. По определению объединения найдется такое $\lambda_0 \in \in \Lambda$, что $x \in G_{\lambda_0}$. Множество G_{λ_0} открыто, поэтому существует $B_\varepsilon(x) \subset G_{\lambda_0}$. Но тогда тем более $B_\varepsilon(x) \subset G$, т.е. x — внутренняя точка G.

Пусть $\{G_k\}_{k=1}^m$ — конечное семейство открытых множеств, $G = \bigcap\limits_{k=1}^m G_k$, и пусть $x \in G$. По определению пересечения x принадлежит каждому G_k. Множества G_k открыты, поэтому существует $B_{\varepsilon_k}(x) \subset G_k$, $k = 1, \ldots, m$. Положим $\varepsilon = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant m} \varepsilon_k$. Тогда $\varepsilon > 0$ и $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_k}(x) \subset G_k$ для $k = 1, \ldots, m$. Следовательно, $B_\varepsilon(x) \subset G$, т.е. x — внутренняя точка G.

Открытость множеств $\mathbb{R}$ и $\varnothing$ вытекает непосредственно из определения. $\blacksquare$

Лемма 3.1$'$. *Объединение конечного семейства замкнутых множеств замкнуто, пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто, множества $\varnothing$ и $\mathbb{R}$ замкнуты.*

$\square$ Так как $\mathbb{R}\setminus\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\right) = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (\mathbb{R}\setminus F_\lambda)$, $\mathbb{R}\setminus\left(\bigcup\limits_{k=1}^m F_k\right) = \bigcap\limits_{k=1}^m (\mathbb{R}\setminus F_k)$, то утверждение вытекает из леммы 3.1 и теоремы 1.1 де Моргана. $\blacksquare$

Проверка замкнутости множества «по определению» не всегда удобна на практике. Получим эквивалентные условия замкнутости.

Определение. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества E, если для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $\mathring{B}_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$.

Следующее утверждение поясняет прилагательное «предельный» в названии.

Лемма 3.2. *Точка x является предельной для E тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_n\}$ точек из E, такая что $x_n \to x$ и все $x_n \neq x$.*

$\square$ Пусть x — предельная точка множества E. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $\mathring{B}_{1/n}(x) \cap E$ непусто. Выберем точку $x_n \in \in \mathring{B}_{1/n}(x) \cap E$. Так как $|x_n - x| < \frac{1}{n}$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится к x.

Обратно, пусть последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет перечисленным в условии свойствам. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, такой что $|x_n - x| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$. Значит, $\mathring{B}_\varepsilon(x) \cap E$ непусто (содержит, например, $x_N \neq a$) и точка x предельная для E. $\blacksquare$

Теорема 3.1 (критерии замкнутости). *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *множество E замкнуто*;
2) *множество E содержит все свои граничные точки*;
3) *множество E содержит все свои предельные точки*;
4) *для всякой сходящейся последовательности точек из E ее предел лежит в E.*

$\square$ $(1 \Rightarrow 2)$ Пусть $x \in \mathbb{R} \setminus E$. Так как множество $\mathbb{R} \setminus E$ открыто, то существует $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus E$, т.е. x — внешняя точка E. Следовательно, x не является граничной и, значит, $\partial E \subset E$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Любая предельная точка является граничной или внутренней. По определению все внутренние точки E принадлежат E. Поэтому если E содержит все свои граничные точки, то E содержит и все свои предельные точки.

$(3 \Rightarrow 4)$ Пусть $x_n \in E$ и $x_n \to x$. Если $x \notin E$, то x является предельной для E, что противоречит п. 3.

$(4 \Rightarrow 1)$ Пусть $x \in \mathbb{R} \setminus E$. Предположим, x не является внутренней точкой множества $\mathbb{R} \setminus E$, т.е. $B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$ для любого $\varepsilon > 0$. Для каждого n выберем $x_n \in B_{1/n}(x) \cap E$. Тогда все $x_n \in E$ и $x_n \to x$, что противоречит п. 4. Итак, все точки $\mathbb{R} \setminus E$ внутренние, т.е. множество $\mathbb{R} \setminus E$ открыто. $\blacksquare$

Отметим, что п. 4 на практике дает наиболее удобный способ проверки замкнутости.

Пример. Пусть L — множество частичных пределов числовой последовательности $\{a_n\}$. Покажем, что L замкнуто.

$\square$ Пусть $x_n \to x$ и все $x_n \in L$. Поскольку x_k — частичный предел $\{a_n\}$, то существует такая строго возрастающая последовательность номеров $\{n_k\}$, что $|x_k - a_{n_k}| < 1/k$. Из оценки $|a_{n_k} - x| \leqslant 1/k + |x_k - x|$ вытекает, что подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ сходится к x, т.е. $x \in L$. По п. 4 теоремы 3.1 множество L замкнуто. $\blacksquare$

Определение. Множество $\overline{E} = E \cup \partial E$ называется *замыканием* множества E.

Лемма 3.3. *Множество $\overline{E}$ замкнуто. Более того, множество $\overline{E}$ совпадает с объединением множества E и всех его предельных точек.*

$\square$ Пусть $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{E}$. Точка x является внешней для E. Поэтому существует $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus E$. Окрестность $B_\varepsilon(x)$ не содержит граничных точек множества E (в противном случае пересечение $B_\varepsilon(x)$ с E было бы непусто). Следовательно, $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus \overline{E}$, а значит, множество $\mathbb{R} \setminus \overline{E}$ открыто.

Второе утверждение вытекает из двух очевидных наблюдений. Любая предельная точка является граничной или внутренней. Граничная точка, не лежащая во множестве, является предельной. $\blacksquare$

Следствие. *Точка $a \in \overline{E}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_n\}$ точек из E, сходящаяся к a.*

$\square$ Пусть $a \in \overline{E}$. Если точка a является предельной для E, то последовательность $\{x_n\}$ существует по лемме 3.2; иначе точка a сама лежит в E и можно взять постоянную последовательность. Обратно, пусть $x_n \to a$, где все $x_n \in E$. Если $a = x_n$ для некоторого n, то $a \in E$; иначе по лемме 3.2 a — предельная точка E. В любом случае $a \in \overline{E}$. $\blacksquare$

Задача. Докажите, что $\overline{E} = \cap\{F\colon F \text{ замкнуто и } F \supset E\}$.

Определение. Семейство $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ называется *покрытием* множества E, если $E \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$. Если все множества G_λ открыты, то покрытие называется *открытым*.

Пример. Так как $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(1/n,\,1)=(0,\,1)$, то $\{(1/n,\,1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ — открытое покрытие $(0,\,1)$.

Заметим, что в рассмотренном примере никакое конечное множество интервалов $(1/n,\,1)$ уже не образует покрытие $(0,\,1)$. Такая ситуация невозможна для отрезка.

Теорема 3.2 (Гейне–Борель). *Если* $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *— открытое покрытие* $[a,\,b]$*, то существуют* $n\in\mathbb{N}$ *и* $\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_n\in\Lambda$*, такие что* $[a,\,b]\subset G_{\lambda_1}\cup\ldots\cup G_{\lambda_n}$.

□ Предположим, что из открытого покрытия $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ отрезка $[a,\,b]$ нельзя выбрать конечного подпокрытия. Разделим $[a,\,b]$ пополам, и через $[a_1,\,b_1]$ обозначим ту половину, которая не покрывается конечным набором множеств G_λ. Полученный отрезок разделим пополам, и через $[a_2,\,b_2]$ обозначим ту половину, которая не покрывается конечным набором G_λ и т.д. По индукции будет построена стягивающаяся последовательность отрезков $\{[a_n,\,b_n]\}$, каждый из которых не покрывается конечным набором множеств G_λ.

По теореме 2.7 Кантора о вложенных отрезках существует точка $c\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,\,b_n]$. Так как $[a,\,b]\subset\bigcup G_\lambda$, то $c\in G_{\lambda_0}$ для некоторого $\lambda_0\in\Lambda$. Множество G_{λ_0} открыто, поэтому существует $B_\varepsilon(c)\subset G_{\lambda_0}$. Выберем такой номер k, что $b_k-a_k=\dfrac{b-a}{2^k}<\varepsilon$. Тогда $c-a_k<\varepsilon$ и $b_k-c<\varepsilon$. Значит, $[a_k,\,b_k]\subset B_\varepsilon(c)\subset G_{\lambda_0}$, что противоречит условию выбора $[a_k,\,b_k]$. Наше предположение о невозможности выбрать конечное подпокрытие неверно. ■

Следствие. *Если* F *— замкнутое ограниченное множество и* $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *— открытое покрытие* F*, то существуют* $n\in\mathbb{N}$ *и* $\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_n\in\Lambda$*, такие что* $F\subset G_{\lambda_1}\cup\ldots\cup G_{\lambda_n}$.

□ Так как F ограничено, то оно содержится в некотором отрезке $[a,\,b]$. Тогда $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\cup\{\mathbb{R}\setminus F\}$ образует открытое покрытие $[a,\,b]$ (т.к. $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda\cup(\mathbb{R}\setminus F)=\mathbb{R}$). По предыдущей теореме $[a,\,b]\subset$ $\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}G_{\lambda_k}\cup(\mathbb{R}\setminus F)$ для некоторых $\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_n\in\Lambda$. Следовательно, $F\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}G_{\lambda_k}$. ■

Введем обозначения

$B_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon},\ +\infty\right) \cup \{+\infty\}$ — ε-окрестность $+\infty$;

$\mathring{B}_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon},\ +\infty\right)$ — проколотая ε-окрестность $+\infty$;

$B_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty,\ -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \{-\infty\}$ — ε-окрестность $-\infty$;

$\mathring{B}_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty,\ -\frac{1}{\varepsilon}\right)$ — проколотая ε-окрестность $-\infty$.

Поскольку все понятия этого параграфа вводились через окрестности, то определения без изменений переносятся на случай множества $E \subset \overline{\mathbb{R}}$. В частности, $+\infty$ $(-\infty)$ является предельной точкой $E \subset \overline{\mathbb{R}} \Longleftrightarrow$ множество $E \setminus \{\pm\infty\}$ не ограничено сверху (соответственно снизу) в $\mathbb{R}$.

В терминах окрестностей можно дать общее определение предела числовой последовательности.

Определение. Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *пределом* числовой последовательности $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ (a_n \in B_\varepsilon(a)).$$

4. Непрерывные функции

В этом разделе концепция предела развивается для числовых функций. При помощи предела вводится понятие непрерывности, играющее ключевую роль в математическом анализе.

4.1. Предел функции в точке

Пусть $E \subset \mathbb{R}$, a, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ и задана функция $f\colon E \to \mathbb{R}$.

Определение 4.1 (Коши). Точка b называется *пределом* функции f в точке a, если a — предельная точка множества E, и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ \big(x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)\big).$$

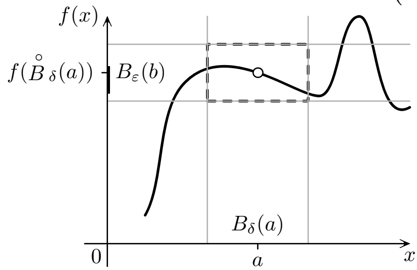

Рис. 4.1

Пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Последняя импликация означает, что

$$f(\overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E) \subset B_\varepsilon(b).$$

Это проясняет геометрический смысл определения предела (см. рис. 4.1).

В одном важном случае перепишем определение предела на языке неравенств.

Определение. Число $b \in \mathbb{R}$ называется *пределом* функции f в точке $a \in \mathbb{R}$, если a — предельная точка множества E, и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Пример. Пусть $f\colon \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x^2 - 12}{x - 2}$. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 12$.

Очевидно, что $a = 2$ — предельная точка $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{3}]$. Тогда если x удовлетворяет условию $0 < |x - 2| < \delta$, то $|f(x) - 12| = |3(x + 2) - 12| = 3|x - 2| < \varepsilon$.

Замечание. Если в определении предела функции положить $E = \mathbb{N}$ и $a = +\infty$, то приходим к определению предела последовательности: по $\varepsilon > 0$ достаточно взять $N = [\frac{1}{\delta}] + 1$. Еще более тесная связь устанавливается следующим определением.

Определение 4.2 (Гейне). Точка b называется *пределом* функции f в точке a, если a — предельная точка множества E, и

$$\forall \{x_n\},\ \ x_n \in E \setminus \{a\}\ (x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b).$$

Пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Замечание. Как было установлено ранее, если a — предельная точка E, то $\mathring{B}_\delta(a) \cap E \neq \varnothing$ для любого $\delta > 0$, и существует последовательность $\{x_n\}$ со свойствами $x_n \in E \setminus \{a\}$, $x_n \to a$.

Теорема 4.1. *Определения предела по Коши и по Гейне равносильны.*

☐ Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ и a — предельная точка E.

($\Rightarrow$) Пусть $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ по Коши. Рассмотрим произвольную последовательность точек $x_n \in E$ со свойствами $x_n \to a$ и $x_n \neq a$. Покажем, что $f(x_n) \to b$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела существует такое $\delta > 0$, что $f(x) \in B_\varepsilon(b)$ для всех $x \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E$. Так как $x_n \to a$, то найдется такой номер N, что $x_n \in B_\delta(a)$ для всех $n \geqslant N$. Все $x_n \in E \setminus \{a\}$, поэтому $x_n \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E$ при всех $n \geqslant N$ и, значит, $f(x_n) \in B_\varepsilon(b)$ при всех $n \geqslant N$. Следовательно, $f(x_n) \to b$. Определение Гейне выполняется.

($\Leftarrow$) Пусть $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ по Гейне. Если b не удовлетворяет определению предела функции f по Коши, то

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in E\ \big(x \in \mathring{B}_\delta(a) \text{ и } f(x) \notin B_\varepsilon(b)\big).$$

Положим $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, и соответствующее значение x обозначим через x_n. Так как $x_n \in \mathring{B}_{1/n}(a) \cap E$, то $x_n \to a$ и $x_n \neq a$. По определению Гейне $f(x_n) \to b$. Поэтому найдется такой номер N, что $f(x_n) \in B_\varepsilon(b)$ для всех $n \geqslant N$. Однако по построению все $f(x_n)$ не лежат в $B_\varepsilon(b)$, что приводит к противоречию. ■

Замечание. Определение Гейне можно ослабить, считая последовательности $\{x_n\}$ строго монотонными. Покажем, что такой вариант влечет определение Коши. Проведем рассуждения для $a \in \mathbb{R}$. Полагая в ($\Leftarrow$) $\delta = \min\{\frac{1}{n}, |x_{n-1} - a|\}$ ($n \geqslant 2$), получим, что $|x_n - a| \to 0$ строго убывая. Справа или слева от a находится бесконечно много членов x_n, они и образуют искомую монотонную последовательность.

Равносильность определений предела позволяет выбирать наиболее удобный способ доказательства свойств предела функций: либо утверждение при помощи определения Гейне сводится к уже доказанному свойству предела последовательности, либо с использованием определения Коши проводятся рассуждения, аналогичные теоремам для последовательностей.

4.2. Свойства предела функции

Пусть f, g и $h\colon E \to \mathbb{R}$ и a — предельная точка множества E.

Свойство 1 (единственность предела). Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$, то $b = c$.

$\square$ Рассмотрим произвольную последовательность точек $x_n \in E$ со свойствами $x_n \to a$ и $x_n \neq a$. Тогда по определению Гейне $f(x_n) \to b$ и $f(x_n) \to c$. В силу единственности предела последовательности $b = c$. $\blacksquare$

Свойство 2 (предел по подмножеству). Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и a — предельная точка $D \subset E$, то существует предел сужения $\lim\limits_{x\to a} (f|_D)(x) = b$.

$\square$ Рассмотрим произвольную последовательность точек $x_n \in D$ со свойствами $x_n \to a$ и $x_n \neq a$. Тогда $(f|_D)(x_n) = f(x_n) \to b$. По определению Гейне $b = \lim\limits_{x\to a} (f|_D)(x)$. $\blacksquare$

Свойство 3 (предел зажатой функции). Если существует $\sigma > 0$, такое что $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in \mathring{B}_\sigma(a) \cap E$, и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, то $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$.

$\square$ Рассмотрим произвольную последовательность точек $x_n \in E$ со свойствами $x_n \to a$ и $x_n \neq a$. Тогда существует такой номер n_0, что $x_n \in \mathring{B}_\sigma(a) \cap E$ при всех $n \geqslant n_0$ и, значит, $f(x_n) \leqslant h(x_n) \leqslant$ $\leqslant g(x_n)$ при всех $n \geqslant n_0$. Так как $f(x_n) \to b$ и $g(x_n) \to b$, то по свойствам предела последовательности $h(x_n) \to b$. По определению Гейне $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$. $\blacksquare$

Если зажимать одной и той же функцией, то получаем

Свойство 4 (локализация). Если функции f, $g\colon E \to \mathbb{R}$ совпадают на множестве $\mathring{B}_\sigma(a) \cap E$ для некоторого $\sigma > 0$ и существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то существует $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

Аналогично свойству 3 доказывается предельный переход в неравенстве: если существует такое $\sigma > 0$, что $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in \mathring{B}_\sigma(a) \cap E$, и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, то $b \leqslant c$.

Свойство 5 (арифметические операции с пределами). Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$. Тогда

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$, 2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = bc$,

3) если $c \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ для всех $x \in E$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$.

Заключение надо понимать так: если величина справа существует в $\overline{\mathbb{R}}$, то существует величина слева и равенство выполняется.

$\square$ Рассмотрим произвольную последовательность $x_n \in E$ с условиями $x_n \to a$ и $x_n \neq a$. Тогда $f(x_n) \to b$ и $g(x_n) \to c$. По свойствам предела последовательности $f(x_n) \pm g(x_n) \to b \pm c$, $f(x_n)g(x_n) \to bc$, $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \dfrac{b}{c}$. Осталось воспользоваться определением предела по Гейне. $\blacksquare$

Следующие утверждения естественнее доказываются по определению Коши.

Свойство 6 (локальная ограниченность). Если существует конечный $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то найдутся $\delta > 0$ и $C > 0$, такие что $|f(x)| \leqslant C$ для всех $x \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E$.

$\square$ Пусть $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, тогда существует такое $\delta > 0$, что $b - 1 < f(x) < b + 1$ для всех $x \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E$. Положим $C = |b| + 1$. Тогда $|f(x)| \leqslant C$ для всех $x \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E$. $\blacksquare$

Свойство 7 (предел композиции). Пусть $E, D \subset \mathbb{R}$, и функции $f\colon E \to D$, $g\colon D \to \mathbb{R}$ такие что

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{и} \quad \lim_{y\to b} g(y) = c.$$

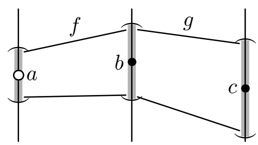

Рис. 4.2

Пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) $f(x) \neq b$ в некоторой проколотой окрестности a,

2) $g(b) = c$.

Тогда

$$\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = c = \lim_{y\to b} g(y).$$

$\square$ Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию найдутся такие σ, $\delta > 0$, что $g(y) \in B_\varepsilon(c)$ для всех $y \in \mathring{B}_\sigma(b) \cap D$ и $f(x) \in B_\sigma(b)$ для всех $x \in$ $\in \mathring{B}_\delta(a) \cap E$.

1) Уменьшая δ, если необходимо, можно считать, что $f(x) \neq$ $\neq b$ для всех $x \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E$. Тогда $f(x) \in \mathring{B}_\sigma(b) \cap D$ и, значит, $g(f(x)) \in B_\varepsilon(c)$. Это доказывает, что $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$.

2) Если имеется точка $x \in B_\delta(a)$, такая что $f(x) = b$, то в силу условия $c = g(b)$ в такой точке выполнено $g(f(x)) = c \in B_\varepsilon(c)$. Следовательно, $g(f(x)) \in B_\varepsilon(c)$ для любой точки $x \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E$. По определению предела $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$. $\blacksquare$

Следующий пример показывает, что выполнение одного из условий (1) или (2) существенно для предела композиции.

Пример. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ и $g = f$. Тогда $\lim\limits_{x \to 0} (g \circ f)(x) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{y \to 0} g(y)$.

4.3. Критерий Коши существования предела функции

Теорема 4.2. *Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$, a — предельная точка множества E. Функция f имеет конечный предел в точке a тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x,\ x' \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E \ \bigl(|f(x) - f(x')| < \varepsilon\bigr). \tag{4.1}$$

$\square$ ($\Rightarrow$) Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела функции существует такое $\delta > 0$, что $|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $x \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E$. Тогда при любых x, $x' \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E$ имеем

$$|f(x) - f(x')| \leqslant |f(x) - b| + |f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что условие (4.1) выполнено.

($\Leftarrow$) Пусть f удовлетворяет условию (4.1). Рассмотрим произвольную последовательность точек $x_n \in E$ со свойствами $x_n \to a$ и $x_n \neq a$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем соответствующее $\delta > 0$ из условия (4.1). Тогда найдется такой номер N, что $x_n \in \mathring{B}_\delta(a) \cap$ $\cap E$ для всех $n \geqslant N$ и, значит, $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ при всех n, $m \geqslant N$. Таким образом, последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальна. По критерию Коши для последовательностей $\{f(x_n)\}$

сходится к некоторому числу b. Рассмотрим еще последовательность точек $y_n \in E$, $y_n \to a$ и $y_n \neq a$. Тогда x_n, $y_n \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E$ при всех $n \geqslant n_0$, так что по условию (4.1) $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant n_0$. Это означает, что $f(x_n) - f(y_n) \to 0$, откуда имеем $f(y_n) \to b$. По определению Гейне $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. ■

Задача. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists b \in \mathbb{R} \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \;\; (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$. Верно ли, что существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$?

4.4. Односторонние пределы функции

Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ и задана функция $f\colon E \to \mathbb{R}$.

Определение. Если a — предельная точка $(a, +\infty) \cap E$, то предел сужения $f|_{(a,\,+\infty)\cap E}$ в точке a называется *пределом справа* функции f в точке a и обозначается $f(a+0)$, или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

Если a — предельная точка $(-\infty, a) \cap E$, то предел сужения $f|_{(-\infty,\,a)\cap E}$ в точке a называется *пределом слева* функции f в точке a и обозначается $f(a-0)$, или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$.

Пределы функции слева и справа называются *односторонними*.

Лемма 4.1. *Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$, a — предельная точка множеств $(-\infty, a) \cap E$ и $(a, +\infty) \cap E$. Предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существует (в $\overline{\mathbb{R}}$) тогда и только тогда, когда $f(a-0) = f(a+0)$. В этом случае все три предела равны.*

□ Равенства $f(a-0) = f(a+0) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ вытекают из свойства предела по подмножеству.

Обратно, пусть $f(a-0) = b = f(a+0)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Существуют такие δ_1, $\delta_2 > 0$, что $f(x) \in B_\varepsilon(b)$ для всех $x \in (a - \delta_1, a) \cap E$ и $f(x) \in B_\varepsilon(b)$ для всех $x \in (a, a + \delta_2) \cap E$. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда $f(x) \in B_\varepsilon(b)$ для всех $x \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E$. Это означает, что $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. ■

Определение. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ и $D \subset E$.

Функция f называется *нестрого возрастающей* (*нестрого убывающей*) на D, если для любых x, $x' \in D$ из условия $x < x'$ следует $f(x) \leqslant f(x')$ $(f(x) \geqslant f(x'))$.

Если вместо $\leqslant$ ($\geqslant$) написать $<$ ($>$), то функцию называют *строго возрастающей* (*строго убывающей*).

Нестрого возрастающие и нестрого убывающие функции называются *монотонными.*

Теорема 4.3 (о пределах монотонной функции). *Пусть a, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. Если функция f нестрого возрастает на (a, b), то существуют $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \sup\limits_{x \in (a,\, b)} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \inf\limits_{x \in (a,\, b)} f(x)$.*

В случае нестрого убывания sup *и* inf *меняются местами.*

(Под символом $+\infty - 0$ понимается $+\infty$, под символом $-\infty + 0$ понимается $-\infty$.)

$\square$ Предположим, что f нестрого возрастает на (a, b). Пусть $s = \sup_{(a,\, b)} f(x)$. По определению супремума для любого $r < s$ существует такое $x_r \in (a, b)$, что $r < f(x_r)$. Тогда в силу возрастания $r < f(x) \leqslant s$ для всех $x \in (x_r, b)$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Положим $r = s - \varepsilon$, если $s \in \mathbb{R}$, и $r = \frac{1}{\varepsilon}$, если $s = +\infty$. Тогда $f(x) \in B_\varepsilon(s)$ для всех $x \in (x_r, b)$.[4]

Для завершения доказательства осталось показать, что существует такое $\delta > 0$, что (x_r, b) включает интервал $(b - \delta, b)$ в случае $b \in \mathbb{R}$, и луч $\left(\frac{1}{\delta}, +\infty\right)$ в случае $b = +\infty$. В первом случае подходит $\delta = b - x_r$, во втором подходит $\delta = \dfrac{1}{|x_r| + 1}$.

Остальные равенства рассматриваются аналогично. $\blacksquare$

Следствие. *Пусть функция f монотонна на (a, b) и $c \in (a, b)$. Тогда существуют конечные пределы $f(c-0)$ и $f(c+0)$, причем $f(c-0) \leqslant f(c) \leqslant f(c+0)$, если f нестрого возрастает на (a, b), и $f(c-0) \geqslant f(c) \geqslant f(c+0)$, если f нестрого убывает.*

$\square$ Если f нестрого возрастает на (a, b), то $f(x) \leqslant f(c)$ для всех $x \in (a, c)$ и, значит, $f(c-0) = \sup_{(a,\, c)} f(x) \leqslant f(c)$. Аналогично для предела справа (см. рис. 4.3). $\blacksquare$

4.5. Непрерывность функции в точке

Естественно рассматривать функции, значения которых «мало» меняются при «малом» изменении аргумента.

[4] Вид окрестностей зависит от того, являются ли b, s числами или символами $\pm\infty$.

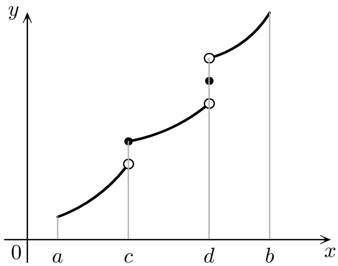

Рис. 4.3

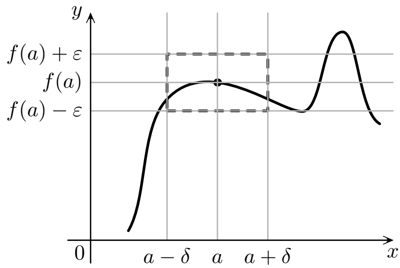

Рис. 4.4

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $a \in E$ и пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$. Функция f называется *непрерывной* в точке a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (x \in B_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

или, что эквивалентно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

(см. рис. 4.4).

Непосредственно из определения вытекает важное

Свойство (отделимость). Если функция f непрерывна в точке a и $f(a) > 0$ (<0), то существует такое $\delta > 0$, что $f(x) > \frac{f(a)}{2}$ $\left(<\frac{f(a)}{2}\right)$ для всех $x \in B_\delta(a) \cap E$.

□ Пусть $f(a) > 0$. Положим в определении непрерывности $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ при $x \in E$, $|x-a| < \delta$. Откуда

$$f(x) = f(a) + (f(x) - f(a)) > f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2}.$$

Случай $f(a) < 0$ рассматривается аналогично. ■

Укажем на одно отличие определения непрерывности от определения предела.

Замечание. В определении непрерывности точка a лежит в E — области определения функции, но не обязана быть предельной. Точка, принадлежащая множеству и не являющаяся его предельной точкой, называется *изолированной*.

Теорема 4.4. *Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$, $a \in E$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *функция f непрерывна в точке a;*

(2) $\forall \{x_n\},\ \ x_n \in E\ (x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a))$;

(3) *a — изолированная точка множества E, или a — предельная точка E и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

$\square$ (1) $\Rightarrow$ (2) Рассмотрим произвольную последовательность точек $x_n \in E$, сходящуюся к a. Покажем, что $f(x_n) \to f(a)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению непрерывности найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ для всех $x \in B_\delta(a) \cap E$. Так как $x_n \to a$, то существует такой номер N, что $x_n \in B_\delta(a) \cap E$ при всех $n \geqslant N$ и, значит, $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Если a — предельная точка E, то в силу (2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ по определению Гейне предела функции. Если a не является предельной точкой E, то по определению a — изолированная точка E.

(3) $\Rightarrow$ (1) Если a изолирована, то $B_{\delta_0}(a) \cap E = \{a\}$ для некоторого $\delta_0 > 0$. Тогда определение непрерывности в точке a выполняется для $\delta = \delta_0$. Пусть a предельная точка E. По определению Коши предела функции $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$. Но последняя импликация очевидно выполняется и для $x = a$. Значит, функция f непрерывна в точке a. $\blacksquare$

Пример. Пусть $E = \{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$, функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ такая, что $f(0) = y_0$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Найдем условия, при которых f непрерывна в каждой точке E.

$\square$ Всякая точка $1/n$ является изолированной для E, поэтому f непрерывна в точке $1/n$ при любом выборе y_n. Оставшаяся точка $0 \in E$ является предельной для E, поэтому условие непрерывности функции f в $a = 0$ равносильно условию $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. $\blacksquare$

Следствие. *Если функции $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке a, то в точке a непрерывны функции $f \pm g$, $f \cdot g$ и при дополнительном условии $g \neq 0$ на E также $\dfrac{f}{g}$.*

$\square$ Пусть $x_n \in E$ и $x_n \to a$. По непрерывности $f(x_n) \to f(a)$ и $g(x_n) \to g(a)$. Тогда $f(x_n) \pm g(x_n) \to f(a) \pm g(a)$, $f(x_n)g(x_n) \to$

$\to f(a)g(a)$, $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \dfrac{f(a)}{g(a)}$. Следовательно, по теореме 4.4 функции $f \pm g$, $f \cdot g$ и $\dfrac{f}{g}$ непрерывны в точке a. ■

Пример. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ — многочлен ($a_i \in \mathbb{R}$). Покажем, что функция P непрерывна в каждой точке $a \in \mathbb{R}$.

□ Функции $x \mapsto x$ и $x \mapsto c$, где c — константа, непрерывны в точке a: достаточно в определении непрерывности положить $\delta = \varepsilon$. Поэтому, последовательно применяя предыдущее следствие, получим, что функция $x \mapsto cx^k$, $k \in \mathbb{N}$, непрерывна в точке a, а значит, в этой точке непрерывна и функция P. ■

Теорема 4.5 (о непрерывности композиции). *Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ и $g\colon D \to \mathbb{R}$, причем $f(E) \subset D$. Если функция f непрерывна в точке a, функция g непрерывна в точке $f(a)$, то композиция $g \circ f\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке a.*

□ Пусть $x_n \in E$ и $x_n \to a$. Тогда $f(x_n) \to f(a)$ в силу непрерывности f в точке a и $g(f(x_n)) \to g(f(a))$ в силу непрерывности g в точке $f(a)$. По теореме 4.4 функция $g \circ f$ непрерывна в точке a. ■

Определение. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$, $a \in E$. Если сужение f на множество $(-\infty, a] \cap E$ ($[a, +\infty) \cap E$) непрерывно в точке a, то говорят, что функция f *непрерывна слева* (*справа*) в точке a.

Замечание. Если a — предельная точка $(-\infty, a] \cap E$, то непрерывность слева в точке a означает, что $f(a-0) = f(a)$. Аналогично для непрерывности справа.

Определение. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$, $a \in E$. Если f не является непрерывной в точке a, то говорят, что f *разрывна* (*имеет разрыв*) в точке a, а точку a называют *точкой разрыва* функции f.

Пусть функция задана в проколотой окрестности точки a. Если существуют конечные пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$, но не все числа $f(a-0)$, $f(a+0)$ и $f(a)$ равны между собой (случай, когда f не определена в самой точке a тоже допускается), то a называется *точкой разрыва I рода*. В противном случае, т.е. если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует, то a называется *точкой разрыва II рода* функции f.

Если a — точка разрыва I рода и $f(a-0)=f(a+0)$, то a называется *точкой устранимого разрыва* функции f.

Примеры. 1) Функция *сигнум* (*знак*):

$$f(x)=\operatorname{sign}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

Поскольку $f(+0)=1$, $f(-0)=-1$, то $a=0$ — точка разрыва I рода.

2) *Функция Дирихле*

$$\mathcal{D}(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$$

разрывна в каждой точке, причем все разрывы II рода.

Пусть $a\in\mathbb{R}$. Рассмотрим сходящиеся к a последовательности рациональных чисел $\{x_n\}$ и иррациональных чисел $\{x'_n\}$, такие что $x_n, x'_n>a$. Например, можно взять $x_n=\frac{[na]+1}{n}$ и $x'_n=a+\frac{\sigma}{n}$ ($\sigma=1$, если $a\notin\mathbb{Q}$, и $\sigma=\sqrt{2}$, если $a\in\mathbb{Q}$). Тогда $\mathcal{D}(x_n)\to 1$ и $\mathcal{D}(x'_n)\to 0$. Поэтому не существует $\mathcal{D}(a+0)$. Аналогично доказывается, что не существует $\mathcal{D}(a-0)$.

3) *Функция Римана* $f\colon[0,\,1]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}1/q, & x=p/q \text{ и дробь несократима},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$$

непрерывна во всех иррациональных точках и имеет устранимые разрывы во всех рациональных точках (считаем 0=0/1).

Достаточно показать, что предел f в любой точке a равен 0. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Пусть дробь $x=p/q$ несократима, $f(x)=$ $=1/q<\varepsilon\Leftrightarrow q>1/\varepsilon$. По-другому: $f(x)<\varepsilon$ имеет место для всех $x\in(0,\,1]$, кроме несократимых дробей со знаменателем $\leqslant 1/\varepsilon$. Положим $N=[1/\varepsilon]$, тогда исключительных дробей $\leqslant N^2$ (ведь $1\leqslant p\leqslant q\leqslant N$). Выберем $\delta>0$ так, что окрестность $\mathring{B}_\delta(a)$ не содержит исключительных дробей и 0. Тогда $|f(x)-0|=f(x)<\varepsilon$ для всех $x\in\mathring{B}_\delta(a)\cap[0,\,1]$.

Задача. Пусть функции f, g определены на интервале[5] I и имеют в I плотные множества точек непрерывности, т.е. в каждом интервале $(\alpha,\ \beta) \subset I$ существует как точка непрерывности f, так и точка непрерывности g.

1) Пусть $\varepsilon > 0$ и $(a,\ b) \subset I$. Докажите, что найдется такой отрезок $J \subset (a,\ b)$, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ и $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ для всех $x,\ y \in J$.

2) Пользуясь теоремой Кантора о вложенных отрезках, докажите, что функции f и g имеют в I общую точку непрерывности.

3) Докажите, что не существует функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая непрерывна в каждой рациональной точке и разрывна в каждой иррациональной точке.

Теорема 4.6 (о разрывах монотонной функции). *Если функция f монотонна на конечном или бесконечном интервале $(a,\ b)$, то f может иметь на $(a,\ b)$ разрывы только I рода, причем их не более чем счетное множество.*

□ Пусть для определенности f нестрого возрастает. По следствию теоремы 4.3 для любой точки $c \in (a,\ b)$ существуют конечные $f(c+0)$ и $f(c-0)$, причем $f(c-0) \leqslant f(c) \leqslant f(c+0)$. Поэтому если f разрывна в точке c, то $f(c-0) < f(c+0)$ и, значит, c — точка разрыва I рода (см. рис. 4.3).

Пусть $c,\ d \in (a,\ b)$, причем $c < d$. Для всякого $\alpha \in (c,\ d)$ имеем
$$f(c+0) = \inf_{x \in (c,\ b)} f(x) \leqslant f(\alpha) \leqslant \sup_{x \in (a,\ d)} f(x) = f(d-0).$$
Поэтому если $c,\ d$ — точки разрыва f, то интервалы $(f(c-0),\ f(c+0))$ и $(f(d-0),\ f(d+0))$ не пересекаются. Поставим в соответствие каждому такому интервалу рациональное число, содержащееся в нем. Тем самым установим биекцию между множеством таких интервалов и подмножеством $\mathbb{Q}$. Любое подмножество $\mathbb{Q}$ не более чем счетно, поэтому множество точек разрыва f не более чем счетно. ■

4.6. Непрерывность функции на множестве

Определение. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной* на E, если она непрерывна в каждой точке множества E.

[5]Все промежутки предполагаются невырожденными.

Пример. Рациональная функция $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где P, Q — многочлены, непрерывна на множестве $Q(x) \neq 0$.

Задача. Пусть функция $f\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$ в каждой точке имеет конечный предел. Покажите, что функция $g\colon x \mapsto \lim\limits_{t \to x} f(t)$ непрерывна на $[a,\, b]$.

Лемма 4.2. *Если функция f непрерывна на $[a,\, b]$, то она ограничена на $[a,\, b]$.*

$\square$ *Первый способ.* Предположим, что f не является ограниченной. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $x_n \in [a,\, b]$, что $|f(x_n)| > n$. По теореме 2.9 Больцано–Вейерштрасса $\{x_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность, $x_{n_k} \to c$. Переходя в неравенстве $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$ к пределу при $k \to \infty$ или пользуясь замкнутостью $[a,\, b]$, получаем $c \in [a,\, b]$. Тогда по непрерывности $f(x_{n_k}) \to f(c)$, что противоречит неограниченности $\{f(x_{n_k})\}$.

Второй способ. Пусть $x \in [a,\, b]$. Поскольку f в точке x имеет конечный предел, то найдутся такие положительные числа ε_x и C_x, что $|f(t)| \leqslant C_x$ для всех $t \in B_{\varepsilon_x}(x) \cap [a,\, b]$. Семейство $\{B_{\varepsilon_x}(x)\}_{x \in [a,\, b]}$ образует открытое покрытие $[a,\, b]$, поэтому по теореме 3.2 Гейне–Бореля $[a,\, b] \subset B_{\varepsilon_{x_1}}(x_1) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon_{x_m}}(x_m)$ для некоторых $x_1,\, \ldots,\, x_m \in [a,\, b]$. Положим $C = \max\{C_{x_1},\, \ldots,\, C_{x_m}\}$. Тогда $|f(t)| \leqslant C$ для всех $t \in [a,\, b]$ и ограниченность установлена. $\blacksquare$

Теорема 4.7 (Вейерштрасс). *Если функция f непрерывна на $[a,\, b]$, то существуют x_m, $x_M \in [a,\, b]$, такие что $f(x_M) = \sup\limits_{x \in [a,\, b]} f(x)$ и $f(x_m) = \inf\limits_{x \in [a,\, b]} f(x)$.*

$\square$ По лемме 4.2 множество значений $f([a,\, b])$ ограничено, а значит, определены числа $M = \sup f(x)$ и $m = \inf f(x)$.

Первый способ. По определению супремума для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $x_n \in [a,\, b]$, что $M - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M$ и, значит, $f(x_n) \to M$. По теореме 2.9 Больцано–Вейерштрасса существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to x_M$. Тогда по непрерывности $f(x_{n_k}) \to f(x_M)$. С другой стороны, $f(x_{n_k}) \to M$. В силу единственности предела $f(x_M) = M$.

Второй способ. Предположим, что $f(t)<M$ для всех $t\in[a,b]$. Пусть $x\in[a,\,b]$ и $y_x\in(f(x),M)$. По непрерывности в точке x для $\varepsilon_x=y_x-f(x)$ найдется $\delta_x>0$, что $f(t)\in B_{\varepsilon_x}(f(x))$ для всех $t\in B_{\delta_x}(x)\cap[a,\,b]$, а значит, $f(t)<f(x)+\varepsilon_x=y_x$. Семейство $\{B_{\delta_x}(x)\}_{x\in[a,\,b]}$ образует открытое покрытие $[a,\,b]$. По теореме 3.2 Гейне–Бореля $[a,\,b]\subset B_{\delta_{x_1}}(x_1)\cup\ldots\cup B_{\delta_{x_m}}(x_m)$ для некоторых $x_1,\,\ldots,\,x_m\in[a,\,b]$. Положим $y=\max\{y_{x_1},\,\ldots,\,y_{x_m}\}$. Тогда $y<M$ и $f(t)<y$ для всех $t\in[a,\,b]$, что противоречит определению M как супремума f.

Доказательство для инфимума аналогично. ■

Лемма 4.3. *Если функция f непрерывна на $[a,\,b]$ и $f(a)f(b)<0$, то существует такое $c\in(a,\,b)$, что $f(c)=0$.*

□ Можно считать, что $f(a)<0<f(b)$ (иначе заменим f на $-f$).

Первый способ. Определим индуктивно отрезки $[a_n,\,b_n]$. Пусть $[a_1,\,b_1]=[a,\,b]$, и, если определен $[a_k,\,b_k]$, положим

$$[a_{k+1},\,b_{k+1}]=\begin{cases}\left[a_k,\,\frac{a_k+b_k}{2}\right], & \text{если } f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)\geqslant 0,\\ \left[\frac{a_k+b_k}{2},\,b_k\right], & \text{если } f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)<0.\end{cases}$$

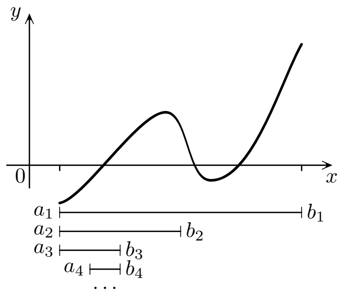

Рис. 4.5

Таким образом определена стягивающаяся последовательность отрезков $\{[a_n,\,b_n]\}$, такая что $f(a_n)<0\leqslant f(b_n)$ (см. рис. 4.5). По теореме 2.7 Кантора существует точка c — общая для всех отрезков $[a_n,\,b_n]$, причем $a_n\to c$ и $b_n\to c$. Функция f непрерывна в точке c, поэтому $f(c)$ является пределом как $f(a_n)<0$, так и $f(b_n)\geqslant 0$. Тогда $f(c)\leqslant 0\leqslant f(c)$, т.е. $f(c)=0$.

Второй способ. Положим $F_1=\{x\in[a,\,b]\colon\ f(x)\leqslant 0\}$ и $F_2=\{x\in[a,\,b]\colon\ f(x)\geqslant 0\}$. Множества F_1 и F_2 непусты и замкнуты. Действительно, $a\in F_1$, и если $x_n\in F_1$ и $x_n\to x$, то, переходя в неравенстве $f(x_n)\leqslant 0$ к пределу при $n\to\infty$ и пользуясь непрерывностью f, получим $f(x)\leqslant 0$, т.е. $x\in F_1$. Аналогичными свойствами обладает и F_2. Отметим, что объединение F_1 и F_2 совпадает с $[a,\,b]$.

Предположим, что функция f не принимает на $[a,\, b]$ значения 0. Тогда множества F_1, F_2 не пересекаются. Пусть $x_0 = \sup F_1$, тогда $x_0 \in F_1$ и, значит, $f(x_0) < 0$. Из полученного неравенства следует, что $x_0 < b$. Функция f непрерывна в точке x_0, поэтому существует такое $\delta \in (0,\, b - x_0)$, что $f(x) < 0$ для всех $x \in B_\delta(x_0) \cap [a,\, b]$. В частности, $f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) < 0$, что противоречит выбору x_0. ■

Будем говорить, что число s лежит строго между числами α и β, если $\min\{\alpha,\, \beta\} < s < \max\{\alpha,\, \beta\}$.

Теорема 4.8 (Коши о промежуточных значениях). *Если функция f непрерывна на $[a,\, b]$ и число s лежит строго между $f(a)$ и $f(b)$, то найдется такое $c \in (a,\, b)$, что $f(c) = s$.*

□ Рассмотрим функцию $g = f - s$. Функция g непрерывна на $[a, b]$ и $g(a)g(b) < 0$. По лемме 4.3 существует такое $c \in (a,\, b)$, что $g(c) = 0$, т.е. $f(c) = s$. ■

Напомним, что промежутком называется всякое множество $I \subset \mathbb{R}$, которое вместе с любыми двумя своими точками содержит и все точки, лежащие между ними.

Следствие. *Если функция f непрерывна на промежутке I, то $f(I)$ — промежуток.*

□ Пусть $y_1,\, y_2 \in f(I)$. Тогда найдутся точки $x_1,\, x_2 \in I$, такие что $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Если $y_1 < y < y_2$, то по теореме 4.8 существует точка x из интервала с концами x_1 и x_2, такая что $f(x) = y$. Так как I — промежуток, то $x \in I$ и, значит, $y \in f(I)$. ■

В качестве приложения теоремы о промежуточных значениях рассмотрим следующий алгебраический факт.

Пример. Покажем, что каждый многочлен нечетной степени имеет по крайней мере один (действительный) корень.

□ Достаточно рассмотреть многочлен, коэффициент при старшей степени которого равен единице:

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Из равенства $\frac{P(x)}{x^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}$ $(x \neq 0)$ следует, что $\frac{P(x)}{x^n} > 0$ при всех $|x| > \max\{1,\, n|a_{n-1}|,\, \ldots,\, n|a_0|\}$. Пусть положительное x удовлетворяет последнему неравенству. Тогда $x^n > 0$

и $(-x)^n < 0$ (т.к. n нечетно) и, значит, $P(x) > 0$ и $P(-x) < 0$. По лемме 4.3 функция P принимает значение ноль. ■

Задача. Пусть I — промежуток, функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ непрерывна. Докажите, что f инъективна тогда и только тогда, когда она строго монотонна.

Лемма 4.4. *Если функция f монотонна на промежутке I и $f(I)$ — промежуток, то f непрерывна на I.*

□ Пусть f нестрого возрастает на I. Предположим, функция f имеет разрыв в точке $c \in I$. Поскольку $f(c-0) \leqslant f(c) \leqslant f(c+0)$ (если c — концевая точка, то существует только один из односторонних пределов, для которого и проводятся рассуждения), то хотя бы одно из неравенств строгое и, значит, хотя бы один из интервалов $(f(c-0),\, f(c))$ или $(f(c),\, f(c+0))$ непуст.

Пусть интервал $J\colon = (f(c),\, f(c+0))$ непуст (случай непустого $(f(c-0),\, f(c))$ рассматривается аналогично). Тогда $f(t) \leqslant f(c)$ для любого $t \in I$, $t \leqslant c$, и $f(t) \geqslant \inf\limits_{(c,\, \sup I)} f(x) = f(c+0)$ для любого $t \in I$, $t > c$. Таким образом, интервал J не пересекается с $f(I)$, но с обеих сторон имеются точки из $f(I)$. Это означает, что множество $f(I)$ не является промежутком. ■

Теорема 4.9 (об обратной функции). *Если функция $f : I \to \mathbb{R}$ строго монотонна и непрерывна на промежутке I, то $f(I)$ — промежуток, f — биекция I на $f(I)$ и обратная функция $f^{-1} : f(I) \to I$ также строго монотонна и непрерывна.*

□ По следствию теоремы 4.8 множество $J = f(I)$ является промежутком. Если $x_1,\, x_2 \in I$ и $x_1 \neq x_2$, то в силу строгой монотонности $f(x_1) \neq f(x_2)$, а значит, f — инъекция. Поэтому $f : I \to J$ — биекция и существует обратная функция $f^{-1} : J \to I$.

Пусть f строго возрастает на I. Пусть $y_1,\, y_2 \in J$ и $y_1 < y_2$. Положим $x_1 = f^{-1}(y_1)$ и $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Если $x_1 \geqslant x_2$, то $y_1 = f(x_1) \geqslant f(x_2) = y_2$, противоречие. Следовательно, $x_1 < x_2$ и функция f^{-1} строго возрастает. Так как $f^{-1}(J) = I$ — промежуток, то по лемме 4.4 функция f^{-1} непрерывна на J. ■

Пример. Если $x \geqslant 0$ и $n \in \mathbb{N}$, то существует единственный $y \geqslant 0$, такой что $y^n = x$ (пишут $y = \sqrt[n]{x}$). Функция $f\colon [0,\, +\infty) \to [0,\, +\infty)$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, непрерывна и строго возрастает.

□ Функция $g\colon y \to y^n$ непрерывна и строго возрастает на луче $[0, +\infty)$. Кроме того, $g(0) = 0$ и $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = +\infty$, так что $g([0, +\infty)) = [0, +\infty)$. По теореме 4.9 существует непрерывная и строго возрастающая функция $f = g^{-1}\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. ■

Задача. Докажите, что если n нечетно, то уравнение $y^n = x$ однозначно разрешимо и при $x < 0$, причем функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, является нечетной.

4.7. Равномерная непрерывность

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $f\colon E \to \mathbb{R}$. Функция f называется *равномерно непрерывной*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,\, x' \in E\ (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon).$$

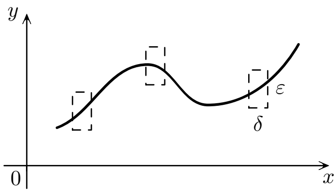

Рис. 4.6

Ясно, что равномерная непрерывность влечет непрерывность (см. рис. 4.6). Единственное различие в определениях состоит в том, что в равномерной непрерывности для данного $\varepsilon > 0$ выбранное $\delta > 0$ работает для всех $x' \in E$. Функция, не являющаяся равномерно непрерывной, может оказаться равномерно непрерывной при сужении на меньшее множество. Будем говорить, что «f равномерно непрерывна на X», имея в виду, что сужение $f|_X$ равномерно непрерывно, или просто для того, чтобы подчеркнуть область определения.

Пример. Функция $f\colon x \mapsto |x|$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. Это вытекает из неравенства $||x| - |x'|| \leqslant |x - x'|$.

Пример обобщается на следующий класс функций.

Определение. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется *липшицевой*, если найдется константа $C > 0$, такая что $|f(x) - f(x')| \leqslant C|x - x'|$ для всех $x, x' \in E$.

Очевидно всякая липшицева функция является равномерно непрерывной (достаточно положить $\delta = \varepsilon/C$).

Доказательство отсутствия равномерной непрерывности опирается на отрицание определения: функция f не является равномерно непрерывной, если

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x,\, x' \in E\ (|x - x'| < \delta \text{ и } |f(x) - f(x')| < \varepsilon).$$

Пример. Функция $f\colon x \mapsto x^2$ непрерывна (как многочлен), но не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$. Действительно, для произвольного $\delta > 0$ положим $x = 1/\delta$ и $x' = x + \delta/2$. Тогда $|x - x'| = \delta/2 < \delta$, однако

$$|f(x) - f(x')| = \left| \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2 \right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1.$$

Задача. Пусть функции f, g равномерно непрерывны на E. Докажите, что

1) функция $f + g$ равномерно непрерывна на E;
2) если f, g ограничены на E, то функция fg равномерно непрерывна на E;
3) если $g \neq 0$ и функция $1/g$ ограничена на E, то $1/g$ равномерно непрерывна на E.

Теорема 4.10 (Кантор). *Если функция f непрерывна на $[a,\, b]$, то f равномерно непрерывна.*

☐ *Первый способ.* Пусть f непрерывна, но не является равномерно непрерывной. Полагая $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, найдем такие точки $x_n,\, x'_n \in [a,\, b]$, что $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon$. По теореме 2.9 Больцано–Вейерштрасса $\{x_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to x_0 \in [a,\, b]$. Поскольку $x_{n_k} - \frac{1}{n_k} \leqslant x'_{n_k} \leqslant x_{n_k} + \frac{1}{n_k}$, то $x'_{n_k} \to x_0$ по теореме 2.4 о зажатой последовательности. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = \lim\limits_{k\to\infty} f\left(x'_{n_k}\right) = f\left(x_0\right)$, что противоречит условию $\left|f\left(x_{n_k}\right) - f\left(x'_{n_k}\right)\right| \geqslant \varepsilon > 0$.

Второй способ. Пусть $\varepsilon > 0$. По определению непрерывности для каждой точки $x \in [a,\, b]$ найдется такое $\delta_x > 0$, что $|f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $t \in B_{\delta_x}(x) \cap [a,\, b]$. Семейство $\{B_{\delta_x/2}(x)\}_{x\in[a,\,b]}$ образует открытое покрытие $[a,\, b]$. По теореме 3.2 Гейне–Бореля $[a,\, b] \subset B_{\delta_{x_1}/2}(x_1) \cup \ldots \cup B_{\delta_{x_m}/2}(x_m)$ для некоторых $x_1,\, \ldots,\, x_m \in [a,\, b]$. Положим $\delta = \min\{\delta_{x_1}/2,\, \ldots,\, \delta_{x_m}/2\}$. Пусть $s,\, t \in [a,\, b]$ и $|s - t| < \delta$. Точка s принадлежит некоторому шару $B_{\delta_{x_k}/2}(x_k)$. Поскольку $|t - x_k| \leqslant |t - s| + |s - x_k| < \delta_{x_k}$, то $s,\ t \in B_{\delta_{x_k}}(x_k)$, а значит,

$$|f(s) - f(t)| \leqslant |f(s) - f(x_k)| + |f(t) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Заключаем, что f равномерно непрерывна. ■

Замечание. Отметим, что лемма 4.2, теоремы 4.7 и 4.10 справедливы (как видно из их доказательств) для замкнутых ограниченных множеств. Случай отрезка выделен ввиду особой важности.

Теорема 4.11 (о продолжении). *Если функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, то она продолжается непрерывным образом на замыкание E (в $\mathbb{R}$), т.е. существует непрерывная функция $F\colon\ \overline{E} \to \mathbb{R}$, такая что $F|_E = f$. Такое продолжение единственно.*

□ Определим функцию F следующим образом. Если $a \in E$, то положим $F(a) = f(a)$. Если $a \in \overline{E} \setminus E$, то a — предельная точка E. Кроме того, по определению равномерной непрерывности для $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ как только $x,\ x' \in \mathring{B}_{\delta/2}(a) \cap E$. По критерию Коши (теорема 4.2) заключаем, что существует конечный $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Положим $F(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Покажем, что F непрерывна (и даже равномерно) на $\overline{E}$. Пусть $u, v \in \overline{E}$, $|u - v| < \delta$. Рассмотрим последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ точек из E, такие что $x_n \to u$ и $x'_n \to v$. Найдется такой номер N, что при всех $n \geqslant N$ выполнено $|x_n - x'_n| < \delta$ и, значит, $|f(x_n) - f(x'_n)| < \varepsilon$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим $|F(u) - F(v)| \leqslant \varepsilon$, что доказывает равномерную непрерывность F.

Покажем, что продолжение F единственно. Пусть функция $\Phi\colon\ \overline{E} \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\overline{E}$ и $\Phi|_E = f$. Для $c \in \overline{E}$ рассмотрим последовательность $\{y_n\}$ точек из E, сходящуюся к c. В силу непрерывности $\Phi(y_n) \to \Phi(c)$, однако $\Phi(y_n) = f(y_n) = F(y_n)$ для всех n. Следовательно, $\Phi(c) = F(c)$, а значит, $\Phi = F$ на $\overline{E}$. ■

4.8. Показательная и логарифмическая функции

Определение. Функция $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp x = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, называется *экспонентой*.

В примере после теоремы 2.6 установлена сходимость $(1 + \frac{x}{n})^n$.

Теорема 4.12. *Для любых $x,\, y \in \mathbb{R}$ имеет место равенство* $\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$.

$\square$ Положим $a_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Оценим разность последовательностей $\{a_n(x)a_n(y)\}$ и $\{a_n\bigl(x+y\bigr)\}$ по модулю.

По формуле $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1})$ имеем

$$a_n(x)a_n(y) - a_n\bigl(x+y\bigr) = \\ = \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n - \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n = \frac{xy}{n^2}Q(x,\, y),$$

где $Q(x,\, y)$ — сумма по всем целым k от 0 до $n-1$ произведений $\left(1+\frac{x}{n}\right)^k\left(1+\frac{y}{n}\right)^k$ на $\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^m$, где $m = n-k-1$.

Так как $\{a_n(|x|)\}$ возрастает (начиная с некоторого номера n_0) и стремится к $\exp|x|$, то

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^p\right| \leqslant \left(1+\frac{|x|}{n}\right)^p \leqslant \left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n \leqslant \exp|x|, \quad p = 1,\, \ldots,\, n.$$

Таким образом, каждое слагаемое в $Q(x,\, y)$ не превосходит числа $C = \exp|x+y|\exp|x|\exp|y|$. Поэтому

$$|a_n\bigl(x+y\bigr) - a_n(x)a_n(y)| \leqslant \frac{C|x||y|}{n}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем искомый результат. $\blacksquare$

Замечание. Из равенств $\exp x = \bigl(\exp\frac{x}{2}\bigr)^2$ и $\exp x \cdot \exp(-x) = 1$ следует, что $\exp x > 0$ и $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Лемма 4.5. а) $\exp x \geqslant 1 + x$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$;
б) $\exp x \leqslant \frac{1}{1-x}$ *для всех* $x < 1$.

$\square$ Зафиксируем такой номер N, что $x/N \geqslant -1$.
Тогда $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1 + x$ при всех $n \geqslant N$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем первое неравенство.

По п. а) $\exp(-x) \geqslant 1 - x > 0$ при $x < 1$. Откуда, учитывая, что $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$, получаем второе утверждение. $\blacksquare$

Отметим, что $\exp x > 1 + x$ для всех $x \neq 0$. При $x \leqslant -1$ это очевидно, а если $x > -1$, то $\exp x = \bigl(\exp\frac{x}{2}\bigr)^2 \geqslant (1+\frac{x}{2})^2 > 1 + x$.

Теорема 4.13. *Функция* exp *непрерывна, строго возрастает и отображает* $\mathbb{R}$ *на* $(0, +\infty)$.

$\square$ По лемме 4.5 для всех $x < 1$ имеют место неравенства $1 + x \leqslant \leqslant \exp x \leqslant \frac{1}{1-x}$, откуда $\lim\limits_{x\to 0} \exp x = 1$. Теперь для любого $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to a} \exp x = \lim_{t\to 0} \exp(t + a) = \lim_{t\to 0} \exp a \cdot \exp t = \exp a,$$

что доказывает непрерывность экспоненты в точке a.

Пусть $x, y \in \mathbb{R}$ и $x < y$. Тогда по п. а) леммы 4.5 имеем

$$\exp y - \exp x = [\exp(y - x) - 1] \exp x \geqslant (y - x) \exp x > 0.$$

Следовательно, функция exp строго возрастает.

По лемме 4.5 $\lim\limits_{x\to +\infty} \exp x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} \exp x = \lim\limits_{x\to +\infty} \exp(-x) = = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{\exp x} = 0$. Поэтому $\sup_{\mathbb{R}} \exp = +\infty$ и $\inf_{\mathbb{R}} \exp = 0$. Учитывая непрерывность экспоненты, заключаем, что множество значений $\exp(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ (см. рис. 4.7). $\blacksquare$

Определение. *Натуральным логарифмом* называется функция $\ln\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, обратная к exp.

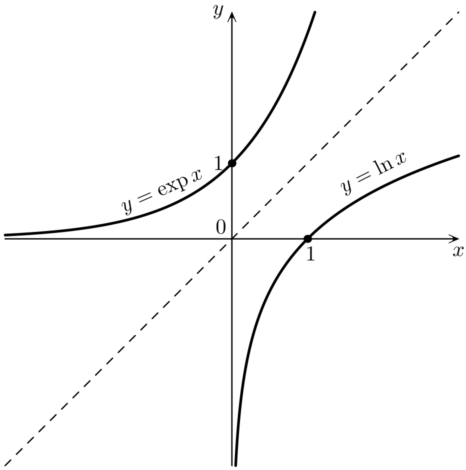

Рис. 4.7

Замечание. Из теоремы 4.9 об обратной функции и свойств экспоненты получаем, что функция ln непрерывна, строго возрастает и отображает $(0, +\infty)$ на $\mathbb{R}$ (см. рис. 4.7). Кроме того, для любых $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ выполнено

$$\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2, \qquad \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2.$$

Для доказательства первого равенства положим $y_1 = \ln x_1$, $y_2 = \ln x_2$. Тогда $\exp(y_1 + y_2) = (\exp y_1)(\exp y_2) = x_1 x_2$, а значит, $y_1 + y_2 = \ln(x_1 x_2)$. Второе равенство следует из первого в силу представления $x_1 = x_2 \frac{x_1}{x_2}$.

Определение. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. *Показательной функцией* с основанием a называется функция $x \mapsto a^x = \exp(x \ln a)$, $x \in \mathbb{R}$.

Замечание. Из свойств экспоненты получаем, что показательная функция непрерывна, строго монотонна (возрастает при $a > 1$, убывает при $0 < a < 1$) и отображает $\mathbb{R}$ на $(0, +\infty)$. В частности, $e^x = \exp x$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Так как

$$(a^{1/n})^n = \exp\left(\frac{1}{n}\ln a\right) \cdot \ldots \cdot \exp\left(\frac{1}{n}\ln a\right) = \exp(\ln a) = a,$$

то $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. Это означает, что приведенное выше определение согласовано с известным со школы определением показательной функции рационального аргумента.

Задача. Пусть $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ и не равны 1. Докажите, что

1) $\ln(a^x) = x \ln a$, 2) $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$, 3) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$,
4) $a^x b^x = (ab)^x$.

Определение. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. *Логарифмической функцией* по основанию a называется функция $\log_a \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, обратная к показательной $x \mapsto a^x$.

Так как $x = a^y = \exp(y \ln a) \Leftrightarrow \ln x = y \ln a$, то $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Уточним область определения E *степенной функции* $x \mapsto x^\alpha$ относительно показателя α.

При $\alpha \in \mathbb{N}$ множество $E = \mathbb{R}$, при этом x^α определяется как произведение α сомножителей, равных x. При $\alpha = 0$ считаем x^α тождественно равной 1 на $E = \mathbb{R}$.

При $\alpha \in -\mathbb{N}$ множество $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, при этом $x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$.

При $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ множество $E = (0, +\infty)$, при этом

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln x).$$

Если к тому же $\alpha > 0$, будем добавлять к E ноль, полагая $0^\alpha = 0$. Это согласуется с тем, что $\lim\limits_{x \to +0} \exp(\alpha \ln x) = 0$.

Замечание. Степенная функция $x \mapsto x^\alpha$ непрерывна на множестве E, на промежутке $(0, +\infty)$ строго возрастает при $\alpha > 0$ и строго убывает при $\alpha < 0$.

Пример. Пусть $a > e$. Покажем, что $e^a > a^e$.

Действительно, в неравенстве $e^x > 1 + x$, положив $x = a/e - 1$, получим $e^{a/e-1} > a/e$ или $e^{a/e} > a$. Откуда в силу возрастания функции $x \mapsto x^e$ следует искомое неравенство $e^a > a^e$.

Лемма 4.6 (2-й замечательный предел). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. *Также* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

$\square$ По лемме 4.5 для всех $x < 1$ выполнено $1 + x \leqslant e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$ или $x \leqslant e^x - 1 \leqslant \frac{x}{1-x}$. Откуда $1 \leqslant \dfrac{e^x - 1}{x} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$ при $0 < x < 1$ и $\frac{1}{1-x} \leqslant \dfrac{e^x-1}{x} \leqslant 1$ при $x < 0$. По свойству предела зажатой функции $\dfrac{e^x-1}{x} \to 1$ при $x \to 0$.

Функции $g(y) = \frac{y}{e^y - 1}$ при $y \neq 0$, $g(0) = 1$, и $f(x) = \ln(x+1)$ непрерывны в нуле. Тогда композиция $(g \circ f)(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ также непрерывна в нуле и, значит, $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x)) = g(0) = 1$.

Функция $h(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ при $x \neq 0$, $h(0) = 1$, непрерывна в нуле. Тогда композиция $\exp \circ\, h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ также непрерывна в нуле и, значит, $\lim\limits_{x\to 0} \exp \circ\, h(x) = e$. Сделав в полученном пределе замену $x = 1/t$, устанавливаем последнее равенство. $\blacksquare$

Задача. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

4.9. Комплексные числа и комплексная экспонента

Определение. *Множеством комплексных чисел* $\mathbb{C}$ называется множество $\mathbb{R}^2$ с введенными на нем операциями сложения и умножения:

$$(a,\, b) + (c,\, d) = (a + b,\, c + d), \qquad (a,\, b) \cdot (c,\, d) = (ac - bd,\, ad + bc).$$

Нетрудно проверить, что $\mathbb{C}$ является полем с нулем $(0,\, 0)$ и единицей $(1,\, 0)$.

Замечание. Пару $(a,\, 0)$ отождествляют с действительным числом a, что согласуется с операциями: $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$,

$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$. В этом смысле $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Комплексное число $(0, 1)$ обозначают буквой i. Из определения следует, что $i^2 = -1$.

Так как $(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1)$, то комплексное число $z = (a, b)$ можно записать в виде $z = a + bi$. Такое представление называется *алгебраической формой* числа z. При этом $a = \operatorname{Re} z$ называется *вещественной частью*, $b = \operatorname{Im} z$ — *мнимой частью* числа z.

Определение. Пусть $z = a + bi$. Действительное число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модулем*, а число $\overline{z} = a - bi$ — *сопряженным* к числу z.

Свойства. Пусть $z, w \in \mathbb{C}$, тогда
1) $\overline{\overline{z}} = z$; 2) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$; 3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;
4) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, в частности, $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ при $z \neq 0$;
5) $|zw| = |z||w|$; 6) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$.

□ Доказательства всех свойств, кроме последнего, непосредственно следуют из определений. Докажем п. 6. Достаточно сравнить квадраты левой и правой частей. Имеем

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w + |w|^2.$$

Положим $t = z\overline{w}$. Тогда $\overline{z}w = \overline{t}$, а значит, $z\overline{w} + \overline{z}w = t + \overline{t} = 2 \operatorname{Re} t$. Откуда в силу неравенства $\operatorname{Re} t \leqslant |t|$ получим $z\overline{w} + \overline{z}w \leqslant 2|z||w|$, так что $|z + w|^2 \leqslant |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$. ■

Свойства 5 и 6 по индукции распространяются на любое конечное число слагаемых/сомножителей.

Определение. Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется *сходящейся*, если существует комплексное число z_0 такое, что $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n - z_0| = 0$. При этом z_0 называют *пределом* последовательности $\{z_n\}$ и пишут $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$ или $z_n \to z_0$.

Определение. Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geqslant N \ (|z_n - z_m| < \varepsilon).$$

Замечание. Пусть $z_n = x_n + iy_n$, где $x_n = \operatorname{Re} z_n$ и $y_n = \operatorname{Im} z_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Из неравенств $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ $(\operatorname{Im} z| \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|)$ следует, что

1) $z_n \to z_0 \iff x_n \to x_0$ и $y_n \to y_0$. В частности, теорема 2.5 об арифметических операциях с пределами верна и для комплексных последовательностей.
2) $\{z_n\}$ фундаментальна $\iff \{x_n\}$ и $\{y_n\}$ фундаментальны. В частности, всякая фундаментальная последовательность в $\mathbb{C}$ сходится (критерий Коши).

Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $a_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. По формуле бинома

$$a_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{C_n^k}{n^k} z^k. \tag{4.2}$$

Пусть[6] n, $m \in \mathbb{N}$, $n > m$. Так как

$$\frac{C_n^k}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!} = \frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right)$$

и всякая последовательность вида $(1 - j/n)$ строго возрастает с ростом n при фиксированном j, то $\frac{C_n^k}{n^k} > \frac{C_m^k}{m^k}$ для $k = 1, \ldots, m$. Поэтому по неравенству $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ ввиду (4.2) имеем

$$|a_n(z) - a_m(z)| = \left|\sum_{k=0}^{m}\left[\frac{C_n^k}{n^k} - \frac{C_m^k}{m^k}\right]z^k + \sum_{k=m+1}^{n}\frac{C_n^k}{n^k}z^k\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{m}\left[\frac{C_n^k}{n^k} - \frac{C_m^k}{m^k}\right]|z|^k + \sum_{k=m+1}^{n}\frac{C_n^k}{n^k}|z|^k = a_n(|z|) - a_m(|z|).$$

Последовательность $\{a_n(|z|)\}$ сходится, а значит, является фундаментальной. Тогда фундаментальной является и $\{a_n(z)\}$. Отсюда заключаем корректность следующего определения.

Определение. Функция $e^z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$, $z \in \mathbb{C}$, называется *комплексной экспонентой.*

Доказательство теоремы 4.12 работает и в комплексном случае, поэтому $e^z e^w = e^{z+w}$ для всех z, $w \in \mathbb{C}$ (*основное свойство экспоненты*).

4.10. Тригонометрические функции

Определим cos, sin: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$ и $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$.

[6] Способ введения комплексной экспоненты заимствован из [6].

Таким образом, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ для всех $x \in \mathbb{R}$ (*формула Эйлера*).

Записав $a_n(ix)$ в алгебраической форме: $a_n(ix) = c_n(x) + is_n(x)$, имеем

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} c_n(x), \qquad \sin x = \lim_{n\to\infty} s_n(x).$$

Из определения сразу следует, что $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$. Из равенства $a_n(-ix) = \overline{a_n(ix)}$ вытекает, что $c_n(-x) = c_n(x)$, $s_n(-x) = -s_n(x)$. Так что функция cos — четная, а sin — нечетная.

Функции cos и sin удовлетворяют следующим функциональным уравнениям.

Свойство (формулы сложения). Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$\cos(x+y) = \cos x \, \cos y - \sin x \, \sin y,$$
$$\sin(x+y) = \sin x \, \cos y + \cos x \, \sin y.$$

$\square$ Достаточно взять вещественную (мнимую) часть в равенстве $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$. $\blacksquare$

Из формул сложения получаем

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (**основное тождество**),

$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, $\quad \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ (**формулы удвоения**).

Теорема 4.14. *Функции* cos *и* sin *непрерывны.*

$\square$ По формуле (4.2) имеем

$$|s_n(x) - x| = |\operatorname{Im} a_n(ix) - x| = \left| \sum_{k=2}^{n} \frac{C_n^k}{n^k} \operatorname{Im}(ix)^k \right| \leqslant a_n(|x|) - 1 - |x|.$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим $|\sin x - x| \leqslant e^{|x|} - 1 - |x|$. Следовательно, по неравенству б) леммы 4.5 имеем $|\sin x - x| \leqslant \dfrac{x^2}{1-|x|}$ при $|x| < 1$. Аналогично устанавливается, что $|\cos x - 1| \leqslant \dfrac{x^2}{1-|x|}$ при $|x| < 1$. Из полученных неравенств следует, что $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Переходя в равенствах

$$\cos x = \cos a \, \cos(x-a) - \sin a \, \sin(x-a),$$
$$\sin x = \sin a \, \cos(x-a) + \cos a \, \sin(x-a)$$

к пределу при $x \to a$, получим $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$ и $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$, что доказывает непрерывность в точке $x = a$. ■

Следствие (1-й замечательный предел). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Лемма 4.7. *Существует наименьший положительный ноль z_0 функции* $\cos$.

□ Так как функция $\sin$ не всюду нулевая, то по основному тождеству существует y_0, такое что $|\cos y_0| < 1$. Ввиду четности $\cos$ можно считать, что $y_0 > 0$. Пусть $\alpha_n = \cos(2^{n-1}y_0)$. Предположим, что все $\alpha_n \geqslant 0$. Тогда для $L = \inf \alpha_n$ имеем

$$L \leqslant \inf \alpha_{n+1} = \inf(2\alpha_n^2 - 1) = 2L^2 - 1.$$

Из неравенств $L \leqslant 2L^2 - 1$ и $L \geqslant 0$ следует, что $L \geqslant 1$. Но тогда $\cos y_0 = \alpha_1 \geqslant 1$, что противоречит выбору y_0. Поэтому найдется такое n, что $\cos(2^{n-1}y_0) < 0$. Поскольку $\cos 0 = 1$ и функция $\cos$ непрерывна, то по теореме 4.8 о промежуточных значениях устанавливаем наличие положительного нуля у функции $\cos$. Множество нулей непрерывной функции замкнуто, поэтому z_0 существует. ■

Положим $\pi = 2z_0$.

Найдем значение $\sin\frac{\pi}{2}$. Так как $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, то по основному тождеству $\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$. Последовательно применяя формулу удвоения, получим $\sin\frac{\pi}{2} = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^n}\cdots\cos\frac{\pi}{2^2}$, откуда заключаем, что знак $\sin\frac{\pi}{2}$ совпадает со знаком $\sin\frac{\pi}{2^n}$ при всех $n > 1$. Осталось заметить, что из первого замечательного предела $\sin\frac{\pi}{2^n} > 0$ при всех достаточно больших n. Следовательно, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Применяя формулы удвоения, находим $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$ и $\sin 2\pi = 0$.

Из формул сложения получаем

Свойство. Функции $\cos$ и $\sin$ периодичны с периодом 2π.

Свойство (формулы приведения). $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x$ и $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp\sin x$.

Поскольку $\cos x > 0$ на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то $\sin x > 0$ на $(0, \pi)$.

Лемма 4.8. *Функция* $\cos$ *строго убывает на* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

☐ Пусть $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$, тогда

$$\cos y = \cos(x + y - x) =$$
$$= \cos x \cos(y - x) - \sin x \sin(y - x) < \cos x \cos(y - x) \leqslant \cos x.$$

То, что неравенство $\cos y < \cos x$ выполняется для концевых точек, следует по непрерывности. ■

По формулам приведения функция cos строго убывает на $\big[2\pi k,\, \pi + 2\pi k\big]$ и строго возрастает на $\big[\pi + 2\pi k,\, 2\pi + 2\pi k\big]$, $k \in \mathbb{Z}$; функция sin строго возрастает на $\big[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\big]$ и строго убывает на $\big[\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\big]$, $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, установлен вид графиков функций cos и sin с точностью до участков монотонности.

В дальнейшем будем использовать стандартные обозначения:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\arcsin x = \Big(\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}]} x\Big)^{-1}, \quad \arccos x = \big(\cos\big|_{[0,\, \pi]} x\big)^{-1},$$

$$\operatorname{arctg} x = \Big(\operatorname{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2})} x\Big)^{-1}, \quad \operatorname{arcctg} x = \big(\operatorname{ctg}\big|_{(0,\, \pi)} x\big)^{-1}.$$

Существование, а также непрерывность и строгая монотонность обратных тригонометрических функций следует из соответствующих свойств тригонометрических функций по теореме об обратной функции.

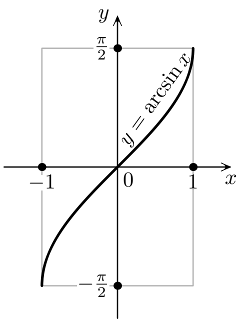

Рис. 4.8

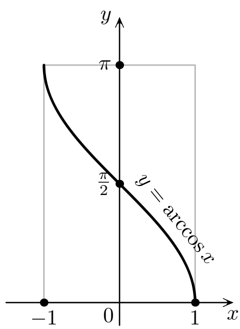

Рис. 4.9

Основными элементарными функциями называются

- постоянная $x \mapsto c$, $c \in \mathbb{R}$;
- показательная $x \mapsto a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

- логарифмическая $x \mapsto \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- степенная $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- тригонометрические sin, cos, tg и ctg;
- обратные тригонометрические arcsin, arccos, arctg, и arcctg (см. рис. 4.8–4.11).

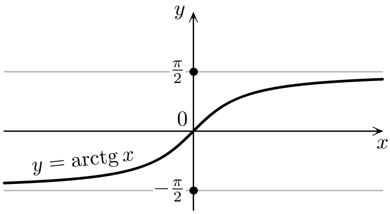

Рис. 4.10

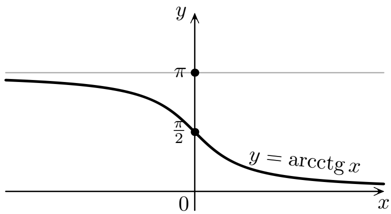

Рис. 4.11

Элементарной функцией называется всякая функция, получаемая из основных с помощью конечного числа арифметических операций и композиций.

Пример. С помощью экспоненты можно определить гиперболические функции (см. рис. 4.12, 4.13):

$$\operatorname{sh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \ (\textit{гиперболический синус});$$

$$\operatorname{ch}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ (\textit{гиперболический косинус});$$

$$\operatorname{th}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \ (\textit{гиперболический тангенс});$$

$$\operatorname{cth}\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \ (\textit{гиперболический котангенс}).$$

Замечание. Поскольку все основные элементарные функции непрерывны в своих областях определения, то и любая элементарная функция непрерывна в своей области определения.

Лемма 4.9. *Пусть пара $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, такая что $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$. Тогда найдется такое единственное $\varphi \in (-\pi, \pi]$, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.*

$\square$ Пусть $y \geqslant 0$. Поскольку $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$ и $-1 \leqslant \frac{x}{r} \leqslant 1$, то по теореме 4.8 о промежуточных значениях найдется такое

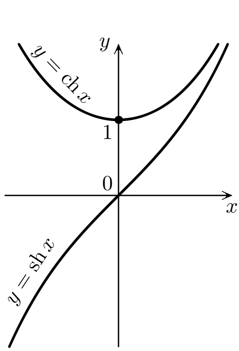

Рис. 4.12

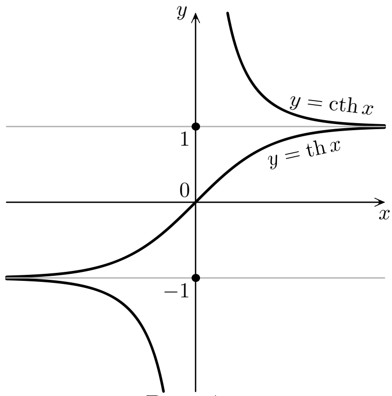

Рис. 4.13

$\varphi \in [0,\, \pi]$, что $\frac{x}{r} = \cos\varphi$. Такое φ единственно, т.к. cos строго убывает на $[0,\, \pi]$. Тогда $\left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1 - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi$ и, значит, $y = r\sin\varphi$, т.к. y и $\sin\varphi$ оба неотрицательны.

Если $y < 0$, то по доказанному существует $\theta \in (0,\, \pi)$, такое что $x = r\cos\theta$, $-y = r\sin\theta$. Положим $\varphi = -\theta$, тогда $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, причем φ определено однозначно. ■

Пусть $z = x + iy \neq 0$, тогда по лемме 4.9 найдется такое единственное $\varphi \in (-\pi,\, \pi]$, что $x = |z|\cos\varphi$, $y = |z|\sin\varphi$. Запись $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой*, а φ — *главным значением аргумента* числа z (пишут $\arg z$).

Замечание. Из полученных тригонометрических формул следует, что

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$
$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

Индукцией устанавливается, что справедлива

Формула Муавра. Если $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ и $n \in \mathbb{Z}$, то $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$.

4.11. Сравнение функций

В этом разделе мы вводим некоторые обозначения, которые используются для описания асимптотического поведения функций. Такие обозначения упрощают формулы, содержащие константы, точное значение которых неважно, или функции, которые становятся пренебрежимо малыми при стремлении к пределу. С другой стороны, обозначения часто позволяют выделить основные идеи доказательств.

Определение. Пусть f, g: $E \to \mathbb{R}$, a — предельная точка E. Если существуют α: $E \to \mathbb{R}$ и $\delta > 0$, такие что $f(x) = \alpha(x)g(x)$ для всех $x \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E$, и

1) функция α ограничена на $\mathring{B}_\delta(a) \cap E$, то говорят, что f *ограничена по сравнению с* g при $x \to a$, и пишут $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$;
2) функция $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, то говорят, что f *бесконечно мала по сравнению с* g при $x \to a$, и пишут $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$;
3) функция $\alpha(x) \to 1$ при $x \to a$, то говорят, что f и g *эквивалентны* или *асимптотически равны* при $x \to a$, и пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$.

Нетрудно проверить, что асимптотическое равенство является отношением эквивалентности.

Следующим замечанием удобно пользоваться на практике при проверке асимптотических соотношений.

Замечание. Если $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности a, то

$$f(x) = O(g(x)) \text{ при } x \to a \iff$$
$$\iff \exists M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E \quad \left(\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant M\right);$$

$$f(x) = o(g(x)) \text{ при } x \to a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

$$f(x) \sim g(x) \text{ при } x \to a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Необходимость условий очевидна. Для доказательства обратного утверждения достаточно положить $\alpha(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ на $\mathring{B}_\delta(a) \cap E$ и $\alpha(x) = 0$ на $E \setminus \mathring{B}_\delta(a)$.

Примеры. 1) $x^n = o(x^m)$ при $x \to 0 \Leftrightarrow n > m$,
2) $x^n = o(x^m)$ при $x \to \pm\infty \Leftrightarrow m > n$,
3) $\cos x + \sqrt{x} = O(\sqrt{x})$ при $x \to +\infty$,
4) $x \sim \sin x \sim e^x - 1 \sim \ln(1 + x)$ при $x \to 0$.

Замечание. Важно понимать, что $O(g)$ и $o(g)$ — это классы функций, и знак равенства означает принадлежность этому классу. Поэтому все такие равенства читаются только слева направо. Например, $x^2 = o(x)$ и $x^3 = o(x)$ при $x \to 0$, однако $x^2 \neq x^3$.

Лемма 4.10. *При $x \to a$ справедливы формулы*:
1) $o(f) \pm o(f) = o(f), \quad O(f) \pm O(f) = O(f)$;
2) $o(f) = O(f)$;
3) $o(O(f)) = o(f), \quad O(o(f)) = o(f)$;
4) $o(f) \cdot O(g) = o(fg)$.

□ Докажем п. 4. Пусть $u(x) = o(f(x))$ при $x \to a$, т.е. $u = \alpha f$ в некоторой проколотой окрестности точки a, и функция $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Пусть $v(x) = O(g(x))$ при $x \to a$, т.е. $v = \beta g$ в некоторой проколотой окрестности точки a, причем функция β там ограничена. Тогда на пересечении окрестностей $uv = (\alpha\beta)(fg)$ и $(\alpha\beta)(x) \to 0$ при $x \to a$. Это означает, что $u(x)v(x) = o(f(x)g(x))$ при $x \to a$.

Остальные утверждения проверяются аналогично. ■

Установим основные свойства асимптотического равенства.

Лемма 4.11. *Справедливы следующие утверждения*:
1) $f(x) \sim g(x)$ *при* $x \to a \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$;
2) *если* $f(x) \sim \tilde{f}(x)$, $g(x) \sim \tilde{g}(x)$ *при* $x \to a$, *то* $f(x)g(x) \sim \sim \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$, *и при условии, что g и $\tilde{g}$ не обращаются в 0 в некоторой проколотой окрестности a, также* $\dfrac{f(x)}{g(x)} \sim \dfrac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$ *при* $x \to a$.
3) *если* $f(x) \sim g(x)$ *при* $x \to a$, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ *существуют одновременно* (в $\overline{\mathbb{R}}$), *и если существуют, то равны.*

□ Пусть функции α и β в некоторой проколотой окрестности точки a связаны соотношением $\alpha(x) = 1 + \beta(x)$. Тогда п. 1 следует из равносильности условий $\alpha(x) \to 1$ и $\beta(x) \to 0$ при $x \to a$. Утверждения п. 2 доказываются аналогично. При этом следует учесть, что множества определения $\dfrac{f}{g}$ и $\dfrac{\tilde{f}}{\tilde{g}}$ имеют непустое пересечение, для которого a является предельной точкой.

Докажем п. 3. Пусть $f(x) = \alpha(x)g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки a и $\alpha(x) \to 1$ при $x \to a$. Тогда по свойству локализации $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует одновременно с $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)g(x)$, который существует одновременно с $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. В случае существования все три предела равны. $\blacksquare$

Пример. $\sin x = x + o(x),\ \ x \to 0.$

Следующий случай асимптотического равенства известен со школы.

Определение. Пусть функция f определена в некоторой окрестности $+\infty$, $k, b \in \mathbb{R}$. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* функции f при $x \to +\infty$, если

$$f(x) = kx + b + o(1), \qquad x \to +\infty.$$

Аналогично определяется наклонная асимптота при $x \to -\infty$.

Теорема 4.15. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности $+\infty$, k, $b \in \mathbb{R}$. Прямая $y = kx + b$ — наклонная асимптота f при $x \to +\infty$ тогда и только тогда, когда*

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \textit{и} \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx).$$

$\square$ ($\Rightarrow$) Пусть $y = kx + b$ — наклонная асимптота f при $x \to +\infty$, тогда $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Поэтому $\frac{f(x)}{x} - k = (b + \alpha(x))\frac{1}{x} \to 0$ и $f(x) - kx = b + \alpha(x) \to b$ при $x \to +\infty$.

($\Leftarrow$) Положим $\alpha(x) = f(x) - kx - b$, где k, b — пределы из условия. Тогда $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ и $f(x) = kx + b + \alpha(x)$. $\blacksquare$

Определение. Пусть $a \in \mathbb{R}$, функция f определена на (α, a) или (a, β). Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* f, если хотя бы один из пределов $f(a + 0)$ или $f(a - 0)$ равен $-\infty$ или $+\infty$.

5. Дифференцируемые функции

В основе дифференциального исчисления лежит идея, что график «хорошей» функции локально выглядит как прямая. Поиск углового коэффициента такой прямой приводит к понятию производной.

5.1. Определение производной

В этом разделе I означает невырожденный промежуток.

Определение. Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. *Производной* функции f в точке a называется $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ и обозначается $f'(a)$ или $\dfrac{df(a)}{dx}$. Если этот предел конечен, то говорят, что функция f *дифференцируема* в точке a.

Выражение $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ называется *разностным отношением.*

Пример. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = kx + b$ $(k, b \in \mathbb{R})$. Тогда $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{k(x-a)}{x-a} = k$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

Геометрический смысл производной. Пусть функция f дифференцируема в точке a. Прямая $\ell_a\colon y = f(a) + f'(a)(x - a)$ называется *касательной* к графику f в точке $(a, f(a))$. Из определения производной следует, что угловой коэффициент прямой

$$y = \frac{f(t)-f(a)}{t-a}(x-a) + f(a),$$

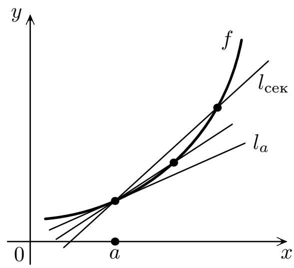

Рис. 5.1

проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(t, f(t))$ (и называемой *секущей*), стремится к угловому коэффициенту касательной при $t \to a$ (см. рис. 5.1).

Важнейшей переформулировкой определения дифференцируемости является

Теорема 5.1 (о линейной аппроксимации). *Функция f дифференцируема в точке a тогда и только тогда, когда найдется такое число A, что*

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + o(x-a), \quad x \to a. \tag{5.1}$$

В этом случае $A = f'(a)$.

□ Определим функцию $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$, $\alpha(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$ при $x \neq a$ и $\alpha(a)$ произвольно. Тогда $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ и $f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \alpha(x)(x-a)$, т.е. выполнено (5.1) с $A = f'(a)$. Обратно, перенеся в равенстве (5.1) число $f(a)$ в левую часть, поделив на $x - a$ и перейдя к пределу при $x \to a$, получим, что $f'(a) = A$, т.е. функция f дифференцируема в точке a. ■

Следствие. *Если функция f дифференцируема в точке a, то она непрерывна в точке a.*

□ Переходя в (5.1) к пределу при $x \to a$, получим $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Это означает, что f непрерывна в точке a. ■

Замечание. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, непрерывна, но не дифференцируема в нуле, поскольку $\lim\limits_{x\to\pm0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm0} \dfrac{|x|}{x} = \pm1$.

Рассмотрение односторонних пределов приводит к следующему обобщению производной.

Определение. Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. Предел $f'_+(a) = \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ называется *правой производной* f в точке a.

Предел $f'_-(a) = \lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ называется *левой производной* f в точке a.

Замечание. Если a — внутренняя точка I, то для существования (в $\overline{\mathbb{R}}$) производной функции $f\colon I \to \mathbb{R}$ в точке a необходимо и достаточно, чтобы f имела в точке a равные односторонние производные, при этом $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$. Это вытекает из леммы 4.1 об односторонних пределах. Если a — концевая точка I, то $f'(a)$ существует одновременно с соответствующей односторонней производной.

Задача. Докажите, что если функция f имеет конечные односторонние производные в точке a (необязательно равные), то f непрерывна в этой точке.

Перечислим основные правила дифференцирования — нахождения производных.

Теорема 5.2. *Пусть f, $g\colon I \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Если функции f и g дифференцируемы в точке a, то в этой точке дифференцируемы функции $\alpha f + \beta g$, fg и при дополнительном условии $g \neq 0$ на I также и $\frac{f}{g}$. При этом*

1) $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$;

2) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;

3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

□ Дифференцируемость линейной комбинации и формула для ее производной следуют из линейности предела. Докажем формулу для произведения. Имеем

$$fg(x) - fg(a) = f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a)).$$

Поделим обе части этого равенства на $x - a$ и перейдем к пределу при $x \to a$. Тогда, учитывая непрерывность f в точке a, по определению производной получаем, что

$$\lim_{x \to a} \frac{fg(x) - fg(a)}{x - a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Это доказывает п. 2.

Переходя к пределу при $x \to a$ в равенстве

$$\frac{(1/g)(x) - (1/g)(a)}{x - a} = \frac{1}{g(x)g(a)} \frac{g(a) - g(x)}{x - a},$$

получим $(1/g)'(a) = -g'(a)/g^2(a)$. Значит, функция $1/g$ дифференцируема в точке a. Теперь п. 3 следует из п. 2. ■

Теорема 5.3 (производная композиции). *Пусть $I, J \subset \subset \mathbb{R}$ — промежутки, $f\colon I \to J$ и $g\colon J \to \mathbb{R}$. Если функция f дифференцируема в точке a, функция g дифференцируема в точке $b = f(a)$, то композиция $g \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a, причем*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

□ Определим функцию $h\colon J \to \mathbb{R}$, $h(y) = \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b}$, $y \neq b$, и $h(b) = g'(b)$. Покажем, что для всех $x \in I$, $x \neq a$, выполнено

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = h(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{5.2}$$

Действительно, если $f(x) = f(a)$, то обе части равны нулю и равенство выполняется, если $f(x) \neq f(a)$, то оно вытекает из представления

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Отметим, что функция h непрерывна в точке b, поэтому по свойству предела композиции $\lim\limits_{x \to a} h(f(x)) = g'(b) = h(b)$. Тогда, переходя в (5.2) к пределу при $x \to a$, получим

$$\lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} h(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g'(b) f'(a),$$

что и требовалось. ■

Теорема 5.4 (производная обратной функции). *Пусть функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ непрерывна и строго монотонна на промежутке I. Если f дифференцируема в точке $a \in I$ и $f'(a) \neq 0$, то обратная функция $f^{-1}\colon f(I) \to I$ дифференцируема в точке $b = f(a)$, причем*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

□ По теореме об обратной функции на промежутке $J = f(I)$ определена функция f^{-1}, которая там непрерывна и строго монотонна. Следовательно, $f^{-1}(t) \to a$ при $t \to b$ и $f^{-1}(t) \neq a$ при $t \neq b$. Поэтому по свойству предела композиции существует

$$\lim_{t \to b} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(b)}{t - b} =$$

$$= \lim_{t \to b} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(t)) - f(f^{-1}(b))} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)},$$

что завершает доказательство. ■

Замечание. Если при выполнении остальных условий $f'(a) = 0$, то обратная функция f^{-1} не дифференцируема в точке b. Иначе дифференцирование тождества $f^{-1}(f(x)) = x$ в точке a приводит к невозможному равенству $(f^{-1})'(b) f'(a) = 1$.

Применим правила дифференцирования к основным элементарным функциям.

Таблица производных

1) $c' = 0$; 2) $(a^x)' = a^x \ln a,\ \ a > 0,\ a \neq 1$;

3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},\ \ a > 0,\ a \neq 1$; 4) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},\ \ \alpha \in \mathbb{R}$;

5) $(\sin x)' = \cos x$; 6) $(\cos x)' = -\sin x$;

7) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; 8) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

9) $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,\, 1)$;

10) $(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

□ 1) Доказательство вытекает непосредственно из определения производной.

2) По второму замечательному пределу

$$(e^x)' = \lim_{t\to x} \frac{e^t - e^x}{t-x} = e^x \lim_{t\to x} \frac{e^{t-x}-1}{t-x} = e^x.$$

По правилу дифференцирования композиции

$$(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

3) По теореме о производной обратной функции $(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a}$, где $a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x$.

4) Пусть $\alpha \in \mathbb{N}$. Покажем, что $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$. При $n = 1$ равенство уже установлено. Если равенство верно для n, то в силу представления $x^{n+1} = x^n \cdot x$ по правилу дифференцирования произведения имеем $(x^{n+1})' = (x^n)'x + x^n(x)' = (n+1)x^n$.

Пусть $-\alpha \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$. Так как $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, то по правилу дифференцирования частного $(x^{-n})' = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{-n-1}$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $x > 0$. Тогда

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

5) По первому замечательному пределу и непрерывности функции cos имеем

$$(\sin x)' = \lim_{t\to x} \frac{\sin t - \sin x}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{2\cos\frac{t+x}{2}\sin\frac{t-x}{2}}{t-x} = \lim_{t\to x} \cos\frac{t+x}{2} \cdot \lim_{t\to x} \frac{\sin\frac{t-x}{2}}{\frac{t-x}{2}} = \cos x.$$

6) Имеем
$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x.$$

7) По правилу дифференцирования частного при $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, имеем
$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

8) Имеем
$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' =$$
$$= \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - (\sin x)' \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

9) Имеем $(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}$, где $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$. Так как $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$, то $\cos y > 0$, а значит, $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$.

10) Имеем
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y},$$
где $y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x$, $x \in \mathbb{R}$. ■

Определение. Говорят, что функция f дифференцируема на множестве D, если она дифференцируема в каждой точке из D. Функция $x \mapsto f'(x)$, $x \in D$, также называется *производной* функции f и обозначается f'.

Пусть φ, $\psi\colon T \to \mathbb{R}$, $E = \varphi(T)$. Будем говорить, что функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ *параметрически задана* системой уравнений
$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad t \in T,$$
если для любых t_1, t_2, $t \in T$ из $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ следует, что $\psi(t_1) = \psi(t_2)$ и $f(x) = \psi(t)$ при $x = \varphi(t)$. В частности, если функция φ обратима, то $f = \psi \circ \varphi^{-1}$.

Следствие. *Пусть T — промежуток, функция φ непрерывна и строго монотонна на T, φ и ψ дифференцируемы в точке t и*

$\varphi'(t) \neq 0$. *Тогда параметрически заданная функция* $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ *дифференцируема в точке* $x = \varphi(t)$, *причем*

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

□ По правилам дифференцирования композиции и обратной функции

$$f'(x) = (\psi\circ\varphi^{-1})'(x) = \psi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)(\varphi^{-1})'(x) = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

что завершает доказательство. ■

5.2. Дифференциал функции

Пусть I — промежуток, $f\colon I \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a.

Определение. Линейная функция $h \mapsto f'(a)h$, $h \in \mathbb{R}$, называется *дифференциалом* функции f в точке a и обозначается df_a.

Для функции $f(x) = x$ в любой точке $dx(h) = 1 \cdot h = h$. Поэтому значение дифференциала $df_a(h) = f'(a)dx(h)$ или в функциональной записи $df_a = f'(a)dx$ (см. рис. 5.2).

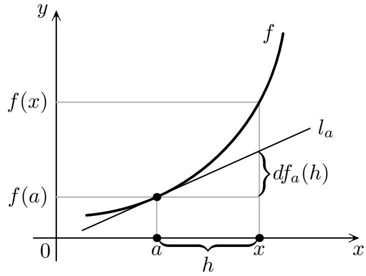

Рис. 5.2

Получим правила вычисления дифференциалов.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 5.2 *имеем*

$$d(\alpha f + \beta g)_a = \alpha df_a + \beta dg_a,$$

$$d(fg)_a = g(a)df_a + f(a)dg_a \quad \text{и} \quad d\left(\frac{f}{g}\right)_a = \frac{g(a)df_a - f(a)dg_a}{g^2(a)}.$$

□ Достаточно обе части формул для производных в теореме 5.2 домножить на dx. ■

Следствие 2. *В условиях теоремы* 5.3 *имеем* $d(g \circ f)_a = dg_b \circ df_a$.

□ Верна следующая цепочка равенств

$$d(g \circ f)_a(h) = g'(f(a))f'(a)dx(h) = g'(f(a))df_a(h) = dg_b(df_a(h)), \quad h \in \mathbb{R}. \ ■$$

Замечание. Из доказательства следствия вытекает, что формула $df_x = f'(x)dx$ верна независимо от того, является ли x независимой переменной или функцией $x = \varphi(t)$ (*инвариантность дифференциала*).

Следствие 3. *В условиях теоремы* 5.4 *для дифференциала обратной функции* f^{-1} *имеет место равенство* $df_b^{-1} = (df_a)^{-1}$.

$\square$ Это вытекает из того, что $h \mapsto \dfrac{1}{f'(a)}h$ является обратной к линейной функции $h \mapsto f'(a)h$. $\blacksquare$

Задача. Докажите теоремы 5.2– 5.4, пользуясь представлением (5.1).

5.3. Теоремы о среднем

Определение. Пусть функция f определена на интервале, содержащем a. Точка a называется точкой *локального максимума* (*локального минимума*) функции f, если существует такое $\delta > 0$, что $f(x) \leqslant f(a)$ $(f(x) \geqslant f(a))$ для всех $x \in \mathring{B}_\delta(a)$. Если в определении неравенство строгое, то a называется точкой *строгого локального максимума* (*минимума*) функции f.

Точки локального максимума или локального минимума называются точками *локального экстремума*.

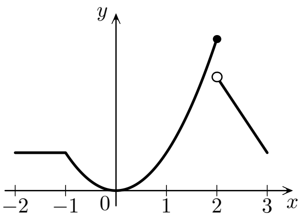

Рис. 5.3

Для функции f (см. рис. 5.3) точка $x = 2$ является точкой строгого локального максимума, точка $x = 0$ является точкой строгого локального минимума, точка $x = -1$ является точкой локального максимума, точки $x < -1$ одновременно являются точками и локального максимума, и локального минимума.

Следующая теорема дает *необходимое условие* экстремума.

Теорема 5.5 (Ферма). *Пусть функция f определена на интервале, содержащем a. Если a — точка локального экстремума f и функция f имеет производную в точке a, то $f'(a) = 0$.*

$\square$ Пусть для определенности a является точкой локального максимума функции f. По определению найдется такое $\delta > 0$, что $f(x) \leqslant f(a)$ для всех $x \in \mathring{B}_\delta(a)$. Поэтому $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$ на

$(a,\, a+\delta)$, а значит, $f'(a) = f'_+(a) = \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$. Аналогично $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$ на $(a - \delta,\, a)$, а значит, $f'(a) = f'_-(a) = \lim\limits_{x \to a-0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$. Следовательно, $f'(a) = 0$. ■

Геометрическая интерпретация. Если график функции в точке локального экстремума имеет касательную, то эта касательная горизонтальна (см. рис. 5.4).

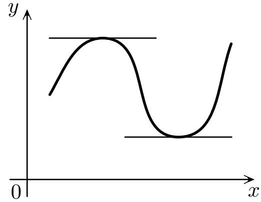

Рис. 5.4

До конца параграфа отрезок $[a,\, b]$ предполагается невырожденным.

Теорема 5.6 (Ролль). *Если функция f непрерывна на $[a,\, b]$, дифференцируема на $(a,\, b)$ и $f(a) = f(b)$, то найдется такая точка $c \in (a,\, b)$, что $f'(c) = 0$.*

□ По теореме 4.7 Вейерштрасса существуют точки $x_1, x_2 \in [a,\, b]$, такие что $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$ для всех $x \in [a,\, b]$. Если x_1 и x_2 — концевые точки $[a,\, b]$, то по условию $f(x_1) = f(x_2)$. Поэтому f постоянна на $[a,\, b]$ и в качестве c можно взять любую точку из $(a,\, b)$. В противном случае хотя бы одна из точек x_i лежит в (a, b). По теореме 5.5 Ферма $f'(x_i) = 0$, поэтому можно положить $c = x_i$. ■

Геометрическая интерпретация. В условиях теоремы Ролля найдется точка графика, касательная в которой горизонтальна.

Задача. Покажите на примерах, что все условия теоремы Ролля существенны.

Следствие. *Пусть функция f дифференцируема на промежутке I. Тогда между двумя нулями f на I существует по крайней мере один нуль f'.*

Следующая теорема играет особую роль в дифференциальном исчислении.

Теорема 5.7 (Лагранж). *Если функция f непрерывна на $[a,\, b]$ и дифференцируема на $(a,\, b)$, то найдется такая точка $c \in (a,\, b)$, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.*

□ Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

Функция h непрерывна на $[a,\,b]$, дифференцируема на $(a,\,b)$ и $h(a)=h(b)=0$. Поэтому по теореме 5.6 Ролля найдется такая точка $c\in(a,\,b)$, что $h'(c)=0$, т.е. $f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$. ■

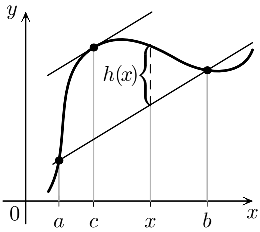

Рис. 5.5

Геометрическая интерпретация. Равенство $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ можно интерпретировать как равенство угловых коэффициентов прямых. Поэтому в условиях теоремы Лагранжа найдется точка графика, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей концы графика (см. рис. 5.5).

Задача. Пусть функция f непрерывна на $[a,\,b)$ и дифференцируема на $(a,\,b)$. Покажите, что если существует $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x)$, то существует $f'_+(a)=f'(a+0)$. Аналогично для $f'_-(a)$.

Следствие (оценка приращения функции). *Пусть функция f непрерывна на промежутке I и дифференцируема на $\operatorname{int} I$. Если найдется константа M, такая что $|f'(x)|\leqslant M$ на $\operatorname{int} I$, то $|f(y)-f(x)|\leqslant M|y-x|$ для всех $x,\,y\in I$, т.е. f липшицева. В частности, f равномерно непрерывна на I.*

□ Пусть $x,\,y\in I$. По теореме Лагранжа на интервале с концами $x,\,y$ найдется точка c, такая что $|f(y)-f(x)|=|f'(c)||y-x|$. Так как $c\in\operatorname{int} I$, то $|f'(c)|\leqslant M$, откуда следует оценка. ■

Теорема 5.8 (Коши). *Если функции f и g непрерывны на $[a,\,b]$, дифференцируемы на $(a,\,b)$ и $g'\neq 0$ на $(a,\,b)$, то найдется такая точка $c\in(a,\,b)$, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.*

□ Отметим, что $g(b)\neq g(a)$ (иначе по теореме 5.6 Ролля нашлась бы точка $\xi\in(a,\,b)$, в которой $g'(\xi)=0$). Рассмотрим функцию $h(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$. Функция h непрерывна на $[a,\,b]$, дифференцируема на $(a,\,b)$ и $h(a)=h(b)=f(a)$. Поэтому по теореме Ролля найдется такая точка $c\in(a,\,b)$, что $h'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0$. Так как $g'(c)\neq 0$, то $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=$ $=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. ■

Геометрический смысл теоремы Коши такой же, как у теоремы Лагранжа, если рассматривать параметрически заданную функцию: $x = g(t)$, $y = f(t)$ $(t \in [a, b])$. Согласно следующим двум теоремам при выполнении условий теоремы Коши функция g обратима и, значит, эти уравнения действительно определяют y как функцию от x.

Замечание. Поскольку в теореме Ферма предполагается лишь существование производной, то опирающиеся на нее теоремы Ролля, Лагранжа и Коши остаются справедливыми при замене условия дифференцируемости функции на (a, b) существованием там производной в $\overline{\mathbb{R}}$.

Пример. Функция $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ дифференцируема на $\mathbb{R}$, причем $f'(0) = 0$ и $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ при $x \neq \neq 0$. Поскольку не существует односторонних пределов $f'(\pm 0)$, то производная f' имеет разрыв в нуле.

Хотя производная и может иметь разрывы, она обязана принимать все промежуточные значения.

Теорема 5.9 (Дарбу). *Если функция f дифференцируема на $[a, b]$, то для любого числа s, лежащего строго между $f'(a)$ и $f'(b)$, найдется такое $c \in (a, b)$, что $f'(c) = s$.*

$\square$ Пусть для определенности $f'(a) < s < f'(b)$. Положим $\varphi(x) = f(x) - sx$. Тогда φ дифференцируема на $[a, b]$ и

$$\varphi'(a) = f'(a) - s < 0 < f'(b) - s = \varphi'(b).$$

По теореме 4.7 Вейерштрасса существует точка $c \in [a, b]$, такая что $\varphi(c) = \inf_{[a, b]} \varphi(x)$. Если предположить, что $c = a$, то $\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} \geqslant 0$ при всех $x \in (a, b]$, а значит, и $\varphi'(a) \geqslant 0$, что противоречит условию. Аналогично доказывается, что $c \neq b$. Итак, $c \in (a, b)$ и, значит, по теореме Ферма $\varphi'(c) = 0$, т.е. $f'(c) = s$. $\blacksquare$

5.4. Приложения теорем о среднем

Среди многочисленных теоретических приложений теоремы Лагранжа о среднем особо выделяется следующее.

Теорема 5.10 (условия монотонности). *Пусть функция f непрерывна на промежутке I и дифференцируема на* $\operatorname{int} I$.

1) *Функция f нестрого возрастает (нестрого убывает) на I тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ ($\leqslant$) для любой точки* $x \in \operatorname{int} I$.
2) *Если $f'(x) > 0$ (< 0) для любой точки $x \in \operatorname{int} I$, то функция f строго возрастает (строго убывает) на I.*
3) *Функция f постоянна на I тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ для любой точки $x \in \operatorname{int} I$.*

□ Докажем п. 1.

($\Rightarrow$) Пусть f нестрого возрастает на I, $x \in \operatorname{int} I$. Тогда $f(y) \geqslant f(x)$ для всех $y \in (x, \sup I)$ и, значит, $f'(x) = f'_+(x) = \lim\limits_{y \to x+0} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$.

($\Leftarrow$) Пусть $x, y \in I$, $x < y$. По теореме Лагранжа $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ для некоторой точки $c \in (x, y)$. Поскольку c — внутренняя точка I, значение $f'(c) \geqslant 0$ и, значит, $f(x) \leqslant f(y)$. Следовательно, функция f нестрого возрастает на I.

Случай нестрого убывающей функции сводится к рассмотренному заменой f на $-f$.

Докажем п. 2. Пусть $x, y \in I$, $x < y$. В случае положительности (отрицательности) f' на $\operatorname{int} I$ имеем $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0$ (<0). Следовательно, f строго возрастает (строго убывает) на I.

Пункт 3 следует из п. 1. ■

Замечание. Обратное утверждение п. 2 неверно. Например, функция $f(x) = x^3$ строго возрастает на $\mathbb{R}$, но $f'(0) = 0$.

Пример. Пусть функция f дифференцируема на промежутке I и $f'(x) = f(x)$ для всех $x \in I$. Покажем, что $f(x) = ce^x$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$.

□ Рассмотрим функцию $g(x) = f(x)e^{-x}$. Функция g дифференцируема на I, причем $g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x}$. Так как $f' = f$, то $g' = 0$ и, значит, $g = c$ на I для некоторой константы c. Следовательно, $f(x) = ce^x$ для всех $x \in I$. ■

Теорема 5.10 дает удобный на практике признак существования экстремума.

Следствие (достаточные условия экстремума). *Пусть функция f определена на интервале (α, β) и $a \in (\alpha, \beta)$. Пусть f дифференцируема на $(\alpha, \beta) \setminus \{a\}$ и непрерывна в точке a. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Если $f' \geqslant 0$ на (α, a) и $f' \leqslant 0$ на (a, β), то a — точка локального максимума f (строгого, если неравенства для производной строгие).*
2) *Если $f' \leqslant 0$ на (α, a) и $f' \geqslant 0$ на (a, β), то a — точка локального минимума f (строгого, если неравенства для производной строгие).*

□ Если f удовлетворяет условиям п. 1, то по теореме 5.10 функция f нестрого возрастает на $(\alpha, a]$ и нестрого убывает на $[a, \beta)$. Так что $f(x) \leqslant f(a)$ для всех $x \in (\alpha, \beta)$, а значит, a — точка локального максимума f. Если неравенства для производной строгие, то возрастание/убывание строгое. Так что $f(x) < f(a)$ для всех $x \in (\alpha, \beta)$, $x \neq a$, а значит, a — точка строгого локального максимума f. Доказательство п. 2 аналогично. ■

Задача. Покажите, что для функции $f(x) = x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$, точка $x = 0$ является точкой строгого минимума, однако условия предыдущего следствия не выполняются.

Следствие (о доказательстве неравенств). *Пусть функции f, g непрерывны на $[a, b)$ и дифференцируемы на (a, b), $f(a) \leqslant g(a)$ и $f'(x) \leqslant g'(x)$ $(<)$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда $f(x) \leqslant g(x)$ $(<)$ для всех $x \in (a, b)$.*

□ Положим $h = g - f$. Тогда $h' = g' - f' \geqslant 0$ $(>)$ на (a, b) и, значит, по теореме 5.10 функция h возрастает (строго возрастает) на $[a, b)$. Следовательно, $h(x) \geqslant h(a)$ $(>)$ для всех $x \in (a, b)$. Так как $h(a) = g(a) - f(a) \geqslant 0$, то $h(x) = g(x) - f(x) \geqslant 0$ $(>)$ для всех $x \in (a, b)$. ■

Пример. Покажем, что при всех $x \geqslant 0$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$(-1)^n \left(\cos x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\right) \geqslant 0,$$

$$(-1)^n \left(\sin x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}\right) \geqslant 0.$$

□ Неравенства установим методом математической индукции. Неравенство $\cos x \leqslant 1$ верно. Применяя предыдущее следствие к функциям $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$ на $[0, +\infty)$, получим $\sin x \leqslant x$ при $x \geqslant 0$. Это доказывает утверждение для $n = 1$. Пусть неравенства верны для n. Положим $g(x) = (-1)^{n+1}\cos x$, $f(x) = (-1)^{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ на $[0, +\infty)$. Тогда $f(0) = g(0) = (-1)^{n+1}$ и по второму неравенству (для n) $f'(x) \leqslant g'(x)$ при $x \geqslant 0$. Тогда по следствию $f(x) \leqslant g(x)$ при $x \geqslant 0$, т.е. первое неравенство верно для $n + 1$. С учетом этого устанавливаем справедливость второго неравенства для $n + 1$. ■

Отметим, что при $x > 0$ доказываемые неравенства строгие: утверждение для $n + 1$ влечет строгое неравенство для n.

Замечание. Получим оценку на число π. По формуле удвоения $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ и неравенству $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$ заключаем, что $\cos x \geqslant 2\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^2 - 1 > 0$ для всех $x \in \left(0, \frac{3}{2}\right]$. Аналогично по неравенству $\cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ заключаем, что $\cos 2 \leqslant 2\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24}\Big)^2 - 1 < 0$. Следовательно, $\frac{\pi}{2} \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$, т.е. $\pi \in (3, 4)$.

Теорема 5.10 допускает уточнения.

Лемма 5.1*. *Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и A — не более чем счетное множество на $[a, b]$. Если f дифференцируема на $[a, b] \setminus A$ и $f'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [a, b] \setminus A$, то f нестрого возрастает на $[a, b]$.*

□ Нам достаточно показать, что $f(a) \leqslant f(b)$: общее утверждение можно доказать применением этого неравенства на произвольном подотрезке $[a, b]$.

Пусть сначала $f' > 0$ на $[a, b] \setminus A$. Предположим $f(a) > f(b)$. Поскольку множество $f(A)$ не более чем счетно, найдется точка $d \notin f(A)$, $f(a) > d > f(b)$. Положим $B = \{x \in [a, b]\colon f(x) = d\}$. В силу непрерывности f множество B непусто и замкнуто. Тогда $c = \sup B$ лежит в B, $a < c < b$ и, значит, f дифференцируема в c, $f'(c) > 0$. С другой стороны, $f(b) < d = f(c)$ и, значит, $f(x) < d$ для всех $x \in (c, b)$ по теореме о промежуточных значениях. Поэтому $f'(c) = \lim\limits_{x\to c+0}\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$, противоречие.

Пусть теперь $f' \geqslant 0$ на $[a,\, b] \setminus A$. Положим $g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon x$. Тогда $g'_\varepsilon > 0$ и, значит, по доказанному $g_\varepsilon(a) \leqslant g_\varepsilon(b)$, т.е. $f(a) \leqslant f(b) + \varepsilon(b-a)$. Так как $\varepsilon > 0$ — любое, то $f(a) \leqslant f(b)$. ■

Следствие. *Пусть функция f непрерывна на $[a,\, b]$ и дифференцируема на $[a,\, b] \setminus A$, где A не более чем счетно. Пусть $m \leqslant f' \leqslant M$ на $[a,\, b] \setminus A$. Тогда*

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

□ Для доказательства правого неравенства достаточно применить предыдущее утверждение к функции $\varphi(x) = Mx - f(x)$ на $[a,\, b]$, для левого — к функции $\psi(x) = f(x) - mx$ на $[a,\, b]$. ■

Важным приложением теоремы Коши о среднем являются правила Лопиталя раскрытия неопределенностей.

Теорема 5.11 (Лопиталь). *Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функции f, g дифференцируемы на $(a,\, b)$ и $g' \neq 0$ на $(a,\, b)$. Пусть*

1) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$;

$2'$) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$ *или* $2''$) $\lim\limits_{x\to a+0} |g(x)| = +\infty$.

Тогда существует $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

□ Так как $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a,\, b)$, то либо $g'(x) > 0$ для всех $x \in (a,\, b)$, либо $g'(x) < 0$ для всех $x \in (a,\, b)$ по теореме 5.9. Поэтому g строго монотонна $(a,\, b)$. Без ограничения общности можно считать, что g строго возрастает. Тогда $g(x) - g(t) > 0$ для $a < t < x < b$, и по теореме Коши найдется точка $c \in (t,\, x)$, такая что $\dfrac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Рассмотрим случай $L \in \mathbb{R}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $x_0 \in (a,\, b)$ так, что $\left|\dfrac{f'(c)}{g'(c)} - L\right| < \varepsilon$ для всех $c \in (a,\, x_0)$. Тогда при всех x, t, $a < t < x < x_0$, выполнено

$$L - \varepsilon < \frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} < L + \varepsilon. \qquad (5.3)$$

Если выполнено $2'$, то переходя в (5.3) к пределу при $t \to a+0$, получим, что $L - \varepsilon \leqslant f(x)/g(x) \leqslant L + \varepsilon$ для всех $x \in (a,\, x_0)$. Следовательно, $f(x)/g(x) \to L$ при $x \to a+0$.

Пусть выполнено $2''$. Так как $g' > 0$, то $g(t) \to -\infty$ при $t \to a+0$. Уменьшая x, если необходимо, можно считать, что $g(x) < 0$. Домножив оба неравенства (5.3) на положительную дробь $(g(t) - g(x))/g(t)$, имеем

$$(L-\varepsilon)\left(1 - \frac{g(x)}{g(t)}\right) < \frac{f(t) - f(x)}{g(t)} < (L+\varepsilon)\left(1 - \frac{g(x)}{g(t)}\right)$$

или

$$(L-\varepsilon)\left(1 - \frac{g(x)}{g(t)}\right) + \frac{f(x)}{g(t)} < \frac{f(t)}{g(t)} < (L+\varepsilon)\left(1 - \frac{g(x)}{g(t)}\right) + \frac{f(x)}{g(t)}.$$

Левая и правая части полученных неравенств при $t \to a+0$ стремятся к $L-\varepsilon$ и $L+\varepsilon$ соответственно. Поэтому найдется такое $d \in (a,\, x)$, что при всех $t \in (a,\, d)$ эти выражения попадут в ε-окрестности чисел $L-\varepsilon$ и $L+\varepsilon$, а значит,

$$L - 2\varepsilon < \frac{f(t)}{g(t)} < L + 2\varepsilon.$$

Следовательно, $f(t)/g(t) \to L$ при $t \to a+0$.

Рассмотрим случай $L = +\infty$. Пусть $M > 0$. Найдем такое $x_0 \in \in (a,\, b)$, что $f'(c)/g'(c) > M$ для всех $c \in (a,\, x_0)$, а значит,

$$\frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} > M, \tag{5.4}$$

как только $a < t < x < x_0$.

Если выполнено $2'$, то переходя в (5.4) к пределу при $t \to a+0$, получим $f(x)/g(x) \geqslant M$ для всех $x \in (a,\, x_0)$. Так как $M > 0$ — любое, то $f(x)/g(x) \to +\infty$ при $x \to a+0$.

Если выполнено $2''$, то, домножив неравенство (5.4) на $(g(t) - - g(x))/g(t)$ и перенося $f(x)/g(t)$ в правую часть, имеем

$$\frac{f(t)}{g(t)} > M\left(1 - \frac{g(x)}{g(t)}\right) + \frac{f(x)}{g(t)}.$$

Правая часть полученного неравенства при $t \to a+0$ стремится к M. Поэтому найдется такое $d \in (a,\, x)$, что $f(t)/g(t) > M/2$ при всех $t \in (a,\, d)$. Следовательно, $f(t)/g(t) \to +\infty$ при $t \to a+0$.

Случай $L = -\infty$ рассматривается аналогично. ■

Замечание. Теорема 5.11 верна и при $x \to b-0$. Достаточно сделать замену x на $-x$.

Примеры. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0$ при всех $\alpha>0$.

В самом деле, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha x^\alpha}=0$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{a^x}=0$ при всех $\alpha>0$ и $a>1$.

Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{a^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{a^x\ln a}=0$. Так как $\dfrac{x^\alpha}{a^x}=\left(\dfrac{x}{(a^{1/\alpha})^x}\right)^\alpha$ и $\lim\limits_{y\to+0}y^\alpha=0$, то общий случай следует по свойству предела композиции.

Итак, степенная функция при $x\to+\infty$ растет быстрее логарифмической, но медленнее показательной функции.

Задача. Покажите, что существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ для $f(x)=x+\sin x$ и $g(x)=x$, однако его нельзя найти по правилу Лопиталя.

5.5. Производные высших порядков

Производные высших порядков определяются индуктивно.

Определение. Пусть $n\in\mathbb{N}$. Положим $f^{(1)}=f'$. Если $n>1$, функция $f^{(n-1)}$ определена в некоторой окрестности точки a и дифференцируема в самой точке a, то функция f называется *дифференцируемой n раз* в точке a, и ее производная n-го порядка в точке a определяется равенством $f^{(n)}(a)=(f^{(n-1)})'(a)$.

Удобно также считать $f^{(0)}=f$.

Замечание. Существование производной n-го порядка в точке a при $n>1$ влечет существование производной $(n-1)$-го порядка в некоторой окрестности точки a.

В силу линейности взятия производной по индукции устанавливаем $(\alpha f+\beta g)^{(n)}=\alpha f^{(n)}+\beta g^{(n)}$, если производные в правой части определены. Для производной n-го порядка произведения имеет место

Теорема 5.12 (формула Лейбница). *Если функции f и g дифференцируемы n раз в точке x, то функция fg также дифференцируема n раз в этой точке и*

$$(fg)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

$\square$ Докажем индукцией по n. При $n=1$ равенство известно. Предположим, что утверждение верно для n. Тогда (опуская аргумент x) имеем

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} =$$

$$= f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f g^{(n+1)}.$$

Так как $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$, получаем равенство при $n+1$. $\blacksquare$

Пример. Найдем $f^{(n)}$ для функции $f(x) = x^2 e^{5x}$.
$\square$ При $n \geqslant 2$ имеем $(x^2 e^{5x})^{(n)} = C_n^0 x^2 (e^{5x})^{(n)} + C_n^1 (x^2)'(e^{5x})^{(n-1)} + C_n^2 (x^2)''(e^{5x})^{(n-2)} = x^2 5^n e^{5x} + n 2x 5^{n-1} e^{5x} + \dfrac{n(n-1)}{2} 2 \cdot 5^{n-2} e^{5x} = 5^{n-2} e^{5x}(25x^2 + 10nx + n(n-1))$ (это выражение дает значение $f^{(n)}(x)$ и при $n = 0,\ 1$, что проверяется непосредственно). $\blacksquare$

Формула Фаа ди Бруно выражает производную высшего порядка композиции через производные сомножителей. При ее изложении следуем [7].

Теорема 5.13* (Фаа ди Бруно). *Пусть функция $f\colon I \to J$ дифференцируема n раз в точке a, функция $g\colon J \to \mathbb{R}$ дифференцируема n раз в точке $b = f(a)$. Тогда композиция $g \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ дифференцируема n раз в точке a, причем*

$$(g \circ f)^{(n)}(a) = \sum \frac{n!}{k_1! \ldots k_n!} g^{(m)}(b) \left(\frac{f'(a)}{1!}\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right)^{k_n},$$

где суммирование ведется по всем целым неотрицательным $k_1, \ldots, k_n$ с $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$, и $m = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

$\square$ Сначала докажем комбинаторный аналог формулы: пусть f и g дифференцируемы достаточное число раз, тогда

$$(g \circ f)^{(n)}(t) = \sum g^{(m)}(f(t)) \big(f'(t)\big)^{k_1} \big(f''(t)\big)^{k_2} \ldots \big(f^{(n)}(t)\big)^{k_n}, \quad (*)$$

где суммирование ведется по всем разбиениям чисел от 1 до n на блоки, причем для каждого разбиения число m — это количество блоков, а k_i — это количество блоков длиной i, т.е. содержащих ровно i чисел.

Например, при $n=3$ разбиению $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ соответствует выражение $g'''(f(t))\big(f'(t)\big)^3$, каждому из разбиений $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$; $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$; $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$ соответствует $g''(f(t))f'(a)f''(a)$, а разбиению $\{\{1, 2, 3\}\}$ — выражение $g'(f(t))f'''(a)$.

Доказательство формулы $(*)$ проведем индукцией по n. При $n=1$ утверждение справедливо по правилу дифференцирования композиции. Пусть формула верна для n. Продифференцируем обе части $(*)$.

Производная функции $g^{(m)}(f(t))(f'(t))^{k_1}\dots(f^{(n)}(t))^{k_n}$ равна

$$g^{(m+1)}(f(t))\big(f'(t)\big)^{k_1+1}\dots\big(f^{(n)}(t)\big)^{k_n}+ \\ +g^{(m)}(f(t))\Big(\big(f'(t)\big)^{k_1}\dots\big(f^{(n)}(t)\big)^{k_n}\Big)',$$

где второе выражение является суммой n слагаемых: i-е слагаемое получается из слагаемого в сумме $(*)$ заменой $(f^{(i)}(t))^{k_i}$ на его производную $k_i\big(f^{(i)}(t)\big)^{k_i-1}f^{(i+1)}(t)$.

Каждое разбиение $\{1, 2, \dots, n+1\}$ единственным образом получается из разбиения $\{1, 2, \dots, n\}$ присоединением числа $n+1$. Если мы добавляем $n+1$ в качестве отдельного блока, то общее количество блоков увеличивается на 1 и количество блоков длиной один увеличивается на 1. Это соответствует дифференцированию функции $g^{(m)}\big(f(t)\big)$, в результате которого получается $g^{(m+1)}(f(t))f'(t)$. Если же мы добавляем $n+1$ к уже существующему блоку (скажем) длиной i, то количество блоков длиной i уменьшается на 1, а количество блоков длиной $i+1$ увеличивается на 1; общее количество блоков остается неизменным. Такая операция может быть применена к каждому из k_i блоков. Это в точности соответствует дифференцированию $\big(f^{(i)}(t)\big)^{k_i}$, в результате которого получается $k_i\big(f^{(i)}(t)\big)^{k_i-1}f^{(i+1)}(t)$. Следовательно, формула $(*)$ верна при $n+1$.

Остается найти число разбиений $\{1,2,\dots,n\}$ на блоки. Каждой перестановке чисел от 1 до n можно сопоставить разбиение на блоки следующим образом: сначала идут k_1 блоков длиной 1, потом k_2 блоков длиной 2 и т.д. Теперь нужно разобраться сколько перестановок при таком отображении дают одно разбиение: в каждом из k_i блоков длиной i числа можно переставлять, таких перестановок ровно $(i!)^{k_i}$; кроме того, сами блоки можно переставлять, что дает еще $k_i!$ перестановок. Таким образом, число разбиений $\{1,\,2,\,\ldots,\,n\}$ на k_1 блоков длиной 1, k_2 блоков длиной 2 и т.д. равно $\dfrac{n!}{(1!)^{k_1}\ldots(n!)^{k_n}\,k_1!\ldots k_n!}$, что завершает доказательство. ■

Функция f называется *n раз дифференцируемой* на множестве E, если она n раз дифференцируема в каждой точке E.

5.6. Формула Тейлора

Определение. Пусть $n\in\mathbb{N}$ и функция f дифференцируема n раз в точке a. Тогда равенство

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+r_n(x)$$

называется *формулой Те́йлора* порядка n функции f в точке a. При этом многочлен $P_n(x)=P_{n,\,a,\,f}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ называется *многочленом Тейлора*, $r_n(x)=r_{n,\,a,\,f}(x)$ — *остаточным членом.*

Пример. Если $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}c_k(x-a)^k$, $0\leqslant m\leqslant n$, то $P^{(m)}(x)=$ $=\sum\limits_{k=m}^{n}\dfrac{k!}{(k-m)!}c_k(x-a)^{k-m}$, поэтому $P^{(m)}(a)=m!c_m$. Таким образом, $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ — формула Тейлора многочлена P в точке a.

Теорема 5.14 (остаточный член в форме Пеано). *Пусть $n\in\mathbb{N}$ и функция f дифференцируема n раз в точке a. Тогда*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o((x-a)^n),\qquad x\to a.$$

□ Пусть $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, тогда $P^{(k)}(a)=f^{(k)}(a)$, $0\leqslant$ $\leqslant k\leqslant n$. Поэтому для остаточного члена $r_n(x)=f(x)-P_n(x)$

выполнено $r_n(a) = r_n'(a) = \ldots = r_n^{(n)}(a) = 0$. По правилу Лопиталя (теорема 5.11) имеем

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{r_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to a} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}.$$

Последний предел существует по определению n-й производной в точке a:

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{r_n^{(n-1)}(x) - r_n^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!} r_n^{(n)}(a) = 0.$$

Следовательно, $r_n(x) = o((x-a)^n)$ при $x \to a$. ■

Следствие (условия экстремума). *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, *функция* f *дифференцируема* n *раз в точке* a *и* $f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$, *но* $f^{(n)}(a) \neq 0$. *Тогда*

1) *если* n *четно и* $f^{(n)}(a) < 0$ $(f^{(n)}(a) > 0)$, *то* a *является точкой строгого локального максимума (минимума) функции* f;
2) *если* n *нечетно, то* a *не является точкой локального экстремума функции* f.

□ По предыдущей теореме

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) = \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x)\right)(x-a)^n,$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Найдется такое $\delta > 0$, что $|\alpha(x)| < \left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right|$ для всех $x \in \mathring{B}_\delta(a)$, а значит, $\operatorname{sign}\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x)\right) = \operatorname{sign} f^{(n)}(a)$. Поэтому для всех $x \in \mathring{B}_\delta(a)$ выполнено

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(a)) = \operatorname{sign}\left(f^{(n)}(a)(x-a)^n\right).$$

Остается сравнить знаки сомножителей в правой части. ■

Теорема 5.15 (о единственности разложения). *Пусть* $p_1(x)$ *и* $p_2(x)$ *— два таких многочлена степени не выше* n, *что* $f(x) - p_1(x) = o((x-a)^n)$ *и* $f(x) - p_2(x) = o((x-a)^n)$ *при* $x \to a$. *Тогда* $p_1(x) = p_2(x)$.

$\square$ Положим $q(x) = p_1(x) - p_2(x)$. Вычитая из первого асимптотического равенства второе, получим $q(x) = o((x-a)^n)$ при $x \to a$. Покажем, что $q(x)$ — нулевой многочлен. Запишем его в виде $q(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n$ и предположим, что не все коэффициенты c_k равны нулю. Пусть j — наименьший номер, для которого $c_j \neq 0$. Тогда, поделив равенство $q(x) = o((x-a)^n)$ на $(x-a)^j$, имеем $c_j + c_{j+1}(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^{n-j} = o((x-a)^{n-j})$. Переходя в этом равенстве к пределу при $x \to a$, получим $c_j = 0$, что противоречит предположению. $\blacksquare$

Из теорем 5.14 и 5.15 вытекает

Следствие. *Если f дифференцируема n раз в точке a и $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$ при $x \to a$, то $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$, $0 \leqslant k \leqslant n$.*

Покажем, как полученное следствие позволяет восстановить разложение функции по разложению ее производной.

Замечание. Пусть f дифференцируема $n+1$ раз в точке a и $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$, $x \to a$. Тогда

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}), \quad x \to a.$$

Действительно, в силу предыдущего следствия $c_k = \dfrac{(f')^{(k)}(a)}{k!}$ и, значит, $f^{(k+1)}(a) = c_k k!$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Откуда вытекает заявленное разложение функции f.

Формула Тейлора при $a = 0$ называется *формулой Маклорена.*

Получим разложения некоторых элементарных функций по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано.

Основные разложения

I. Если $f(x) = e^x$, то $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$. Следовательно,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

II. Если $f(x) = \sin x$, то по индукции устанавливаем, что $f^{(m)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}m\right)$ для всех $m \in \mathbb{N}_0$. Тогда $f^{(2k)}(0) = 0$ и $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, следовательно,

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0.$$

III. Аналогично устанавливается, что

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$$

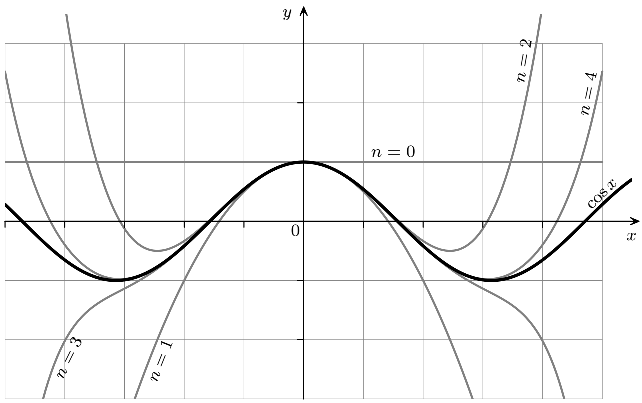

Рис. 5.6

IV. Если $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Положим $C_\alpha^0 = 1$, $C_\alpha^k = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}$, $k \geqslant 1$. Тогда

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k\, x^k + o(x^n), \quad x \to 0.$$

В частности, $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$, $x \to 0$.

V. Если $f(x) = \ln(1+x)$, то $f(0) = 0$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$, $k \in \mathbb{N}$, следовательно,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n), \quad x \to 0.$$

Пример. Представьте формулой Маклорена $e^{\sin x}$ до $o(x^4)$.
$\square$ Пусть P — многочлен Тейлора порядка 4 функции exp в точке $a = 0$. Делая замену $w = \sin x$ в пределе $\lim\limits_{w\to 0} \dfrac{e^w - P(w)}{w^4} = 0$, приходим к равенству

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{6} + \frac{\sin^4 x}{24} + o(\sin^4 x), \ \ x \to 0.$$

Поскольку $\sin x \sim x$, то $o(w^4) = o(x^4)$ при $x \to 0$. Далее, используя представление $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, имеем

$w^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$,

$w^3 = (x + o(x^2))^3 = x^3 + o(x^4)$, $\quad w^4 = (x + o(x))^4 = x^4 + o(x^4)$.

После приведения подобных слагаемых, получаем требуемое представление:

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4), \ \ x \to 0. \quad \blacksquare$$

Задача. Представьте формулой Маклорена функцию arctg до $o(x^{2n+2})$.

Теорема 5.14 утверждает, что отношение $r_n(x)/(x-a)^n$ стремится к нулю при x, стремящемся к a. Следующая теорема позволяет оценить скорость этого стремления.

Теорема 5.16 (остаточный член в форме Лагранжа). *Пусть функция f дифференцируема $n+1$ раз на интервале (α, β) и $a \in (\alpha, \beta)$. Тогда для любого $x \in (\alpha, \beta)$, $x \neq a$, найдется такая точка c, лежащая строго между a и x, что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

$\square$ Пусть для определенности $x > a$. Рассмотрим функции

$$\varphi(t) = f(t) + f'(t)(x-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n, \quad \psi(t) = (x-t)^{n+1}.$$

Функции φ и ψ дифференцируемы на $[a, x]$, $\varphi'(t) = \dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n$ и $\psi'(t) = -(n+1)(x-t)^n$, причем $\psi' \neq 0$ на (a, x). Тогда по теореме Коши найдется такая точка $c \in (a,\, x)$, что

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{-(x-a)^{n+1}} = \frac{\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n},$$

откуда получаем, что $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. ■

Замечание. Если вместо ψ взять $\psi(t) = x - t$, то получим $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a)$ (остаточный член в форме Коши). Меняя ψ можно получать другие формы для r_n.

5.7. Выпуклые функции

Определение. Пусть f определена на промежутке I. Функция f называется *выпуклой* (или выпуклой вниз) на I, если для любых $x_1,\, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, и $t \in (0,\, 1)$ выполнено

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Функция f называется *вогнутой* (или выпуклой вверх) на I, если для любых $x_1,\, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, и $t \in (0,\, 1)$ выполнено

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \geqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Если неравенства заменить на строгие, то f называется *строго выпуклой* и *строго вогнутой* на I соответственно.

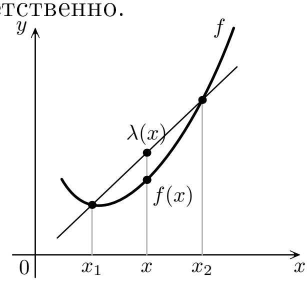

Рис. 5.7

Геометрический смысл. Пусть точки $x_1,\, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Рассмотрим прямую

$$\lambda(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) + f(x_1),$$

проходящую через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$. Пусть $t \in (0,\, 1)$. Тогда точка $x = (1-t)x_1 + tx_2$ принадлежит интервалу $(x_1,\, x_2)$ и $\lambda(x) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$. Выпуклость означает, что $f(x) \leqslant \lambda(x)$ на $(x_1,\, x_2)$. В силу произвольности $(x_1,\, x_2)$ заключаем, что график выпуклой функции лежит не выше *любой* своей хорды. Для строгой выпуклости $f(x) < \lambda(x)$, т.е. график строго выпуклой функции лежит ниже *любой* своей хорды (исключая концы) (см. рис. 5.7).

Примеры. 1) Функция $f(x) = kx + b$ одновременно выпукла и вогнута на любом промежутке.

2) Функция $f(x) = |x|$ выпукла на $\mathbb{R}$, поскольку по неравенству треугольника для x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ и $t \in (0, 1)$ выполнено

$$|(1-t)x_1 + tx_2| \leqslant (1-t)|x_1| + t|x_2|.$$

3) Функция $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & \text{при } x = 1, \end{cases}$ выпукла на $[0, 1]$.

Действительно, пусть x_1, $x_2 \in [0, 1]$, $x_1 < x_2$, и $t \in (0, 1)$. Тогда $f((1-t)x_1 + tx_2)$ равно 0, а значение $(1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ равно 0, если $x_2 \neq 1$, и равно t, если $x_2 = 1$.

Задача. Пусть f, g выпуклы на I и $c \geqslant 0$. Докажите, что $f + g$ и cf также выпуклы на I.

Не всегда легко проверить выпуклость по определению. Однако, если функция дифференцируема, то существуют эквивалентные условия, которые часто проще использовать.

Теорема 5.17. *Пусть функция f непрерывна на промежутке I и дифференцируема на* $\operatorname{int} I$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *f выпукла на I*;
2) *$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ для всех $x \in I$ и $x_0 \in \operatorname{int} I$*;
3) *f' нестрого возрастает на* $\operatorname{int} I$.

$\square$ ($1 \Rightarrow 2$) Пусть $x \in I$, $x_0 \in \operatorname{int} I$. Пусть $h = x - x_0$ и $t \in (0, 1)$. По определению выпуклости $f(x_0 + th) \leqslant (1 - t)f(x_0) + tf(x_0 + h)$. Это неравенство можно переписать в виде

$$f(x_0 + th) - f(x_0) \leqslant t(f(x_0 + h) - f(x_0)),$$

откуда, пользуясь дифференцируемостью f в точке x_0, имеем

$$tf'(x_0)h + o(th) \leqslant t(f(x_0 + h) - f(x_0)).$$

Поделим обе части на t и перейдем к пределу при $t \to 0$. Тогда $f'(x_0)h \leqslant f(x_0 + h) - f(x_0)$, что доказывает п. 2.

($2 \Rightarrow 3$) Для x, $y \in \operatorname{int} I$ имеем

$$f(y) - f(x) \geqslant f'(x)(y - x), \quad f(x) - f(y) \geqslant f'(y)(x - y).$$

Складывая неравенства, получим $0 \geqslant (f'(x) - f'(y))(y - x)$, что доказывает п. 3.

$(3 \Rightarrow 1)$ Пусть $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, и $t \in (0, 1)$. Положим $x = (1-t)x_1 + tx_2$.

По теореме 5.7 Лагранжа $f(x) - f(x_1) = f'(c_1)(x - x_1)$ и $f(x_2) - f(x) = f'(c_2)(x_2 - x)$ для некоторых точек $c_1 \in (x_1, x)$ и $c_2 \in (x, x_2)$. В силу возрастания производной $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$, а значит,

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Так как $x - x_1 = t(x_2 - x_1)$ и $x_2 - x = (1-t)(x_2 - x_1)$, то последнее неравенство равносильно $\frac{f(x) - f(x_1)}{t} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{1-t}$ или $f(x) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$. Следовательно, f выпукла на I. ■

Геометрический смысл п. 2. График выпуклой дифференцируемой функции лежит не ниже всякой своей касательной.

Аналогичный результат справедлив и для строго выпуклых функций.

Теорема 5.17′. *Пусть функция f непрерывна на промежутке I и дифференцируема на $\operatorname{int} I$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *f строго выпукла на I*;
2) *$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ для всех $x \in I$ и $x_0 \in \operatorname{int} I$, $x \neq x_0$*;
3) *f' строго возрастает на $\operatorname{int} I$.*

□ Импликации $(2 \Rightarrow 3)$ и $(3 \Rightarrow 1)$ в доказательстве теоремы 5.17 проходят с заменой нестрогих неравенств на строгие.

Докажем $(1 \Rightarrow 2)$. Пусть $x \in I$ и $x_0 \in \operatorname{int} I$, $x \neq x_0$. Пусть $h = x - x_0$ и $t \in (0, 1)$. Поскольку f выпукла на I, то по п. 2 теоремы 5.17 для $z := x_0 + th = (1-t)x_0 + tx$ имеем

$$f'(x_0)th \leqslant f(x_0 + th) - f(x_0).$$

В силу строгой выпуклости f выполнено $f(z) < (1-t)f(x_0) + tf(x)$ или $f(x_0 + th) - f(x_0) < t(f(x_0 + h) - f(x_0))$, а значит,

$$tf'(x_0)h < t(f(x_0 + h) - f(x_0)).$$

Поделив обе части на t, получим неравенство п. 2. ■

Следствие. *Пусть функция f непрерывна на промежутке I и дважды дифференцируема на* $\operatorname{int} I$.

1) *Функция f выпукла на I тогда и только тогда, когда $f'' \geqslant 0$ на* $\operatorname{int} I$.
2) *Если $f'' > 0$ на $\operatorname{int} I$, то функция f строго выпукла на I.*

Пример. Имеет место неравенство $\ln(1+x) < x$ при всех $x > -1$, $x \neq 0$. Действительно, прямая $y = x$ является касательной в точке 0 к графику строго вогнутой функции $y = \ln(1+x)$ на $(-1, +\infty)$. Осталось применить п. 2 теоремы 5.17'.

Замечание. Пусть функция f дифференцируема на интервале I, $x_0 \in I$. Если f выпукла на I и $f'(x_0) = 0$, то по п. 2 теоремы 5.17 $f(x) \geqslant f(x_0)$ для всех $x \in I$. Кроме того, неравенство строгое, если f строго выпукла на I и $x \neq x_0$. В обоих случаях говорят, что x_0 — точка глобального минимума функции f.

Задача. Пусть функция f выпукла на луче $(a, +\infty)$ и имеет при $x \to +\infty$ асимптоту $y = kx + b$. Покажите, что $f(x) \geqslant kx + b$ при всех $x > a$ (неравенство строгое, если f строго выпукла).

Условие выпуклости влечет «регулярность» функции на внутренности промежутка. Чтобы это установить, начнем со следующего простого наблюдения (в дальнейшем считаем, что I — интервал (a, b)).

Пусть $x_1 < x < x_2$. Рассмотрим прямую $\lambda(x)$, проходящую через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$. Если f выпукла на (a, b), то $f(x) \leqslant \lambda(x)$, $f(x_1) = \lambda(x_1)$ и $f(x_2) = \lambda(x_2)$. Поэтому

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{\lambda(x)-\lambda(x_1)}{x-x_1} = \frac{\lambda(x_2)-\lambda(x)}{x_2-x} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \qquad (5.5)$$

Поскольку средние выражения совпадают с $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, то (5.5) имеет наглядный геометрический смысл: наклон хорды, определяемой точками x_1 и x_2, не меньше наклона хорды, определяемой точками x_1 и x, и не больше наклона хорды, определяемой точками x и x_2 (лемма «о трех хордах»).

Теорема 5.18*. *Если функция f выпукла на интервале (a, b), то она непрерывна на (a, b) и дифференцируема там, за исключением не более чем счетного множества.*

□ Зафиксируем $x \in (a,\, b)$. Функция $\nu(y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ нестрого возрастает на $(a,\, b) \setminus \{x\}$: проверка $\nu(y) \leqslant \nu(z)$ при $y < z$ сводится к одному из трех неравенств (5.5) (в зависимости от расположения y, z по отношению к x). По теореме 4.6 о пределах монотонной функции заключаем, что существуют конечные $\nu(x+0)$ и $\nu(x-0)$, причем $\nu(x-0) \leqslant \nu(x+0)$. Другими словами, существуют конечные односторонние производные, причем $f'_-(x) \leqslant$ $\leqslant f'_+(x)$. В частности, функция f непрерывна в точке x.

Переходя в неравенствах (5.5) к пределу: при $x \to x_1 + 0$ в левом и при $x \to x_2 - 0$ в правом, получим $f'_+(x_1) \leqslant \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant$ $\leqslant f'_-(x_2)$. Отсюда следует, что функция $g(x) = f'_-(x)$ нестрого возрастает на $(a,\, b)$. По теореме 4.6 функция g может иметь не более чем счетное множество точек разрыва, причем разрывы только I-го рода.

Покажем, что в точках непрерывности g функция f дифференцируема. В самом деле, если $x_0 < x$, то $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0) \leqslant$ $\leqslant f'_-(x)$, откуда

$$0 \leqslant f'_+(x_0) - f'_-(x_0) \leqslant f'_-(x) - f'_-(x_0).$$

Если $g = f'_-$ непрерывна в точке x_0, то $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, т.к. правую часть неравенства можно сделать сколь угодно малой. ■

Теорема 5.19 (неравенство Йенсена). *Пусть функция f выпукла (вогнута) на промежутке I, $x_1, \ldots, x_n \in I$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, такие что $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Тогда*

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \ (\geqslant).$$

□ Неравенство установим методом математической индукции. При $n = 2$ неравенство следует из определения выпуклости. Пусть неравенство верно для n. Установим его справедливость для $n+1$. Можно считать, что $\lambda_{n+1} < 1$. Положим $y =$ $= \dfrac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \cdots + \dfrac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n$. Так как коэффициенты в правой части неотрицательны и в сумме дают 1, то $y \in I$, а значит,

$$f\bigl(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}\bigr) = f\bigl((1 - \lambda_{n+1}) y + \lambda_{n+1} x_{n+1}\bigr) \leqslant$$
$$\leqslant (1 - \lambda_{n+1}) f(y) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

По предположению индукции

$$f(y) \leqslant \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} f(x_n).$$

Из последних двух неравенств вытекает утверждение для $n+1$.

Доказательство для вогнутых функций получается заменой f на $-f$. ■

Пример. Пусть $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$, тогда верно неравенство

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

□ Если хотя бы одно из x_i равно нулю, то неравенство очевидно. Для положительных x_i оно следует из неравенства Йенсена для вогнутой функции ln и $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. ■

6. Интегрирование

6.1. Неопределенный интеграл

Определение. Пусть функция f определена на промежутке I. Функция $F\colon I \to \mathbb{R}$ называется *первообразной* функции f на I, если $F'(x) = f(x)$ при всех $x \in I$.

Теорема 6.1 (описание класса первообразных). *Если F — первообразная функции f на промежутке I, то $F + C$, где C — постоянная, также является первообразной f на I. Если F_1 и F_2 — первообразные функции f на I, то их разность $F_1 - F_2$ постоянна на I.*

$\square$ Так как $(F + C)' = F' + C' = F' = f$ на I, то $F + C$ — первообразная f на I. Так как $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = 0$ на I, то по теореме 5.10 разность $F_1 - F_2$ постоянна на I. $\blacksquare$

Определение. Произвольная первообразная функции f на промежутке I называется *неопределенным интегралом* f на I и обозначается $\int f(x)dx$ или $\int f\,dx$. Операция перехода от данной функции к ее первообразной называется *интегрированием.*

Замечание. Формально dx в обозначении не несет смысловой нагрузки, однако его использование бывает полезно. Например, трактуя $f\,dx$ как дифференциал (т.е. используя обозначение $df := f'\,dx$), применение некоторых формул можно сделать более наглядным. К сожалению, в стандартном обозначении неопределенного интеграла не фигурирует промежуток I, что иногда приводит к недоразумениям.

Свойства неопределенного интеграла

1. Если существует $\int f\,dx$ на I, то $\left(\int f\,dx\right)' = f(x)$ для всех $x \in I$.

2. Если существуют $\int f\,dx$ и $\int g\,dx$ на I, то при любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ существует
$$\int (\lambda f + \mu g)\,dx = \lambda \int f\,dx + \mu \int g\,dx + C,$$
где C — некоторая постоянная.

3. *Формула интегрирования по частям*

Если функции u и v дифференцируемы на промежутке I и существует $\int vu'dx$ на I, то на этом промежутке существует

$$\int uv'dx = u\cdot v - \int vu'dx + C, \tag{6.1}$$

где C — некоторая постоянная.

4. *Интегрирование подстановкой*

Если F — неопределенный интеграл функции f на промежутке I, а функция φ дифференцируема на промежутке J, $\varphi(J)\subset I$, то на J существует

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C, \tag{6.2}$$

где C — некоторая постоянная.

Замечание. Если дополнительно предположить, что функция φ строго монотонна на J, то из (6.2) следует, что на промежутке $\varphi(J)$ имеет место равенство

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} + C.$$

Эта формула называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

□ Проверка всех перечисленных равенств производится дифференцированием на указанных промежутках. Проверим, например, формулу интегрирования по частям. Правая часть этой формулы имеет вид $F(x)+C$. При этом

$$F' = \left(u\cdot v - \int vu'dx\right)' = u'v + uv' - vu' = uv',$$

так что функция F является первообразной для функции uv'. ■

Читая таблицу производных «справа налево», получится

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha\neq-1$, на $\mathbb{R}$ для целых $\alpha\geqslant0$; на $(-\infty,0)$ и на $(0,+\infty)$ для целых $\alpha<-1$; на $[0,+\infty)$ для нецелых $\alpha\geqslant0$; на $(0,+\infty)$ для нецелых $\alpha<0$.

2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ на $(-\infty,0)$ и на $(0,+\infty)$.

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ на $\mathbb{R}$, где $a>0$ и $a\neq1$.

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ на $\mathbb{R}$.

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ на $\mathbb{R}$.

6. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$ на $(k\pi,\, \pi + k\pi)$ для $k \in \mathbb{Z}$.

7. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$ на $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ для $k \in \mathbb{Z}$.

8. $\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$ на $\mathbb{R}$, $a \neq 0$.

9. $\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ на $(-\infty,\, -a)$, на $(-a,\, a)$ и на $(a,\, +\infty)$, где $a > 0$.

10. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$ на $(-a,\, a)$, где $a > 0$.

11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$ на $\mathbb{R}$ для знака “$+$”, и на $(-\infty,\, -a)$ и $(a,\, +\infty)$ для знака “$-$”, $a > 0$.

12. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$ на $\mathbb{R}$.

13. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$ на $\mathbb{R}$.

14. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = -\operatorname{cth} x + C$ на $(-\infty,\, 0)$ и на $(0,\, +\infty)$.

15. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x + C$ на $\mathbb{R}$.

В связи с введением понятия неопределенного интеграла и операции интегрирования возникают вопросы. Какие функции имеют неопределенный интеграл? И как найти неопределенный интеграл, если он существует? Хотя бы в случае элементарных функций.

Частичный ответ на первый вопрос будет получен в следующем разделе: всякая непрерывная на промежутке функция имеет на этом промежутке первообразную, т.е. неопределенный интеграл. Что касается интегрирования элементарных функций, то, в отличие от дифференцирования, эта операция может выводить за пределы элементарных функций. Например, первообразная функции e^{-x^2} неэлементарна (доказательство см. [8]).

Рассмотрим один важный класс функций, для которого существует алгоритм нахождения неопределенного интеграла.

Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется частное двух многочленов. Рациональные функции вида

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \qquad \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n},$$

где $n \in \mathbb{N}$; a, p, $q \in \mathbb{R}$, $p^2/4 - q < 0$; A, M, $N \in \mathbb{R}$, причем A и хотя бы одно из чисел M, N не равны нулю, называются *простейшими* рациональными дробями.

Из курса алгебры известно, что любая рациональная дробь единственным образом (с точностью до порядка слагаемых) представляется суммой многочлена и простейших дробей.

Покажем, как интегрируются простейшие дроби.

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$.

2) $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$ при $n > 1$.

3) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx =$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} + C_1 =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{M}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} + C_1 =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{\left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

4) $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx =$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} + C_1 =$$

$$= -\frac{M}{2(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} +$$

$$+ \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^n} + C \text{ при } n > 1.$$

Заменой $t = x + \frac{p}{2}$ и переобозначением $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ последний интеграл сводится к интегралу $J_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$.

Проинтегрируем J_n по частям, положив $u = \frac{1}{(t^2+a^2)^n}$ и $v = t$:

$$J_n = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}dt + C_1 =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2J_{n+1} + C_2.$$

Откуда получаем рекуррентную формулу

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n\right) + C_3, \quad J_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

Установлено, что все простейшие дроби можно проинтегрировать за конечное число указанных шагов и их первообразные — элементарные функции. Итак, справедлива

Теорема 6.2 (об интегрировании рациональных дробей). *Неопределенный интеграл от рациональной дроби выражается через рациональные функции* (*многочлены*), *функции* $\ln$, $\operatorname{arctg} u$, *следовательно, является элементарной функцией.*

Укажем одно глубокое обобщение неопределенного интеграла.

Определение. Пусть функция f определена на промежутке I. Функция $F\colon I \to \mathbb{R}$ называется *обобщенной первообразной* функции f на I, если F непрерывна и имеет всюду на I, за исключением не более чем счетного множества точек, производную, равную f.

Для функции f используют обозначение F'. Однако, если множество точек недифференцируемости F непусто (т.е. F не является точной первообразной f), то F не определяет однозначно F'.

Пример. Функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ на $\mathbb{R}$ не имеет первообразной, т.к. не принимает всех промежуточных значений (см. теорема Дарбу). Однако имеет обобщенную первообразную $F(x) = |x|$.

Ключевым является факт, что теорема 6.1 об описании первообразных верна и для обобщенных первообразных: вместо теоремы 5.10 нужно сослаться на следствие леммы 5.1.

Свойства 1–4 переносятся на обобщенные первообразные. Покажем это на примере формулы интегрирования по частям.

Если u, v являются обобщенными первообразными для u', v' на промежутке I и существует $\int vu'dx$ на I (как обобщенная первообразная), то на I верна формула (6.1). Действительно, по условию найдутся такие не более чем счетные множества A, B, что u, v дифференцируемы на $I \setminus A$ и $(\int vu'dx)' = vu'$ на $I \setminus B$. Тогда множество $C = A \cup B$ не более чем счетно, функция $F = uv - \int vu'dx$ непрерывна на I и $F'(x) = u(x)v'(x)$ для всех $x \in I \setminus C$. Это означает, что F является обобщенной первообразной для uv' на I.

6.2. Интеграл Римана и его свойства

В этом разделе интеграл Римана определяется с помощью интеграла Дарбу. В дальнейшем будет установлена эквивалентность традиционному определению Римана.

Определения. Пусть $[a,\, b]$ — невырожденный отрезок. *Разбиением* T отрезка $[a,\, b]$ называется конечный набор точек $\{x_i\}_{i=0}^n$, таких что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Введем обозначения $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $|T| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i$.

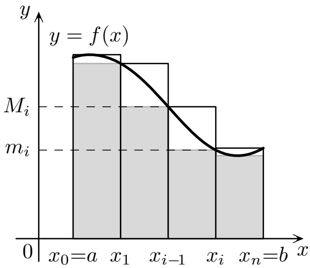

Рис. 6.1

Пусть числовая функция f определена на отрезке $[a,\, b]$. Для разбиения $T = \{x_i\}_{i=0}^n$ положим

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1},\, x_i]} f(x),$$

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1},\, x_i]} f(x).$$

Тогда суммы

$$S_T(f) = \sum_{i=1}^n M_i\, \Delta x_i, \qquad s_T(f) = \sum_{i=1}^n m_i\, \Delta x_i$$

называются соответственно *верхней* и *нижней суммами Дарбу* функции f, отвечающими разбиению T.

Покажем, что при добавлении точек в разбиение верхние суммы Дарбу не увеличиваются, а нижние — не уменьшаются.

Лемма 6.1. *Пусть T, T' — разбиения $[a,\, b]$, такие что $T \subset \subset T'$. Тогда $s_T(f) \leqslant s_{T'}(f) \leqslant S_{T'}(f) \leqslant S_T(f)$.*

☐ Среднее неравенство очевидно, докажем левое неравенство. Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^n$, и предположим сначала, что $T' = T \cup \{c\}$. Выберем k так, что $c \in (x_{k-1},\, x_k)$, и положим $m'_k = \inf\limits_{[x_{k-1},\, c]} f(x)$ и $m''_k = \inf\limits_{[c,\, x_k]} f(x)$. Тогда $m'_k,\, m''_k \geqslant m_k$ и, значит,

$$s_{T'}(f) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n} m_i \Delta x_i + m'_k(c - x_{k-1}) + m''_k(x_k - c) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{k-1} m_i \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n} m_i \Delta x_i + m_k(c - x_{k-1}) + m_k(x_k - c) = s_T(f).$$

В общем случае T' из разбиения T получается последовательным добавлением точек. На каждом шаге нижняя сумма не уменьшается, так что в итоге получается искомое неравенство. Проверка правого неравенства аналогична. ■

Следствие. *Для любых разбиений T_1, T_2 отрезка $[a,\, b]$ верно $s_{T_1}(f) \leqslant S_{T_2}(f)$.*

□ По лемме 6.1 $s_{T_1}(f) \leqslant s_{T_1 \cup T_2}(f) \leqslant S_{T_1 \cup T_2}(f) \leqslant S_{T_2}(f)$. ■

Определение. Величины

$$\overline{\int_a^b} f = \inf_T S_T(f), \qquad \underline{\int_a^b} f = \sup_T s_T(f)$$

называются соответственно *верхним* и *нижним интегралами Дарбу* функции f.

Следствие. *Для любого разбиения T отрезка $[a,\, b]$ верно $s_T(f) \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant S_T(f)$.*

Определение. Пусть функция f определена на отрезке $[a,\, b]$. Функция f *интегрируема* (*по Риману*) на $[a,\, b]$, если $\overline{\int_a^b} f$ и $\underline{\int_a^b} f$ конечны и равны. Число $I = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ называется *определенным интегралом* функции f по $[a,\, b]$ и обозначается символом $\int_a^b f(x)\, dx$ или кратко $\int_a^b f$.

Множество функций, интегрируемых по Риману на $[a,\, b]$, будем обозначать $\mathcal{R}[a,\, b]$.

Пример. Пусть $f = 1$ на $[a,\, b]$. Поскольку для всякого разбиения T верно $s_T(f) = S_T(f) = b - a$, то существует $\int_a^b 1\, dx = b - a$.

Следующее утверждение дает *необходимое условие* интегрируемости по Риману.

Лемма 6.2. *Если $f \in \mathcal{R}[a,\, b]$, то она ограничена на $[a,\, b]$.*

□ Пусть T — произвольное разбиение $[a,\, b]$. Если f не ограничена сверху на $[a,\, b]$, то $M_i = +\infty$ по крайней мере для одного i. Тогда $S_T(f) = +\infty$, а значит, $\overline{\int_a^b} f = +\infty$. Аналогично, если f не ограничена снизу, то $\underline{\int_a^b} f = -\infty$. ■

Ограниченность функции, являясь необходимым, не является достаточным условием интегрируемости.

Пример. Рассмотрим функцию Дирихле $\mathcal{D}$, принимающую значение 1 на рациональных числах и 0 на иррациональных. Пусть T — произвольное разбиение $[a, b]$. Так как каждый отрезок разбиения T содержит как рациональные, так и иррациональные точки, то $s_T(\mathcal{D}) = 0$ и $S_T(\mathcal{D}) = b - a$. Следовательно, $\underline{\int_a^b}\mathcal{D} = 0$ и $\overline{\int_a^b}\mathcal{D} = b - a$ и, значит, $\mathcal{D}$ не интегрируема на $[a, b]$.

Непосредственно из определения интеграла выводятся три его важнейших свойства.

Свойство 1 (аддитивность по отрезкам). *Пусть $a < c < b$. Функция f интегрируема по Риману на $[a, b]$ $\Longleftrightarrow$ f интегрируема по Риману на отрезках $[a, c]$, $[c, b]$. В этом случае*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$\square$ Покажем сначала, что $\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$. Если даны разбиения $T_1 = \{x_i\}_{i=0}^k$ и $T_2 = \{x_i\}_{i=k}^n$ отрезков $[a, c]$, $[c, b]$ соответственно, то $T = T_1 \cup T_2 = \{x_i\}_{i=0}^n$ является разбиением $[a, b]$. При этом

$$s_T(f) = \sum_{i=1}^k m_i \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^n m_i \Delta x_i = s_{T_1}(f) + s_{T_2}(f).$$

Следовательно, $\underline{\int_a^b} f \geqslant s_{T_1}(f) + s_{T_2}(f)$. Переходя в этом неравенстве к супремуму сначала по всем разбиениям T_1 отрезка $[a, c]$, затем по всем разбиениям T_2 отрезка $[c, b]$, получим $\underline{\int_a^b} f \geqslant \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$. С другой стороны, из равенства следует $s_T(f) \leqslant \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$. Поскольку для разбиений $\check{T}$ и $T = \check{T} \cup \{c\}$ отрезка $[a, b]$ выполнено $s_{\check{T}}(f) \leqslant s_T(f)$, то при рассмотрении супремума достаточно ограничиться разбиениями, содержащими точку c. Переходя в неравенстве $s_T(f) \leqslant \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$ к супремуму по всем таким разбиениям, получим $\underline{\int_a^b} f \leqslant \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$, и искомое равенство установлено.

Аналогично доказывается, что $\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f$.

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f \leqslant \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f(x)dx.$$

Отсюда заключаем, что среднее неравенство является равенством, $\underline{\int_a^c} f = \overline{\int_a^c} f$ и $\underline{\int_c^b} f = \overline{\int_c^b} f$. Это доказывает интегрируемость f на $[a, c]$ и $[c, b]$ и требуемое равенство для интегралов.

Пусть теперь $f \in \mathcal{R}[a, c]$ и $f \in \mathcal{R}[c, b]$. Тогда

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$

что доказывает интегрируемость f на $[a, b]$. ■

Следствие. Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и $[c, d] \subset [a, b]$, то $f \in \mathcal{R}[c, d]$.

Расширим нотацию. Будем считать, что $\int_a^a f(x)dx = 0$, а также $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ при $a < b$.

Нетрудно проверить, что если f интегрируема на отрезке, содержащем точки a, b, c, то свойство аддитивности выполняется при любом их расположении.

Свойство 2 (линейность). *Если f, $g \in \mathcal{R}[a, b]$, то для любых λ, $\mu \in \mathbb{R}$ функция $\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}[a, b]$, причем*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

□ Пусть $\lambda \geqslant 0$. Так как $\inf_E \lambda f = \lambda \inf_E f$ для всякого $E \subset [a, b]$, то $s_T(\lambda f) = \lambda s_T(f)$. Следовательно,

$$\underline{\int_a^b} \lambda f = \sup_T s_T(\lambda f) = \sup_T \lambda s_T(f) = \lambda \sup_T s_T(f) = \lambda \underline{\int_a^b} f.$$

Аналогично доказывается, что $\overline{\int_a^b} \lambda f = \lambda \overline{\int_a^b} f$. Таким образом, $\lambda f \in \mathcal{R}[a, b]$ и $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$ при $\lambda \geqslant 0$.

Так как $\inf_E(-f) = -\sup_E f$, то $\overline{\int_a^b}(-f) = -\underline{\int_a^b} f$ и $\underline{\int_a^b}(-f) = -\overline{\int_a^b} f$. Следовательно, $(-f) \in \mathcal{R}[a, b]$ и $\int_a^b (-f)dx = -\int_a^b f dx$.

Если $\lambda < 0$, то $\lambda = -|\lambda|$, и случай сводится к рассмотренным.

Так как $\inf_E(f+g) \geqslant \inf_E f + \inf_E g$, то $s_T(f+g) \geqslant s_T(f) + s_T(g)$. Следовательно, $\underline{\int_a^b}(f+g) \geqslant s_T(f) + s_T(g)$ и, значит, $\underline{\int_a^b}(f+g) \geqslant \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g$.

Аналогично доказывается, что $\overline{\int_a^b}(f+g) \leqslant \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g$.

Покажем, что в случае интегрируемости f, g неравенства превращаются в равенства. Действительно, вычитая из второго неравенства первое, получим

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b}(f+g) - \underline{\int_a^b}(f+g) \leqslant \Big(\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f\Big) + \Big(\overline{\int_a^b} g - \underline{\int_a^b} g\Big) = 0.$$

Итак, $f + g \in \mathcal{R}[a,\, b]$ и $\int_a^b (f+g)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Линейность следует из двух доказанных фактов. ■

Свойство 3 (монотонность). *Если* $f,\ g \in \mathcal{R}[a,\, b]$ *и* $f \leqslant g$ *на* $[a,\, b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

□ Так как $f \leqslant g$ на каждом $[x_{i-1},\, x_i]$, то $s_T(f) \leqslant s_T(g)$ и, значит, $\underline{\int_a^b} f \leqslant \underline{\int_a^b} g$. В случае интегрируемости f, g полученное неравенство совпадает с требуемым. ■

Бывает трудно вычислить точные значения верхнего и нижнего интегралов. Установим удобный критерий интегрируемости.

Определение. Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}$, $E \subset D$. *Колебанием* (*осцилляцией*) функции f на множестве E называется величина

$$\omega(f,\, E) = \sup_{x,\, y \in E} |f(x) - f(y)|.$$

Замечание. Имеем $\omega(f,\, E) = \sup\limits_{x,\, y \in E} (f(x) - f(y)) = \sup\limits_{x \in E} f(x) + \sup\limits_{y \in E}(-f(y)) = \sup\limits_{x \in E} f(x) - \inf\limits_{y \in E} f(y)$.

Пусть функция f определена на отрезке $[a,\, b]$. Для разбиения $T = \{x_i\}_{i=0}^n$ положим

$$\Omega_T(f) := \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\, \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \omega(f,\, [x_{i-1},\, x_i])\, \Delta x_i.$$

Отметим, что если $\Omega_T(f)$ конечно, то функция f ограничена на $[a,\, b]$. В этом случае $\Omega_T(f) = S_T(f) - s_T(f)$.

Лемма 6.3. *$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists T$ — разбиение $[a, b]$, такое что $\Omega_T(f) < \varepsilon$.*

$\square$ Пусть $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f =: I$ и пусть фиксировано $\varepsilon > 0$. По определению интегралов Дарбу существуют разбиения T_1 и T_2, такие что $I - \varepsilon/2 < s_{T_1}(f)$ и $I + \varepsilon/2 > S_{T_2}(f)$. Если $T = T_1 \cup T_2$, то по лемме 6.1 $I - \varepsilon/2 < s_T(f)$ и $I + \varepsilon/2 > S_T(f)$. Следовательно,

$$\Omega_T(f) = S_T(f) - s_T(f) < (I + \varepsilon/2) - (I - \varepsilon/2) = \varepsilon.$$

Поскольку $s_T(f) \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant S_T(f)$, то $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leqslant \Omega_T(f)$. Если $\Omega_T(f)$ принимает «сколь угодно малые» значения, то $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ и, значит, $f \in \mathcal{R}[a, b]$. $\blacksquare$

Теорема 6.3. *Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $m \leqslant f \leqslant M$ на $[a, b]$ и функция g непрерывна на $[m, M]$. Тогда $g \circ f \in \mathcal{R}[a, b]$.*

$\square$ Положим $h = g \circ f$. Пусть $\varepsilon > 0$. Функция g равномерно непрерывна на $[m, M]$, поэтому найдется такое $\delta > 0$, что $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ для всех $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$. Можно считать, что $\delta < \varepsilon$.

Так как $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то по лемме 6.3 существует разбиение $T = \{x_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[a, b]$, такое что $\Omega_T(f) < \delta^2$.

Обозначим через ω_k колебание функции h на $[x_{k-1}, x_k]$. Тогда

$$\Omega_T(h) = \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = \sum_{k \in A} \omega_k \Delta x_k + \sum_{k \in B} \omega_k \Delta x_k,$$

где A состоит из тех номеров, для которых $\omega(f, [x_{k-1}, x_k]) < \delta$, а B состоит из оставшихся номеров.

Если $k \in A$ и $x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$, то $|f(x'') - f(x')| < \delta$ и, значит, $|h(x'') - h(x')| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\omega_k \leqslant \varepsilon$ при всех $k \in A$. Это позволяет оценить первую сумму следующим образом:

$$\sum_{k \in A} \omega_k \Delta x_k \leqslant \varepsilon \sum_{k \in A} \Delta x_k \leqslant (b - a)\varepsilon.$$

Оценим вторую сумму. Заметим, что

$$\delta \sum_{k \in B} \Delta x_k \leqslant \sum_{k \in B} \omega(f, [x_{k-1}, x_k]) \Delta x_k \leqslant \Omega_T(f) < \delta^2.$$

Откуда, учитывая, что $\delta < \varepsilon$, имеем $\sum_{k\in B} \Delta x_k < \varepsilon$. Функция g непрерывна, а значит, ограничена на $[m, M]$. Пусть $|g| \leqslant C$. Тогда $\omega_k \leqslant 2C$ и, значит, $\sum_{k\in B} \omega_k \Delta x_k < 2C\varepsilon$. В итоге

$$\Omega_T(h) = \sum_{k\in A} \omega_k \Delta x_k + \sum_{k\in B} \omega_k \Delta x_k < (b - a + 2C)\varepsilon.$$

По лемме 6.3 функция $h \in \mathcal{R}[a, b]$. ■

Задача. Покажите, что композиция двух интегрируемых функций может не быть интегрируемой.

Следствие. *Если* $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, *то*

1) $f \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$;

2) $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ *и* $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$.

□ Функция $t \mapsto t^2$ непрерывна, поэтому $f^2 \in \mathcal{R}[a, b]$. Тождество $fg = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2)$ завершает доказательство п. 1.

Функция $t \mapsto |t|$ непрерывна, поэтому $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$. Для проверки неравенства достаточно проинтегрировать $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ по $[a, b]$. ■

6.3. Множество интегрируемых функций

Хотя следующее утверждение вытекает из доказательства теоремы 6.3, мы установим его отдельно.

Теорема 6.4. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$.*

□ Пусть $\varepsilon > 0$. По теореме 4.10 Кантора f равномерно непрерывна на $[a, b]$. Поэтому существует такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b - a)$ для всех $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$.

Рассмотрим разбиение $T = \{x_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[a, b]$ с $|T| < \delta$. По теореме 4.7 Вейерштрасса найдутся точки $x_i', x_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$, такие что $f(x_i'') = M_i$ и $f(x_i') = m_i$, $i = 1, \ldots, n$. Поскольку $|x_i'' - x_i'| \leqslant \Delta x_i < \delta$, то $f(x_i'') - f(x_i') < \varepsilon/(b - a)$, а значит,

$$\Omega_T(f) = \sum_{i=1}^n (f(x_i'') - f(x_i'))\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon.$$

По лемме 6.3 функция $f \in \mathcal{R}[a, b]$. ■

Теорема 6.5. *Если функция f монотонна на отрезке $[a,\,b]$, то она интегрируема на $[a,\,b]$.*

$\square$ Пусть для определенности f нестрого возрастает на $[a,\,b]$. Для произвольного разбиения $T=\{x_i\}_{i=0}^n$ выполнено

$$\Omega_T(f){:=}\sum_{i=1}^n (M_i-m_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^n (f(x_i)-f(x_{i-1}))|T|$$

и, значит, $\Omega_T(f)\leqslant (f(b)-f(a))|T|$. Для $\varepsilon>0$ подберем T так, что $(f(b)-f(a))|T|<\varepsilon$. Тогда $\Omega_T(f)<\varepsilon$ и по лемме 6.3 функция $f\in\mathcal{R}[a,\,b]$. $\blacksquare$

Теорема 6.6. *Пусть функция f ограничена на $[a,\,b]$ и интегрируема на любом $[c,\,d]\subset(a,\,b)$. Тогда f интегрируема на $[a,\,b]$.*

$\square$ Пусть $|f|\leqslant M$ на $[a,\,b]$. Фиксируем $\varepsilon>0$, и пусть $c=a+\frac{\varepsilon}{6M}$, $d=b-\frac{\varepsilon}{6M}$. Без ограничения общности считаем число M настолько большим, что $c<d$. Так как $f\in\mathcal{R}[c,\,d]$, то существует такое разбиение T_0 отрезка $[c,\,d]$, что $\Omega_{T_0}(f)<\frac{\varepsilon}{3}$. Продолжим T_0 до разбиения T отрезка $[a,\,b]$, добавив к нему точки a и b. Имеем

$$\Omega_T(f)=\omega(f,\,[a,\,c])(c-a)+\Omega_{T_0}(f)+\omega(f,\,[d,\,b])(b-d).$$

Поскольку $\Omega_{T_0}(f)<\frac{\varepsilon}{3}$, колебание $\omega(f,\,[a,\,c])\leqslant\omega(f,\,[a,\,b])\leqslant 2M$ и аналогично $\omega(f,\,[d,\,b])\leqslant 2M$, то $\Omega_T(f)<\varepsilon$. По лемме 6.3 функция $f\in\mathcal{R}[a,\,b]$. $\blacksquare$

Следствие. *Пусть функция f ограничена на $[a,\,b]$, и множество точек разрыва f на $[a,\,b]$ конечно. Тогда f интегрируема на $[a,\,b]$.*

$\square$ Добавим к точкам разрыва концы a и b, и точки полученного множества упорядочим по возрастанию: $a=x_0<x_1<\ldots<$ $<x_N=b$. По теореме 6.4 функция f интегрируема на любом $[c,d]\subset(x_{i-1},\,x_i)$. Поэтому по теореме 6.6 $f\in\mathcal{R}[x_{i-1},\,x_i]$ для каждого $i=1,\,\ldots,\,N$. Для завершения доказательства последовательно применяем свойство аддитивности интеграла. $\blacksquare$

Пример. Пусть $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, $f(0)=a$ — произвольно. Согласно предыдущему следствию $f\in\mathcal{R}[-1,\,1]$.

6.4. Интеграл как функция верхнего предела

Следующая теорема дает эффективный способ вычисления интеграла.

Теорема 6.7 (формула Ньютона–Лейбница). *Пусть функция* $f \in \mathcal{R}[a, b]$ *и имеет (обобщенную) первообразную* F *на* $[a, b]$. *Тогда справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

□ Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^n$ — разбиение отрезка $[a, b]$. По следствию из леммы 5.1 на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ имеем

$$m_i \Delta x_i \leqslant F(x_i) - F(x_{i-1}) \leqslant M_i \Delta x_i.$$

Просуммировав неравенства по всем $i = 1, \ldots, n$, получаем $s_T \leqslant F(b) - F(a) \leqslant S_T$ и, значит, $\underline{\int_a^b} f \leqslant F(b) - F(a) \leqslant \overline{\int_a^b} f$. Поскольку $f \in \mathcal{R}[a, b]$, требуемое равенство установлено. ■

Проясним роль интеграла в восстановлении первообразной.

Определение. Пусть I — невырожденный промежуток, функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset I$ и $a \in I$. Функция $F\colon I \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема 6.8. *Пусть* I *— невырожденный промежуток, функция* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *интегрируема по Риману на любом отрезке* $[\alpha, \beta] \subset I$ *и* $a \in I$. *Тогда функция* F *непрерывна на* I. *Кроме того, если* f *непрерывна в точке* x, *то функция* F *дифференцируема в точке* x *и* $F'(x) = f(x)$.

□ Пусть $x \in I$. Выберем $\sigma > 0$ так, чтобы $[x - \sigma, x + \sigma] \cap I$ был невырожденным отрезком; обозначим его через $[\alpha, \beta]$. По условию $f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, и пусть $|f| \leqslant M$ на $[\alpha, \beta]$. Тогда для любого $y \in [\alpha, \beta]$ выполнено

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| = \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int_x^y |f(t)|\,dt \right| \leqslant M|y - x|,$$

а значит, $\lim\limits_{y \to x} F(y) = F(x)$.

Докажем второе утверждение. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку f непрерывна в точке x, то существует такое $\delta > 0$, что $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $t \in B_\delta(x) \cap I$. Тогда для любого $y \in \overset{\circ}{B}_\delta(x) \cap I$ имеем

$$\left|\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x)\right| = \left|\frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\,dt - \frac{1}{y-x}\int_x^y f(x)\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{|y-x|}\left|\int_x^y |f(t)-f(x)|\,dt\right| \leqslant \frac{1}{|y-x|}\cdot\varepsilon|y-x| = \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{y\to x}\dfrac{F(y)-F(x)}{y-x} = f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$. ■

Следствие. *Всякая непрерывная на промежутке I функция имеет первообразную. Всякая монотонная на I функция имеет обобщенную первообразную.*

Замечание. Если функция f не является непрерывной в точке $x \in [a,b]$, то F может как быть, так и не быть дифференцируемой в точке x.

Пример. Для следующих функций исследуем на дифференцируемость $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1) Пусть $f(x) = \operatorname{sign} x$. Функция f монотонна, а значит, интегрируема на любом подотрезке. Функция $F(x) = x$ при $x > 0$ и $F(x) = -x$ при $x < 0$, т.е. $F(x) = |x|$ всюду. Функция F не дифференцируема в точке $x = 0$.

2) Пусть $f(x) = 0$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 1$. Функция f интегрируема на любом подотрезке, и $F \equiv 0$. Функция F дифференцируема в 0, но $F'(0) \neq f(0)$.

3) Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Функция f ограничена и непрерывна всюду, за исключением $x = 0$, а значит, интегрируема на любом подотрезке. Покажем, что F дифференцируема в 0. Сначала покажем, что f имеет первообразную $\widetilde{F}$.

Пусть $G(x) = x^2\cos\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $G(0) = 0$. Функция G всюду дифференцируема и

$$G'(x) = g(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Имеем $G'(x) = h(x) + f(x)$, где $h(x) = 2x\cos\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $h(0) = 0$. Поскольку функция h непрерывна, то она имеет первообразную H. Тогда $f = g - h$ также имеет первообразную $\widetilde{F} = G - H$.

По свойствам интеграла с переменным верхним пределом функция $F - \widetilde{F}$ непрерывна всюду, дифференцируема всюду, за исключением нуля, и $(F - \widetilde{F})'(x) = 0$ при $x \neq 0$. По теореме 5.10 $F - \widetilde{F}$ постоянна, а значит, дифференцируема также и в 0. Следовательно, F дифференцируема в 0 и $F'(0) = \widetilde{F}'(0) = 0 = f(0)$.

6.5. Суммы Римана. Критерий Дарбу

Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ — разбиение $[a, b]$ и $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}$, где $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Пара (T, ξ) называется *отмеченным разбиением.* Сумма

$$\sigma_T(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется *суммой Римана* функции f, отвечающей отмеченному разбиению (T, ξ).

Связь с суммами Дарбу дает

Лемма 6.4. *Для любого разбиения T выполнено*

$$s_T(f) = \inf_{\xi} \sigma_T(f, \xi), \qquad S_T(f) = \sup_{\xi} \sigma_T(f, \xi),$$

где точные грани берутся по всем наборам ξ.

□ Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^{n}$. Так как $f(x) \geqslant m_i$ для всех $x \in [x_{i-1}, x_i]$, то $\sigma_T(f, \xi) \geqslant s_T(f)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $\xi'_i \in [x_{i-1}, x_i]$ так, чтобы $f(\xi'_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда для $\xi' = \{\xi'_i\}_{i=1}^{n}$ имеем

$$\sigma_T(f, \xi') = \sum_{i=1}^{n} f(\xi'_i)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n}\left(m_i + \frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_i = \\ = s_T(f) + \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = s_T(f) + \varepsilon.$$

Это означает, что $s_T(f)$ является инфимумом множества чисел $\sigma_T(f, \xi)$. Аналогично для $S_T(f)$. ■

Ключом к записи интеграла через суммы Римана является следующий факт.

Лемма 6.5. *Если функция f ограничена на $[a,\, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого разбиения T, $|T| < \delta$, выполнено*

$$0 \leqslant \underline{\int_a^b} f - s_T(f) < \varepsilon, \qquad 0 \leqslant S_T(f) - \overline{\int_a^b} f < \varepsilon.$$

□ Пусть $|f| \leqslant M$ на $[a,\, b]$. Нам потребуется одно уточнение леммы 6.1 (см. обозначения). Пусть $T' = T \cup \{c\}$, тогда

$$s_{T'}(f) - s_T(f) = (m'_k - m_k)(c - x_{k-1}) + (m''_k - m_k)(x_k - c).$$

Так как $m'_k - m_k \leqslant 2M$, $m''_k - m_k \leqslant 2M$, то $s_{T'}(f) - s_T(f) \leqslant$ $\leqslant 2M\Delta x_k$, а значит, $s_{T'}(f) - s_T(f) \leqslant 2M|T|$.

По индукции устанавливается, что если $T' \setminus T$ состоит из m точек, то $s_{T'}(f) - s_T(f) \leqslant 2Mm|T|$. Аналогично проверяется, что $S_T(f) - S_{T'}(f) \leqslant 2Mm|T|$.

Докажем утверждение для $s_T(f)$. Используя определение нижнего интеграла, выберем такое разбиение $T_\varepsilon = \{x_i\}_{i=0}^m$, что $s_{T_\varepsilon}(f) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим произвольное разбиение T отрезка $[a,\, b]$. Тогда разбиение $R = T \cup T_\varepsilon$ получено из T добавлением не более чем m точек. Поэтому

$$\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} < s_{T_\varepsilon}(f) \leqslant s_R(f) \leqslant s_T(f) + 2mM|T|.$$

Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{4mM}$. Тогда для всякого разбиения T, $|T| < \delta$, имеем $0 \leqslant \underline{\int_a^b} f - s_T(f) < \varepsilon$.

Доказательство для $S_T(f)$ аналогично. ■

Теорема 6.9 (Дарбу). *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *функция f интегрируема на $[a,\, b]$;*
2) *существует число I, такое что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любом отмеченном разбиении $(T,\, \xi)$ с $|T| < \delta$ выполнено $|\sigma_T(f,\, \xi) - I| < \varepsilon$.*

□ $(1 \Rightarrow 2)$ Пусть $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f = I$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По лемме 6.5 существует такое $\delta > 0$, что для всякого разбиения T, $|T| < \delta$, выполнено $0 \leqslant S_T(f) - I < \varepsilon$ и $0 \leqslant I - s_T(f) < \varepsilon$. Тогда для любого набора ξ по лемме 6.4 имеем

$$\sigma_T(f, \xi) - I \leqslant S_T(f) - I < \varepsilon,$$
$$\sigma_T(f, \xi) - I \geqslant s_T(f) - I > -\varepsilon,$$

а значит, $|\sigma_T(f, \xi) - I| < \varepsilon$. Следовательно, выполняется условие (2) для $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

($2 \Rightarrow 1$) Пусть $\varepsilon > 0$. Найдется такое $\delta > 0$, что для всякого отмеченного разбиения (T, ξ), $|T| < \delta$, имеем $I - \varepsilon < \sigma_T(f, \xi) < < I + \varepsilon$. Переходя в этом неравенстве к точным граням по ξ, по лемме 6.4 получим $I - \varepsilon \leqslant s_T(f) \leqslant S_T(f) \leqslant I + \varepsilon$. Поскольку $s_T(f) \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant S_T(f)$, то $0 \leqslant \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < 2\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ верно $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, а I — их общее значение. ■

Следствие. *Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то для любой последовательности отмеченных разбиений (T_n, ξ_n), $|T_n| \to 0$, числовая последовательность $\{\sigma_{T_n}(f, \xi_n)\}$ сходится к $I = \int_a^b f(x)\,dx$.*

□ Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем соответствующее $\delta > 0$ из условия 2 теоремы. Поскольку $|T_n| \to 0$, то найдется такой номер N, что $|T_n| < \delta$ для всех $n \geqslant N$. Но тогда $|\sigma_{T_n}(f, \xi_n) - I| < \varepsilon$. ■

Пример. Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{k^2 + n^2}$.

Поскольку $\dfrac{n}{k^2 + n^2} = \dfrac{1}{n} \dfrac{1}{1 + (k/n)^2}$, то сумма под знаком предела является суммой Римана функции $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, соответствующей разбиению $[0, 1]$ на n равных частей и точкам k/n. Поэтому искомый предел равен $\int_0^1 \dfrac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \dfrac{\pi}{4}$.

6.6. Приемы интегрирования

Теорема 6.10. *Пусть функция f непрерывна на промежутке I, а функция $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to I$ дифференцируема на $[\alpha, \beta]$, причем $\varphi' \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

где $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$.

$\square$ Функция $f \circ \varphi$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, так что $(f \circ \varphi)\varphi' \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$. Пусть F — первообразная f на I, тогда по правилу дифференцирования композиции $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi)\varphi'$ на $[\alpha,\, \beta]$ и, значит, $F \circ \varphi$ — первообразная $(f \circ \varphi)\varphi'$ на этом отрезке. По формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \qquad \blacksquare$$

Замечание. В теореме 6.10 условие дифференциремости φ можно заменить на условие, что φ является обобщенной первообразной для φ' на $[\alpha,\, \beta]$. В этом случае $F \circ \varphi$ является обобщенной первообразной функции $(f \circ \varphi)\varphi'$, и результат снова будет следовать из формулы Ньютона–Лейбница.

Задача. Вычислите $\frac{1}{1}C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{5}C_n^2 - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n$.

Указание. Двумя способами вычислите интеграл $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$.

Теорема 6.11. *Пусть функции f и g дифференцируемы на отрезке $[a,\, b]$, причем $f',\, g' \in \mathcal{R}[a,\, b]$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

$\square$ Пусть $h = fg' + f'g$. Так как f, g непрерывны, а значит, интегрируемы на $[a,\, b]$, то $h \in \mathcal{R}[a,\, b]$. Кроме того, $(fg)' = fg' + f'g$, поэтому fg является первообразной функции h на $[a,\, b]$. По свойству линейности и формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\int_a^b fg'(x)dx + \int_a^b gf'(x)dx = \int_a^b (fg)'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

и искомое равенство установлено. $\blacksquare$

Замечание. В теореме 6.11 условие дифференциремости f, g можно заменить на условие, что f, g являются на $[a,\, b]$ обобщенными первообразными для f' и соответственно для g'.

Пример (формула Валлиса). $\pi = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$ (здесь полагаем $0!! = 1!! = 1$, а $m!!$ рекуррентно определяем равенством $m!! = (m-2)!! \cdot m$ для всех натуральных $m > 1$).

$\square$ Начнем с вычисления $J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x\, dx$, $m \in \mathbb{N}_0$. При $m \geqslant 2$ интегрирование по частям дает

$$J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x\, (-\cos x)'\, dx = -\sin^{m-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} +$$

$$+ (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cos^2 x\, dx = (m-1)(J_{m-2} - J_m)$$

(воспользовались тождеством $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$). Отсюда $J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}$. Последовательно применяя формулу, сводим J_m к $J_0 = \frac{\pi}{2}$ или $J_1 = 1$ в зависимости от четности m:

$$J_m = \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m \text{ четно}, \\ 1, & m \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Положим $x_n = \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$. Для $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ выполнено $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ и, значит, $\sin^{2n+1} x \leqslant \sin^{2n} x \leqslant \sin^{2n-1} x$. Интегрируя полученное неравенство, имеем

$$J_{2n+1} \leqslant J_{2n} \leqslant J_{2n-1}.$$

Подставляя найденные значения J_m, получим

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

что равносильно

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n},$$

$$\pi \leqslant x_n \leqslant \frac{2n+1}{2n} \pi,$$

откуда следует, что $x_n \to \pi$. $\blacksquare$

Из свойства монотонности интеграла следует

Теорема 6.12 (интегральная теорема о среднем). *Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $m \leqslant f \leqslant M$ на $[a, b]$, и пусть функция g не меняет знака на отрезке $[a, b]$. Тогда существует такое $\lambda \in [m, M]$, что*

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \lambda \int_a^b g(x) dx.$$

$\square$ Пусть $g \geqslant 0$ на $[a,\, b]$. Тогда $mg \leqslant fg \leqslant Mg$ на $[a,\, b]$. Откуда по свойству монотонности

$$m \int_a^b g(x)\, dx \leqslant \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leqslant M \int_a^b g(x)\, dx.$$

Если $\int_a^b g(x)dx = 0$, то также $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ и в качестве λ можно взять любое число.

Если $\int_a^b g(x)dx > 0$, то равенство выполняется для числа $\lambda = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \in [m,\, M]$.

Случай $g \leqslant 0$ сводится к предыдущему заменой g на $-g$. $\blacksquare$

Следствие. *При дополнительном предположении непрерывности функции f на $[a,\, b]$ найдется такое $c \in [a,\, b]$, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Задача. Докажите, что точку c в предыдущем следствии можно выбрать из интервала $(a,\, b)$.

Замечание. Пусть на отрезке $[a,\, b]$ функция f интегрируема и неотрицательна. Пусть существует такая точка $x_0 \in [a,\, b]$, что $f(x_0) > 0$ и f непрерывна в x_0. Тогда $\int_a^b f(x)dx > 0$.

$\square$ Используя непрерывность f в точке x_0, подберем такое $\delta > 0$, что $f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2}$ для всех $x \in [x_0 - \delta,\, x_0 + \delta] \cap [a,\, b]$. Положим $[c, d] = [x_0 - \delta,\, x_0 + \delta] \cap [a,\, b]$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx \geqslant$$
$$\geqslant \int_c^d f(x)dx \geqslant (d-c)\frac{f(x_0)}{2} > 0. \blacksquare$$

Запишем остаток формулы Тейлора в интегральной форме.

Теорема 6.13. *Пусть функция f дифференцируема $(n+1)$ раз на $(\alpha,\, \beta)$, и $f^{(n+1)}$ интегрируема на любом $[c,\, d] \subset (\alpha,\, \beta)$. Тогда для любых a, $x \in (\alpha,\, \beta)$ верно равенство*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

□ Доказательство проведем индукцией по n. При $n=0$ утверждение верно, т.к. $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$ по формуле Ньютона–Лейбница. Пусть $n>1$ и утверждение верно при $n-1$, т.е. $r_{n-1}(x)=\dfrac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt$. Интегрируя по частям, получим

$$r_{n-1}(x)=-\frac{1}{n!}\int_a^x ((x-t)^n)'f^{(n)}(t)\,dt=$$

$$=-\frac{1}{n!}f^{(n)}(t)\,(x-t)^n\Big|_a^x+\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt=$$

$$=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,$$

откуда следует $r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$, что завершает доказательство. ■

6.7. Преобразование Абеля

Рассмотрим преобразование конечных сумм, которое бывает полезно при изучении интегралов и рядов. Такое преобразование является дискретным аналогом интегрирования по частям.

Пусть $\{a_n\},\{b_n\}$ — комплексные последовательности, $m\in\mathbb{N}$ и пусть $A_k=\sum_{i=1}^k a_i$ для всех k. Тогда $a_k=A_k-A_{k-1}$ (считаем $A_0=0$) и

$$\sum_{k=m}^n a_kb_k=\sum_{k=m}^n (A_k-A_{k-1})b_k=\sum_{k=m}^n A_kb_k-\sum_{k=m-1}^{n-1} A_kb_{k+1}.$$

Таким образом, справедливо тождество (*преобразование Абеля*):

$$\sum_{k=m}^n a_kb_k=A_nb_n-A_{m-1}b_m-\sum_{k=m}^{n-1} A_k(b_{k+1}-b_k). \qquad (6.3)$$

Лемма 6.6 (Абель). *Пусть $\{a_n\}$ — комплексная последовательность, $\{b_n\}$ — монотонная последовательность. Если $\left|\sum_{i=m}^k a_i\right|\leqslant M$ для всех k, то справедлива оценка*

$$\left|\sum_{k=m}^n a_kb_k\right|\leqslant 2M(|b_m|+|b_n|).$$

□ Можно считать, что все a_k при $k < m$ равны нулю, в частности, $A_{m-1} = 0$. Тогда из (6.3) ввиду сохранения знака разностей $b_{k+1} - b_k$ имеем

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| \leqslant M\left(|b_n| + \left|\sum_{k=m}^{n-1}(b_k - b_{k+1})\right|\right) =$$
$$= M(|b_n| + |b_n - b_m|) \leqslant 2M(|b_m| + |b_n|). \qquad ■$$

Замечание. При $m = 1$ оценку можно уточнить: если $\{b_n\}$ нестрого убывает и неотрицательна, $a_k \in \mathbb{R}$ и $c \leqslant A_k \leqslant C$ для всех k, то $cb_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant Cb_1$.

Лемма 6.7 (Абель). *Пусть функция f интегрируема, а функция g монотонна на $[a, b]$. Если $\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leqslant M$ для всех $x \in [a, b]$, то справедлива оценка*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant 2M(|g(a)| + |g(b)|).$$

□ Пусть $T_n = \{x_i\}_{i=0}^n$ — разбиение $[a, b]$ на n равных частей. Положим $C = \sup_{[a,\,b]} |f|$, $\Delta_k g = g(x_{k-1}) - g(x_k)$ и

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx, \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

В силу монотонности g все $\Delta_k g$ одного знака и на k-м отрезке разбиения $|g(x) - g(\xi_k)| \leqslant |\Delta_k g|$. Поэтому

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - \sigma_n\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)(g(x) - g(\xi_k))dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |\Delta_k g| \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f|dx \leqslant C\frac{b-a}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} \Delta_k g\right| =: \alpha_n.$$

Так как $\sum_{k=1}^{n} \Delta_k g = g(b) - g(a)$, то $\alpha_n \to 0$ и, значит, $\sigma_n \to \int_a^b fg$.

Применим предыдущую лемму к σ_n, положив $a_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f$ и $b_k = g(\xi_k)$. Тогда $\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| = \left|\int_a^{x_k} f\right| \leqslant M$, а значит,

$$|\sigma_n| \leqslant 2M(|g(\xi_1)| + |g(\xi_n)|).$$

Учитывая свободу при выборе ξ_k, считаем, что $\xi_1 = a$, $\xi_n = b$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в оценке для σ_n, получаем требуемое неравенство. ■

Задача (формула Бонне). Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, функция g нестрого убывает и неотрицательна на $[a, b]$. Покажите, что существует такая точка $c \in [a, b]$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx.$$

Указание. Используйте замечание после леммы 6.6.

7. Несобственный интеграл

В этом разделе интеграл Римана обобщается в двух направлениях: на случай, когда область интегрирования является лучом, и на случай, когда подынтегральная функция неограничена.

7.1. Определение и основные свойства

Определение. Функция f называется *локально интегрируемой* (по Риману) на промежутке I, если $f \in \mathcal{R}[a, c]$ для каждого отрезка $[a, c]$, содержащегося в I.

Например, непрерывная на промежутке функция локально интегрируема.

Определение. Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, и функция f локально интегрируема на $[a, b)$. Предел

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to b-0} \int_a^c f(x)dx$$

называется *несобственным интегралом* (Римана) *от функции f по* $[a, b)$. Если указанный предел существует и конечен, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *сходящимся*; иначе — *расходящимся.*

Здесь и далее под $+\infty - 0$ подразумевается символ $+\infty$. Такое соглашение позволит нам рассматривать случаи $b \in \mathbb{R}$ и $b = +\infty$ одновременно.

Замечание. Если $b \in \mathbb{R}$, функция f локально интегрируема на $[a, b)$ и *ограничена*, то по теореме 6.6 $f \in \mathcal{R}[a, b]$ (при любом доопределении в точке b). В силу непрерывности интеграла с переменным верхним пределом

$$\lim_{c\to b-0} \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

т.е. несобственный интеграл совпадает с определенным интегралом. Поэтому новая ситуация возникает только в случае:

а) $b = +\infty$ или б) $b \in \mathbb{R}$ и f неограничена на $[a, b)$.

Аналогично определяется *несобственный интеграл от f по* $(a, b]$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.

Ряд свойств определенного интеграла переносится на несобственные интегралы с помощью предельного перехода. Для определенности все утверждения будут формулироваться только для случая несобственного интеграла по $[a, b)$.

Свойство 1 (принцип локализации). Пусть f локально интегрируема на $[a, b)$ и $a^* \in (a, b)$. Тогда интегралы $\int_{a^*}^b f(x)dx$ и $\int_a^b f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно, а если сходятся, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a^*} f(x)dx + \int_{a^*}^b f(x)dx. \tag{7.1}$$

$\square$ Если $c \in (a, b)$, то по свойству аддитивности определенного интеграла

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^{a^*} f(x)dx + \int_{a^*}^c f(x)dx.$$

Поэтому пределы $\lim\limits_{c\to b-0} \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ и $\lim\limits_{c\to b-0} \int_{a^*}^c f(x)dx = \int_{a^*}^b f(x)dx$ существуют (конечны) одновременно. В случае существования равенство (7.1) следует из равенства определенных интегралов предельным переходом при $c \to b-0$. $\blacksquare$

Следующие три свойства доказываются аналогично.

Свойство 2 (линейность). Пусть несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся и $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$. Тогда сходится и интеграл $\int_a^b(\lambda f(x) + \mu g(x))dx$, причем верно равенство

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Свойство 3. Пусть f локально интегрируема на $[a, b)$, и F — (обобщенная) первообразная f на $[a, b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a)$$

при существовании хотя бы одной из частей формулы.

Свойство 4 (интегрирование по частям). Пусть функции f и g дифференцируемы, а их производные f', g' локально интегрируемы на $[a, b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^{b-0} - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

(существование двух конечных пределов влечет существование третьего, и равенство выполняется).

Свойство 5 (замена переменной). Пусть f непрерывна на $[a, b)$, φ дифференцируема, строго монотонна на $[\alpha, \beta)$, причем φ' локально интегрируема на $[\alpha, \beta)$, $\varphi(\alpha) = a$ и $b = \lim\limits_{t \to \beta - 0} \varphi(t)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

(существование одного из интегралов влечет существование другого, и равенство выполняется).

□ Определим

$$F(c) = \int_a^c f(x)dx \quad \text{и} \quad \Phi(\gamma) = \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

По формуле замены переменной в определенном интеграле $F(\varphi(\gamma)) = \Phi(\gamma)$ для всех $\gamma \in [\alpha, \beta)$.

Пусть (в $\overline{\mathbb{R}}$) определен несобственный интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$. Тогда по свойству предела композиции существует

$$\lim_{\gamma \to \beta - 0} \Phi(\gamma) = \lim_{c \to b - 0} F(c) = I,$$

т.е. определен несобственный интеграл $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = I$.

Поскольку определена обратная функция φ^{-1} и $\gamma = \varphi^{-1}(c) \to \beta$ при $c \to b - 0$, то по свойству предела композиции существование $\lim\limits_{\gamma \to \beta - 0} \Phi(\gamma)$ влечет существование равного $\lim\limits_{c \to b - 0} F(c)$, т.е. правая часть равенства влечет существование левой. ■

Замечание. Для несобственных интегралов также примем соглашение $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, считая, что при $a > b$ выражение $[a, b)$ обозначает $(b, a]$.

Пример. Исследуем сходимость $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

□ Если $\alpha \neq 1$, то $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big|_1^{+\infty} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1}, & \alpha > 1, \\ +\infty, & \alpha < 1. \end{cases}$

Если $\alpha = 1$, то $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \ln x\Big|_1^{+\infty} = +\infty$. ■

Ответ: $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.

Пример. Исследуем сходимость $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

□ Интеграл рассматривается как несобственный по промежутку $(0,\, 1]$. Сделав в нем замену $x = \frac{1}{t}$, получим $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{2-\alpha}}$, который сходится $\Longleftrightarrow \alpha < 1$. ■

Ответ: $\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится $\Longleftrightarrow \alpha < 1$.

Теорема 7.1 (критерий Коши). *Пусть f локально интегрируема на $[a,\, b)$. Тогда для сходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно выполнения условия Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b_\varepsilon \in [a,\, b)\ \forall \xi,\, \eta \in (b_\varepsilon,\, b)\ \ \left(\left|\int_\xi^\eta f(x)dx\right| < \varepsilon\right).$$

□ Пусть $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a,\, b)$. Так как $\int_\xi^\eta f(x)dx = F(\eta) - F(\xi)$, то доказываемое утверждение — переформулировка критерия Коши существования предела F при $x \to b - 0$. ■

Определение. Пусть f локально интегрируема на $[a,\, b)$. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$. Если несобственный интеграл сходится, но не сходится абсолютно, то он называется *условно сходящимся*.

Замечание. Сходимость интеграла $\int_a^b |f(x)|dx$ не дает права использовать выражение $\int_a^b f(x)dx$, поскольку f может не быть интегрируемой на некотором отрезке $[a,\, c]$. Примером такой функции служит модификация функции Дирихле: $f(x) = \mathcal{D}(x) - \frac{1}{2}$ при $x \in [a,\, c]$ и $f(x) = 0$ при $x > c$.

Следствие. *Абсолютно сходящийся интеграл сходится.*

□ Для любых ξ, η, таких что $a \leqslant \xi < \eta < b$, верно $\left|\int_\xi^\eta f(x)dx\right| \leqslant \int_\xi^\eta |f(x)|dx$. Отсюда следует, что если условие Коши выполняется для интеграла от $|f|$, то оно выполняется и для интеграла от f. Таким образом, если интеграл от $|f|$ сходится, то интеграл от f тоже сходится по критерию Коши. ■

Из последнего неравенства следует, что если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$.

7.2. Интегралы от неотрицательных функций

Последнее следствие указывает на особую роль интегралов от неотрицательных функций. Изучим вопросы сходимости таких интегралов.

Лемма 7.1. *Пусть f локально интегрируема и неотрицательна на $[a, b)$. Тогда сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$ равносильна ограниченности функции $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ на $[a, b)$.*

□ Функция F нестрого возрастает на $[a, b)$, т.к. для любых $x_1, x_2 \in [a, b)$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \geqslant 0$. По теореме 4.3 о пределах монотонной функции существует $\lim\limits_{x\to b-0} F(x) = \sup_{[a, b)} F(x)$. Отсюда, ввиду неотрицательности, заключаем, что ограниченность F равносильна наличию конечного предела, т.е. сходимости интеграла. ■

Замечание. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от неотрицательной функции либо сходится, либо расходится к $+\infty$. Сходимость равносильна ограниченности некоторой последовательности $I_n = \int_a^{c_n} f(x)dx$, где $c_n \in [a, b)$ и $c_n \to b$. Это вытекает из равенства $\lim\limits_{c\to b-0} \int_a^c f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Теорема 7.2 (признак сравнения). *Пусть f, g локально интегрируемы на $[a, b)$ и $0 \leqslant f \leqslant g$ на $[a, b)$.*

1) *Если $\int_a^b g(x)\,dx$ сходится, то и $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится.*

2) *Если $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится, то и $\int_a^b g(x)\,dx$ расходится.*

□ Для любого $x \in [a, b)$ выполнено $0 \leqslant \int_a^x f(t)\,dt \leqslant \int_a^x g(t)\,dt$. Если $\int_a^b g(x)\,dx$ сходится, то по лемме 7.1 функция $\int_a^x g(t)\,dt$ ограничена на $[a, b)$. Но тогда ограничена и функция $\int_a^x f(t)\,dt$, что по лемме 7.1 влечет сходимость $\int_a^b f(x)\,dx$.

Второе доказываемое утверждение вытекает из первого по правилу контрапозиции. ■

Следствие 1. *Пусть f, g локально интегрируемы и неотрицательны на $[a, b)$. Если $f(x) = O(g(x))$ при $x \to b-0$, то справедливо заключение предыдущей теоремы.*

$\square$ Поскольку $f(x)=O(g(x))$ при $x\to b-0$ и f,g неотрицательны,

$$\exists C>0\ \exists a^*\in[a,\,b)\ \forall x\in[a^*,\,b)\ (f(x)\leqslant C\,g(x)).$$

Если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_{a^*}^b Cg(x)dx$. Тогда по признаку сравнения сходится интеграл $\int_{a^*}^b f(x)dx$, а значит, сходится интеграл $\int_a^b f(x)dx$. $\blacksquare$

Следствие 2. *Пусть f, g локально интегрируемы и положительны на $[a,\,b)$. Если существует $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\in(0,\,+\infty)$, то несобственные интегралы от функций f и g по $[a,\,b)$ сходятся или расходятся одновременно.*

$\square$ В условиях следствия существует также $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{g(x)}{f(x)}\in(0,\,+\infty)$. Поскольку существование конечного предела влечет ограниченность функции в некоторой окрестности предельной точки, то $f(x)=O(g(x))$ и $g(x)=O(f(x))$ при $x\to b-0$. Осталось воспользоваться следствием 1. $\blacksquare$

Пример. Исследуем сходимость интегралов

а) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} x^{100}e^{-x}dx$, б) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x}$.

$\square$ а) Поскольку $e^{-x}=o\left(\frac{1}{x^{102}}\right)$, то $x^{100}e^{-x}=o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x\to$ $\to+\infty$. Интеграл $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ сходится, поэтому по признаку сравнения (следствию 1) интеграл $\int_1^{+\infty}x^{100}e^{-x}dx$ также сходится.

б) Поскольку $\operatorname{tg}x\sim x$ при $x\to+0$ и интеграл $\int_0^1\dfrac{dx}{x}$ расходится, то по признаку сравнения (следствию 2) интеграл $\int_0^1\dfrac{dx}{\operatorname{tg}x}$ также расходится. $\blacksquare$

7.3. Интегралы от знакопеременных функций

Изучим вопросы сходимости интегралов от функций, которые не сохраняют знак ни в какой окрестности точки b.

Лемма 7.2. *Пусть f, g локально интегрируемы на $[a,\,b)$. Если $\int_a^b g(x)\,dx$ абсолютно сходится, то интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b(f(x)+g(x))dx$ либо одновременно расходятся, либо одновременно сходятся условно, либо одновременно сходятся абсолютно.*

$\square$ Интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ сходится. По свойству линейности в силу представления $f = (f+g) - g$ на $[a,\, b)$ заключаем, что интегралы от f и $f+g$ одновременно сходятся. Кроме того,

$$|f+g| \leqslant |f| + |g|, \quad |f| \leqslant |f+g| + |g|.$$

Откуда по признаку сравнения следует, что интегралы от f и $f+g$ одновременно сходятся абсолютно. $\blacksquare$

Теорема 7.3 (признак Дирихле). *Пусть функции f, g локально интегрируемы на $[a,\, b)$, причем*

1) *функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ограничена на $[a,\, b)$;*
2) *функция g монотонна на $[a,\, b)$;*
3) $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$.

Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x)g(x)dx$ сходится.

$\square$ Пусть $|F| < M$ на $[a,\, b)$, тогда для всякого $\xi \in [a,\, b)$ справедлива оценка

$$\left|\int_\xi^x f(t)\,dt\right| = |F(x) - F(\xi)| < 2M.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем такое $b' \in [a,\, b)$, что $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{8M}$ при всех $x \in (b',\, b)$. Воспользуемся леммой 6.7 Абеля. Тогда для любого $[\xi,\, \eta] \subset (b',\, b)$ выполнено

$$\left|\int_\xi^\eta f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant 2\cdot 2M(|g(\xi)| + |g(\eta)|) < 4M\left(\frac{\varepsilon}{8M} + \frac{\varepsilon}{8M}\right) = \varepsilon.$$

Доказательство завершается ссылкой на критерий Коши. $\blacksquare$

Заметим, что первые два условия теоремы выполнены, если f непрерывна и имеет ограниченную на $[a,\, b)$ первообразную, а g дифференцируема и g' не меняет знака на этом промежутке.

Следующая теорема является следствием признака Дирихле.

Теорема 7.4 (признак Абеля). *Пусть функции f, g локально интегрируемы на $[a,\, b)$, причем*

1) *интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится;*
2) *функция g монотонна на $[a,\, b)$;*
3) *функция g ограничена на $[a,\, b)$.*

Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x)g(x)dx$ сходится.

□ Так как g монотонна и ограничена, то существует $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = c \in \mathbb{R}$. Функции f и $g - c$ удовлетворяют признаку Дирихле, поэтому $\int_a^b f(x)(g(x)-c)dx$ сходится. Тогда

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)(g(x)-c)dx + c\int_a^b f(x)dx$$

сходится как сумма сходящихся интегралов. ■

Следствие. *Пусть f локально интегрируема на $[a, b)$, g монотонна на $[a, b)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Тогда интегралы $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ и $\int_a^b f(x)\,dx$ либо одновременно расходятся, либо одновременно сходятся условно, либо одновременно сходятся абсолютно.*

□ Покажем, что интегралы $\int_a^b f(x)g(x)dx$ и $\int_a^b f(x)dx$ сходятся одновременно. Действительно, если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то $\int_a^b f(x)g(x)dx$ сходится по признаку Абеля. Так как $c \neq 0$, то на некотором промежутке $[a^*, b)$ функция g сохраняет знак и, значит, определена функция $h = \frac{1}{g}$, которая является монотонной на $[a^*, b)$. Поскольку $f = fgh$ на $[a^*, b)$, то из сходимости интеграла $\int_{a^*}^b f(x)g(x)dx$ по признаку Абеля следует сходимость $\int_{a^*}^b f(x)dx$, а следовательно, и сходимость $\int_a^b f(x)dx$.

Из существования конечных пределов g и h следует, что $|fg| = O(|f|)$ при $x \to b-0$ и $|f| = O(|fg|)$ при $x \to b-0$. По следствию 1 из признака сравнения заключаем, что интегралы $\int_a^b |f(x)g(x)|dx$ и $\int_a^b |f(x)|dx$ сходятся или расходятся одновременно. ■

Пример. Исследуем сходимость и абсолютную сходимость интеграла $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin kx}{x^\alpha}\,dx$ $(k > 0)$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

□ Можно считать, что $k = 1$ (иначе сделаем замену $t = kx$).

Пусть $\alpha > 1$. Поскольку $\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha}$ на луче $[1, +\infty)$, то по признаку сравнения интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx$ сходится, а значит, $I(\alpha)$ сходится абсолютно.

Пусть $\alpha \leqslant 0$. В этом случае интеграл $I(\alpha)$ расходится, т.к. выполняется отрицание условия Коши: для $\varepsilon = 2$ и всякого $\Delta \geqslant 1$

найдутся ξ, $\eta > \Delta$, $\xi = 2\pi n$, $\eta = \pi + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{N})$, такие что
$$\left|\int_\xi^\eta \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx\right| = \int_\xi^\eta x^{-\alpha}\sin x\,dx \geqslant (2\pi n)^{-\alpha}\int_{2\pi n}^{\pi+2\pi n}\sin x\,dx \geqslant 2.$$

Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$.

Функции $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ удовлетворяют признаку Дирихле, поэтому интеграл $I(\alpha)$ сходится. Однако при $n \in \mathbb{N}$ имеем
$$\int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx \geqslant \frac{1}{(2\pi n)^\alpha}\int_{\pi n}^{2\pi n} |\sin x|\,dx =$$
$$= \frac{1}{(2\pi n)^\alpha}\sum_{m=0}^{n-1}\int_{\pi(n+m)}^{\pi(n+m+1)} |\sin x|\,dx = \frac{n}{(2\pi n)^\alpha}\int_0^\pi |\sin x|\,dx \geqslant \frac{1}{\pi^\alpha}.$$

Следовательно, по критерию Коши $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx$ расходится и, значит, $I(\alpha)$ сходится условно. ■

Задача. Пусть $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ непрерывна и $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Верно ли, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$? Тот же вопрос при дополнительном предположении, что а) f неотрицательна на $[1, +\infty)$; б) f равномерно непрерывна на $[1, +\infty)$.

Теперь определим интегралы с несколькими особенностями.

Определение. Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, и функция f определена на (a, b), кроме, быть может, конечного множества точек.

Точка $c \in (a, b)$ называется *особенностью* f, если $f \notin \mathcal{R}[\alpha, \beta]$ для любого $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, $\alpha < c < \beta$ (при доопределении в c).

Точка b называется *особенностью* f, если $b = +\infty$, или $b \in \mathbb{R}$ и $f \notin \mathcal{R}[\alpha, b]$ для любого $[\alpha, b]$, где $a < \alpha < b$. Аналогично определяется особенность в левом конце a.

Замечание. Если на интервале (c, d) нет особенностей функции f, то f локально интегрируема на (c, d).

□ Пусть $[u, v] \subset (c, d)$. По условию каждая точка $x \in [u, v]$ лежит внутри некоторого отрезка $[\alpha_x, \beta_x]$, на котором f интегрируема. По теореме 3.2 Гейне–Бореля из покрытия $\{(\alpha_x, \beta_x)\}_{x\in[u,v]}$ отрезка $[u, v]$ можно выделить конечное подпокрытие. Объединяя элементы этого подпокрытия и пользуясь аддитивностью интеграла, заключаем, что f интегрируема на отрезке, содержащем $[u, v]$. ■

Пусть $c_1 < \ldots < c_{N-1}$ — все особенности f на $(a,\,b)$, $c_0 = a$, $c_N = b$. Пусть ξ_k — произвольная точка $(c_{k-1},\,c_k)$, $k = 1,\,\ldots,\,N$. *Несобственным интегралом* функции f по $(a,\,b)$ называется

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sum_{k=1}^{N}\left(\int_{c_{k-1}}^{\xi_k} f(x)\,dx + \int_{\xi_k}^{c_k} f(x)\,dx\right),$$

если все интегралы в правой части (понимаемые как несобственные) и сумма имеют смысл в $\overline{\mathbb{R}}$. При этом $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *сходящимся*, если сходятся все интегралы в правой части, иначе — *расходящимся*.

Корректность (независимость от ξ_k) следует из принципа локализации.

Таким образом, исследование интегралов с несколькими особенностями сводится к исследованию интегралов с одной особенностью.

7.4. Формула суммирования Эйлера и ее приложения

Оценим погрешность при замене суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ на $\int\limits_1^n f(t)dt$.

Теорема 7.5 (Эйлер). *Пусть $f\colon [1,\,+\infty) \to \mathbb{R}$ дифференцируема, а ее производная локально интегрируема, $\rho(t) = \{t\} - \frac{1}{2}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(t)dt + \frac{f(1)+f(n)}{2} + \int_1^n \rho(t)f'(t)dt.$$

□ Интегрирование по частям дает

$$\int_k^{k+1} f(t)dt = (t-k)f(t)\Big|_k^{k+1} - \int_k^{k+1}(t-k)f'(t)dt =$$

$$= f(k+1) - \int_k^{k+1}\{t\}f'(t)dt.$$

Суммируя полученные равенства от 1 до $n-1$, имеем

$$\int_1^n f(t)dt = \sum_{k=2}^{n} f(k) - \int_1^n \{t\}f'(t)dt.$$

Складывая это выражение с $\frac{f(n)}{2} - \frac{f(1)}{2} = \int_1^n \frac{f'(t)}{2}dt$, после элементарных преобразований получаем искомое равенство. ■

При дополнительных ограничениях формула Эйлера принимает наиболее интересный вид.

Следствие. *Пусть функция* $f\colon [1,+\infty)\to\mathbb{R}$ *дифференцируема и ее производная монотонно стремится к нулю при* $t\to+\infty$. *Тогда для любого* $n\in\mathbb{N}$ *выполнено*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\int_1^n f(t)dt+C(f)+\frac{f(n)}{2}+\varepsilon_n,$$

где

$$C_f=\frac{f(1)}{2}+\int_1^{+\infty}\rho(t)f'(t)dt,\qquad \varepsilon_n=-\int_n^{+\infty}\rho(t)f'(t)dt,$$

и все интегралы в правых частях этих формул существуют.

$\square$ Интеграл от $\rho(t)$ по отрезку $[k,\,k+1]$ равен нулю для любого целого k. Поэтому

$$\int_1^x \rho(t)dt=\int_{[x]}^x\left(t-[x]-\frac{1}{2}\right)dt=\frac{1}{2}(\{x\}^2-\{x\})$$

и, значит, функция $F(x)=\int_1^x\rho(t)dt$ ограничена. Так как функция f' монотонно стремится к нулю, то несобственный интеграл от ρf сходится по признаку Дирихле. Поэтому данное утверждение есть лишь переформулировка формулы Эйлера. $\blacksquare$

Отметим, что $\varepsilon_n\to 0$ как «хвост» сходящегося интеграла.

Пример. $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+O\Big(\frac{1}{n}\Big),\ n\to\infty.$

$\square$ Применим следствие теоремы 7.5 к функции $f(t)=\frac{1}{t}$. Обозначая константу C_f через γ (константа Эйлера–Маскерони), получим

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}+\varepsilon_n,\quad \text{где}\ \ \varepsilon_n=\int_n^{+\infty}\frac{\rho(t)}{t^2}dt.$$

Поскольку $|\rho(t)|\leqslant\frac{1}{2}$, то для ε_n верна оценка $|\varepsilon_n|\leqslant\frac{1}{2n}$, откуда следует заявленная асимптотика. $\blacksquare$

Пример (формула Стирлинга). $n!\sim\sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n,\ n\to\infty.$

□ Применим следствие теоремы 7.5 к функции $f(t) = \ln t$:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + C_f + 1 + \varepsilon_n.$$

Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln k = \ln n!$, то избавляясь от логарифмов и полагая $c = e^{C_f+1}$, получаем

$$n! = c \exp\left(n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \varepsilon_n\right) = c\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + o(1)).$$

Найдем константу c при помощи формулы Валлиса. Имеем

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \frac{a\sqrt{n}(1+o(1))^2}{\sqrt{2}(1+o(1))}.$$

Тогда по формуле Валлиса:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{a^2 n(1+o(1))^4}{2(1+o(1))^2} = \frac{c^2}{2}.$$

Поэтому $c = \sqrt{2\pi}$, а значит, $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + o(1))$. ■

8. Числовые ряды

Мы переходим к формализации понятия «суммы бесконечного числа слагаемых». Существенная часть теории в этом разделе будет направлена на установление условий, позволяющих работать с такими объектами как с конечными суммами.

8.1. Сумма числового ряда

Определение. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность действительных (комплексных) чисел. Выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{8.1}$$

называется *числовым рядом* с n-м членом a_n. Число $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ называется N*-й частичной суммой* ряда (8.1). Предел

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N$$

называется *суммой* ряда (8.1). Если указанный предел существует и конечен, то ряд (8.1) называется *сходящимся*; иначе — *расходящимся.*

Замечание. С каждой последовательностью $\{s_n\}$ можно связать ряд (8.1), для которого $\{s_n\}$ является последовательностью частичных сумм: достаточно положить $a_1 = s_1$, $a_n = s_n - s_{n-1}$ при $n > 1$ (*телескопический ряд*).

Отметим, что нумерация членов ряда может начинаться с любого $m \in \mathbb{Z}$.

Примеры. Исследуем сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, $z \in \mathbb{C}$ (*геометрический ряд*); б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

□ а) При $z = 1$ ряд расходится, т.к. $S_N = N + 1 \to \infty$. При $z \neq 1$ частичная сумма $S_N = \dfrac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$. Если $|z| < 1$, то $|z|^N \to 0$, а значит, $z^N \to 0$. Поэтому $S_N \to \dfrac{1}{1 - z}$, ряд сходится и его сумма равна $\dfrac{1}{1 - z}$. Если $|z| \geqslant 1$, то $\{S_N\}$ не имеет (конечного) предела, т.к. в противном случае $z^N = S_N - S_{N-1} \to 0$ (см. свойство 3 ниже). Итак, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ сходится $\Longleftrightarrow |z| < 1$.

б) Так как

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \to 1,$$

то ряд сходится и его сумма равна единице. ■

Перечислим основные свойства числовых рядов.

Свойство 1 (принцип локализации). Для каждого $m \in \mathbb{N}$ ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n$ сходятся или расходятся одновременно, а если сходятся, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n.$$

□ Если $N > m$, то $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n + \sum\limits_{m=m+1}^{N} a_n$. Поэтому пределы левой и правой частей при $N \to \infty$ существуют (конечны) одновременно. В случае существования заявленное равенство получается предельным переходом при $N \to \infty$. ■

Замечание. Ряд $r_N = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$ называется N*-м остатком* ряда (8.1). Принцип локализации можно переформулировать так: если ряд сходится, то сходится и любой его остаток; если некоторый остаток ряда сходится, то и весь ряд сходится.

Свойство 2 (линейность). Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и λ, $\mu \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Тогда сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$, причем верно равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

□ Вытекает из свойства линейности предела последовательности. ■

Свойство 3 (необходимое условие сходимости ряда). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\square$ По определению $a_n = S_n - S_{n-1}$ (считаем $S_0 = 0$), поэтому $a_n \to S - S = 0$, где S — сумма ряда. $\blacksquare$

Как показывает следующий пример, стремление членов к нулю не является достаточным условием сходимости ряда.

Пример. *Гармонический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится: пусть $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, тогда $H_{2n} - H_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n} n = \frac{1}{2} \not\to 0$; но $\frac{1}{n} \to 0$.

Рассмотрим вопрос расстановки скобок в рядах.

Определение. Пусть дана строго возрастающая последовательность целых чисел $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, где $b_k = a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}$, называется *группировкой* ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Свойство 4. а) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то любая его группировка сходится к той же сумме.

б) Пусть существует такое $L \in \mathbb{N}$, что $n_k - n_{k-1} \leqslant L$ для всех k. Если $a_n \to 0$ и группировка $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, где $b_k = \sum\limits_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_j$, сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к той же сумме.

$\square$ Обозначим через S_N частичную сумму исходного ряда, а через S_N^* частичную сумму его группировки.

а) Пусть $S_N \to S$. Так как $S_N^* = S_{n_N}$, то $S_N^* \to S$ как подпоследовательность.

б) В основе доказательства лежит наблюдение, что для всякого n найдется такое k, что $S_n = S_{n_k} + a_{n_k+1} + \ldots + a_n$ и $S_{n_k} = S_k^*$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем такие $K,\ M \in \mathbb{N}$, что $|S_k^* - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $k \geqslant K$ и $|a_m| < \frac{\varepsilon}{2L}$ при $m \geqslant M$. Положим $N = \max\{n_K,\ M + L\}$.

Пусть $n \geqslant N$. Тогда $n_k \leqslant n < n_{k+1}$ для некоторого $k \geqslant K$ и

$$|S_n - S| \leqslant |S_{n_k} - S| + |a_{n_k+1}| + \ldots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Применяя критерий Коши к последовательности частичных сумм $\{S_n\}$, получим *критерий Коши сходимости ряда.*

Теорема 8.1. *Для сходимости ряда* (8.1) *необходимо и достаточно выполнения условия Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m,\, n \geqslant N \ \left(\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то он называется *условно сходящимся.*

Следствие. *Абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Рассмотренные свойства говорят о тесной связи между рядами и несобственными интегралами. Следующее важное утверждение позволяет напрямую переносить аналогичные результаты из теории интегралов в теорию рядов.

С *действительным* рядом (8.1) (все $a_n \in \mathbb{R}$) свяжем функцию $f_a\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, полагая $f_a(x) = a_n$, если $n \leqslant x < n+1$.

Лемма 8.1. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и интеграл* $\int\limits_{1}^{+\infty} f_a(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно, причем если сходятся, то к одному значению.*

□ Обозначим через S_n n-ю частичную сумму ряда (8.1). Поскольку $S_n = \int_1^{n+1} f_a(x)dx$, то сходимость интеграла влечет сходимость ряда. Обратное утверждение следует из оценки

$$\left| \int_1^x f_a(x)dx - S_n \right| \leqslant \int_x^{n+1} |f_a(x)|dx \leqslant |a_n|, \quad n = [x],$$

и необходимого условия сходимости ряда. ■

8.2. Ряды с неотрицательными членами

Поскольку последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами нестрого возрастает, то справедлива

Лемма 8.2. *Пусть* $a_n \geqslant 0$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$. *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда ограничена последовательность его частичных сумм* $\{S_n\}$.

Простым следствием леммы 8.1 и теоремы 7.2 является

Теорема 8.2 (Признак сравнения). *Пусть* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

1) *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

2) *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *расходится.*

Следующее два следствия выводятся из теоремы 8.2 так же, как аналогичные утверждения для интегралов выводятся из теоремы 7.2.

Следствие 1. *Пусть* $a_n,\ b_n \geqslant 0$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $a_n = O(b_n)$ *при* $n \to \infty$. *Тогда справедливо заключение предыдущей теоремы.*

Следствие 2. *Пусть* $a_n,\ b_n > 0$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$. *Если существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0,\ +\infty)$, *то ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

В лемме 8.1 с рядом связывался специальный интеграл. Для *монотонных* функций можно рассмотреть двойственный результат о связи интеграла с рядом из значений в целых точках.

Теорема 8.3 (интегральный признак). *Пусть функция* f *неотрицательна и нестрого убывает на* $[1,\ +\infty)$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *и интеграл* $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно* (см. рис. 8.1).

□ Введем обозначения $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$, $F(x) = \int_1^x f(t)dt$. Так как $f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$ на $[k,\ k+1]$, то $f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k)$. Просуммировав такие неравенства, получим

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leqslant \int_1^n f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

или в наших обозначениях $s_n - f(1) \leqslant F(n) \leqslant s_{n-1}$. Отсюда заключаем, что последовательности $\{s_n\}$ и $\{F(n)\}$ ограничены одновременно.

По лемме 8.2 ограниченность $\{s_n\}$ равносильна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. В силу монотонности ограниченность $\{F(n)\}$

равносильна ограниченности функции F на $[1, +\infty)$, что по лемме 7.1 равносильно сходимости $\int_1^{+\infty} f(x)dx$. ■

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится $\iff \alpha > 1$.

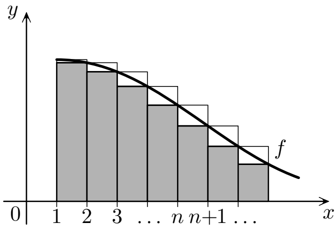

Рис. 8.1

□ При $\alpha \leqslant 0$ ряд расходится, поскольку n-й член не стремится к нулю. При $\alpha > 0$ к функции $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ применима теорема 8.3, поэтому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходятся одновременно. Последний интеграл сходится только при $\alpha > 1$. ■

Задача. Покажите, что в условиях теоремы 8.3 последовательность $\alpha_n = s_n - F(n)$ сходится.

Следующие два признака основаны на сравнении с геометрическим рядом.

Теорема 8.4 (признак Коши). *Пусть $a_n \geqslant 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $q = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.*

1) *Если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.*

2) *Если $q > 1$, то $a_n \not\to 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

□ 1) Пусть $q_0 \in (q, 1)$. Выберем N так, что $\sup\limits_{n\geqslant N} \sqrt[n]{a_n} < q_0$. Тогда $a_n < q_0^n$ для всех $n \geqslant N$ и ряд сходится по признаку сравнения с геометрическим рядом $\sum q_0^n$.

2) Так как q — частичный предел, то существует подпоследовательность $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \to q$. Тогда неравенство $a_{n_k} > 1$ выполняется для всех достаточно больших k. Следовательно, $a_n \not\to 0$ и ряд расходится. ■

Теорема 8.5 (признак Даламбера). *Пусть $a_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

1) *Если $\overline{r} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.*

2) *Если $\underline{r} = \varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то $a_n \not\to 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

$\square$ 1) Пусть $r \in (\overline{r}, 1)$. Выберем N так, что $\sup\limits_{n\geqslant N} \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$. Тогда $a_{n+1} < ra_n$ при всех $n \geqslant N$ и, значит, $a_n < ra_{n-1} < \ldots < r^{n-N}a_N$ при $n > N$. Следовательно, ряд сходится по признаку сравнения с геометрическим рядом $\sum r^n$.

2) Пусть $\underline{r} > 1$. Найдется такой номер N, что $\inf\limits_{n\geqslant N} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Поэтому $a_n > a_{n-1} > \ldots > a_N > 0$ при $n > N$. Следовательно, $a_n \nrightarrow 0$ и ряд расходится. $\blacksquare$

Замечание. Если в теореме 8.4 $q = 1$ или в теореме 8.5 $\overline{r} \geqslant 1$, $\underline{r} \leqslant 1$, то в общем случае нельзя сделать вывод о сходимости ряда $\sum a_n$.

Пример. Пусть $a_n = 1$ и $b_n = \frac{1}{n^2}$. Тогда для каждого из этих рядов $q = \overline{r} = \underline{r} = 1$, но ряд $\sum a_n$ расходится, а ряд $\sum b_n$ сходится.

Задача. Пусть $a_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите неравенства

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Из последней цепочки неравенств следует, что если к ряду применим признак Даламбера, то применим и признак Коши. Обратное неверно.

Пример. Пусть $0 < \alpha < \beta < 1$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где

$$a_n = \begin{cases} \alpha^n, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \beta^n, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Тогда отношения $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ равны $\frac{\alpha^{n+1}}{\beta^n}$ или $\frac{\beta^{n+1}}{\alpha^n}$, и корни $\sqrt[n]{a_n}$ равны α или β в зависимости от четности n. Следовательно, $\underline{r} = 0$, $\overline{r} = +\infty$ и $q = \beta$. Поэтому ряд $\sum a_n$ сходится по признаку Коши, однако к нему не применим признак Даламбера.

Теорема 8.6* (признак Гаусса). *Пусть $a_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть существуют такие $s > 1$ и ограниченная последовательность $\{\alpha_n\}$, что при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{A}{n} + \frac{\alpha_n}{n^s}.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $A > 1$ и расходится при $A \leqslant 1$.

$\square$ При $n > 1$ имеем

$$a_n = a_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = a_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{A}{k} + \frac{\alpha_k}{k^s}\right).$$

Так как $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ при $x \to 0$, то

$$\ln\left(1 - \frac{A}{k} + \frac{\alpha_k}{k^s}\right) = -\frac{A}{k} + \frac{\alpha_k}{k^s} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Поэтому

$$a_n = a_1 \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{A}{k} + \frac{\alpha_k}{k^s} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\right).$$

Пользуясь равенством $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \ln n + O(1)$ при $n \to \infty$ и сходимостью рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ при $p > 1$, получаем

$$a_n = a_1 \exp(-A \ln n + O(1)) = \frac{a_1 e^{O(1)}}{n^A}, \quad n \to \infty.$$

Теперь утверждение следует по признаку сравнения с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^A}$. $\blacksquare$

Пример. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$.

$\square$ Обозначим n-й член ряда через a_n. Тогда при $n > 1$ имеем

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^p = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^p = 1 - \frac{p}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Применяя признак Гаусса, получаем, что при $p > 2$ ряд сходится, а при $p \leqslant 2$ расходится. $\blacksquare$

8.3. Ряды с произвольными членами

Вернемся теперь к изучению рядов с произвольными (в общем случае комплексными) членами.

Лемма 8.3. *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходится, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ либо одновременно расходятся, либо одновременно сходятся условно, либо одновременно сходятся абсолютно.*

$\square$ Ряд $\sum_{n=1}^\infty b_n$ сходится. По свойству линейности в силу представления $a_n = (a_n + b_n) - b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ заключаем, что ряды $\sum_{n=1}^\infty a_n$ и $\sum_{n=1}^\infty (a_n + b_n)$ одновременно сходятся.

Далее, справедливы неравенства
$$|a_n + b_n| \leqslant |a_n| + |b_n|, \quad |a_n| \leqslant |a_n + b_n| + |b_n|.$$
Откуда по признаку сравнения следует, что ряды $\sum_{n=1}^\infty a_n$ и $\sum_{n=1}^\infty (a_n + b_n)$ одновременно сходятся абсолютно. $\blacksquare$

Приведем некоторые признаки сходимости рядов вида $\sum a_n b_n$.

Теорема 8.7 (признак Дирихле). *Пусть $\{a_n\}$ — комплексная, $\{b_n\}$ — действительная последовательности. Пусть*

1) *последовательность $A_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ ограничена;*
2) *последовательность $\{b_n\}$ монотонна;*
3) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Задача. Докажите теорему 8.7: а) сведите к случаю $a_n \in \mathbb{R}$; б) воспользуйтесь теоремой 7.3 и леммой 8.1.

В следующем параграфе признак будет доказан в более общей ситуации. Это относится и к следующему утверждению.

Теорема 8.8 (признак Абеля). *Пусть $\{a_n\}$ — комплексная, $\{b_n\}$ — действительная последовательности. Пусть*

1) *ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*
2) *последовательность $\{b_n\}$ монотонна;*
3) *последовательность $\{b_n\}$ ограничена.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Задача. Получите теорему 8.8 как следствие теоремы 8.7.

При применении признака Дирихле на практике особые затруднения вызывает проверка первого условия. Полезно выделить частные случаи, в которых условие ограниченности частичных сумм ряда выполняется автоматически.

Следствие (признак Лейбница). *Если последовательность $\{\alpha_n\}$ монотонна и $\alpha_n \to 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\alpha_n$ сходится, причем $|S - S_n| \leqslant |\alpha_{n+1}|$.*

□ Хотя сходимость ряда следует по признаку Дирихле, докажем ее напрямую, «по пути» получив заявленное неравенство.

Пусть для определенности $\{\alpha_n\}$ нестрого убывает и поэтому $\alpha_n \geqslant 0$. Тогда $S_{2n+2} - S_{2n} = \alpha_{2n+1} - \alpha_{2n+2} \geqslant 0$ для каждого n и, значит, $\{S_{2n}\}$ нестрого возрастает; $S_{2n+1} - S_{2n-1} = -\alpha_{2n} + \alpha_{2n+1} \leqslant 0$ для каждого n и, значит, $\{S_{2n-1}\}$ нестрого убывает. Кроме того, $S_{2n} - S_{2n-1} = -\alpha_{2n} \leqslant 0$. Поэтому для всех m, n выполнено

$$S_{2n} \leqslant S_{2k} \leqslant S_{2k-1} \leqslant S_{2m-1},$$

где $k = \max\{m, n\}$. В частности, монотонные последовательности $\{S_{2n}\}$, $\{S_{2n-1}\}$ ограничены, а значит, сходятся, $S_{2n} \to S'$ и $S_{2n-1} \to S''$. Тогда $S_{2n} \leqslant S' \leqslant S'' \leqslant S_{2n-1}$ и поскольку $S_{2n} - S_{2n-1} = -\alpha_{2n} \to 0$, то $S' = S'' =: S$. Кроме того, $|S_n - S| \leqslant |S_{n+1} - S_n| = |\alpha_{n+1}|$. ■

Пример. Пусть $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ и $b_n = (-1)^n \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$. Тогда $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, однако ряд $\sum a_n$ сходится (по признаку Лейбница), а ряд $\sum b_n$ расходится (т.к. $b_n = a_n + \frac{1}{n}$).

Это доказывает, что признак сравнения для общих рядов не применим.

Следствие. *Если последовательность $\{\alpha_n\}$ монотонна и $\alpha_n \to 0$, $x \neq 2\pi m$ $(m \in \mathbb{Z})$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nx$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx$ сходятся.*

□ Положим $s_N = \sum_{n=1}^{N} e^{inx}$. Рассматривая s_N как геометрическую прогрессию с коэффициентом $q = e^{ix}$, получим $s_N = \dfrac{e^{ix}(1 - e^{iNx})}{1 - e^{ix}}$. Так как $|e^{ix}| = 1$, то $|s_N| \leqslant \dfrac{2}{|1 - e^{ix}|} = \dfrac{1}{|\sin(x/2)|}$.

Для проверки ограниченности сумм $C_N = \sum_{n=1}^{N} \cos nx$ и $S_N = \sum_{n=1}^{N} \sin nx$ осталось заметить, что $C_N = \operatorname{Re} s_N$, а $S_N = \operatorname{Im} s_N$. Следовательно, данные ряды сходятся по признаку Дирихле. ■

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится по признаку Лейбница. Найдем его сумму.

Частичную сумму S_{2m} можно представить в виде разности частичных сумм гармонического ряда:

$$S_{2m} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2m-1} + \frac{1}{2m} - 2\left(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2m}\right) = H_{2m} - H_m.$$

Осталось воспользоваться асимптотикой $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$. В итоге $S_{2m} = (\ln 2m + \gamma + o(1)) - (\ln m + \gamma + o(1)) = \ln 2 + o(1)$. Следовательно, сумма ряда равна $\ln 2$.

8.4. Перестановки рядов

Определение. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и биекция $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ называется *перестановкой* ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример. Рассмотрим перестановку ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots$$

(после одного положительного члена идут два отрицательных). Найдем ее сумму, сгруппировав положительный член с последующим отрицательным:

$$S_{\Pi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Такая ситуация невозможна для абсолютно сходящихся рядов.

Теорема 8.9. *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то любая его перестановка $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ сходится абсолютно к той же сумме.*

□ Абсолютная сходимость перестановки следует по лемме 8.2:

$$\sum_{n=1}^{N} |a_{\varphi(n)}| \leqslant \sum_{n=1}^{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant N}\varphi(j)} |a_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем такой номер m, что $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$. Далее выберем номер M так, чтобы $\{1, \ldots, m\} \subset \{\varphi(1), \ldots, \varphi(M)\}$ (достаточно положить $M = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \varphi^{-1}(j)$).

Для любого $N \geqslant M$ выполнено $\{1, \ldots, m\} \subset \{\varphi(1), \ldots, \varphi(N)\}$ и, значит,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)} \right| \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

Это доказывает, что сумма ряда является пределом последовательности частичных сумм его перестановки. ■

Замечание. Также проверяется, что если $a_n \to 0$, то $a_{\varphi(n)} \to 0$.

Изучим перестановки условно сходящихся рядов. Для простоты ограничимся случаем действительных рядов.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Пусть $\{n\colon a_n > 0\} = \{p_k\}$, $p_1 < p_2 < \ldots$ и $\{n\colon a_n \leqslant 0\} = \{q_k\}$, $q_1 < q_2 < \ldots$ Отметим, что эти множества бесконечны, иначе все члены ряда (начиная с некоторого номера) будут одного знака, а для таких рядов сходимость совпадает с абсолютной сходимостью.

Определим ряды $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, где $b_k = a_{p_k}$, и $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, где $c_k = a_{q_k}$.

Лемма 8.4. *Ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ расходятся.*

□ Предположим, что хотя бы один из рядов сходится. Тогда в силу равенства $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{r_n} b_k + \sum\limits_{k=1}^{s_n} c_k$, $n = r_n + s_n$, сходится и другой ряд. Значит, в силу равенства $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| = \sum\limits_{k=1}^{r_n} b_k + \sum\limits_{k=1}^{s_n} (-c_k)$ сходится ряд из $|a_k|$, что противоречит условной сходимости. ■

Теорема 8.10* (Риман). *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с действительными членами сходится условно, то для любого $L \in \mathbb{R}$ существует такая перестановка $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$, что ее сумма равна L.*

□ По индукции определим числа a_k^* и суммы $S_n^* = \sum_{k=1}^{n} a_k^*$. Пусть n_1 — наименьший из номеров N, таких что $b_1 + \ldots + b_N >$

$> L$. Номер n_1 найдется, т.к. ряд $\sum b_k$ расходится. Положим $a_k^* = b_k$ при $k \leqslant n_1$. Отметим, что если $n_1 > 1$, то $L < S_{n_1}^* \leqslant L + a_{n_1}^*$. Пусть m_1 — наименьший из номеров $M > n_1$, таких что $S_{n_1}^* + c_1 + \ldots + c_{M-n_1} < L$. Номер m_1 найдется, т.к. ряд $\sum c_k$ расходится. Положим $a_{n_1+k}^* = c_k$ при $k \leqslant m_1 - n_1$. Тогда $L + a_{m_1}^* \leqslant S_{m_1}^* < L$. Пусть n_2 — наименьший из номеров $N > m_1$, таких что $S_{m_1}^* + b_{n_1+1} + \ldots + b_N > L$. Определим $a_{m_1+k}^* = b_{n_1+k}$ при $k \leqslant n_2 - m_1$ и т.д. Остатки рядов $\sum b_k$ и $\sum c_k$ расходятся, поэтому по индукции будут построены последовательности $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \ldots$ и $\{a_k^*\}$. Для $j \geqslant 2$ имеем $L < S_{n_j}^* \leqslant L + a_{n_j}^*$, и $L + a_{m_j}^* \leqslant S_{m_j}^* < L$.

По построению $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^*$ является перестановкой исходного ряда. По замечанию $a_k^* \to 0$, так что $a_{n_j}^* \to 0$ и $a_{m_j}^* \to 0$ как подпоследовательности. Покажем, что сумма $\sum a_k^*$ равна L.

Пусть $n_j \leqslant n < m_j$ для некоторого j, тогда $S_{m_j}^* \leqslant S_n^* \leqslant S_{n_j}^*$. Значит,

$$a_{m_j}^* \leqslant S_{m_j}^* - L \leqslant S_n^* - L \leqslant S_{n_j}^* - L \leqslant a_{n_j}^*.$$

Аналогично, если $m_j \leqslant n < n_{j+1}$, то $a_{m_j}^* \leqslant S_n^* - L < a_{n_{j+1}}^*$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем такой номер $j_0 \geqslant 2$, что $|a_{n_j}^*| < \varepsilon$ и $|a_{m_j}^*| < \varepsilon$ при всех $j \geqslant j_0$. Тогда $|S_n^* - L| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant n_{j_0}$. ■

Задача. Докажите, что теорема 8.10 верна и при $L = \pm\infty$.

Замечание. Аналогичный результат в $\mathbb{C}$ (и даже в $\mathbb{R}^n$) утверждает, что если множество сумм ряда при различных перестановках содержит две точки, то оно содержит и проходящую через них прямую (теорема Леви–Штейница).

8.5. Произведение рядов

Покажем, что ряд из всевозможных попарных произведений членов двух абсолютно сходящихся рядов сходится к произведению их сумм.

Теорема 8.11 (Коши). *Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно к A и B соответственно, $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, $\varphi(n) = (i_n, j_n)$, — биекция, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{i_n} b_{j_n}$ сходится абсолютно к AB.*

$\square$ Проверим сходимость ряда из модулей произведений. Для произвольного N положим $m = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} i_k$ и $n = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} j_k$, тогда

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{i_k} b_{j_k}| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_i b_j| = \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|\right)$$

и, значит, $\sum\limits_{k=1}^{N} |a_{i_k} b_{j_k}| \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} |b_j|\right)$. По лемме 8.2 ряд $\sum a_{i_n} b_{j_n}$ абсолютно сходится.

По теореме 8.9 любая перестановка $\sum a_{i_n} b_{j_n}$ сходится к той же сумме.

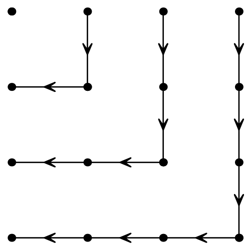

Рис. 8.2а

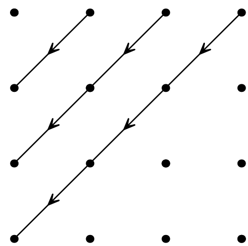

Рис. 8.2б

Для перестановки «по квадратам» (см. рис. 8.2а) частичные суммы $S_{N^2} = \sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{j=1}^{N} a_i b_j$. Тогда $S_{N^2} = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} a_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{N} b_j\right) \to AB$. Так как в случае существования предел последовательности совпадает с пределом подпоследовательности, то сумма перестановки «по квадратам», а значит, и сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{i_n} b_{j_n}$ равны AB. $\blacksquare$

Чаще всего при определении произведения рядов используют

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$, называется *произведением* рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *по Коши.*

В развернутом виде

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots)(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots) =$$
$$= a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \ldots,$$

т.е. в правой части рассматривается перестановка «по диагоналям» (см. рис. 8.2б) и группировка слагаемых, стоящих на одной диагонали. Следовательно, справедливо

Следствие. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся абсолютно, то их произведение по Коши сходится к произведению сумм этих рядов.*

Последнее утверждение можно усилить в следующем виде.

Теорема 8.12* (Мертенс). *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то их произведение по Коши сходится к произведению сумм этих рядов.*

$\square$ Пусть B и B_N — сумма и N-я частичная сумма ряда $\sum b_n$ соответственно. Тогда $B_N = B + \beta_N$, где $\beta_N \to 0$.

Перепишем частичную сумму произведения по Коши $\sum c_n$ в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^{N} c_n = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \ldots + (a_1 b_N + a_2 b_{N-1} + \ldots + a_N b_1) =$$
$$= a_1 B_N + a_2 B_{N-1} + \ldots + a_N B_1 = \sum_{n=1}^{N} a_n B + \gamma_N,$$

где $\gamma_N = a_1 \beta_N + a_2 \beta_{N-1} + \ldots + a_N \beta_1$.

Поскольку $\sum_{n=1}^{N} a_n B \to AB$, где $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, нам достаточно показать, что $\gamma_N \to 0$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем такой номер m, что $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$ и $|\beta_n| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant m$. Положим еще $C = \sup\{|\beta_n|\}$. Тогда при $N \geqslant 2m$ выполнено

$$|\gamma_N| = |a_1 \beta_N + \ldots + a_m \beta_{N-m+1} + a_{m+1} \beta_{N-m} \ldots + a_N \beta_1| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \sum_{n=1}^{m} |a_n| + C \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + C \right) \varepsilon.$$

Итак, $\gamma_N \to 0$ и, значит, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB$. $\blacksquare$

Замечание. Произведение по Коши условно сходящихся рядов может дать расходящийся ряд.

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ сходится по признаку Лейбница, но неабсолютно. Рассмотрим его квадрат Коши, т.е. ряд с членами

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n+1-k}} = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n+1-k)}}.$$

Поскольку $|c_n| \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}} = 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ расходится.

Отметим, что если оба ряда сходятся и их произведение по Коши сходится, то сумма произведения совпадает с произведением сумм рядов. Это может быть доказано с использованием степенных рядов.

8.6. Бесконечные произведения*

Определение. Пусть $\{a_n\}$ — числовая последовательность. Выражение вида

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots$$

называется *бесконечным произведением* с n-м членом a_n.

Произведение $P_N = \prod\limits_{n=1}^{N} a_n$ называется *N-м частичным произведением*. Если существует конечный отличный от нуля предел $P = \lim\limits_{N\to\infty} P_N$, то бесконечное произведение называется *сходящимся*; иначе — *расходящимся*. В случае сходимости P называют значением бесконечного произведения и пишут $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n = P$.

Если хотя бы один член бесконечного произведения равен 0, то по определению бесконечное произведение полагают равным 0 (но произведение считается расходящимся).

Пример. Произведение $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ сходится:

$$\prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2} \cdot \frac{2\cdot 4}{3\cdot 3} \cdot \ldots \cdot \frac{(N-1)(N+1)}{N\cdot N} = \frac{N+1}{2N} \to \frac{1}{2}.$$

Необходимое условие сходимости произведения дает

Лемма 8.5. *Если бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.*

$\square$ Так как $a_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}}$ (где $P_0 = 1$), то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. $\blacksquare$

Лемма 8.6. *Пусть $a_n > 0$ для всех n. Произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$. В случае сходимости $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n}$.*

$\square$ Если $P_N \to P > 0$, то в силу непрерывности функции $\ln$ имеем $\ln P_N = \sum_{n=1}^{N} \ln a_n \to \ln P$ и, значит, ряд $\sum \ln a_n$ сходится. Обратно, если $S_N = \sum_{n=1}^{N} \ln a_n \to S$, то по непрерывности экспоненты $P_N = e^{S_N} \to e^S$ и бесконечное произведение сходится. $\blacksquare$

Ввиду леммы 8.5 имеет смысл n-й член произведения записывать в виде $1 + \alpha_n$.

Теорема 8.13. *Пусть все $\alpha_n > -1$ и одного знака. Произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.*

$\square$ По лемме 8.6 сходимость бесконечного произведения равносильна сходимости ряда $\sum \ln(1 + \alpha_n)$. Будем считать, что $\lim \alpha_n = 0$, так как это условие необходимо для сходимости и бесконечного произведения и ряда.

Поскольку числа α_n и $\ln(1 + \alpha_n)$ имеют одинаковые знаки и $\ln(1+\alpha_n) \sim \alpha_n$ при $n \to \infty$, то ряды $\sum \ln(1+\alpha_n)$ и $\sum \alpha_n$ сходятся или расходятся одновременно. $\blacksquare$

Следствие. *Пусть все $\alpha_n > -1$ и сходится один из рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$. Тогда сходимость другого ряда необходима и достаточна для сходимости произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$.*

$\square$ В силу условий теоремы $\lim \alpha_n = 0$. Так как $\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$, то в некоторой окрестности нуля выполнено $\frac{1}{4}x^2 \leqslant x - \ln(1 + x) \leqslant \frac{3}{4}x^2$. Поэтому при всех достаточно больших n имеем

$$\frac{1}{4}\alpha_n^2 \leqslant \alpha_n - \ln(1 + \alpha_n) \leqslant \frac{3}{4}\alpha_n^2.$$

Следовательно, ряды $\sum \alpha_n^2$ и $\sum \alpha_n - \ln(1+\alpha_n)$ сходятся или расходятся одновременно.

Но один из рядов $\sum \alpha_n$ и $\sum \alpha_n^2$ сходится. Поэтому сходимость другого ряда равносильна сходимости ряда $\sum \ln(1+\alpha_n)$, а значит, и сходимости бесконечного произведения. ■

Замечание. Если оба ряда $\sum \alpha_n$ и $\sum \alpha_n^2$ расходятся, то произведение $\prod(1+\alpha_n)$ может и сходиться. Например, это так для произведения, где $\alpha_{2n-1} = -\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\alpha_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

Теорема 8.14 (Эйлер). *Для любого* $x \in \mathbb{R}$ *выполнено*

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

□ Для $x = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, равенство очевидно верно, т.к. произведение расходится к нулю. Пусть $x \neq m\pi$.

Покажем, что найдется многочлен Q_n степени n, что при всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\sin(2n+1)t = \sin t \cdot Q_n\big(\sin^2 t\big)\,.$$

По формуле Муавра $\cos(2n{+}1)t + i\sin(2n{+}1)t = (\cos t + i\sin t)^{2n+1}$. Раскрывая правую часть по биному, получаем требуемое равенство $\sin(2n+1)t = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_{2n+1}^{2k} (1-\sin^2 t)^k \cdot \sin^{2n+1-2k} t$.

Поскольку $\sin(2n+1)t$ равен нулю в точках $t_k = \frac{\pi k}{2n+1}$, $k = 1, \ldots, n$, то многочлен Q_n имеет n корней вида $\sin^2 t_k$. Поэтому $Q_n(y) = Q_n(0)\left(1 - \frac{y}{\sin^2 t_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{y}{\sin^2 t_n}\right)$, причем $Q_n(0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} = 2n+1$. Следовательно,

$$\sin(2n+1)t = (2n+1)\ \sin t\ \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 t}{\sin^2 t_k}\right).$$

В полученном равенстве сделаем замену $x = (2n+1)t$ и перейдем к пределу при $n \to \infty$. Тогда

$$\sin x = x \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right).$$

Для всякого натурального N существует

$$P_N := \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{\sin^2 \dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2 \dfrac{\pi k}{2n+1}}\right) = \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right).$$

Следовательно, существует

$$R_N := \lim_{n\to\infty} \prod_{k=N+1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 \dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2 \dfrac{\pi k}{2n+1}}\right)$$

и имеет место равенство $\sin x = x \cdot P_N \cdot R_N$.

Так как $\sin\theta \leqslant \theta$ для любого $\theta > 0$ и $\sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta$ на $[0,\ \frac{\pi}{2}]$ (в силу выпуклости sin), то

$$\frac{\sin^2 \dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2 \dfrac{\pi k}{2n+1}} \leqslant \frac{x^2}{4k^2}.$$

Выберем N так, что $2(N+1) > |x|$. Тогда

$$\prod_{k=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right) \leqslant R_N \leqslant 1.$$

Первое произведение стремится к 1 при $N \to \infty$ как «хвост» сходящегося произведения, а значит, $R_N \to 1$. В итоге $\sin x = x \lim\limits_{N\to\infty} P_N$ и разложение установлено. ■

Из теоремы вытекает еще одно обоснование представления π в виде произведения рациональных дробей.

Следствие (формула Валлиса).

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2.$$

□ Достаточно в разложении синуса положить $x = \frac{\pi}{2}$ и перейти к обратным величинам. ■

Задача. Пользуясь тождеством $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, получите представление $\cos x$ в виде бесконечного произведения.

Определим ζ-функцию по формуле $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $s > 1$.

Пример. Покажем, что

$$\zeta(s) = \prod \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

где произведение берется по всем простым числам $p \in \mathbb{N}$.

$\square$ Пусть $N > 2$ и $2 = p_1 < \ldots < p_r$ — все простые числа, не большие N. Так как $(1-p^{-s})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} p^{-is}$, то разность между $P_N = \prod\limits_{k=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1}$ и $P_{N,\,M} = \prod\limits_{k=1}^{r}\left(\sum\limits_{i_k=0}^{M} p_k^{-i_k s}\right)$ стремится к нулю с ростом M. Выражение $P_{N,\,M}$ можно переписать в виде

$$P_{N,\,M} = \sum_{i_1=0}^{M} \cdots \sum_{i_r=0}^{M} \frac{1}{p_1^{i_1 s} \ldots p_r^{i_r s}}.$$

Каждое натуральное $n \leqslant N$ представимо как $n = p_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{i_r}$ для некоторых целых $i_l \geqslant 0$. Следовательно, при больших M сумма $P_{N,\,M}$ содержит числа 1, $\frac{1}{2^s}$, $\ldots$, $\frac{1}{N^s}$, а также некоторые числа $\frac{1}{n_i^s}$, где $n_i > N$ с простыми делителями $p_1, \ldots, p_r$, то есть

$$P_{N,\,M} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n_i^s}$$

для некоторой конечной последовательности $N < n_1 < \ldots < n_m$. Заметим, что $\sum \frac{1}{n_i^s}$ не превосходит остатка $r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Поэтому

$$\left| P_N - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \right| \leqslant |P_N - P_{N,\,M}| + r_N.$$

Предельный переход при $N \to \infty$ завершает доказательство. $\blacksquare$

8.7. Суммируемые семейства*

Рассмотрим семейство $\{a_j\}_J$ в $\mathbb{R}$, индексированное множеством J (возможно, несчетным), т.е. функцию $a\colon J \to \mathbb{R}$, такую что $a_j = a(j)$. Обозначим через $\mathcal{F}(J)$ множество всех конечных подмножеств J.

Определение. Пусть $a_j \geqslant 0$ для всех $j \in J$. Положим

$$\sum_{j \in J} a_j = \sup_{F \in \mathcal{F}(J)} \sum_{j \in F} a_j.$$

Если $s = \sum_J a_j < \infty$, то будем говорить, что $\{a_j\}_J$ *суммируемо* (к s), а s — его сумма.

Пример. Исследуем суммируемость $\left\{\dfrac{1}{(m+n)^p}\right\}_{m,\, n\in\mathbb{N}}$.

Заметим, что если $T = \{(m,\, n)\colon 2 \leqslant m+n \leqslant N\}$, то

$$\sum_T \frac{1}{(m+n)^p} = \sum_{k=2}^{N} \sum_{m+n=k} \frac{1}{(m+n)^p} = \sum_{k=2}^{N} \frac{k-1}{k^p}.$$

При $p \leqslant 2$ частичные суммы ряда $\sum \frac{k-1}{k^p}$ не ограничены и, значит, семейство не является суммируемым.

Если $p > 2$ и $F \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ конечно, то существует $T \supset F$ и

$$\sum_F \frac{1}{(m+n)^p} \leqslant \sum_T \frac{1}{(m+n)^p} < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{k^p} < \infty.$$

Получаем, что семейство суммируемо и его сумма равна $\sum \frac{k-1}{k^p}$.

Для $x \in \mathbb{R}$ положим $x^+ = \max\{x,\, 0\}$ и $x^- = \max\{-x,\, 0\}$. Тогда $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$.

Определение. Семейство $\{a_j\}_J$ называется *суммируемым*, если семейства $\{a_j^+\}_J$ и $\{a_j^-\}_J$ суммируемы. Сумма $\{a_j\}_J$ определяется как

$$\sum_{j\in J} a_j = \sum_{j\in J} a_j^+ - \sum_{j\in J} a_j^-.$$

Лемма 8.7. 1) *Пусть $S \subset J$ такое, что $a_j = 0$ для всех $j \in J \setminus S$. Тогда семейства $\{a_j\}_J$ и $\{a_j\}_S$ суммируемы одновременно, и в случае суммируемости $\sum_J a_j = \sum_S a_j$.*

2) *Пусть $\sigma\colon K \to J$ биекция. Тогда семейства $\{a_j\}_J$ и $\{a_{\sigma(k)}\}_K$ суммируемы одновременно, и в случае суммируемости $\sum_J a_j = \sum_K a_{\sigma(k)}$.*

□ 1) Пусть все $a_j \geqslant 0$. Если $F \in \mathcal{F}(J)$, то $\sum_F a_j = \sum_{F\cap S} a_j \leqslant \sum_S a_j$. Следовательно, $\sum_J a_j \leqslant \sum_S a_j$. Так как $\mathcal{F}(S) \subset \mathcal{F}(J)$, то $\sum_J a_j \geqslant \sum_S a_j$. Общий случай сводится к рассмотрению семейств $\{a_j^{\pm}\}_J$.

2) Аналогично п. 1. ■

Теорема 8.15. *Семейство $\{a_j\}_J$ суммируемо тогда и только тогда, когда суммируемо $\{|a_j|\}_J$.*

$\square$ Так как $x^{\pm} \leqslant |x|$, то $\max\{a_j^+, a_j^-\} \leqslant |a_j| = a_j^+ + a_j^-$ для всех $j \in J$. Поэтому сумма $\sum_J |a_j|$ конечна тогда и только тогда, когда суммы $\sum_J a_j^{\pm}$ конечны, а значит, конечна и сумма $\sum_J a_j$. $\blacksquare$

Следствие 1. *Если семейство $\{a_j\}_J$ суммируемо, то $S_a = \{j \in J\colon a_j \neq 0\}$ не более чем счетно.*

$\square$ По теореме 8.15 $\sum_J |a_j| = M < \infty$. Положим $S_n = \{j \in J\colon |a_j| > 1/n\}$. Тогда S_n конечно (количество элементов $\leqslant nM$). Следовательно, $S_a = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ не более чем счетно. $\blacksquare$

Следствие 2. *Семейство $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ суммируемо тогда и только тогда, когда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. В этом случае*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

$\square$ Пусть сначала все $a_n \geqslant 0$. Обозначим через S_n n-ю частичную сумму $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Очевидно, что $S_m \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ для всех m. С другой стороны, если $F \subset \mathbb{N}$ конечно, $N = \max F$, то в силу возрастания S_n при любом $n \geqslant N$ имеем

$$\sum_{n\in F} a_n \leqslant S_N \leqslant S_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Это доказывает утверждение в случае $a_n \geqslant 0$.

Пусть a_n произвольны. По доказанному сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ равносильна суммируемости $\{|a_n|\}_{\mathbb{N}}$, а значит, и $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$. Кроме того, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^{\pm} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}$. Теперь равенство для сумм следует по свойству линейности абсолютно сходящихся рядов. $\blacksquare$

Лемма 8.8. *Пусть семейства $\{a_j\}_J$, $\{b_j\}_J$ суммируемы и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда семейства $\{a_j + b_j\}_J$ и $\{\lambda a_j\}_J$ также суммируемы, и*

$$\sum_{j\in J}(a_j + b_j) = \sum_{j\in J} a_j + \sum_{j\in J} b_j, \qquad \sum_{j\in J}(\lambda a_j) = \lambda \sum_{j\in J} a_j.$$

$\square$ Докажем суммируемость $\{a_j + b_j\}_J$ и равенство для его суммы.

Пусть S_a и S_b — множества индексов, соответствующих ненулевым элементам $\{a_j\}_J$, $\{b_j\}_J$. Обозначим через S произвольное счетное множество в J, содержащее S_a и S_b. По п. 1 леммы 8.7 $\sum_J a_j = \sum_S a_j$, $\sum_J b_j = \sum_S b_j$. Пусть $\sigma\colon \mathbb{N} \to S$ — биекция. Так как $\{|a_j|\}_S$, $\{|b_j|\}_S$ суммируемы, то по п. 2 леммы 8.7 и следствию теоремы 8.15 ряды $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{\sigma(n)}|$ и $\sum_{n=1}^{\infty}|b_{\sigma(n)}|$ сходятся, а значит, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{\sigma(n)}+b_{\sigma(n)}|$. Тогда $\{a_j+b_j\}_S$ суммируемо и $\sum_S(a_j+b_j)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{\sigma(n)}+b_{\sigma(n)})$. Следовательно, семейство $\{a_j+b_j\}_J$ суммируемо. Кроме того, $\sum(a_{\sigma(n)}+b_{\sigma(n)})=$ $=\sum a_{\sigma(n)}+\sum b_{\sigma(n)}$, что равносильно доказываемому равенству.

Доказательство для $\{\lambda a_j\}_J$ аналогично. ■

Теорема 8.16. *Пусть $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ — разбиение J, т.е. $J=$ $=\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n$ и $J_k\cap J_i=\varnothing$ при $i\neq k$. Семейство $\{a_j\}_J$ суммируемо тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\in J_n}|a_j|<\infty. \tag{8.2}$$

В этом случае

$$\sum_{j\in J}a_j=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\in J_n}a_j. \tag{8.3}$$

□ Пусть выполнено (8.2). Если $F\in\mathcal{F}(J)$, то существует такое N, что $F\subset\bigcup_{k=1}^{N}J_k$. Поэтому

$$\sum_{j\in F}|a_j|=\sum_{n=1}^{N}\sum_{j\in F\cap J_n}|a_j|\leqslant\sum_{n=1}^{N}\sum_{j\in J_n}|a_j|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\in J_n}|a_j|,$$

так что $\{|a_j|\}_J$, а значит, и $\{a_j\}_J$, суммируемы. Кроме того, сумма $\sum_J|a_j|$ не превосходит суммы ряда (8.2).

Пусть $\{|a_j|\}_J$ суммируемо. Тогда $\sum_{j\in J}|a_j|<\infty$, а значит, $\sum_{j\in J_n}|a_j|<\infty$ для всех n. Пусть $\varepsilon>0$. По определению супремума для всякого n найдется такое конечное множество $F_n\subset J_n$, что $\sum_{j\in F_n}|a_j|>\sum_{j\in J_n}|a_j|-\varepsilon 2^{-n}$. Зафиксируем N, и пусть $F=$ $=\bigcup_{n=1}^{N}F_n$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{j\in J_n}|a_j|<\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{j\in F_n}|a_j|+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)=\sum_{j\in F}|a_j|+\sum_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon}{2^n}\leqslant\sum_{j\in J}|a_j|+\varepsilon.$$

Ввиду произвольности N имеем $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{J_n}|a_j|\leqslant\sum_J|a_j|+\varepsilon$, и формула (8.2) установлена. Так как $\varepsilon>0$ — любое, то (8.3) установлена для случая $a_j\geqslant 0$. Применяя (8.3) к $a_j^{\pm}$, заключаем, что (8.3) выполняется и в общем случае. ■

Следствие (Фубини для сумм). *Пусть* $\{a_{mn}\}_{m,\,n\in\mathbb{N}}$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$$

при условии, что хотя бы один из повторных рядов сходится при замене a_{mn} *на* $|a_{mn}|$.

□ Из условия в силу теоремы 8.16 следует суммируемость $\{|a_{mn}|\}_{m,\,n\in\mathbb{N}}$. Применяя теорему 8.16 к разбиению $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ по строкам и по столбцам, получаем, что оба повторных ряда равны $\sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{mn}$, а значит, равны между собой. ■

Замечание. Общее значение повторных рядов равно пределу $\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} a_{nm}$ при $N\to\infty$. Для обоснования достаточно рассмотреть нумерацию $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ «по квадратам».

Определение суммируемости можно дать на языке предела.

Задача. Докажите, что семейство $\{a_j\}_J$ суммируемо к s тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon>0\ \exists F_0\in\mathcal{F}(J)\ \forall F\in\mathcal{F}(J),\ F\supset F_0\ \left(\Big|\sum_{j\in F} a_j - s\Big| < \varepsilon\right).$$

9. Функциональные ряды

В этом разделе изучаются последовательности и ряды, членами которых являются функции. Будем предполагать, что функции определены на одном и том же *непустом* множестве E.

9.1. Равномерная сходимость

Пусть заданы функции f, $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $n \in \mathbb{N}$.

Определение. Последовательность $\{f_n\}$ *поточечно сходится* к функции f на E, если $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для любого $x \in E$. Пишут $f_n \to f$ на E, и f называют *предельной функцией* последовательности $\{f_n\}$.

Задача. Докажите, что если $f_n \to f$ на $E = \mathbb{R}$ и все функции f_n четные (нечетные, нестрого возрастают, нестрого убывают), то функция f также четная (нечетная, нестрого возрастает, нестрого убывает) на E.

Расшифруем определение поточечной сходимости:

$$f_n \to f \text{ на } E \Leftrightarrow \forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

При этом номер N может (при фиксированном ε) зависеть от x.

Пример. Пусть $E = [0,\,1]$, $f_n(x) = x^n$. Тогда $f_n \to f$ на $[0,\,1]$, где

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [0,\,1); \\ 1, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

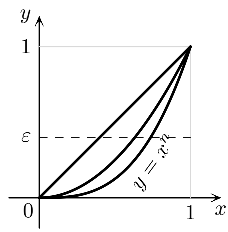

Рис. 9.1

Зафиксируем $\varepsilon \in (0,\,1)$. Поскольку $x^n < \varepsilon$, $x \neq 0 \Leftrightarrow n \ln x < \ln \varepsilon$, то $N(x) > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln x}$ и, значит, $N(x) \to \infty$ при $x \to 1$. (см. рис. 9.1)

Если N удается выбрать по ε одним для всех $x \in E$, то приходим к следующему понятию.

Определение. Последовательность $\{f_n\}$ *равномерно сходится* к функции f на множестве E, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ \forall x \in E\ (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Пишут $f_n \rightrightarrows f$ на E или $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ при $n \to \infty$.

Замечание. Из определений очевидно, что равномерная сходимость влечет поточечную. В частности, если $f_n \rightrightarrows f$ на E, то функция f определена (на E) однозначно. Как показывает предыдущий пример, поточечная сходимость в общем случае не влечет равномерную.

Полезную переформулировку определения равномерной сходимости дает

Лемма 9.1 (супремум-критерий).
$$f_n \rightrightarrows f \text{ на } E \iff \lim_{n\to\infty} \rho_n = 0, \text{ где } \rho_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

□ Вытекает из того, что условие $\forall x \in E\ (|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon)$ равносильно условию $\sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. ■

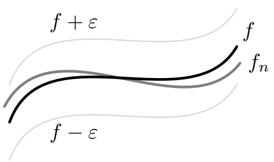

Рис. 9.2

Итак, равномерная сходимость $\{f_n\}$ означает, что графики функций f_n «прижимаются» с ростом n к графику f: уклонение ρ_n стремится к нулю при $n \to \infty$ (см. рис. 9.2).

Задача. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на E. Покажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$ для любой последовательности $\{x_n\}$ из E.

Определение. Функциональная последовательность *равномерно* (*поточечно*) *сходится* на E, если существует определенная на E функция, к которой последовательность равномерно (поточечно) сходится на E.

Рассмотрим *функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \colon E \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

Определения. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится* на E, если для каждого $x \in E$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится. При этом функция $S\colon x \mapsto \sum u_n(x)$ называется *суммой* ряда.

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *равномерно* (*поточечно*) *сходится* на E, если последовательность его частичных сумм $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} u_n$ равномерно (поточечно) сходится на E.

Перечислим основные свойства равномерной сходимости.

Свойство 1. а) Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, $g_n \rightrightarrows g$ на E и λ, $\mu \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), то $\lambda f_n + \mu g_n \rightrightarrows \lambda f + \mu g$ на E.

б) Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ равномерно сходятся на E, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n)$ также равномерно сходится на E, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

□ а) Пусть $x \in E$. Из неравенства треугольника следует, что

$$|\lambda f_n(x) + \mu g_n(x) - (\lambda f(x) + \mu g(x))| \leqslant \\ \leqslant |\lambda||f_n(x) - f(x)| + |\mu||g_n(x) - g(x)|.$$

Переходя в полученном неравенстве к супремуму по всем $x \in E$ сначала в правой части, затем в левой, имеем

$$\sup_{x\in E} |\lambda f_n(x) + \mu g_n(x) - (\lambda f(x) + \mu g(x))| \leqslant \\ \leqslant |\lambda| \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| + |\mu| \sup_{x\in E} |g_n(x) - g(x)|.$$

По супремум-критерию получаем требуемое утверждение.

б) Применим предыдущий пункт к последовательности частичных сумм ряда. ■

Следствие. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *равномерно сходится на* E, *то* $u_n \rightrightarrows 0$ *на* E.

□ Поскольку u_n можно записать в виде разности частичных сумм, $u_n = S_n - S_{n-1}$ (считаем $S_0 = 0$), то утверждение вытекает из определения равномерной сходимости ряда и свойства 1. ■

Свойство 2. Пусть функция $g\colon E \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) ограничена.

а) Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, то $gf_n \rightrightarrows gf$ на E.

б) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на E, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} gu_n$ также равномерно сходится на E, причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} gu_n = g \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

□ а) Пусть $|g| \leqslant M$ на E. Тогда справедливо неравенство:

$$\sup_{x\in E} |g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| \leqslant M \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

По супремум-критерию получаем требуемое утверждение.

б) Применим предыдущий пункт к последовательности частичных сумм ряда. ■

Задача. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на E, и $g\colon D \to E$. Покажите, что $f_n \circ g \rightrightarrows f \circ g$ на D (замена переменной сохраняет равномерную сходимость).

Теорема 9.1 (критерий Коши равномерной сходимости). *Для равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ на E необходимо и достаточно выполнения условия Коши:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n,\, m \geqslant N \ \forall x \in E \ (|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon). \tag{9.1}$$

□ ($\Rightarrow$) Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем такой номер N, что $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n \geqslant N$ и $x \in E$. Тогда при $n,\, m \geqslant N$ и $x \in E$ имеем

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

т.е. выполняется условие (9.1).

($\Leftarrow$) Пусть $\{f_n\}$ удовлетворяет условию (9.1). Тогда для каждого $x \in E$ последовательность $\{f_n(x)\}$ является фундаментальной, а значит, сходится. Положим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in E$. Выберем $\varepsilon > 0$ и найдем соответствующий номер N из условия (9.1). Переходя в неравенстве (9.1) к пределу при $m \to \infty$, получаем, что $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$ и $x \in E$. Это означает, что $f_n \rightrightarrows f$ на E. ■

Следствие 1 (критерий Коши для рядов). *Для равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ необходимо и достаточно выполнения условия Коши:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n,\, m \geqslant N \ \forall x \in E \ \left(\left| \sum_{k=m}^{n} u_k(x) \right| < \varepsilon \right).$$

Следствие 2. *Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и все функции f_n непрерывны на замыкании $\overline{E}$. Если $\{f_n\}$ сходится равномерно на E, то $\{f_n\}$ сходится равномерно на $\overline{E}$.*

□ Выберем $\varepsilon > 0$ и найдем такой номер N, что $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon$ при всех $n,\, m \geqslant N$ и $x \in E$. Если $x_0 \in \overline{E}$, то в E найдется последовательность точек $\{x_k\}$, сходящаяся к x_0. Тогда переходя к пределу при $k \to \infty$ в неравенстве $|f_n(x_k) - f_m(x_k)| \leqslant \varepsilon$ и пользуясь непрерывностью f_n, f_m, получаем $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leqslant \varepsilon$. По критерию Коши $\{f_n\}$ сходится равномерно на $\overline{E}$. ■

Равномерная сходимость позволяет переносить некоторые свойства приближающих функций на приближаемую (предельную). Приведем соответствующие теоремы о сохранении непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости.

Теорема 9.2 (о непрерывности предельной функции). *Пусть $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in E$ (на E) для каждого n. Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, то функция f также непрерывна в точке a (на E).*

□ Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из условия равномерной сходимости найдем такой номер N, что $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $x \in E$ и $n \geqslant N$. Тогда для $x \in E$ имеем

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < \\ < |f_N(x) - f_N(a)| + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Так как функция f_N непрерывна в точке a, то существует такое $\delta > 0$, что $|f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $x \in B_\delta(a) \cap E$. Но тогда $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ для всех $x \in B_\delta(a) \cap E$. Это означает, что функция f непрерывна в точке a. ■

Замечание. Если a — предельная точка E, то в условиях теоремы 9.2 выполнено $\lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$.

Следствие (о непрерывности суммы ряда). *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на E и все u_n непрерывны в точке $a \in E$ (на E), то сумма ряда непрерывна в точке a (на E).*

В теореме 9.2 и ее следствии $E \subset \mathbb{R}$. В дальнейшем понятие непрерывности будет расширено на отображения метрических пространств. Утверждения справедливы в этой более общей ситуации.

Пример. Рассмотрим на $[0,\,1]$ непрерывные функции $f_n(x) = n^\alpha x^n$. Выясним, при каких $\alpha \in \mathbb{R}$, последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно к функции $f_0 \equiv 0$:

$$\sup_{[0,\,1]} |f_n(x)| = n^\alpha \Rightarrow \bigl(f_n \rightrightarrows f_0 \text{ на } [0,\,1] \Leftrightarrow \alpha < 0\bigr).$$

Выясним, при каких условиях возможен предельный переход под знаком интеграла:

$$\int_0^1 n^\alpha x^n dx = \frac{n^\alpha}{n+1} \to 0 = \int_0^1 f_0(x)dx \Leftrightarrow \alpha < 1.$$

Это мотивирует следующее утверждение.

Теорема 9.3 (об интегрируемости предельной функции). *Если* $f_n \rightrightarrows f$ *на* $[a,\,b]$ *и* $f_n \in \mathcal{R}[a,\,b]$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *то* $f \in \mathcal{R}[a,\,b]$ *и* $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

$\square$ Покажем, что f интегрируема. Пусть $\varepsilon > 0$. Из равномерной сходимости найдем такой номер N, что $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$ для всех $x \in [a,\,b]$ и $n \geqslant N$.

Так как $f = (f - f_N) + f_N$, то для $\omega(f,\,E) = \sup\limits_{x,\,y\in E} |f(x) - f(y)|$ на $E \subset [a,\,b]$ верны оценки $\omega(f,\,E) \leqslant \omega(f - f_N,\,E) + \omega(f_N,\,E)$ и $\omega(f - f_N,\,E) \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Тогда для произвольного разбиения T

$$\Omega_T(f) \leqslant \Omega_T(f - f_N) + \Omega_T(f_N) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \Omega_T(f_N).$$

Поскольку $f_N \in \mathcal{R}[a,\,b]$, то разбиение T можно выбрать так, что $\Omega_T(f_N) < \frac{\varepsilon}{2}$. Для такого разбиения $\Omega_T(f) < \varepsilon$, а значит, $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Поскольку при любом $n \geqslant N$ выполнено

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

то $\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$. $\blacksquare$

Замечание. В условиях теоремы 9.3 справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))dx$.

Задача. Выяснить, верно ли аналогичное утверждение для несобственных интегралов.

Следствие (о почленном интегрировании ряда). *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *равномерно сходится на* $[a,\,b]$, *и все* $u_n \in \mathcal{R}[a,\,b]$, *то сумма ряда интегрируема на* $[a,\,b]$ *и*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(x)dx\right).$$

Условие равномерной сходимости для предельного перехода под знаком интеграла часто бывает обременительным (см. предыдущий пример). При изучении интеграла Лебега эти условия будут значительно ослаблены.

Теорема 9.4 (о дифференцируемости предельной функции). *Пусть I — невырожденный промежуток и функции $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ такие, что*

1) $f_n \to f$ *на* I;

2) *все* f_n *дифференцируемы на* I;

3) $f_n' \rightrightarrows g$ *на* I.

Тогда функция f дифференцируема на I, причем $f' = g$.

□ Докажем дифференцируемость f. Зафиксируем $x \in I$ и рассмотрим на I последовательность функций

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \dfrac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} & \text{при } t \neq x, \\ f_n'(x) & \text{при } t = x. \end{cases}$$

Эта последовательность поточечно сходится к функции φ, где $\varphi(t) = \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$ при $t \neq x$ и $\varphi(x) = g(x)$. Покажем, что сходимость равномерная. По теореме Лагранжа при $t \neq x$ имеем

$$\varphi_n(t) - \varphi_m(t) = \frac{(f_n(t) - f_m(t)) - (f_n(x) - f_m(x))}{t - x} = f_n'(c) - f_m'(c)$$

для некоторой точки c между t и x. Из того, что $\{f_n'\}$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на I, следует, что $\{\varphi_n\}$ также удовлетворяет этому условию, а значит, по критерию Коши $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ на I. Поскольку f_n дифференцируема в точке x, функция φ_n непрерывна в точке x. Тогда по теореме 9.2 функция φ также непрерывна в точке x, т.е. $\lim\limits_{t \to x} \varphi(t) = \varphi(x)$ или $f'(x) = g(x)$. ■

Замечание 1. В условиях теоремы 9.4 справедливо равенство $\dfrac{d}{dx} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d}{dx} f_n(x)$ для всех $x \in I$.

Замечание 2. Вместо условия 1 достаточно требовать сходимости $\{f_n(x_0)\}$ в *одной* точке. Сходимость в других точках вытекает из критерия Коши в силу равенства $(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0)) = (f_n'(c) - f_m'(c))(x - x_0)$, где c лежит между x и x_0. Более того, если промежуток I ограничен, то $|x - x_0|$ не больше длины I и, значит, $\{f_n\}$ сходится на I равномерно.

Следствие (о почленном дифференцировании ряда). *Пусть I — невырожденный промежуток и функции $u_n\colon I \to \mathbb{R}$ такие, что*

1) *ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится поточечно на I;*

2) *все u_n дифференцируемы на I;*

3) *ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$ равномерно сходится на I.*

Тогда сумма ряда дифференцируема и для всех $x \in I$ выполнено

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

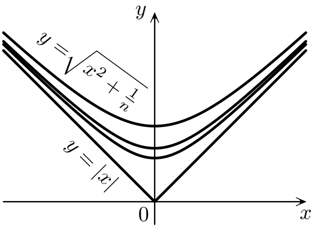

Рис. 9.3

Отметим, что в теореме 9.4 условие равномерной сходимости производных нельзя заменить равномерной сходимостью самих функций. Например, последовательность $f_n\colon [-1, 1] \to \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, сходится равномерно к недифференцируемой функции $f(x) = |x|$ (см. рис. 9.3).

9.2. Признаки равномерной сходимости

Поскольку точная формула для суммы функционального ряда известна лишь в исключительных случаях, исследование равномерной сходимости по определению крайне затруднительно. На практике желательно иметь легко проверяемые признаки равномерной сходимости. Мы рассмотрим несколько таких утверждений, получающихся из аналогичных утверждений для числовых рядов.

Теорема 9.5 (признак Вейерштрасса). *Пусть $u_n\colon E \to \mathbb{C}$ и $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть*

1) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in E\ (|u_n(x)| \leqslant a_n)$;

2) *числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.*

Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится равномерно и абсолютно на множестве E.

□ Пусть $\varepsilon > 0$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то пользуясь критерием Коши как необходимым условием найдем такое N, что для всех $n \geqslant m \geqslant N$ верно $\sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon$. Тогда при таких n, m и всех $x \in E$ имеем

$$\left|\sum_{k=m}^{n} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon.$$

Пользуясь критерием Коши как достаточным условием, получаем, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходятся равномерно на E. ■

Про ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ говорят, что он *мажорирует* функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Существование мажорантного ряда достаточно, но не необходимо для равномерной сходимости даже в классе абсолютно сходящихся рядов.

Пример. Рассмотрим на луче $E = [1, +\infty)$ функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n(x) = \frac{1}{x}$ при $x \in [n, n+1)$ и $u_n(x) = 0$ иначе. Ряд сходится на E к сумме $S(x) = \frac{1}{x}$, причем сходимость равномерная, т.к. $\sup_E |S(x) - S_n(x)| = \frac{1}{n}$. Поскольку $\sup_E |u_n(x)| = u_n(n) = \frac{1}{n}$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(n)$ расходится, то к данному функциональному ряду не применим признак Вейерштрасса.

Рассмотрим теперь более тонкие признаки равномерной сходимости Дирихле и Абеля.

Определение. Последовательность функций $g_n\colon E \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) называется *равномерно ограниченной* на E, если найдется такое $C > 0$, что $|g_n(x)| \leqslant C$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in E$.

Теорема 9.6 (признак Дирихле). *Пусть $a_n\colon E \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и $b_n\colon E \to \mathbb{R}$, такие что*

1) *последовательность $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ равномерно ограничена на E;*
2) *последовательность $\{b_n(x)\}$ монотонна при каждом $x \in E$;*
3) *$b_n \rightrightarrows 0$ на E.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ равномерно сходится на E.

□ По условию существует такое $C > 0$, что $|A_n(x)| \leqslant C$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in E$. Поэтому для всех $x \in E$ и $n \geqslant m$ имеем

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_n(x)\right| = |A_n(x) - A_{m-1}(x)| \leqslant 2C.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из равномерной сходимости $\{b_n\}$ найдем такой номер N, что $|b_n(x)| < \frac{\varepsilon}{8C}$ для всех $x \in E$ и $n \geqslant N$. Тогда по лемме 6.6 Абеля при всех $x \in E$ и $n \geqslant m \geqslant N$ имеем

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant 2 \cdot 2C\,(|b_m(x)| + |b_n(x)|) < 4C\left(\frac{\varepsilon}{8C} + \frac{\varepsilon}{8C}\right) = \varepsilon.$$

Доказательство завершается ссылкой на критерий Коши. ■

Выделим частные случаи, в которых условие равномерной ограниченности частичных сумм ряда выполняется автоматически.

Следствие 1 (признак Лейбница). *Если при каждом* $x \in E$ *последовательность* $\{\alpha_n(x)\}$ *монотонна и* $\alpha_n \rightrightarrows 0$ *на* E, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\alpha_n$ *равномерно сходится на* E.

Следствие 2. *Пусть отрезок* I *не содержит точек* $2\pi m$ $(m \in \mathbb{Z})$. *Если при каждом* $x \in I$ *последовательность* $\{\alpha_n(x)\}$ *монотонна, и* $\alpha_n \rightrightarrows 0$ *на* I, *то ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\sin nx$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\cos nx$ *равномерно сходятся на* I.

□ Как было установлено ранее, $\left|\sum_{n=1}^{N} \sin(nx)\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}$. Поскольку $\inf_I |\sin(x/2)| > 0$, суммы $\sum_{n=1}^{N} \sin(nx)$ равномерно ограничены на I. Аналогичная оценка справедлива и для сумм $\sum_{n=1}^{N} \cos(nx)$. По признаку Дирихле заключаем, что ряды равномерно сходятся на I. ■

Теорема 9.7 (признак Абеля). *Пусть* $a_n\colon E \to \mathbb{R}$ (*или* $\mathbb{C}$) *и* $b_n\colon E \to \mathbb{R}$, *такие что*

1) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *равномерно сходится на* E;
2) *последовательность* $\{b_n(x)\}$ *монотонна при каждом* $x \in E$;
3) *последовательность* $\{b_n\}$ *равномерно ограничена на* E.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *равномерно сходится на* E.

□ По условию существует такое $C > 0$, что $|b_n(x)| \leqslant C$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in E$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пользуясь равномерной сходимостью ряда, найдем такое N, что $\left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4C}$ для всех $x \in E$ и $n \geqslant m \geqslant N$. Тогда по лемме 6.6 Абеля при таких n, m и $x \in E$ имеем

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(x) b_k(x)\right| \leqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4C}(|b_m(x)| + |b_n(x)|) < \frac{\varepsilon}{2C} \cdot 2C = \varepsilon.$$

Доказательство завершается ссылкой на критерий Коши. ■

Характер монотонности в теоремах 9.6 и 9.7 в разных точках множества E может быть различным: в одних точках последовательность может возрастать, а в других — убывать.

Отметим, что признаки Абеля и Дирихле для числовых рядов (теоремы 8.7 и 8.8) являются частными случаями признаков для функциональных рядов.

Теорема 9.8 (признак Дини). *Пусть последовательность $\{f_n\}$ поточечно сходится к f на $[a, b]$, функция f и все f_n непрерывны на $[a, b]$ и последовательность $\{|f_n(x) - f(x)|\}$ нестрого убывает для всякого $x \in [a, b]$. Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$.*

□ Достаточно показать, что $g_n := |f_n - f| \rightrightarrows 0$ на $[a, b]$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $f_n \to f$, то для всякой точки $x_0 \in [a, b]$ найдется такой номер $N = N(x_0)$, что $0 \leqslant g_N(x_0) < \varepsilon$. Функция g_N непрерывна, поэтому найдется такое $\delta = \delta(x_0) > 0$, что $0 \leqslant \leqslant g_N(x) < \varepsilon$ для всех $x \in B_\delta(x_0) \cap [a, b]$. Тогда в силу монотонности $0 \leqslant g_n(x) < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$ и $x \in B_\delta(x_0) \cap [a, b]$. Семейство $\{B_{\delta(x)}(x)\}_{x \in [a, b]}$ образует открытое покрытие $[a, b]$. По теореме Гейне–Бореля найдутся точки $x_1, \ldots, x_m \in [a, b]$, такие что $[a, b] \subset B_{\delta(x_1)}(x_1) \cup \ldots \cup B_{\delta(x_m)}(x_m)$. Определим номер $N^* = = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m}\{N(x_i)\}$. Тогда при $n \geqslant N^*$ выполнено $0 \leqslant g_n(x) < \varepsilon$ для всех $x \in [a, b]$, что и требовалось доказать. ■

Следствие. *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ поточечно сходится к S на $[a, b]$, функция S и все u_n непрерывны и неотрицательны на $[a, b]$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на $[a, b]$.*

Часто равномерно сходящиеся ряды используют для построения функций с выделенными свойствами.

Пример (Ван-дер-Варден). Существует непрерывная функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, не дифференцируемая ни в одной точке.

$\square$ Продолжим $|x|$ с отрезка $[-1,\,1]$ на всю числовую прямую с периодом 2, т.е. рассмотрим функцию $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi(x\pm 2)=\varphi(x)$ и $\varphi(x)=|x|$ при $|x|\leqslant 1$. Заметим, что если на интервале $(x,\,y)$ нет целых чисел, то φ там кусочно-линейна с угловым коэффициентом ±1, а значит,

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|=|x-y|. \tag{9.2}$$

Определим функцию $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, где $f_n(x)=4^{-n}\varphi(4^n x)$. Функция f непрерывна как равномерно сходящийся по признаку Вейерштрасса ряд непрерывных функций.

Пусть $a\in\mathbb{R}$. Построим такую последовательность ненулевых чисел h_k, сходящуюся к 0, что конечного $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(a+h_k)-f(a)}{h_k}$ не существует. Интервалы $\left(4^k a,\, 4^k a+\frac12\right)$ и $\left(4^k a-\frac12,\, 4^k a\right)$ не могут одновременно содержать целых чисел. Поэтому найдется такое $h_k=\pm\frac12 4^{-k}$, что на интервале с концами $4^k a$ и $4^k(a+h_k)$ нет целых чисел. Фактически можно утверждать больше: при $n\leqslant$ $\leqslant k$ на интервале с концами $4^n a$ и $4^n(a+h_k)$ нет целых чисел (если между $4^n a$ и $4^n(a+h_k)$ имеется целое число, то домножая соответствующее неравенство на 4^{k-n}, получим целое число между $4^k a$ и $4^k(a+h_k)$, что противоречит выбору h_k). Поэтому по (9.2) имеем $|\varphi(4^n(a+h_k))-\varphi(4^n a)|=4^n|h_k|$, $1\leqslant n\leqslant k$, а ввиду 2-периодичности φ имеем $|\varphi(4^n(a+h_k))-\varphi(4^n a)|=0$ при $n>k$. Следовательно,

$$|f_n(a+h_k)-f_n(a)|=4^{-n}|\varphi(4^n(a+h_k))-\varphi(4^n a)|=\begin{cases}|h_k|, & n\leqslant k,\\ 0, & n>k.\end{cases}$$

Тогда разностное отношение

$$\frac{f(a+h_k)-f(a)}{h_k}=\sum_{n=1}^{k}\frac{f_n(a+h_k)-f_n(a)}{h_k}=\sum_{n=1}^{k}\pm1$$

есть четное число при четном k и нечетное при нечетном k. Поэтому не существует предела разностных отношений при $k\to\infty$, а значит, функция f не дифференцируема в точке a. $\blacksquare$

10. Степенные ряды

10.1. Свойства степенных рядов

Определение. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \tag{10.1}$$
где a_n, $x_0 \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), x — действительная (комплексная) переменная.

В этом пункте будем рассматривать оба случая одновременно.

На множестве сходимости ряд (10.1) определяет функцию f — сумму этого ряда. По соглашению $(x-x_0)^0 = 1$ точка x_0 всегда лежит во множестве сходимости, причем $f(x_0) = a_0$.

Теорема 10.1 (Коши–Адамар). *Пусть* $R = \dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ (*считаем* $\dfrac{1}{+\infty} = 0$, $\dfrac{1}{0} = +\infty$). *Тогда*

1) *при* $|x-x_0| < R$ *ряд* (10.1) *сходится, причем абсолютно*;
2) *при* $|x-x_0| > R$ *ряд* (10.1) *расходится*;
3) *для* $r \in \mathbb{R}$, $0 < r < R$, *ряд* (10.1) *сходится равномерно на множестве* $\overline{B}_r(x_0) := \{x\colon |x-x_0| \leqslant r\}$.

□ Первые два пункта вытекают из признака Коши (теорема 8.4). Действительно, пусть $x \neq x_0$. Тогда
$$q := \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x-x_0|}{R}.$$
Если $|x-x_0| < R$, то $q < 1$, и по признаку Коши ряд (10.1) абсолютно сходится (а, следовательно, сходится). Если $|x-x_0| > R$, то $q > 1$, и по признаку Коши n-й член ряда (10.1) не стремится к нулю, поэтому ряд (10.1) расходится.

Пусть $r \in (0, R)$. По доказанному в точке $x = x_0 + r$ ряд абсолютно сходится, т.е. сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Если $|x-x_0| \leqslant r$, то $|a_n(x-x_0)^n| \leqslant |a_n| r^n$, и ряд (10.1) сходится равномерно на $\overline{B}_r(x_0)$ по признаку Вейерштрасса. ■

Определение. Величина R из теоремы 10.1 называется *радиусом сходимости* ряда (10.1). Множество $B_R(x_0) = \{x\colon |x-x_0| < R\}$ называется *интервалом сходимости* (для комплексного — *кругом сходимости*) ряда (10.1).

Замечание. Таким образом, множество сходимости действительного степенного ряда совпадает с интервалом сходимости, возможно, включающим одну или обе концевые точки; для комплексного ряда — с кругом сходимости, возможно, включающим некоторое подмножество граничной окружности (см. рис. 10.1).

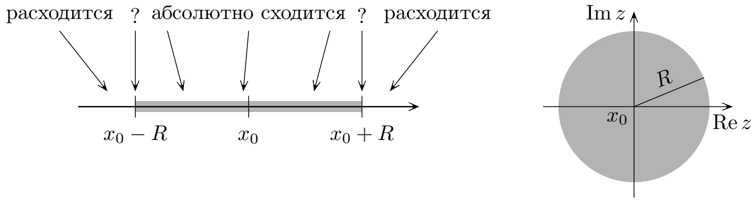

Рис. 10.1

Радиус сходимости определяется условиями 1 и 2 теоремы 10.1. Оформим это в виде следующего наблюдения.

Следствие. *Если $R \in [0, +\infty]$ такое, что для всех x с условием $|x - x_0| < R$ ряд (10.1) абсолютно сходится, а для всех x с условием $|x - x_0| > R$ ряд (10.1) абсолютно расходится (т.е. расходится ряд из модулей членов), то R — радиус сходимости ряда.*

□ Обозначим радиус сходимости ряда через $R_{\text{сх}}$. Пусть $R > R_{\text{сх}}$. Выберем x так, что $R_{\text{сх}} < |x - x_0| < R$. Из доказательства теоремы 10.1 следует, что $a_n(x - x_0)^n$ не стремится к нулю, что противоречит абсолютной сходимости ряда, которая имеется по условию. Аналогично устанавливается невозможность $R_{\text{сх}} > R$. ■

Пример. Найдем радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{2n}$.

□ Обозначим n-й член ряда как $u_n(x)$. Тогда при $x \neq 0$ имеем

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}|x|^2 = \frac{|x|^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{|x|^2}{e}, \quad n \to \infty.$$

Если $\frac{|x|^2}{e} < 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{e}$, то ряд абсолютно сходится по признаку Даламбера. Если $\frac{|x|^2}{e} > 1 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{e}$, то ряд абсолютно расходится по признаку Даламбера. Следовательно, радиус сходимости $R = \sqrt{e}$. ■

Задача. Исследуйте сходимость ряда из предыдущего примера при $x = \pm\sqrt{e}$.

Теорема 10.2 (Абель). *Если степенной ряд* (10.1) *сходится в точке $x_1 \neq x_0$, то он сходится равномерно на отрезке с концами x_0, x_1.*

□ Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ сходится по условию. Последовательность $\{t^n\}$ монотонна при любом $t \in [0, 1]$, и $|t^n| \leqslant 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [0, 1]$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n t^n$ равномерно сходится на $[0, 1]$ по признаку Абеля (теорема 9.7). Сделав замену $t = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$, заключаем, что ряд (10.1) равномерно сходится на множестве $\{x = x_0 + t(x_1 - x_0),\ t \in [0, 1]\}$ — отрезке с концами x_0, x_1. ■

Замечание. Если $x_1 \in B_R(x_0)$, то теорема 10.2 вытекает из п. 3 теоремы 10.1. Поэтому интерес представляет случай, когда x_1 лежит на границе интервала (круга) сходимости.

Задача. Пусть ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, где $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, сходятся к A, B и C соответственно. Покажите, что $C = AB$.

Одним из важнейших свойств степенных рядов является то, что их можно почленно дифференцировать. Ключевым здесь является следующий результат.

Лемма 10.1. *Если степенной ряд* (10.1) *имеет радиус сходимости R, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1}$, полученный почленным дифференцированием, также имеет радиус сходимости R.*

□ Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то множества частичных пределов последовательностей $\{\sqrt[n]{n|a_n|}\}$ и $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ совпадают, а значит, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. По формуле Коши–Адамара заключаем, что радиус сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^n$ равен R. Пусть $x \neq x_0$. Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1}$ отличаются ненулевым множителем, а значит, сходятся одновременно (при

$x = x_0$ очевидно сходятся). Следовательно, радиус сходимости второго ряда также равен R. ■

Теорема 10.3. *Если* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *— сумма степенного ряда с радиусом сходимости* $R > 0$*, то функция* f *бесконечно дифференцируема на интервале сходимости, и для каждого* $m \in \mathbb{N}$ *имеет место равенство*

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m}. \qquad (10.2)$$

□ При дифференцировании радиус сходимости ряда не меняется. Поэтому нам достаточно доказать утверждение для $m = 1$, после чего применить индукцию.

Первый способ. Пусть $0 < r < R$. По п. 3 теоремы 10.1 исходный ряд и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ равномерно сходятся на отрезке $[x_0 - r,\, x_0 + r]$. Обозначим через g сумму продифференцированного ряда. Тогда по следствию теоремы 9.4 функция f дифференцируема на $[x_0 - r,\, x_0 + r]$, причем $f' = g$. Так как $r \in (0,\, R)$ — любое, то равенство выполняется на $(x_0 - R,\, x_0 + R)$.

Второй способ. Без потери общности можно считать $x_0 = 0$. Пусть $t \in B_R(0)$. Покажем, что производная $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в точке t равна числу $l = \sum_{n=1}^{\infty} na_n t^{n-1}$.

Зафиксируем такое r, что $|t| < r < R$. Для $x \neq t$, $|x| \leqslant r$ составим разность

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} - l = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{x^n - t^n}{x - t} - nt^{n-1} \right).$$

Выражение в скобках перепишем в виде

$$x^{n-1} + tx^{n-2} + \ldots + xt^{n-2} + t^{n-1} - nt^{n-1} = \\ = (x^{n-1} - t^{n-1}) + t(x^{n-2} - t^{n-2}) + \ldots + t^{n-2}(x - t).$$

Каждая из разностей в скобках содержит множитель $(x - t)$. Частное при делении на $(x - t)$ имеет вид

$$(x^{n-2} + tx^{n-3} + \ldots + t^{n-2}) + t(x^{n-3} + tx^{n-4} + \ldots + t^{n-3}) + \ldots + t^{n-2}$$

(в первой сумме $(n-1)$ слагаемых, во второй $(n-2)$ слагаемых и т.д.). Поскольку $(n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ и каждое слагаемое в частном по модулю не превосходит r^{n-2}, получаем оценку

$$\left|\frac{x^n - t^n}{x - t} - nt^{n-1}\right| \leqslant |x - t|\,\frac{n(n-1)}{2}\,r^{n-2}.$$

По лемме 10.1 дважды продифференцированный ряд имеет тот же радиус сходимости R и, значит, сходится абсолютно при $x = r$, т.е. сходится ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2}$. Следовательно,

$$\left|\frac{f(x) - f(t)}{x - t} - l\right| \leqslant |x - t| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \frac{n(n-1)}{2}\,r^{n-2},$$

что доказывает равенство $\lim\limits_{x \to t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = l$. ■

Доказательство вторым способом справедливо и для комплексных степенных рядов (производная функции из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ определяется так же, как и для действительной переменной).

Следствие 1 (теорема единственности). *Если f — сумма степенного ряда* (10.1) *с радиусом сходимости $R > 0$, то его коэффициенты однозначно определяются формулой $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$*

□ В формуле (10.2) подставим $x = x_0$. Тогда слагаемые с номерами $n \geqslant m + 1$ обнулятся, так что $f^{(m)}(x_0) = m! a_m$. ■

Следствие 2. *Сумма степенного ряда* (10.1) *с радиусом сходимости $R > 0$ имеет при $|x - x_0| < R$ первообразную*

$$F(x) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}.$$

10.2. Ряды Тейлора

В дальнейшем рассматриваются только действительные степенные ряды.

Определение. Если функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в точке x_0 производные всех порядков, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ называется *рядом Тейлора* функции f в точке x_0. При $x_0 = 0$ ряд называют *рядом Маклорена.*

Теорему единственности выше можно переформулировать так: если функция f в окрестности точки x_0 является суммой степенного ряда с центром в x_0 (*разлагается* в ряд по степеням $x - x_0$), то этот ряд — ее ряд Тейлора в точке x_0. Следующий пример показывает, что ряд Тейлора бесконечно дифференцируемой функции f может сходиться к сумме, отличной от f.

Пример. Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Существование производных любого порядка в точке $x \neq 0$ следует из теоремы о дифференцировании композиции. Более того, $f^{(n)}(x) = 0$ при $x < 0$ и $f^{(n)}(x) = p_n(1/x)e^{-1/x}$ при $x > 0$, где $p_n(t)$ — многочлен степени $2n$. Последнее утверждение можно установить по индукции: $p_0(t) = 1$ и дифференцирование $f^{(n)}$ дает соотношение $p_{n+1}(t) = t^2[p_n(t) - p_n'(t)]$.

Индукцией по n покажем, что $f^{(n)}(0) = 0$. Для $n = 0$ это верно по условию. Если предположить, что $f^{(n)}(0) = 0$, то $(f^{(n)})'_-(0) = 0$ и

$$(f^{(n)})'_+(0) = \lim_{h\to+0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h\to+0} \frac{p_n(1/h)e^{-1/h}}{h} = \lim_{t\to+\infty} \frac{tp_n(t)}{e^t} = 0,$$

поскольку по правилу Лопиталя $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^m}{e^t} = 0$ для всех $m \in \mathbb{N}_0$. Это доказывает, что $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Все коэффициенты ряда Маклорена функции f, а значит и его сумма, равны нулю. Таким образом, функция f совпадает с суммой своего ряда Маклорена только при $x \leqslant 0$.

Другим препятствием разложимости функции f по степеням $x - x_0$ является расходимость ряда Тейлора при всех $x \neq x_0$.

Задача. Покажите, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos(n^2 x)}{2^n}$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, однако ее ряд Маклорена имеет нулевой радиус сходимости.

Приведем одно достаточное условие разложимости функции в степенной ряд.

Лемма 10.2. *Если функция f бесконечно дифференцируема на интервале $(x_0-\rho,\, x_0+\rho)$ и существует такое $C>0$, что $|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{Cn!}{\rho^n}$ для всех $n=0,\,1,\,\ldots$ и всех $x\in(x_0-\rho,\, x_0+\rho)$, то $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ на этом интервале.*

☐ Поскольку $\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right|^{1/n} \leqslant \frac{C^{1/n}}{\rho} \to \frac{1}{\rho}$, то по формуле Коши–Адамара радиус сходимости ряда Тейлора функции f в точке x_0 не меньше ρ. Покажем, что этот ряд сходится к f. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для всякого $x\in(x_0-\rho,\, x_0+\rho)$ и номера N найдется такая точка c, лежащая строго между x и x_0, что

$$\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right| = \left|\frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}\right|.$$

Так как для $f^{(N+1)}(c)$ справедлива оценка из условия, то

$$\left|\frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}\right| \leqslant C\left|\frac{x-x_0}{\rho}\right|^{N+1} \to 0, \quad N\to\infty,$$

что завершает доказательство. ■

Следствие 1. *Если функция f бесконечно дифференцируема на $(x_0-\rho,\, x_0+\rho)$ и все ее производные равномерно ограничены (т.е. существует $M>0$, такое что $|f^{(n)}(x)|\leqslant M$ при $|x-x_0|<\rho$ и всех $n\in\mathbb{N}_0$), то на этом интервале f разлагается в ряд по степеням $x-x_0$.*

☐ Следует по лемме 10.2, поскольку последовательность $\{n!/\rho^n\}$ является бесконечно большой. ■

Следствие 2. *Ряды Маклорена функций e^x, $\sin x$, $\cos x$ сходятся к этим функциям в любой точке $x\in\mathbb{R}$, то есть*

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

☐ Указанные функции бесконечно дифференцируемы, причем

$$(e^x)^{(n)}=e^x,\ (\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right),\ (\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right).$$

Поэтому при $|x| < \delta$ ($\delta > 0$) выполнено
$$|(e^x)^{(n)}| \leqslant e^\delta, \qquad |(\cos x)^{(n)}| \leqslant 1, \qquad |(\sin x)^{(n)}| \leqslant 1,$$
и значит, по лемме 10.2 все эти функции являются суммами своих рядов Маклорена на интервале $(-\delta,\, \delta)$. Так как $\delta > 0$ — любое, равенство имеет место для всех $x \in \mathbb{R}$. ■

Теорема 10.4 (биномиальный ряд). *Пусть $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, $C_\alpha^n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$ и $C_\alpha^0 = 1$. Тогда справедливо представление*
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n, \quad |x| < 1.$$

□ Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$, тогда $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, а значит, $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = C_\alpha^n$. Так как при $x \neq 0$:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|C_\alpha^{n+1} x^{n+1}|}{|C_\alpha^n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha-n|}{n+1}|x| = |x|,$$
то по признаку Даламбера ряд абсолютно сходится при $|x|<1$ и абсолютно расходится при $|x|>1$. Следовательно, радиус сходимости исследуемого ряда равен 1.

Определим функцию $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n$ и покажем, что $g \equiv f$ на $(-1,\, 1)$, т.е. $(1+x)^{-\alpha} g(x) = 1$ при $x \in (-1,\, 1)$. Для этого найдем производную функции $(1+x)^{-\alpha} g(x)$. По теореме 10.3 имеем
$$\big((1+x)^{-\alpha} g(x)\big)' = (1+x)^{-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n C_\alpha^n x^{n-1} - \alpha(1+x)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n =$$
$$= (1+x)^{-\alpha-1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n C_\alpha^n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n C_\alpha^n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n \right].$$

В первой сумме произведем замену индекса суммирования. После приведения подобных слагаемых получим
$$\big((1+x)^{-\alpha} g(x)\big)' =$$
$$= (1+x)^{-\alpha-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_\alpha^{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha-n) C_\alpha^n x^n \right] = 0.$$
Отсюда следует, что $(1+x)^{-\alpha} g(x)$ постоянна на $(-1,\, 1)$. Из условия $g(0) = 1$ получаем, что $(1+x)^{-\alpha} g(x) = 1$ для всех $x \in (-1, 1)$. ■

Замечание. При $\alpha > 0$ биномиальный ряд сходится равномерно к $(1+x)^\alpha$ на $[-1,\, 1]$. Действительно, при $n > \alpha$ имеем

$$\frac{|C_\alpha^{n+1}|}{|C_\alpha^n|} = \frac{n-\alpha}{n+1} = 1 - \frac{\alpha+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

По признаку Гаусса ряд $\sum |C_\alpha^n|$ сходится. Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum C_\alpha^n x^n$ сходится равномерно на $[-1,\, 1]$.

Пример. Так как $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1}$ при $|x| < 1$, то по следствию 2 теоремы 10.3 имеем

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \qquad |x| < 1.$$

Ряд в правой части сходится при $x = 1$, поэтому его сумма непрерывна на $(-1,\, 1]$, а значит, равенство имеет место при $x = 1$. Получаем известный нам результат, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Задача. Разложите функцию arctg в ряд по степеням x. С помощью полученного разложения найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

10.3. Вещественно-аналитические функции*

Определение. Пусть I — интервал в $\mathbb{R}$. Функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ называется *вещественно-аналитической* на I, если для каждой точки $x_0 \in I$ функция f в некоторой окрестности x_0 разлагается в ряд по степеням $x - x_0$.

Определение аналитической функции трудно проверять напрямую. Следующая теорема значительно облегчает проверку.

Теорема 10.5. *Если $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ — сумма степенного ряда с радиусом сходимости $R > 0$, то функция f вещественно-аналитична на $(x_0 - R,\, x_0 + R)$.*

□ Покажем, что f удовлетворяет условиям леммы 10.2.

Введем обозначения $(n)_k = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$, $(n)_0 = 1$. Продифференцировав k раз на $(-1,\, 1)$ равенство $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, получим

$$\sum_{n=k}^{\infty}(n)_k x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}},$$

Пусть $r \in (0,\ R)$ и $s \in (0,\ R-r)$. Так как $r+s<R$, то исходный ряд абсолютно сходится при $x = x_0+r+s$ и, значит, его n-й член стремится к нулю. Поэтому существует такая константа M, что $|a_n|(r+s)^n \leqslant M$ при всех n. Тогда по теореме 10.3 при $|x-x_0| < r$ и произвольном k имеем

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant \sum_{n=k}^{\infty}|a_n|(n)_k|x-x_0|^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{(r+s)^k}\sum_{n=k}^{\infty}(n)_k\left(\frac{r}{r+s}\right)^{n-k} = \frac{M}{(r+s)^k}\frac{k!}{\left(1-\frac{r}{r+s}\right)^{k+1}} =$$

$$= \frac{M}{(r+s)^k}\frac{k!(r+s)^{k+1}}{s^{k+1}} = \frac{Ck!}{s^k},$$

где $C = \dfrac{M(r+s)}{s}$. Пусть $x_1 \in B_R(x_0)$. По лемме 10.2 ряд Тейлора функции f с центром в точке x_1 сходится к $f(x)$ при $|x-x_1| < \min\{s,\ r-|x-x_1|\}$. ■

Замечание. Так как s выбором r можно сделать сколь угодно близким к $S = R-|x-x_1|$, то радиус сходимости степенного ряда с центром в точке x_1 не меньше S.

Из теоремы 10.5 получаем следующую характеризацию аналитических функций.

Следствие 1. *Функция f вещественно-аналитична на интервале I тогда и только тогда, когда функция f бесконечно дифференцируема на I и для всякой точки $x_0 \in I$ найдутся интервал J, $x_0 \in J \subset I$, и константы C, $\rho > 0$, такие что $|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{Cn!}{\rho^n}$ для всех $n = 0,\ 1,\ \ldots$ и $x \in J$.*

Следствие 2. *Функции e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ являются вещественно-аналитическими на $\mathbb{R}$.*

Задача. Покажите, что функция $f(x) = (1+x)^\alpha$ при всех α является вещественно-аналитической на $(-1,\ +\infty)$.

Одно из удивительных свойств аналитических функций состоит в том, что значения на «небольшой части» полностью определяют значения на всем интервале.

Теорема 10.6. *Пусть f и g — вещественно-аналитические функции на интервале I, и $\{x_n\}$ — последовательность попарно различных точек из I, сходящаяся к $x_0 \in I$. Если $f(x_n) = g(x_n)$ для всех n, то $f \equiv g$ на I.*

□ Положим
$$E = \{x \in I \colon\ f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x),\ \forall k \geqslant 0\}.$$
Так как $x_0 \in E$ (проверить!), множество E непусто.

Покажем, что E открыто. Действительно, если $x_1 \in E$, то обе функции предствляются на некотором невырожденном интервале $(x_1 - r, x_1 + r)$ одним и тем же рядом по степеням $x - x_1$. Следовательно, по теореме 10.3 $f^{(k)} = g^{(k)}$ на этом интервале, т.е. $(x_1 - r, x_1 + r) \subset E$.

Рассмотрим J — объединение всех интервалов, лежащих в E и содержащих x_0. Нетрудно увидеть, что J также является интервалом, $J = (a, b) \subset E$. Если J не совпадает с интервалом I, то один из его концов, a или b, является внутренней точкой I. Пусть для определенности такой точкой является b. Рассмотрим $y_n \in J$, $y_n \to b$. Так как $y_n \in E$, то при каждом $k \geqslant 0$ верно $f^{(k)}(y_n) = g^{(k)}(y_n)$ и в силу непрерывности производных также $f^{(k)}(b) = g^{(k)}(b)$. Это означает, что $b \in E$. Но тогда существует невырожденный интервал $(b - \delta, b + \delta) \subset E$. Объединяя его с J, получим интервал J', лежащий в E и содержащий x_0. Поскольку $J' \not\subset J$, приходим к противоречию с определением J. Следовательно, J, а значит, и E, совпадают с I. ■

Следствие. *Если f и g — вещественно-аналитические функции на интервале I и существует интервал $J \subset I$ такой, что $f(x) = g(x)$ для всех $x \in J$, то $f \equiv g$ на I.*

Покажем, что класс аналитических функций замкнут относительно стандартных операций.

Теорема 10.7. *Пусть f и g вещественно-аналитичны на интервале I, $c \in \mathbb{R}$. Тогда функции $f + g$, cf и fg также вещественно-аналитичны на I.*

$\square$ Пусть $x_0 \in I$. В некоторой окрестности $B_R(x_0) \subset I$ имеем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n,$$

причем оба ряда сходятся абсолютно. По следствию теоремы 8.11

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) (x - x_0)^n,$$

что доказывает аналитичность fg. Для $f + g$, cf утверждение очевидно. $\blacksquare$

Теорема 10.8. *Пусть f вещественно-аналитична на интервале I, а g вещественно-аналитична на интервале J и $f(I) \subset J$. Тогда композиция $g \circ f$ вещественно-аналитична на I.*

$\square$ Пусть $x_0 \in I$ и $y_0 = f(x_0)$. Пусть в некоторых окрестностях этих точек

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (y - y_0)^n.$$

Формальная подстановка первого ряда во второй дает

$$g(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (f(x) - y_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \right)^n.$$

Пусть $\sum_k c_{kn} t^k = \left(\sum_j a_j t^j \right)^n$. Тогда приходим к следующему формальному представлению

$$g(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_{kn} (x - x_0)^k \right).$$

Покажем, что повторный ряд в правой части сходится.

Ряды $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| t^j$, $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| y^n$ имеют положительные радиусы сходимости и на интервалах сходимости определяют суммы $\alpha(t)$ и $\beta(y)$. Отметим, что ряд $\sum_k d_{kn} t^k = \left(\sum_j |a_j| t^j \right)^n$ сходится на интервале сходимости первого ряда. Так как функция α непрерывна и $\alpha(0) = 0$, то при малых $t > 0$ имеем

$$\alpha(\beta(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \sum_{k=1}^{\infty} d_{kn} t^k.$$

По теореме 8.16 заключаем, что семейство $\{|b_n|d_{kn}t^k\}$ суммируемо.

Так как $|c_{kn}| \leqslant d_{kn}$ для всех k и n, то семейство $\{b_n c_{kn} t^k\}$ также суммируемо (при всех достаточно малых по модулю t). Значит, при $x = x_0 + t$ сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}(x - x_0)^k.$$

Сумма этого ряда равна $g(f(x))$, что доказывает теорему. ■

Так как $g(x) = \frac{1}{x}$ аналитична на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, то справедливо

Следствие. *Пусть функция f вещественно-аналитична и не равна нулю на интервале I. Тогда функция $\frac{1}{f}$ также вещественно-аналитична на I.*

Пример. Функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ вещественно-аналитична в некоторой окрестности нуля и, значит, раскладывается в ряд по степеням x. Поскольку f нечетна, то такое разложение имеет вид: $\operatorname{tg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} s_{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, причем $s_1 = 1$, т.к. $f'(0) = 1$. Тогда из тождества $\operatorname{tg}' x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ нетрудно получить рекуррентную формулу:

$$s_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k-1} s_{2k-1} s_{2(n-k)+1}, \qquad s_1 = 1 \ (n \in \mathbb{N}).$$

Откуда

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots$$

Задача. Рассмотрим перестановки $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ чисел $\{1, 2, \ldots, k\}$, такие что $a_1 < a_2 > a_3 < a_4 > \ldots$ («up-down последовательности»). Покажите, что при $k = 2n + 1$ количество таких перестановок равно s_{2n+1}.

Закончим раздел следующим приложением степенных рядов в комбинаторике.

Определение. Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — произвольная числовая последовательность. *Производящей функцией* для $\{a_n\}$ называется (формальный) степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Две производящие функции равны, если у них совпадают коэффициенты при одинаковых степенях переменной.

Замечание. Используя термин «функция», мы не предполагаем, что ряд сходится. Изучение производящих функций не предполагает суммирования числовых рядов (в этом заключается смысл прилагательного «формальный»). Однако, как и над степенными рядами, над производящими функциями определены операции сложения и умножения по Коши.

Покажем применение производящих функций на примере чисел Каталана. Числа Каталана перечисляют различные комбинаторные объекты. Мы остановимся на следующем геометрическом определении.

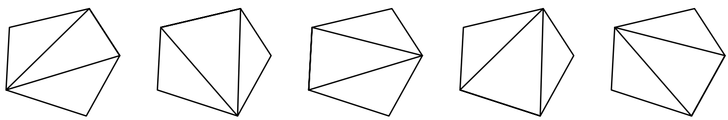

Рис. 10.2

Рассмотрим выпуклый $(n+2)$-угольник, вершины которого занумерованы против часовой стрелки числами от 0 до $n+1$. *Диагональной триангуляцией* назывем разбиение многоугольника на треугольники непересекающимися диагоналями. Каждая такая триангуляция содержит $n-1$ диагональ. Например, у треугольника триангуляция одна, для четырехугольника триангуляции получаются проведением одной из его диагоналей, а значит, число триангуляций равно 2, для пятиугольника каждая такая триангуляция получается проведением диагоналей из одной из вершин, значит, существуют всего таких 5 триангуляций (см. рис. 10.2).

Пусть по определению число Каталана c_n — это число триангуляций $(n+2)$-угольника при $n \geqslant 1$, примем также $c_0 = 1$. Рассмотрим произвольную триангуляцию $(n+2)$-угольника и выделим треугольник с основанием 01. Пусть k — номер третьей вершины этого треугольника. Выделенный треугольник разбивает многоугольник на многоугольники P_1 с вершинами $1, \ldots, k$ и P_2 с вершинами $k, k+1, \ldots, n+1, 0$. Перенумеруем вершины

P_1 и P_2 против часовой стрелки так, чтобы нумерация вершин в каждом из них начиналась с 0. В итоге получим пару триангуляций для P_1 и P_2. Наоборот, каждая пара триангуляций k-угольника и $(n-k+3)$-угольника задает триангуляцию исходного многоугольника. Число триангуляций P_1 равно c_{k-2}, а P_2 равно c_{n-k+3}. Суммируя по всем значениям k, получаем рекуррентное соотношение

$$c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \ldots + c_{n-1} c_0.$$

Рассмотрим производящую функцию для чисел Каталана $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Поскольку коэффициент перед x^n в представлении $f^2(x)$ равен $\sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i}$, то $f^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^n$. Домножая это выражение на x и прибавляя 1 (т.е. c_0), мы в точности получим $f(x)$. Следовательно, функция f удовлетворяет квадратному уравнению $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$.

Пусть $g(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$, $g(0) = 1$. Функция g аналитична на $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ и $xg(x)^2 - g(x) + 1 = 0$ (g выражется формулой для корня такого уравнения). Повторяя рассуждения выше для g, заключаем, что коэффициенты ее разложения по степеням x также удовлетворяют условиям $a_0 = 1$ и $a_n = a_0 a_{n-1} + \ldots + a_{n-1} a_0$, т.е. совпадают с c_n. По определению равенства производящих функций $f(x) = g(x)$, т.е. $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

Вид производящей функции позволяет найти явную формулу для c_n. Раскладывая $\sqrt{1-4x}$ в ряд по степеням x, получаем

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2} C_{1/2}^{n} (-4)^n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2} C_{1/2}^{n+1} (-4)^{n+1} x^n,$$

откуда следует выражение для c_n через биномиальные коэффициенты

$$c_n = -\frac{1}{2} C_{1/2}^{n+1} (-4)^{n+1} = \frac{C_{2n}^{n}}{n+1} = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1}.$$

В итоге последовательность чисел Каталана начинается так:

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, \ldots$$

Задача. Покажите, что $c_n \sim \dfrac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}$.

Список литературы

1. *Бесов О.В.* Лекции по математическому анализу. Москва : Физматлит, 2020.
2. *Виноградов О.Л.* Математический анализ. Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2017.
3. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. 1, 2. Москва : МЦНМО, 2012.
4. *Рудин У.* Основы математического анализа. Москва : Мир, 1976.
5. *Browder A.* Mathematical analysis. Undergraduate Texts in Mathematics. New York : Springer-Verlag, 1996.
6. *Гаврилов В.И., Штерн А.И.* Введение показательной, логарифмической и тригонометрических функций и изучение их свойств в первом семестре курса математического анализа. Москва : Механико-математический факультет МГУ, 2006. 56 с.
7. *Johnson W.P.* The Curious History of Faa di Bruno's Formula // Amer. Math. Monthly. 2002. V. 109. P. 217–234.
8. *Прасолов В.В.* Неэлементарность некоторых интегралов элементарных функций // Математическое просвещение. Третья серия. 2003. Вып. 7. С. 126–135. Москва : Изд-во МЦНМО, 2003.