

Г.Е. Иванов

ЛЕКЦИИ ПО  
МАТЕМАТИЧЕСКОМУ  
АНАЛИЗУ

Часть 1

©Иванов Г.Е., 2017

# Оглавление

|                                                                                                 |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Предисловие . . . . .                                                                           | 6         |
| Введение . . . . .                                                                              | 7         |
| <b>Глава 1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ<br/>ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ</b>                                     | <b>10</b> |
| § 1. Аксиомы действительных чисел . . . . .                                                     | 10        |
| § 2. Точные грани множеств . . . . .                                                            | 13        |
| § 3. Предел последовательности . . . . .                                                        | 17        |
| § 4. Свойства пределов последовательностей,<br>связанные с арифметическими действиями . . . . . | 21        |
| § 5. Переход к пределу в неравенствах . . . . .                                                 | 24        |
| § 6. Монотонные последовательности . . . . .                                                    | 25        |
| § 7. Неравенство Бернулли и число $e$ . . . . .                                                 | 26        |
| § 8. Принцип вложенных отрезков . . . . .                                                       | 27        |
| § 9. Частичный предел последовательности . . . . .                                              | 29        |
| § 10. Критерий Коши . . . . .                                                                   | 33        |
| § 11. Открытые и замкнутые числовые множества . . . . .                                         | 35        |
| § 12. Счетные и несчетные множества . . . . .                                                   | 39        |
| <b>Глава 2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ<br/>ФУНКЦИИ</b>                                              | <b>42</b> |
| § 1. Определение предела функции . . . . .                                                      | 42        |
| § 2. Свойства пределов функций . . . . .                                                        | 44        |
| § 3. Критерий Коши существования предела функции . . . . .                                      | 46        |
| § 4. Предел по множеству . . . . .                                                              | 48        |
| § 5. Односторонние пределы . . . . .                                                            | 49        |
| § 6. Непрерывность функции в точке . . . . .                                                    | 52        |
| § 7. Непрерывность функции на множестве . . . . .                                               | 56        |

|                                                                                            |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| § 8. Обратная функция . . . . .                                                            | 61         |
| § 9. Тригонометрические функции . . . . .                                                  | 63         |
| § 10. Степенная, показательная и логарифмическая функции . . . . .                         | 65         |
| § 11. Второй замечательный предел . . . . .                                                | 69         |
| § 12. Сравнение функций . . . . .                                                          | 71         |
| <b>Глава 3. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ</b>                                                | <b>75</b>  |
| § 1. Определение и геометрический смысл производной и дифференциала . . . . .              | 75         |
| § 2. Правила дифференцирования . . . . .                                                   | 79         |
| § 3. Производные и дифференциалы высших порядков . . . . .                                 | 83         |
| § 4. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций . . . . .                              | 87         |
| § 5. Формула Тейлора . . . . .                                                             | 92         |
| § 6. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора . . . . .                 | 97         |
| § 7. Правило Лопиталя . . . . .                                                            | 101        |
| § 8. Исследование функций с помощью производных . . . . .                                  | 105        |
| <b>Глава 4. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ</b>                                                    | <b>114</b> |
| § 1. Элементарные методы интегрирования . . . . .                                          | 114        |
| § 2. Комплексные числа . . . . .                                                           | 118        |
| § 3. Разложение многочлена на множители . . . . .                                          | 120        |
| § 4. Разложение правильной рациональной дроби в сумму элементарных дробей . . . . .        | 124        |
| § 5. Интегрирование рациональных дробей . . . . .                                          | 126        |
| § 6. Интегрирование иррациональных, тригонометрических и гиперболических функций . . . . . | 128        |
| <b>Глава 5. ВЕКТОР-ФУНКЦИИ</b>                                                             | <b>132</b> |
| § 1. Линейное пространство . . . . .                                                       | 132        |
| § 2. Евклидово пространство . . . . .                                                      | 134        |
| § 3. Нормированное пространство . . . . .                                                  | 135        |
| § 4. Метрическое пространство . . . . .                                                    | 137        |
| § 5. Предел и производная вектор-функции . . . . .                                         | 139        |
| § 6. Кривые . . . . .                                                                      | 144        |
| § 7. Длина кривой . . . . .                                                                | 146        |
| § 8. Первое приближение кривой (касательная) . . . . .                                     | 151        |
| § 9. Второе приближение кривой . . . . .                                                   | 152        |
| § 10. Сопровождающий трехгранник кривой . . . . .                                          | 156        |

|                                                                              |            |
|------------------------------------------------------------------------------|------------|
| § 11. Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$ . . . . .              | 158        |
| § 12. Сходимость в $\mathbb{R}^n$ . . . . .                                  | 161        |
| § 13. Лемма Гейне-Бореля . . . . .                                           | 164        |
| <b>Глава 6.                    ФУНКЦИИ                    НЕСКОЛЬКИХ</b>     |            |
| <b>                                 ПЕРЕМЕННЫХ                   </b>        | <b>167</b> |
| § 1. Предел функции нескольких переменных . . . . .                          | 167        |
| § 2. Непрерывность функции нескольких переменных в точке                     | 174        |
| § 3. Непрерывность функции нескольких переменных                             |            |
| на множестве . . . . .                                                       | 175        |
| § 4. Равномерная непрерывность функции на множестве . .                      | 178        |
| § 5. Дифференцируемость функции нескольких пе-                               |            |
| ременных. Геометрический смысл градиента                                     |            |
| и дифференциала . . . . .                                                    | 180        |
| § 6. Необходимые условия дифференцируемости. Произ-                          |            |
| водные по направлению и частные производные . . . . .                        | 183        |
| § 7. Достаточные условия дифференцируемости . . . . .                        | 187        |
| § 8. Дифференцирование сложной вектор-функции . . . . .                      | 188        |
| § 9. Частные производные и дифференциалы высших                              |            |
| порядков . . . . .                                                           | 191        |
| § 10. Операторы дифференцирования . . . . .                                  | 194        |
| § 11. Формула Тейлора . . . . .                                              | 197        |
| <b>Глава 7.                    ИНТЕГРАЛ РИМАНА                   </b>        | <b>200</b> |
| § 1. Мера Жордана . . . . .                                                  | 200        |
| § 2. Суммы Дарбу . . . . .                                                   | 207        |
| § 3. Интегральные суммы Римана . . . . .                                     | 213        |
| § 4. Свойства определенного интеграла . . . . .                              | 215        |
| § 5. Достаточные условия интегрируемости . . . . .                           | 220        |
| § 6. Определенный интеграл как функция верхнего предела                      | 223        |
| § 7. Формулы Валлиса и Стирлинга . . . . .                                   | 227        |
| § 8. Геометрические приложения определенного интеграла                       | 230        |
| § 9. Криволинейные интегралы . . . . .                                       | 238        |
| <b>Глава 8.                    НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ                   </b> | <b>244</b> |
| § 1. Определение и некоторые свойства несобственного                         |            |
| интеграла . . . . .                                                          | 244        |
| § 2. Несобственные интегралы от знакопостоянных функций                      | 252        |
| § 3. Несобственные интегралы от знакопеременных функций                      | 256        |

|                  |                                                                                                                                      |            |
|------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Глава 9.</b>  | <b>ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ</b>                                                                                                                 | <b>264</b> |
| § 1.             | Определение и некоторые свойства рядов . . . . .                                                                                     | 264        |
| § 2.             | Ряды с неотрицательными членами . . . . .                                                                                            | 265        |
| § 3.             | Ряды со знакопеременными членами . . . . .                                                                                           | 270        |
| § 4.             | Перестановки слагаемых в рядах и перемножение рядов                                                                                  | 273        |
| <b>Глава 10.</b> | <b>ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ<br/>ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ</b>                                                                                  | <b>281</b> |
| § 1.             | Равномерная сходимость функциональных последова-<br>тельств . . . . .                                                                | 281        |
| § 2.             | Равномерная сходимость функциональных рядов . . .                                                                                    | 285        |
| § 3.             | Свойства равномерно сходящихся последовательно-<br>стей и рядов . . . . .                                                            | 295        |
| <b>Глава 11.</b> | <b>СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ</b>                                                                                                                | <b>300</b> |
| § 1.             | Обобщенный признак Коши сходимости числового ряда                                                                                    | 300        |
| § 2.             | Комплексные ряды . . . . .                                                                                                           | 301        |
| § 3.             | Степенные ряды . . . . .                                                                                                             | 303        |
| § 4.             | Ряд Тейлора . . . . .                                                                                                                | 311        |
| § 5.             | Ряды Тейлора для показательной, гиперболических<br>и тригонометрических функций . . . . .                                            | 314        |
| § 6.             | Остаточный член формулы Тейлора в интегральной<br>форме. Ряды Тейлора для степенной, логарифмиче-<br>ской и других функций . . . . . | 317        |
| <b>Глава 12.</b> | <b>ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ</b>                                                                                                     | <b>322</b> |
| § 1.             | Теорема о неявной функции для одного уравнения . . .                                                                                 | 322        |
| § 2.             | Операторная норма матрицы. Теорема Лагранжа<br>о среднем . . . . .                                                                   | 323        |
| § 3.             | Принцип Банаха сжимающих отображений . . . . .                                                                                       | 325        |
| § 4.             | Теорема о неявной функции для системы уравнений . .                                                                                  | 327        |
| § 5.             | Теорема об обратном отображении . . . . .                                                                                            | 332        |
|                  | Предметный указатель . . . . .                                                                                                       | 336        |

## Предисловие

Настоящее учебное пособие написано на основе лекций, читаемых автором студентам первого курса Московского физико-технического института (государственного университета).

Содержание материала соответствует программе кафедры высшей математики МФТИ (ГУ).

Автор выражает искреннюю признательность коллегам и студентам, высказавшим ценные замечания и предложения, а также обнаружившим опечатки в лекциях. Особую благодарность автор выражает доценту Максиму Олеговичу Голубеву.

## Введение

Будем использовать следующие *логические операции*:

$\neg$  (не),

и,

или,

$\Rightarrow$  (следует),

$\Leftrightarrow$  (равносильно),

которые применяются к условиям, т.е. выражениям, принимающим значения И (истина) или Л (ложь).

Значения условий, полученных в результате применения указанных операций к исходным условиям, определяются по следующим таблицам истинности в зависимости от значений исходных условий.

| $A$ | $\neg A$ | $A$ | $B$ | $A$ и $B$ | $A$ или $B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|-----|----------|-----|-----|-----------|-------------|-------------------|-----------------------|
| И   | Л        | И   | И   | И         | И           | И                 | И                     |
| И   | Л        | И   | Л   | Л         | И           | Л                 | Л                     |
| Л   | И        | Л   | И   | Л         | И           | И                 | Л                     |
| Л   | И        | Л   | Л   | Л         | Л           | И                 | И                     |

Будем также использовать *кванторы*

$\forall$  (для любого),

$\exists$  (существует)

и *логические связи*

$\hookrightarrow$  (выполняется),

$:$  (такой (ая, ое), что).

Запись  $x \in X$  означает " $x$  является элементом множества  $X$ ".

Запись  $X \subset Y$  означает " $X$  является подмножеством множества  $Y$ ". Последнюю запись можно определить следующим образом:

$$X \subset Y \Leftrightarrow \forall x \hookrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y)$$

или в более короткой форме записи  $\forall x : x \in X \hookrightarrow x \in Y$  или, еще короче,  $\forall x \in X \hookrightarrow x \in Y$ .

При определении новых множеств часто используют

метод перечисления:  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  и

метод наложения условия:

$$X = \{x : \text{выполняется некоторое условие для } x\}.$$

Определим операции пересечения, объединения и дополнения множеств:

$$X \cap Y = \{x : x \in X \text{ и } x \in Y\};$$

$$X \cup Y = \{x : x \in X \text{ или } x \in Y\};$$

$$X \setminus Y = \{x \in X : x \notin Y\}.$$

Здесь и далее перечеркнутый символ означает отрицание к соответствующему условию, например,  $x \notin Y \Leftrightarrow \neg(x \in Y)$ .

При раскрытии отрицания к выражению, содержащему логические операции, полезно использовать следующие свойства

$$\begin{aligned} \neg(\neg A) &\Leftrightarrow A, \\ \neg(A \text{ и } B) &\Leftrightarrow (\neg A \text{ или } \neg B), \\ \neg(A \text{ или } B) &\Leftrightarrow (\neg A \text{ и } \neg B), \\ \neg(A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow (A \text{ и } \neg B). \end{aligned}$$

Справедливость этих свойств легко проверить по таблицам истинности, рассмотрев все возможные случаи значений условий  $A$  и  $B$ .

При раскрытии отрицания к условию, содержащему квантор, следует поменять квантор, а знак отрицания поставить после этого квантора и переменной, к которой он относится. Пусть  $A(x)$  – некоторое условие, налагаемое на переменную  $x$ . Тогда

$$\begin{aligned} \neg(\forall x \in X \hookrightarrow A(x)) &\Longleftrightarrow \exists x \in X : \neg A(x); \\ \neg(\exists x \in X : A(x)) &\Longleftrightarrow \forall x \in X \hookrightarrow \neg A(x). \end{aligned}$$

Например,

$$X \not\subset Y \Longleftrightarrow \neg(\forall x \in X \hookrightarrow x \in Y) \Longleftrightarrow (\exists x \in X : x \notin Y).$$

**Определение.** *Декартовым произведением* множеств  $X$  и  $Y$  называется множество  $X \times Y$ , состоящее из всех пар  $(x, y)$  таких, что  $x \in X, y \in Y$ .

Например, если  $X = \{0, 1\}$ ,  $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ , то  $X \times Y = \{(0, y_1), (1, y_1), (0, y_2), (1, y_2), (0, y_3), (1, y_3)\}$ .

**Определение.** Будем говорить, что задано *соответствие*  $f$  между множествами  $X$  и  $Y$ , если задано множество  $G_f \subset X \times Y$ . При этом множество  $G_f$  называется *графиком* соответствия  $f$ . Элемент  $y \in Y$  называется *поставленным в соответствие* элементу  $x \in X$  при соответствии  $f$ , если  $(x, y) \in G_f$ . *Множеством определения* (или *областью определения*) соответствия  $f$  называется

$$D_f = \{x \in X : (\exists y \in Y : (x, y) \in G_f)\}.$$

*Множеством значений* (или *областью значений*) соответствия  $f$  называется

$$E_f = \{y \in Y : (\exists x \in X : (x, y) \in G_f)\}.$$

Соответствие  $f$  называется *однозначным*, если

$$\forall x \in X \forall y_1, y_2 \in Y : (x, y_1) \in G_f \text{ и } (x, y_2) \in G_f \hookrightarrow y_1 = y_2.$$

**Определение.** Соответствие  $f^{-1}$  между множествами  $Y$  и  $X$  называется *обратным* к соответствию  $f$  между множествами  $X$  и  $Y$ , если графики этих соответствий удовлетворяют условию

$$\forall x \in X \forall y \in Y \hookrightarrow (x, y) \in G_f \Leftrightarrow (y, x) \in G_{f^{-1}}.$$

**Определение.** *Функцией*  $f : X \rightarrow Y$  называется однозначное соответствие такое, что  $D_f = X$ . При этом если  $(x, y) \in G_f$ , то пишут  $y = f(x)$ .

**Определение.** Функция  $f : X \rightarrow Y$  называется *обратимой* или *инъективной*, если соответствие, обратное к  $f$ , является однозначным.

**Определение.** Обратимая функция  $f : X \rightarrow Y$ , для которой  $E_f = Y$ , называется *взаимно однозначным* соответствием или *биекцией*  $f : X \rightarrow Y$ .

# ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

## § 1. Аксиомы действительных чисел

**Определение.** Будем говорить, что на множестве  $X$  *определена операция сложения* (умножения), если любым двум элементам  $a, b \in X$  поставлен в соответствие единственный элемент  $a + b \in X$  ( $a \cdot b \in X$ ).

**Определение.** Будем говорить, что на множестве  $X$  задано *отношение порядка*  $\leq$ , если для любых двух элементов  $a, b \in X$  известно, верно или неверно неравенство  $a \leq b$ .

**Определение.** Множеством *действительных* (вещественных) чисел  $\mathbb{R}$  называется множество, на котором определены операции сложения и умножения и отношение порядка  $\leq$ , удовлетворяющие следующим 16 аксиомам, и которое состоит более чем из одного элемента.

Аксиомы сложения

- 1)  $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a + b = b + a$ ;
- 2)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$ ;
- 3)  $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a + 0 = a$ ;
- 4)  $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$ .

Аксиомы умножения

- 5)  $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot b = b \cdot a$ ;
- 6)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ;
- 7)  $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot 1 = a$ ;
- 8)  $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$ .

Аксиома связи сложения и умножения

- 9)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .

**Пример 1.** Доказать, что если  $a, b \in \mathbb{R}$  и  $b + a = a$ , то  $b = 0$ .

**Решение.**  $b \stackrel{(3)}{=} b + 0 \stackrel{(4)}{=} b + (a + (-a)) \stackrel{(2)}{=} (b + a) + (-a) \stackrel{\text{по условию}}{=} a + (-a) \stackrel{(4)}{=} 0 \Rightarrow b = 0.$   $\square$

**Пример 2.** Доказать, что  $\forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot 0 = 0.$

**Решение.**  $a \cdot 0 + a \stackrel{(7)}{=} a \cdot 0 + a \cdot 1 \stackrel{(9)}{=} a \cdot (0 + 1) \stackrel{(1)}{=} a \cdot (1 + 0) \stackrel{(3)}{=} a \cdot 1 \stackrel{(7)}{=} a$  **Пример 1.**  $\Rightarrow a \cdot 0 = 0.$   $\square$

**Задача 1.** Доказать, что  $\forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot (-1) = -a.$

Аксиомы отношения порядка

- 10)  $\forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \leq a;$
- 11)  $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \leq b$  или  $b \leq a;$
- 12)  $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a \leq b \text{ и } b \leq a) \hookrightarrow a = b;$
- 13)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \leq b \text{ и } b \leq c) \hookrightarrow a \leq c.$

Связь отношения порядка и сложения

- 14)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \hookrightarrow a + c \leq b + c.$

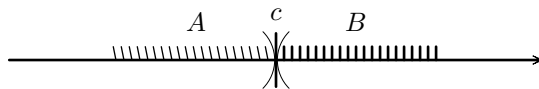
Связь отношения порядка и умножения

- 15)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \leq b \text{ и } 0 \leq c) \hookrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c.$

Аксиомы 1-15 известны Вам из школы как свойства действительных чисел. С другой стороны, эти аксиомы определяют алгебраические структуры. В частности, аксиомы 1-4 означают, что  $\mathbb{R}$  является абелевой (т.е. коммутативной или перестановочной) группой по сложению. Аксиомы 5-8 говорят, что  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  является абелевой группой по умножению. Аксиомы 1-9 соответствуют определению поля, а аксиомы 1-15 - определению упорядоченного поля.

Аксиома непрерывности

- 16) Если  $A, B \subset \mathbb{R}$  и множество  $A$  лежит слева от множества  $B$  (т.е.  $\forall a \in A \forall b \in B \hookrightarrow a \leq b$ ), то  $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A \forall b \in B \hookrightarrow a \leq c \leq b.$



Определим теперь отношения порядка  $<$ ,  $\geq$ ,  $>$  и операции вычитания и деления на множестве действительных чисел:

$$\begin{aligned} a \neq b &\Leftrightarrow \neg(a = b); \\ a < b &\Leftrightarrow (a \leq b \text{ и } a \neq b); \\ a \geq b &\Leftrightarrow b \leq a; \\ a > b &\Leftrightarrow b < a; \\ a - b &= a + (-b); \\ \frac{a}{b} &= a \cdot \frac{1}{b} \quad (b \neq 0). \end{aligned}$$

**Определение.** Множеством *натуральных* чисел  $\mathbb{N}$  называется множество действительных чисел вида  $1, 1+1, \dots, n = 1 + \dots + 1, \dots$ . Иначе говоря, натуральным числом является 1 и любое число вида  $n + 1$ , где  $n$  – натуральное число.

Множеством *целых* чисел  $\mathbb{Z}$  называется множество чисел  $m$  таких, что  $m \in \mathbb{N}$  или  $-m \in \mathbb{N}$ , или  $m = 0$ .

Множеством *рациональных* чисел  $\mathbb{Q}$  называется множество чисел вида  $\frac{m}{n}$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Задача 2.** Доказать, что рациональные числа удовлетворяют всем аксиомам действительных чисел, кроме аксиомы непрерывности.

**Задача 3.** Показать, что аксиома непрерывности для множества рациональных чисел не выполняется, т.е. привести пример двух множеств  $A, B \subset \mathbb{Q}$  таких, что

$$\forall a \in A \forall b \in B \hookrightarrow a \leq b, \text{ но не существует } c \in \mathbb{Q}:$$

$$\forall a \in A \forall b \in B \hookrightarrow a \leq c \leq b.$$

Множество действительных чисел  $\mathbb{R}$  будем также называть *числовой прямой*, а действительные числа – *точками* числовой прямой.

Наряду с числовой прямой определим *расширенную числовую прямую*:  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . При этом элементы  $-\infty, +\infty$  не содержатся в  $\mathbb{R}$ , для них не определены операции  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$ , определены лишь отношения порядка:  $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow -\infty < x < +\infty$  и, следовательно,  $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow -\infty \leq x \leq +\infty, -\infty < +\infty, -\infty \leq +\infty$ .

**Определение.** Пусть заданы действительные числа  $a, b, a < b$ . *Числовыми промежутками* называются следующие множества:

$$\text{интервал } (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

*отрезок*  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ ,  
*полуинтервалы*:  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ ,  
 $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ ,  
*лучи*:  $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ ,  
 $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ ,  
 $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ ,  
 $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ ,  
*точка*  $\{a\}$ ;  
*числовая прямая*  $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ .

## § 2. Точные грани множеств

**Определение.** 1) Число  $M \in \mathbb{R}$  называется *верхней гранью* множества  $A \subset \mathbb{R}$ , если число  $M$  лежит справа от множества  $A$ , т.е.  $\forall a \in A \hookrightarrow a \leq M$ .

2) Множество  $A \subset \mathbb{R}$  называется *ограниченным сверху*, если существует (конечная) верхняя грань этого множества:  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \hookrightarrow a \leq M$ .

3) Число  $m \in \mathbb{R}$  называется *нижней гранью* множества  $A \subset \mathbb{R}$ , если число  $m$  лежит слева от множества  $A$ , т.е.  $\forall a \in A \hookrightarrow a \geq m$ .

4) Множество  $A \subset \mathbb{R}$  называется *ограниченным снизу*, если существует (конечная) нижняя грань этого множества:  $\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A \hookrightarrow a \geq m$ .

Множество  $A$  называется *ограниченным*, если  $A$  ограничено сверху и ограничено снизу.

**Замечание.** Кванторы  $\forall$  и  $\exists$  в общем случае нельзя менять местами. Например, если в определении ограниченного сверху множества переставить кванторы, то получится условие  $\forall a \in A \exists M \in \mathbb{R} : a \leq M$ , справедливое для любого, в том числе и для неограниченного сверху множества.

**Замечание.** Для любых условий  $P$  и  $Q$  условие  $P \Rightarrow Q$  эквивалентно условию  $\neg Q \Rightarrow \neg P$ . Это проверяется по таблице истинности. На этом свойстве основан метод доказательства от противного.

**Замечание.** Используя предыдущее замечание, условие "число  $M$  является верхней гранью множества  $A$ " можно переписать в эквивалентной форме:

$$\forall a \hookrightarrow (a \in A \Rightarrow a \leq M) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall a \hookrightarrow (a > M \Rightarrow a \notin A).$$

Или, короче,  $\forall a > M \hookrightarrow a \notin A$ .

**Определение.** *Модулем* числа  $a$  называется число

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

**Задача 1.** Показать, что множество  $A$  ограничено тогда и только тогда, когда

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \hookrightarrow |a| \leq M.$$

**Определение.** Число  $M$  называется *максимальным* элементом множества  $A \subset \mathbb{R}$  (пишут  $M = \max A$ ), если

- 1)  $M \in A$  и
- 2)  $M$  является верхней гранью  $A$ .

Число  $m$  называется *минимальным* элементом множества  $A \subset \mathbb{R}$  (пишут  $m = \min A$ ), если

- 1)  $m \in A$  и
- 2)  $m$  является нижней гранью  $A$ .

**Замечание.** Если множество  $A \subset \mathbb{R}$  неограничено сверху, то максимальный элемент этого множества не существует, т.к. не существует конечной верхней грани этого множества. Если множество  $A \subset \mathbb{R}$  ограничено сверху, то максимальный элемент этого множества также может не существовать. Пусть, например,  $A = (-\infty, 0)$ . Пусть  $a \in A$ . Тогда  $a < 0$  и, следовательно,  $a < \frac{a}{2} < 0$ . То есть, для каждого  $a \in A$  найдется элемент  $\frac{a}{2} \in A$  такой, что  $a < \frac{a}{2}$ . Поэтому любой элемент  $a \in A$  не является верхней гранью  $A$ , а значит  $\max A$  не существует.

Аналогичное замечание справедливо для минимального элемента.

Если максимальный (минимальный) элемент множества  $A$  не существует, то вместо него будем рассматривать супремум (инфимум) множества  $A$ . Как мы увидим далее супремум (инфимум) существует для любого непустого множества. В случае существования максимального (минимального) элемента множества  $A$  супремум (инфимум) множества  $A$  совпадает с его максимальным (минимальным) элементом.

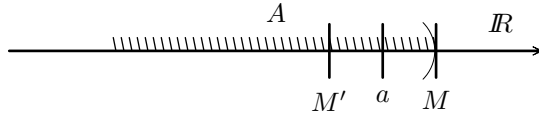
**Определение.** Число  $M \in \mathbb{R}$  называется *точной верхней гранью* или *супремумом* множества  $A \subset \mathbb{R}$  (пишут:  $M = \sup A$ ), если  $M$  является минимальной верхней гранью множества  $A$ , т.е.

- 1)  $M$  является верхней гранью множества  $A$  и
- 2) не существует числа, меньшего, чем  $M$ , и являющегося верхней гранью множества  $A$ , то есть

- 1)  $\forall a \in A \hookrightarrow a \leq M$  и
- 2)  $\neg(\exists M' \in \mathbb{R} : M' < M \text{ и } \forall a \in A \hookrightarrow a \leq M')$ .

**Замечание.** Используя правило построения отрицания выражения с кванторами, получаем, что пункт (2) определения супремума можно записать в виде

- 2)  $\forall M' < M \hookrightarrow \neg(\forall a \in A \hookrightarrow a \leq M')$   
или в положительной форме
- 2)  $\forall M' < M \exists a \in A : M' < a$ .



**Теорема 1.** Пусть множество  $A \subset \mathbb{R}$  ограничено сверху. Тогда существует единственное число  $M \in \mathbb{R}$ , которое является точной верхней гранью множества  $A$ .

**Доказательство.** Рассмотрим  $B$  – множество всех (конечных) верхних граней  $A$ . Так как множество  $A$  ограничено сверху, то  $B$  не пусто. Поскольку множество  $A$  лежит слева от множества  $B$ , то по аксиоме непрерывности  $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad \forall b \in B \hookrightarrow a \leq c \leq b$ .

Покажем, что  $c$  является точной верхней гранью  $A$ . Так как  $\forall a \in A \hookrightarrow a \leq c$ , то  $c$  является верхней гранью  $A$ , т.е.  $a \in B$ . Поскольку  $\forall b \in B \hookrightarrow c \leq b$ , то  $c$  – минимальный элемент  $B$ . Итак,  $c$  – точная верхняя грань  $A$ .

Предположим, что  $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$  – две различные точные верхние грани множества  $A$ . Тогда  $M_1, M_2$  – два различных минимальных элемента множества  $B$ . Пусть для определенности  $M_1 < M_2$ . Тогда  $M_2$  не является минимальным элементом множества  $B$ . Противоречие.  $\square$

**Определение.** Точной верхней гранью неограниченного сверху множества считается  $+\infty$ .

**Теорема 2.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}$  – непустое множество.

а) Существует единственная точная верхняя грань множества  $A$ :  $\sup A \in \overline{\mathbb{R}}$ .

б) Если множество  $A$  ограничено сверху, то  $\sup A \in \mathbb{R}$ , иначе  $\sup A = +\infty$ .

$$\text{в) } \sup A = M \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \forall a \in A \hookrightarrow a \leq M, \\ 2) \forall M' < M \exists a \in A : M' < a. \end{cases}$$

**Доказательство.** В случае, когда множество  $A$  ограничено сверху, доказываемые утверждения следуют из теоремы 1 и замечания перед этой теоремой. Пусть теперь множество  $A$  неограничено сверху. Согласно определению не существует конечной верхней грани множества  $A$ . Поэтому никакое число не является точной верхней гранью  $A$ . В этом случае единственной точной верхней гранью  $A$  является  $+\infty$ .

Обоснуем пункт (в).  $\Rightarrow$ : Пусть  $M = \sup A = +\infty$ . Тогда пункт (1) следует из неравенства  $a \leq +\infty$  для любого  $a \in \mathbb{R}$ , а пункт (2) следует из того, что множество  $A$  неограничено сверху.

$\Leftarrow$ : Из пункта (1) и неограниченности сверху множества  $A$  следует, что  $M = +\infty$ . Поэтому  $M = \sup A$ .  $\square$

Аналогично сформулируем определение точной нижней грани.

**Определение.** Число  $m \in \mathbb{R}$  называется *точной нижней гранью* или *инфимумом* множества  $A \subset \mathbb{R}$  (пишут:  $m = \inf A$ ), если  $m$  является максимальной нижней гранью  $A$ . Точной нижней гранью неограниченного снизу множества считается  $-\infty$ .

**Теорема 2'.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}$  – непустое множество.

а) Существует единственная точная нижняя грань множества  $A$ :  $\inf A \in \overline{\mathbb{R}}$ .

б) Если множество  $A$  ограничено снизу, то  $\inf A \in \mathbb{R}$ , иначе  $\inf A = -\infty$ .

$$\text{в) } \inf A = m \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \forall a \in A \hookrightarrow a \geq m, \\ 2) \forall m' > m \exists a \in A : m' > a. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 2' аналогично доказательству теоремы 2.

**Лемма 1.** а) Если существует  $\max A$ , то  $\sup A = \max A$ .

б) Если существует  $\min A$ , то  $\inf A = \min A$ .

**Доказательство.** а) Пусть  $M = \max A$ . Тогда  $M$  – верхняя грань  $A$ . Пусть  $M' < M$ . Так как  $M \in A$ , то  $M'$  не является верхней гранью  $A$ . Поэтому  $M$  – минимальная верхняя грань  $A$ .

Пункт (б) доказывается аналогично.  $\square$

**Теорема 3.** (Принцип Архимеда.) Для любого действительного числа  $x$  существует натуральное число  $n > x$ .

**Доказательство.** Предположим противное:  $\exists x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow n \leq x$ . Тогда множество  $\mathbb{N}$  ограничено сверху и по теореме 1 существует  $\sup \mathbb{N} = M \in \mathbb{R}$ . Применяя второй пункт определения супремума для  $M' = M - 1$ , получаем, что существует натуральное число  $n > M - 1$ . По определению натуральных чисел имеем, что  $n_1 = n + 1 \in \mathbb{N}$ . При этом  $n_1 > M = \sup \mathbb{N}$ , что противоречит первому пункту определения супремума.  $\square$

**Определение.** Целой частью числа  $x \in \mathbb{R}$  называется целое число  $[x]$ , лежащее в полуинтервале  $(x - 1, x]$ .

**Задача 2.** Доказать, что для любого числа  $x \in \mathbb{R}$  целая часть существует и единственна.

### § 3. Предел последовательности

**Определение.** Числовой последовательностью  $\{a_n\}$  называется функция  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $a(n) = a_n$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ . *Элемент последовательности* – это пара  $(n, a_n)$ , где  $n$  – номер элемента последовательности, а  $a_n$  – значение элемента последовательности.

**Определение.** Пусть заданы числа  $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Интервал  $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  называется  $\varepsilon$ -окрестностью числа  $a$ .

**Определение.** Число  $a \in \mathbb{R}$  называется *пределом* последовательности  $\{a_n\}$  (пишут  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  или  $a_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ ), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n \geq N \hookrightarrow a_n \in U_\varepsilon(a), \quad (1)$$

т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n \geq N \hookrightarrow |a_n - a| < \varepsilon \quad (2)$$

(здесь и далее в аналогичных выражениях, если не оговорено противное, мы подразумеваем, что  $n, N$  – натуральные числа).

Заметим, что в формулах (1), (2) для каждого  $\varepsilon > 0$  существует свое число  $N$ , то есть  $N$  зависит от  $\varepsilon$ . Чтобы подчеркнуть эту зависимость, перепишем формулу (2) в следующем виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \quad \forall n \geq N \hookrightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

**Пример.** Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

**Решение.**  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 : \forall n \geq N \hookrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ . Действительно, по определению целой части  $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ . Поэтому  $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ .  $\square$

**Пример.** Доказать, что число  $a$  является пределом последовательности  $\{a_n\}$  тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n \geq N \hookrightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

**Решение.** 1) Пусть выполнено условие (3). Поскольку  $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ , то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n \geq N \hookrightarrow |a_n - a| < \varepsilon, \quad (4)$$

т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

2) Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , т. е. выполнено условие (4). Для каждого  $\varepsilon > 0$  через  $N(\varepsilon)$  обозначим такое число, что  $\forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ . В силу условия (4) такое  $N(\varepsilon)$  существует. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{N} = N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) : \quad \forall n \geq \bar{N} \hookrightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

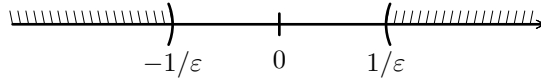
т. е. выполнено условие (3).  $\square$

**Задача 1.** Пусть задана последовательность  $\{a_n\}$  и число  $a$ . Как связано условие  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  со следующими условиями:

- а)  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow |a_n - a| \leq \varepsilon$ ;
- б)  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \hookrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ ;
- в)  $\exists N : \forall \varepsilon > 0 \forall n \geq N \hookrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ ;
- г)  $\forall \varepsilon > 0 \exists n : |a_n - a| < \varepsilon$ ;
- д)  $\forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$ ?

**Определение.** Пусть задано число  $\varepsilon > 0$ .  $\varepsilon$ -окрестностями бесконечностей называются соответственно множества

$$U_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad U_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right).$$



Дадим общее определение предела последовательности, справедливое как в случае конечного, так и в случае бесконечного предела.

**Определение.** Элемент  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  называется *пределом* последовательности  $\{a_n\}$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n \geq N \hookrightarrow a_n \in U_\varepsilon(a).$$

**Лемма 1.** Пусть  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  и  $a < b$ . Тогда существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что  $\forall x \in U_\varepsilon(a) \quad \forall y \in U_\varepsilon(b) \hookrightarrow x < y$ , а значит, окрестности  $U_\varepsilon(a)$  и  $U_\varepsilon(b)$  не пересекаются.

**Доказательство.** Возможны четыре случая:

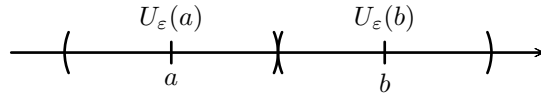
- 1)  $-\infty < a < b < +\infty$ ;
- 2)  $-\infty < a < b = +\infty$ ;
- 3)  $-\infty = a < b < +\infty$ ;
- 4)  $-\infty = a < b = +\infty$ .

В случае (1) положим  $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ , в случае (2):  $\varepsilon = \frac{1}{|a|+1}$ , в случае (3):  $\varepsilon = \frac{1}{|b|+1}$ , в случае (4):  $\varepsilon = 1$ .

Пусть  $x \in U_\varepsilon(a)$ ,  $y \in U_\varepsilon(b)$ . Покажем, что в каждом из четырех случаев  $x < y$ . Отсюда следует, что окрестности  $U_\varepsilon(a)$  и  $U_\varepsilon(b)$  не пересекаются.

- 1)  $x < a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} = b - \varepsilon < y$ ;
- 2)  $x < a + \varepsilon \leq a + 1 \leq |a| + 1 = \frac{1}{\varepsilon} < y$ .

Случаи (3) и (4) рассмотреть самостоятельно. □



**Теорема 1.** (Единственность предела.) Числовая последовательность не может иметь более одного предела из  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Доказательство.** Предположим противное: последовательность  $\{a_n\}$  имеет пределы  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $a \neq b$ . По лемме 1  $\exists \varepsilon > 0$  :

$U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ . По определению предела  $\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \hookrightarrow a_n \in U_\varepsilon(a)$ ,  $\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \hookrightarrow a_n \in U_\varepsilon(b)$ . При  $n \geq \max\{N_1, N_2\}$  получаем  $a_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)$  – противоречие.  $\square$

**Задача 2.** Доказать, что последовательность  $\{a_n\}$ , где

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ чётно,} \\ 1, & \text{если } n \text{ нечётно} \end{cases}$$

не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

**Определение.** Последовательность  $\{a_n\}$  называется *ограниченной (сверху, снизу)*, если ограничено (соответственно сверху, снизу) множество значений ее элементов.

В частности,

$$\begin{aligned} \{a_n\} & \text{ – ограничена} \iff \\ \iff \exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in \{a_1, a_2, \dots\} \hookrightarrow |a| \leq M & \iff \\ \iff \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |a_n| \leq M. & \end{aligned}$$

**Определение.** Если последовательность имеет конечный предел, то она называется *сходящейся*. Если последовательность не имеет предела или имеет бесконечный предел, то она называется *расходящейся*.

**Теорема 2.** Сходящаяся последовательность ограничена.

**Доказательство.** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ . Возьмем  $\varepsilon = 1$ . По определению предела  $\exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow a_n \in (a - 1, a + 1)$ . Следовательно, при  $n \geq N$  справедливо неравенство

$$-|a| - 1 \leq a - 1 < a_n < a + 1 \leq |a| + 1,$$

а значит,  $\forall n \geq N \hookrightarrow |a_n| < |a| + 1$ .

Определим  $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}$  (максимум существует, так как множество конечно). Тогда при  $n < N$  по определению максимума  $|a_n| \leq M$ . При  $n \geq N$  имеем  $|a_n| < |a| + 1 \leq M$ . Итак,  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |a_n| \leq M$ , т. е. последовательность  $\{a_n\}$  ограничена.  $\square$

**Определение.** Последовательность  $\{a_n\}$  называется *бесконечно большой*, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$ , т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n \geq N \hookrightarrow |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ т. е.}$$

$$\forall M > 0 \quad \exists N : \quad \forall n \geq N \hookrightarrow |a_n| > M.$$

**Задача 3.** Как связаны следующие два условия?

- а) Последовательность  $\{a_n\}$  – бесконечно большая.
- б) Последовательность  $\{a_n\}$  – неограничена.

**Задача 4.** Пусть  $\{a_n\}$  – бесконечно большая последовательность. Верно ли, что должно выполняться одно из условий:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ?

## § 4. Свойства пределов последовательностей, связанные с арифметическими действиями

**Лемма 1.** а)  $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$  (неравенство треугольника).

$$\text{б) } \forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

**Доказательство.** а) Рассмотрим сначала случай, когда  $a + b \geq 0$ . Тогда по определению модуля  $|a + b| = a + b$ . Из определения модуля следует также, что  $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow x \leq |x|$ . Поэтому  $a \leq |a|$ ,  $b \leq |b|$ , следовательно,  $|a + b| = a + b \leq |a| + |b|$ .

В случае  $a + b < 0$  имеем  $|a + b| = -a - b$ . Так как  $-a \leq |a|$ ,  $-b \leq |b|$ , то  $|a + b| = -a - b \leq |a| + |b|$ . Поэтому  $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$ .

б) Используя неравенство треугольника, для любых  $a, b \in \mathbb{R}$  получаем  $|a| - |b| = |a - b + b| - |b| \leq |a - b| + |b| - |b| = |a - b|$ , т. е.  $|a| - |b| \leq |a - b|$ . Аналогично,  $|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$ . Поэтому  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ .  $\square$

**Определение.** Последовательность  $\{b_n\}$  называется *бесконечно малой*, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n \geq N \hookrightarrow |b_n| < \varepsilon.$$

В данном параграфе мы будем рассматривать лишь конечные пределы последовательностей.

Непосредственно из определения предела последовательности следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  тогда и только тогда, когда последовательность  $\{a_n - a\}$  является бесконечно малой. Используя это обстоятельство, из свойств бесконечно малых последовательностей мы получим свойства пределов последовательностей, связанные с арифметическими действиями.

**Лемма 2.** Если  $\{a_n\}, \{b_n\}$  – бесконечно малые последовательности, то  $\{a_n + b_n\}$  и  $\{a_n - b_n\}$  – бесконечно малые последовательности.

**Доказательство.** Поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 : \quad \forall n \geq N_1 \hookrightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 : \quad \forall n \geq N_2 \hookrightarrow |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(см. второй пример в § 3). Отсюда, используя неравенство треугольника  $|a_n \pm b_n| \leq |a_n| + |b_n|$ , получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = \max\{N_1, N_2\} : \quad \forall n \geq N \hookrightarrow |a_n \pm b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = 0$ . □

**Теорема 1.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , то  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$  и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$ .

**Доказательство.** 1) Так как последовательности  $\{a_n - a\}$  и  $\{b_n - b\}$  являются бесконечно малыми, то в силу леммы 2 последовательности  $\{a_n + b_n - (a + b)\} = \{(a_n - a) + (b_n - b)\}$  и  $\{a_n - b_n - (a - b)\} = \{(a_n - a) - (b_n - b)\}$  являются бесконечно малыми, т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b, \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$ . □

**Теорема 2.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , то  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ .

**Доказательство.** В силу леммы 1(б) имеем  $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ . Отсюда и из условия  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  в силу определения предела получаем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ . □

**Лемма 3.** Если  $\{a_n\}$  – ограниченная последовательность, а  $\{b_n\}$  – бесконечно малая последовательность, то  $\{a_n b_n\}$  – бесконечно малая последовательность.

**Доказательство.** Поскольку последовательность  $\{a_n\}$  ограничена, то

$$\exists M > 0 : \quad \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |a_n| \leq M.$$

Так как последовательность  $\{b_n\}$  является бесконечно малой, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |b_n| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{N} = N\left(\frac{\varepsilon}{M}\right) : \quad \forall n \geq \bar{N} \hookrightarrow |a_n b_n| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Поэтому последовательность  $\{a_n b_n\}$  является бесконечно малой.  $\square$

**Теорема 3.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$ .

**Доказательство.** Требуется доказать, что последовательность  $\{a_n b_n - ab\}$  является бесконечно малой. Заметим, что  $a_n b_n - ab = a_n(b_n - b) + (a_n - a)b$ . Так как последовательность  $\{a_n\}$  сходится, то по теореме 2 § 3 она ограничена. В силу леммы 3 последовательности  $\{a_n(b_n - b)\}$  и  $\{(a_n - a)b\}$  – бесконечно малые, следовательно, по лемме 2 последовательность  $\{a_n b_n - ab\}$  также является бесконечно малой.  $\square$

**Лемма 4.** Если  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \neq 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$ .

**Доказательство.** В силу теоремы 2  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a| > 0$ . Отсюда, положив в определении предела последовательности  $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ , получаем, что  $\exists N : \quad \forall n \geq N \hookrightarrow |a_n| > |a| - \varepsilon = \frac{|a|}{2}$ , т.е.  $\forall n \geq N \hookrightarrow \left| \frac{1}{a_n} \right| < \frac{2}{|a|}$ . Определим число  $M = \max \left\{ \frac{1}{|a_1|}, \dots, \frac{1}{|a_{N-1}|}, \frac{2}{|a|} \right\}$ . Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left| \frac{1}{a_n} \right| \leq M$ , т.е. последовательность  $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$  ограничена. Следовательно, последовательность  $\left\{ \frac{1}{a_n a} \right\}$  также ограничена.

Отсюда и из леммы 3 следует, что последовательность  $\left\{ \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right\} = \left\{ \frac{1}{a_n a} (a - a_n) \right\}$  является бесконечно малой, т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$ .  $\square$

**Теорема 4.** Если  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{b}{a}$ .

**Доказательство.** В силу леммы 4  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$ . Поэтому, согласно теореме 3,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \frac{1}{a_n} = b \frac{1}{a} = \frac{b}{a}$ .  $\square$

**Задача 1.** Пусть последовательности  $\{a_n + b_n\}$  и  $\{a_n b_n\}$  сходятся. Верно ли, что последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  сходятся?

**Задача 2.** Пусть  $\forall n \hookrightarrow b_n \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = y \geq 0$ . Верно ли, что последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  сходятся?

## § 5. Переход к пределу в неравенствах

Напомним, что расширенной числовой прямой называется множество  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ , где  $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $A < B$ . Тогда  $\exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow a_n < b_n$ .

**Доказательство.** По лемме 1 § 3 существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что  $\forall x \in U_\varepsilon(A) \forall y \in U_\varepsilon(B) \hookrightarrow x < y$ . По определению предела  $\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \hookrightarrow a_n \in U_\varepsilon(A)$ ,  $\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \hookrightarrow b_n \in U_\varepsilon(B)$ . Определив  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , получаем требуемое утверждение.  $\square$

**Теорема 2.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ ,  $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$  и  $\exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow a_n \leq b_n$ , то  $A \leq B$ .

**Доказательство.** Предположим противное:  $A > B$ . По теореме 1  $\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \hookrightarrow b_n < a_n$ . При  $n \geq \max\{N, N_1\}$  получаем противоречие с условием  $a_n \leq b_n$ .  $\square$

**Следствие.** Если  $\exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow a_n \leq B$ ,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ,  $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $A \leq B$ .

**Доказательство.** Если  $B \in \mathbb{R}$ , то определим  $\{b_n\} = \{B\}$  и, применяя теорему 2, получаем неравенство  $A \leq B$ . Если  $B = +\infty$ , неравенство  $A \leq B$  также выполнено. Случай  $B = -\infty$  не реализуется, т.к.  $\forall n \geq N \hookrightarrow a_n \leq B$ .  $\square$

**Замечание.** Из условий  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n < b_n, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$  не следует, что  $A < B$ .

Например,  $a_n = 0, b_n = \frac{1}{n}, A = B = 0$ .

**Теорема 3.** (О трех последовательностях.) Если  $\exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow a_n \leq b_n \leq c_n, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A \in \mathbb{R}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$ .

**Доказательство.** По определению предела для любого  $\varepsilon > 0$

$$\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \hookrightarrow a_n \in U_\varepsilon(A),$$

$$\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \hookrightarrow c_n \in U_\varepsilon(A).$$

Обозначим  $\bar{N} = \max\{N, N_1, N_2\}$ . Тогда при  $n \geq \bar{N}$  имеем  $A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon$ , следовательно,  $b_n \in U_\varepsilon(A)$ . Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{N} : \forall n \geq \bar{N} \hookrightarrow b_n \in U_\varepsilon(A),$$

т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$ . □

**Теорема 4.** Пусть  $\exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow a_n \leq b_n$ . Тогда

- 1) если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ ;
- 2) если  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

**Доказательство.** 1) По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \hookrightarrow a_n \in U_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$$

(т. е.  $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$ ), но тогда  $b_n \geq a_n > \frac{1}{\varepsilon}$  при  $n \geq \max\{N, N_1\}$ . Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 = \max\{N, N_1\} : \forall n \geq N_2 \hookrightarrow b_n \in U_\varepsilon(+\infty),$$

а значит,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ .

Доказательство пункта (2) аналогично. □

## § 6. Монотонные последовательности

**Определение.** Последовательность  $\{a_n\}$  называется *нестрого возрастающей* или *неубывающей*, если

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \leq a_{n+1};$$

$\{a_n\}$  – нестрого убывающая или невозрастающая, если

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \geq a_{n+1};$$

если в этих определениях нестрогие неравенства заменить на строгие, то получим определения строго возрастающей и строго убывающей последовательностей;

$\{a_n\}$  – *монотонная*, если она является нестрого возрастающей или нестрого убывающей.

**Теорема 1.** (Вейерштрасс.) 1) Если последовательность  $\{a_n\}$  нестрого возрастает, то существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n\}$ .

2) Если последовательность  $\{a_n\}$  нестрого убывает, то существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n\}$ .

**Доказательство.** 1) Пусть последовательность  $\{a_n\}$  нестрого возрастает. Рассмотрим сначала случай, когда эта последовательность ограничена сверху. В силу теоремы 1 § 2 существует  $a = \sup\{a_n\} \in \mathbb{R}$ . Покажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . В силу второго пункта определения супремума  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : a_N > a - \varepsilon$ . Отсюда в силу возрастания последовательности  $\{a_n\}$  имеем  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow a_n \geq a_N > a - \varepsilon$ . В силу первого пункта определения супремума  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \leq a$ . Поэтому  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow a_n \in U_\varepsilon(a)$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

Рассмотрим теперь случай, когда последовательность  $\{a_n\}$  неограничена сверху. Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : a_N > \frac{1}{\varepsilon}$ . Отсюда в силу возрастания последовательности  $\{a_n\}$  имеем  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow a_n \geq a_N > \frac{1}{\varepsilon}$ , т. е.  $a_n \in U_\varepsilon(+\infty)$ , а значит,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

Доказательство пункта (2) аналогично. □

**Следствие.** Любая монотонная последовательность имеет конечный или бесконечный предел. Если  $\{a_n\}$  – возрастающая и ограниченная сверху последовательность или убывающая и ограниченная снизу последовательность, то предел  $\{a_n\}$  конечен.

## § 7. Неравенство Бернулли и число $e$

**Определение.** Если  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , то  $x^n = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ раз}}$ .

**Лемма 1.**  $\forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}$  справедливо *неравенство Бернулли*:  
 $(1+x)^n \geq 1+nx$ .

**Доказательство** проведем по индукции. При  $n=1$  неравенство Бернулли справедливо. Пусть оно справедливо при  $n=k$ . Тогда  $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x + kx^2 \geq 1+(k+1)x$ , т.е. неравенство Бернулли справедливо при  $n=k+1$ .  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $a > 1$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$ .

**Доказательство.** Обозначим  $x = a - 1$ . Тогда  $a^n = (1+x)^n \geq 1+nx \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , что по теореме о предельном переходе в неравенствах (теорема 4 § 5) дает требуемое утверждение.  $\square$

**Теорема 1.** Последовательность  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$  сходится.

**Доказательство.** Заметим, что  $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \geq 1$ , т.е.  $\{x_n\}$  – ограничена снизу. Так как

$$\begin{aligned} \frac{x_{n-1}}{x_n} &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} \geq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \frac{n-1}{n} = 1, \end{aligned}$$

то  $\{x_n\}$  убывает. В силу теоремы о сходимости ограниченной снизу убывающей последовательности  $\{x_n\}$  сходится.  $\square$

**Определение.**  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ .

**Пример.** Доказать равенство:  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ .

**Решение.** Применяя теоремы о свойствах пределов, связанных с арифметическими действиями, получаем  $(1 + \frac{1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} / (1 + \frac{1}{n}) \rightarrow e$  при  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

## § 8. Принцип вложенных отрезков

**Определение.** Последовательность отрезков  $\{[a_n, b_n]\}$  называется *последовательностью вложенных отрезков*, если

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$



**Теорема 1.** (Принцип Кантора.) Последовательность вложенных отрезков имеет общую точку.

**Доказательство.** Пусть  $\{[a_n, b_n]\}$  – последовательность вложенных отрезков. Из включения (1) следует, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n. \quad (2)$$

Рассмотрим множество левых концов отрезков  $[a_n, b_n]$ :  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$  и множество правых концов этих отрезков:  $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ . Покажем, что

$$\forall a \in A \forall b \in B \hookrightarrow a \leq b. \quad (3)$$

Пусть  $a \in A$ ,  $b \in B$ . Тогда  $\exists k \in \mathbb{N} : a = a_k$  и  $\exists m \in \mathbb{N} : b = b_m$ . Из (2) следует, что при  $k \leq m$  справедливы неравенства  $a_k \leq a_m < b_m$ , а при  $k > m$  – неравенства  $a_k < b_k \leq b_m$ . В любом случае имеем  $a_k \leq b_m$ , т. е. справедливо соотношение (3). В силу аксиомы непрерывности действительных чисел  $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad \forall b \in B \hookrightarrow a \leq c \leq b$ . Следовательно,  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow c \in [a_n, b_n]$ , т. е.  $c$  – общая точка отрезков  $[a_n, b_n]$ .  $\square$

**Задача 1.** Доказать, что если аксиому непрерывности заменить двумя аксиомами: принципом Кантора и принципом Архимеда, то получится эквивалентное определение множества действительных чисел.

**Определение.** Последовательность вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}$  называется *стягивающейся*, если  $b_n - a_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Теорема 2.** Стягивающаяся последовательность вложенных отрезков имеет единственную общую точку.

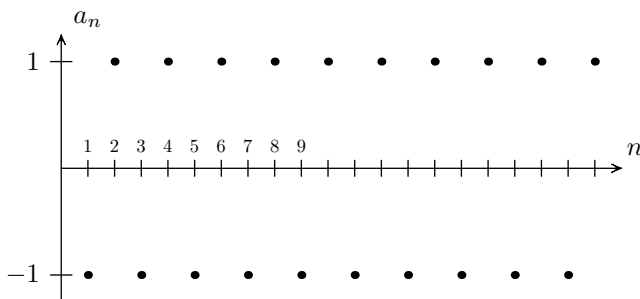
**Доказательство.** По теореме 1 общая точка существует. Пусть  $x, y$  – общие точки стягивающейся последовательности вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}$ . Так как  $|y - x| \leq b_n - a_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то по теореме о предельном переходе в неравенствах  $|y - x| \leq 0$ , т. е.  $|y - x| = 0$ ,  $y = x$ .  $\square$

## § 9. Частичный предел последовательности

**Определение.** Последовательность  $\{b_k\}$  называется *подпоследовательностью* последовательности  $\{a_n\}$ , если существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел  $\{n_k\}$ :  $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow b_k = a_{n_k}$ .

**Пример.** Пусть задана последовательность  $\{a_n\}$ . Последовательность  $\{a_{2k}\}$ , составленная из элементов  $\{a_n\}$  с четными номерами, является подпоследовательностью последовательности  $\{a_n\}$ . Действительно, для любого  $k \in \mathbb{N}$  определим  $n_k = 2k$ . Тогда  $\{n_k\}$  — строго возрастающая последовательность натуральных чисел и  $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_{2k} = a_{n_k}$ .

**Определение.** Если последовательность  $\{b_k\}$  является подпоследовательностью  $\{a_n\}$  и  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = A \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $A$  называется *частичным пределом* последовательности  $\{a_n\}$ .



**Пример.** Рассмотрим последовательность  $\{a_n\}$ , где  $a_n = (-1)^n$ . Последовательности  $\{b_k\} = \{a_{2k}\}$  и  $\{c_k\} = \{a_{2k-1}\}$  являются подпоследовательностями  $\{a_n\}$ . Так как  $b_k = 1$ ,  $c_k = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 1$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = -1$ . Следовательно, числа 1 и  $-1$  являются частичными пределами  $\{a_n\}$ .  $\square$

**Теорема 1.** (Критерий частичного предела.) Для любой последовательности  $\{a_n\}$  и любого  $A \in \overline{\mathbb{R}}$  следующие условия эквивалентны:

(1)  $A$  является частичным пределом последовательности  $\{a_n\}$ ;  
 (2) для любого  $\varepsilon > 0$  в  $U_\varepsilon(A)$  содержатся значения бесконечного набора элементов  $\{a_n\}$ ;

(3)  $\forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N : a_n \in U_\varepsilon(A)$ .

**Доказательство.** (1)  $\Rightarrow$  (2). Пусть  $A$  является частичным пределом последовательности  $\{a_n\}$ . Тогда существует подпоследовательность  $\{a_{n_k}\}$  такая, что  $A = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ , т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K_\varepsilon : \forall k \geq K_\varepsilon \hookrightarrow a_{n_k} \in U_\varepsilon(A).$$

Поэтому для любого  $\varepsilon > 0$  в  $U_\varepsilon(A)$  содержатся значения бесконечного набора элементов  $\{a_n\}$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3). Зафиксируем произвольные  $\varepsilon > 0$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Так как выполнено условие (2), то в  $U_\varepsilon(A)$  содержатся значения бесконечного набора элементов  $\{a_n\}$ , среди которых найдется элемент с номером  $n \geq N$ . Иначе в  $U_\varepsilon(A)$  будут содержаться лишь элементы с номерами  $n < N$ , а таких элементов конечное число. Следовательно, выполнено условие (3).

(3)  $\Rightarrow$  (1). Пусть выполнено условие (3):

$$\forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n = n(\varepsilon, N) \geq N : a_n \in U_\varepsilon(A).$$

Построим строго возрастающую последовательность  $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$  такую, что  $A = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ . Определим  $n_1 = n(1, 1)$ . Пусть на некотором шаге  $k - 1 \in \mathbb{N}$  определено значение  $n_{k-1} \in \mathbb{N}$ . Определим

$$n_k = n\left(\frac{1}{k}, 1 + n_{k-1}\right),$$

т. е.  $n_k = n(\varepsilon, N)$ , где  $\varepsilon = \frac{1}{k}$ ,  $N = 1 + n_{k-1}$ . Тогда  $n_k \geq 1 + n_{k-1} > n_{k-1}$  и  $a_{n_k} \in U_{1/k}(A)$ . По индукции получаем, что определена последовательность  $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$  такая, что  $\forall k \geq 2 \hookrightarrow n_k > n_{k-1}$  и  $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_{n_k} \in U_{1/k}(A)$ . Поэтому последовательность  $\{n_k\}$  строго возрастает и  $A = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ . Следовательно, выполнено условие (1).  $\square$

**Теорема 2.** (Теорема Больцано–Вейерштрасса.) Ограниченная последовательность имеет хотя бы один конечный частичный предел.

**Доказательство.** Пусть последовательность  $\{x_n\}$  ограничена, т. е.  $\exists a_0, b_0 : \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in [a_0, b_0]$ . Определим  $c_0 = (a_0 + b_0)/2$ . Если в отрезке  $[a_0, c_0]$  содержатся значения бесконечного набора членов  $\{x_n\}$ , то определим  $[a_1, b_1] = [a_0, c_0]$ . В противном случае в отрезке  $[c_0, b_0]$  содержатся значения бесконечного набора членов  $\{x_n\}$ , тогда определим  $[a_1, b_1] = [c_0, b_0]$ .

Пусть определен отрезок  $[a_k, b_k]$ , в котором содержатся значения бесконечного набора членов последовательности  $\{x_n\}$ . Обозначим  $c_k = (a_k + b_k)/2$ . Если в отрезке  $[a_k, c_k]$  содержатся значения бесконечного набора членов  $\{x_n\}$ , то определим  $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, c_k]$ . В противном случае определим  $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [c_k, b_k]$ . Так как этот процесс не может оборваться, мы получаем последовательность вложенных отрезков, которая по теореме Кантора имеет общую точку  $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k]$ .

Поскольку  $b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $k \in \mathbb{N}$ :  $b_k - a_k < \varepsilon$ . Отсюда и из включения  $x \in [a_k, b_k]$  получаем, что  $[a_k, b_k] \subset U_\varepsilon(x)$ . Итак,  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k : [a_k, b_k] \subset U_\varepsilon(x)$ . Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  в  $U_\varepsilon(x)$  содержатся значения бесконечного набора элементов  $\{x_n\}$ . В силу теоремы 1 число  $x$  является частичным пределом  $\{x_n\}$ .  $\square$

**Лемма 1.** Если  $\{x_n\}$  неограничена снизу, то  $-\infty$  является ее частичным пределом; если  $\{x_n\}$  неограничена сверху, то  $+\infty$  является ее частичным пределом (при этом могут быть и другие частичные пределы).

**Доказательство.** Пусть  $\{x_n\}$  неограничена сверху. Тогда для любого  $N \in \mathbb{N}$  множество  $\{x_n : n \geq N\}$  неограничено сверху. Поэтому  $\forall \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n \geq N : x_n > \frac{1}{\varepsilon}$ , т. е.  $x_n \in U_\varepsilon(+\infty)$ . Применяя теорему 1, получаем, что  $+\infty$  является частичным пределом  $\{x_n\}$ . Случай, когда  $\{x_n\}$  неограничена снизу, рассматривается аналогично.  $\square$

**Теорема 3.** (Обобщенная теорема Больцано–Вейерштрасса.) Любая числовая последовательность имеет конечный или бесконечный частичный предел.

**Доказательство** состоит в применении теоремы 2 и леммы 1.

**Теорема 4.** Для любой последовательности  $\{a_n\}$  и любого  $A \in \overline{\mathbb{R}}$  следующие условия эквивалентны:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A;$$

(2)  $A$  является единственным частичным пределом  $\{a_n\}$ .

**Доказательство.** (1)  $\Rightarrow$  (2). Пусть  $\{a_{n_k}\}$  – произвольная подпоследовательность  $\{a_n\}$ . Условие (1) означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow a_n \in U_\varepsilon(A).$$

Так как  $\{n_k\}$  – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то по индукции получаем, что  $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow n_k \geq k$ . Следовательно, при  $k \geq N$  справедливы неравенства  $n_k \geq k \geq N$ . Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k \geq N \hookrightarrow a_{n_k} \in U_\varepsilon(A).$$

Итак, из условия (1) следует, что для любой подпоследовательности  $\{a_{n_k}\}$  справедливо соотношение  $A = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ . Поэтому  $A$  является единственным частичным пределом  $\{a_n\}$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1). Предположим противное: условие (2) выполнено, а условие (1) не выполнено, т. е. существует  $\varepsilon > 0$ :

$$\forall N \exists n \geq N : a_n \notin U_\varepsilon(A). \quad (1)$$

Построим подпоследовательность  $\{a_{n_k}\}$  такую, что

$$\forall k \hookrightarrow a_{n_k} \notin U_\varepsilon(A). \quad (2)$$

Из соотношения (1) следует существование числа  $n_1 \in \mathbb{N}$  такого, что  $a_{n_1} \notin U_\varepsilon(A)$ . Пусть на некотором шаге  $k-1 \in \mathbb{N}$  определено значение  $n_{k-1} \in \mathbb{N}$ . Тогда в силу соотношения (1) существует натуральное число  $n_k \geq 1 + n_{k-1}$  такое, что  $a_{n_k} \notin U_\varepsilon(A)$ . Таким образом, построена подпоследовательность  $\{a_{n_k}\}$ , удовлетворяющая соотношению (2). В силу обобщенной теоремы Больцано–Вейерштрасса последовательность  $\{a_{n_k}\}$  имеет частичный предел  $B \in \overline{\mathbb{R}}$ . При этом в силу соотношения (2)  $B \neq A$ . Поскольку подпоследовательность последовательности  $\{a_{n_k}\}$  является подпоследовательностью последовательности  $\{a_n\}$ , то  $B$  является частичным пределом  $\{a_n\}$ , отличным от  $A$ , что противоречит условию (2).  $\square$

Определим точные грани подмножества расширенной числовой прямой  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Определение.** Пусть заданы множество  $L \subset \overline{\mathbb{R}}$  и элементы  $m \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $M \in \overline{\mathbb{R}}$ . Тогда

$$m = \inf L \stackrel{\text{опр.}}{\iff} \begin{cases} \forall x \in L \hookrightarrow m \leq x, \\ \forall m' \in \overline{\mathbb{R}} : m' > m \exists x \in L : m' > x. \end{cases}$$

$$M = \sup L \stackrel{\text{опр.}}{\iff} \begin{cases} \forall x \in L \hookrightarrow M \geq x, \\ \forall M' \in \overline{\mathbb{R}} : M' < M \exists x \in L : M' < x. \end{cases}$$

**Определение.** Пусть  $L \subset \overline{\mathbb{R}}$  – множество всех конечных и бесконечных (со знаком) частичных пределов последовательности  $\{x_n\}$ . Тогда *нижним* и *верхним пределами* последовательности  $\{x_n\}$  называются соответственно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf L, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup L.$$

**Лемма 2.** Верхний и нижний пределы последовательности являются ее частичными пределами.

**Доказательство.** Пусть  $L \subset \overline{\mathbb{R}}$  – множество всех частичных пределов последовательности  $\{x_n\}$ . Обозначим  $M = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Зафиксируем произвольное число  $\varepsilon > 0$ . По определению супремума существует  $x \in L$ ,  $x \in U_\varepsilon(M)$ . Выберем число  $\varepsilon' > 0$  так, что  $U_{\varepsilon'}(x) \subset U_\varepsilon(M)$ . В случае  $M \in \mathbb{R}$  можно взять  $\varepsilon' = \varepsilon - |M - x|$ . В случае  $M = +\infty$ ,  $x \in \mathbb{R}$  можно взять  $\varepsilon' = x - \frac{1}{\varepsilon}$ . В случае  $x = M = +\infty$  можно взять  $\varepsilon' = \varepsilon$ . Так как  $x \in L$ , то по критерию частичного предела  $U_{\varepsilon'}(x)$  содержит значения бесконечного набора элементов  $\{x_n\}$ . Отсюда и из включения  $U_{\varepsilon'}(x) \subset U_\varepsilon(M)$  получаем, что  $U_\varepsilon(M)$  содержит значения бесконечного набора элементов  $\{x_n\}$ . Снова применяя критерий частичного предела получаем, что  $M$  – частичный предел  $\{x_n\}$ . Аналогично,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  – частичный предел  $\{x_n\}$ .  $\square$

**Задача 1.** Доказать, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = A \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ .

## § 10. Критерий Коши

**Определение.** Будем говорить, что последовательность  $\{x_n\}$  – *фундаментальна* или *удовлетворяет условию Коши*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \forall m \geq N \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

**Лемма 1.** Сходящаяся последовательность фундаментальна.

**Доказательство.** Пусть  $\{x_n\}$  – сходится к числу  $x$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow |x_n - x| < \varepsilon/2$$

и, следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \forall m \geq N \hookrightarrow$$

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad \square$$

**Лемма 2.** Фундаментальная последовательность ограничена.

**Доказательство.** Пусть  $\{x_n\}$  – фундаментальна. Возьмем  $\varepsilon = 1$ , тогда  $\exists N : \forall n \geq N \forall m \geq N \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$ , следовательно,  $\forall n \geq N \hookrightarrow |x_N - x_n| < 1$ . Определим  $M = \max\{|x_1|, \dots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}$ . Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |x_n| \leq M. \quad \square$

**Теорема 1.** (Критерий Коши.)

$\{x_n\}$  – сходится  $\iff \{x_n\}$  – фундаментальна.

**Доказательство.** Если  $\{x_n\}$  сходится, то по лемме 1 она фундаментальна. Пусть  $\{x_n\}$  – фундаментальна. По лемме 2  $\{x_n\}$  – ограничена, следовательно, по теореме Больцано–Вейерштрасса существует  $x \in \mathbb{R}$  – частичный предел  $\{x_n\}$ . Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

Пусть задано любое  $\varepsilon > 0$ . Из фундаментальности  $\{x_n\}$  следует существование номера  $N$  такого, что

$$\forall n \geq N \forall m \geq N \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon/2.$$

В силу критерия частичного предела (теоремы 1 § 9) найдется номер  $m \geq N$  такой, что  $|x - x_m| < \varepsilon/2$ . Следовательно,

$$\forall n \geq N \hookrightarrow |x_n - x| \leq |x_n - x_m| + |x_m - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Поэтому последовательность  $\{x_n\}$  сходится к  $x$ .  $\square$

**Задача 1.** Доказать, что если аксиому непрерывности заменить двумя аксиомами: критерием Коши и принципом Архимеда, то получится эквивалентное определение множества действительных чисел.

**Пример.** Как связаны два условия:

а) последовательность  $\{x_n\}$  сходится;

б)  $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in \mathbb{R} \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$ ?

**Решение.** Распишем условие (а):

$$(a) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R} : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Так как  $\exists x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \dots \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x \in \mathbb{R} \dots$ , то из условия (а) следует условие (б).

На первый взгляд кажется, что из условия (б) не следует условие (а). Однако с помощью критерия Коши можно показать, что (б)  $\Rightarrow$  (а).

Пусть выполнено условие (б). Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in \mathbb{R} \exists N : \forall n \geq N \forall m \geq N \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow |x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < 2\varepsilon.$$

Поэтому последовательность  $\{x_n\}$  фундаментальна. В силу критерия Коши  $\{x_n\}$  сходится, т. е. выполняется условие (а).  $\square$

## § 11. Открытые и замкнутые числовые множества

**Определение.** Пусть задано множество  $X \subset \mathbb{R}$ . Точка  $x \in \mathbb{R}$  называется *внутренней точкой* множества  $X$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad U_\varepsilon(x) \subset X.$$

*Внутренностью* множества  $X$  называется множество  $\text{int } X$ , состоящее из всех внутренних точек множества  $X$ .

Так как  $x \in U_\varepsilon(x)$  для любого  $\varepsilon > 0$ , то  $\text{int } X \subset X$  для любого множества  $X$ .

**Определение.** Множество  $X$  называется *открытым*, если все его точки внутренние, т. е.  $X \subset \text{int } X$ .

Пустое множество  $\emptyset$  по определению считается открытым.

Так как для любого множества  $X$  справедливо включение  $\text{int } X \subset X$ , то равенство  $X = \text{int } X$  выполняется тогда и только тогда, когда множество  $X$  открыто.

**Лемма 1.** Пусть заданы числа  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Множества  $(a, b)$ ,  $(-\infty, b)$ ,  $(a, +\infty)$ ,  $(-\infty, +\infty)$  – открыты, а множества  $[a, b]$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $[a, +\infty)$  не являются открытыми.

**Доказательство.** Покажем, что интервал  $(a, b)$  является открытым множеством. Для этого требуется показать, что любая точка  $x \in (a, b)$  – внутренняя, т. е.  $\forall x \in (a, b) \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset (a, b)$ . Данное условие выполняется: можно взять, например,  $\varepsilon = \min\{x - a, b - x\}$ .

Открытость множеств  $(-\infty, b)$ ,  $(a, +\infty)$ ,  $(-\infty, +\infty)$  доказать самостоятельно.

Покажем, что полуинтервал  $(a, b]$  не является открытым множеством. Это следует из того, что точка  $b$  содержится во множестве  $(a, b]$ , но не является внутренней точкой этого множества, так как не существует числа  $\varepsilon > 0$  такого, что  $U_\varepsilon(b) \subset (a, b]$ .

Самостоятельно доказать, что множества  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $[a, +\infty)$  также не являются открытыми.  $\square$

**Задача 1.** а) Доказать, что если  $X \subset Y$ , то  $\text{int } X \subset \text{int } Y$ .

б) Доказать, что пересечение конечного набора открытых множеств является открытым множеством.

в) Доказать, что объединение любого набора открытых множеств открыто.

г) Привести пример набора открытых множеств, пересечение которых не является открытым.

**Определение.** Пусть задано множество  $X \subset \mathbb{R}$ . Точка  $x \in \mathbb{R}$  называется *точкой прикосновения* множества  $X$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(x) \cap X \neq \emptyset.$$

*Замыканием* множества  $X$  называется множество  $\overline{X}$ , состоящее из всех точек прикосновения множества  $X$ .

Так как  $x \in U_\varepsilon(x)$  для любого  $\varepsilon > 0$ , то  $X \subset \overline{X}$  для любого множества  $X$ .

**Определение.** Множество  $X$  называется *замкнутым*, если любая точка прикосновения  $X$  содержится в  $X$ , т. е.  $\overline{X} \subset X$ .

Так как для любого множества  $X$  справедливо включение  $X \subset \overline{X}$ , то равенство  $X = \overline{X}$  выполняется тогда и только тогда, когда множество  $X$  замкнуто.

**Лемма 2.** Пусть заданы числа  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Множества  $[a, b]$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $[a, +\infty)$ ,  $(-\infty, +\infty)$  – замкнуты, а множества  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(-\infty, b)$ ,  $(a, +\infty)$  не являются замкнутыми.

**Доказательство.** Покажем, что отрезок  $[a, b]$  является замкнутым множеством, т. е.  $\overline{[a, b]} \subset [a, b]$ . Предположим противное: существует точка  $x \in \overline{[a, b]}$  такая, что  $x \notin [a, b]$ . Так как  $x \notin [a, b]$ , то либо  $x < a$ , либо  $x > b$ . В том и другом случае  $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap X = \emptyset$ , что противоречит условию  $x \in \overline{[a, b]}$ . Полученное противоречие доказывает замкнутость отрезка  $[a, b]$ .

Замкнутость множеств  $(-\infty, b]$ ,  $[a, +\infty)$ ,  $(-\infty, +\infty)$  доказать самостоятельно.

Покажем, что полуинтервал  $(a, b]$  не является замкнутым множеством. Это следует из того, что точка  $a$  не содержится во множестве  $(a, b]$ , но содержится в замыкании этого множества, так как  $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(a) \cap (a, b] \neq \emptyset$ .

Самостоятельно доказать, что множества  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $(-\infty, b)$ ,  $(a, +\infty)$  также не являются замкнутыми.  $\square$

**Задача 2.** а) Доказать, что если  $X \subset Y$ , то  $\overline{X} \subset \overline{Y}$ .

б) Доказать, что объединение конечного набора замкнутых множеств является замкнутым множеством.

в) Доказать, что пересечение любого набора замкнутых множеств – замкнуто.

г) Привести пример набора замкнутых множеств, объединение которых не является замкнутым.

**Задача 3.** Найти замыкания множеств:

а)  $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ,

б)  $\mathbb{Q}$  (множество рациональных чисел).

**Задача 4.** Доказать, что  $X$  – открыто  $\iff \mathbb{R} \setminus X$  – замкнуто.

**Теорема 1.** (Критерий точки прикосновения.)

$$x \in \overline{X} \iff \exists \{x_n\} \subset X : x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

**Доказательство.** 1) Если  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ,  $\{x_n\} \subset X$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists x_n \in U_\varepsilon(x)$ . Поскольку  $x_n \in X \cap U_\varepsilon(x)$ , то  $X \cap U_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ , следовательно,  $x \in \overline{X}$ .

2) Пусть  $x \in \overline{X}$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow X \cap U_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ . Положим  $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ . Получим  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow X \cap U_{\varepsilon_n}(x) \neq \emptyset$ , т. е.  $\exists x_n \in X \cap U_{\varepsilon_n}(x)$ . Так как  $0 \leq |x_n - x| < \varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то в силу теоремы о трех последовательностях  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0$ , т. е.  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .  $\square$

**Определение.** Множество  $X \subset \mathbb{R}$  называется *компактом*, если из любой последовательности  $\{x_n\} \subset X$  можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому  $x \in X$ .

**Теорема 2.** (Критерий компактности.) Множество  $X \subset \mathbb{R}$  является компактом тогда и только тогда, когда  $X$  ограничено и замкнуто.

**Доказательство.** 1) Пусть множество  $X$  ограничено и замкнуто,  $\{x_n\} \subset X$ . Так как последовательность  $\{x_n\}$  ограничена, то по теореме Больцано–Вейерштрасса существует подпоследовательность  $x_{n_k} \rightarrow x \in \mathbb{R}$ . Так как  $\{x_{n_k}\} \subset X$ , то по теореме 1 имеем  $x \in \overline{X} = X$ . Следовательно,  $X$  – компакт.

2) Пусть  $X$  – компакт. Методом от противного докажем, что множество  $X$  ограничено и замкнуто.

а) Предположим, что множество  $X$  неограничено. Тогда либо  $X$  неограничено сверху, либо  $X$  неограничено снизу. Пусть для определенности  $X$  неограничено сверху. Тогда  $\forall n \exists x_n \in X : x_n > n$ , следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . По теореме 4 § 9 любая подпоследовательность последовательности  $\{x_n\}$  стремится к  $+\infty$ . Следовательно, из последовательности  $\{x_n\}$  нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, что противоречит компактности  $X$ . Полученное противоречие показывает, что множество  $X$  ограничено.

б) Предположим, что множество  $X$  незамкнуто, т. е.  $\exists y \in \overline{X}$ ,  $y \notin X$ . По теореме 1  $\exists \{y_n\} \subset X : \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . В силу теоремы 4 § 9 любая подпоследовательность последовательности  $\{y_n\}$  сходится к  $y \notin X$ , т. е. из  $\{y_n\}$  нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому  $x \in X$ , что противоречит компактности  $X$ . Полученное противоречие показывает, что множество  $X$  замкнуто.  $\square$

**Задача 1.** Доказать, что если множество  $X \subset \mathbb{R}$  ограничено сверху, то  $\sup X \in \overline{X}$ .

**Задача 2.** Доказать, что если  $X \subset \mathbb{R}$  – компакт, то существуют  $\min X$  и  $\max X$ .

## § 12. Счетные и несчетные множества

**Определение.** Множества  $X$  и  $Y$  называются *равномощными*, если  $\exists$  взаимно однозначное соответствие  $f : X \longrightarrow Y$ .

**Задача 1.** Доказать, что

а) для любых чисел  $a, b \in \mathbb{R}$ :  $a < b$  интервал  $(a, b)$  равномощен интервалу  $(0, 1)$ ;

б) множества  $(0, 1)$  и  $\mathbb{R}$  равномощны;

в) множества  $(0, 1)$  и  $(0, 1]$  равномощны.

**Определение.** Множество, равномощное множеству  $\mathbb{N}$ , называется *счетным*.

Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется *несчетным*.

**Теорема 1.** Множество рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  является счетным.

**Доказательство.** Поместим все рациональные числа  $\frac{m}{n}$  в бесконечную таблицу,  $n$ -я строчка которой имеет вид

$$\frac{0}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \frac{-1}{n} \quad \frac{2}{n} \quad \frac{-2}{n} \quad \dots \frac{k}{n} \quad \frac{-k}{n} \quad \dots$$

Из определения рационального числа следует, что в данной таблице присутствуют все рациональные числа.

| $n \backslash m$ | 0                                                              | 1                                      | -1            | 2            | ... |
|------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------|---------------|--------------|-----|
| 1                | $\frac{0}{1} \rightarrow \frac{1}{1}$                          | $\frac{-1}{1} \rightarrow \frac{2}{1}$ | ...           |              |     |
|                  |                                                                | $\downarrow$                           | $\uparrow$    | $\downarrow$ |     |
| 2                | $\frac{0}{2} \leftarrow \frac{1}{2}$                           | $\frac{-1}{2}$                         | $\frac{2}{2}$ | ...          |     |
|                  | $\downarrow$                                                   |                                        | $\uparrow$    | $\downarrow$ |     |
| 3                | $\frac{0}{3} \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \frac{-1}{3}$ | $\frac{2}{3}$                          | ...           |              |     |
|                  |                                                                |                                        |               | $\downarrow$ |     |
| ...              | ...                                                            | ...                                    | ...           | ...          | ... |

Будем двигаться по таблице в направлении стрелок и последовательно нумеровать элементы таблицы, пропуская сократимые дроби. Сократимые дроби мы пропускаем для того, чтобы каждое рациональное число было занумеровано один раз.

|           |               |               |               |               |               |               |                |                |                |               |               |     |
|-----------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|---------------|---------------|-----|
| эл. табл. | $\frac{0}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{0}{2}$ | $\frac{0}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{-1}{3}$ | $\frac{-1}{2}$ | $\frac{-1}{1}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{2}{2}$ | ... |
| номер     | 1             | 2             | 3             | —             | —             | 4             | 5              | 6              | 7              | 8             | —             | ... |

Тем самым мы установили взаимно однозначное соответствие между элементами таблицы (рациональными числами) и их номерами (натуральными числами), т. е. между множествами  $\mathbb{N}$  и  $\mathbb{Q}$ . Следовательно, множество  $\mathbb{Q}$  счетно.  $\square$

**Теорема 2.** Пусть множество  $X \subset \mathbb{R}$  содержит некоторый отрезок  $[a, b]$ . Тогда  $X$  несчетно.

**Доказательство.** Поскольку множество  $X$  содержит бесконечное подмножество  $\{a + \frac{b-a}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ , то  $X$  бесконечно. Предположим, что  $X$  счетно. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множествами  $\mathbb{N}$  и  $X$ , следовательно,  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in X$  и

$$\forall x \in X \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad x = x_n. \quad (1)$$

Построим последовательность вложенных отрезков. Определим  $[a_0, b_0] = [a, b]$ . Если построен отрезок  $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ , то отрезок  $[a_n, b_n]$

определим так, чтобы  $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$  и  $x_n \notin [a_n, b_n]$  (легко видеть, что такой отрезок существует). По теореме Кантора о вложенных отрезках, существует общая точка  $x$  отрезков  $[a_n, b_n]$ . Поскольку  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \notin [a_n, b_n]$  и  $x \in [a_n, b_n]$ , то  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x \neq x_n$ . Это противоречит условию (1).  $\square$

## ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

### § 1. Определение предела функции

**Определение.** Пусть задано число  $\delta > 0$ . *Проколотой  $\delta$ -окрестностью* элемента  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  называется множество  $\overset{\circ}{U}_\delta(x) = U_\delta(x) \setminus \{x\}$ .

В частности,  $\overset{\circ}{U}_\delta(\pm\infty) = U_\delta(\pm\infty)$ , и для любого  $x_0 \in \mathbb{R}$  справедливо равенство

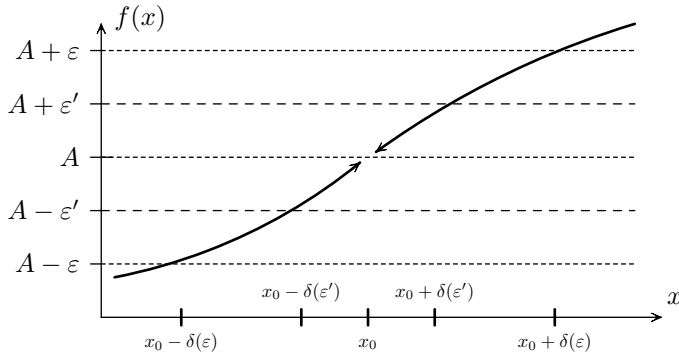
$$\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \bigcup (x_0, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

**Определение предела по Коши.** Пусть задана функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  и заданы  $A \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , причем  $\exists \delta_0 > 0 : \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \subset X$ . Тогда пишут

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow A \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_0,$$

если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0] : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A). \quad (1)$$



**Замечание.** Условие  $\delta \in (0, \delta_0]$  в формуле (1) обеспечивает то, что для любого  $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$  значение  $f(x)$  определено. Если  $D_f = \mathbb{R}$ , то вместо  $\delta \in (0, \delta_0]$  в формуле (1) можно писать  $\delta > 0$ .

**Замечание.** То, как определена (и определена ли вообще) функция  $f$  в точке  $x_0$  не влияет на  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

В частности, если  $A \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ , а функция  $f$  определена на всей числовой прямой, то

$$\begin{aligned} 1) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow & \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : (0 < |x - x_0| < \delta) \hookrightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon); \\ 2) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow & \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : (0 < |x - x_0| < \delta) \hookrightarrow (f(x) > \tfrac{1}{\varepsilon}); \\ 3) \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow & \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : (x < -\tfrac{1}{\delta}) \hookrightarrow (f(x) > \tfrac{1}{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Определение в других случаях расписать самостоятельно.

**Определение.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *последовательностью Гейне* в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$ , если

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  и
- 2)  $x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Определение предела по Гейне.** Пусть задана функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  и заданы элементы  $A \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , причем  $\exists \delta_0 > 0 : \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \subset X$ . Тогда пишут:  $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , если для любой последовательности Гейне  $\{x_n\} \subset X$  предел последовательности  $\{f(x_n)\}$  существует и равен  $A$ .

**Теорема 1.** Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.

**Доказательство.** Пусть задана функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , пусть  $x_0, A \in \overline{\mathbb{R}}$  и  $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \subset X$ .

1) Покажем, что из определения предела по Коши следует определение предела по Гейне. Пусть  $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  по Коши, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, \delta_0] : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(A). \quad (2)$$

Пусть  $\{x_n\} \subset X$  – произвольная последовательность Гейне в точке  $x_0$ . Тогда по определению предела и в силу условия  $x_n \neq x_0$  имеем

$$\forall \delta > 0 \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0). \quad (3)$$

Применим (3) к  $\delta$  из (2), тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(A),$$

т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ . Значит,  $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  по Гейне.

2) Методом от противного покажем, что из определения предела по Гейне следует определение предела по Коши. Предположим, что  $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  по Гейне, но не по Коши.

Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta \in (0, \delta_0] \exists x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : f(x) \notin U_\varepsilon(A).$$

Следовательно,

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0/n}(x_0) : f(x_n) \notin U_\varepsilon(A).$$

Из условия  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0/n}(x_0)$  следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  и  $x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Таким образом, мы получили последовательность Гейне  $\{x_n\} \subset X$  такую, что  $f(x_n) \not\rightarrow A$  при  $n \rightarrow \infty$  – противоречие.  $\square$

## § 2. Свойства пределов функций

**Теорема 1.** Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ , то  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$ .

**Доказательство.** Пусть  $\{x_n\}$  – последовательность Гейне в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$ , тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ . Согласно теореме 2 § 4 главы 1 имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| = |A|$ . Пользуясь определением Гейне, получаем требуемое утверждение.  $\square$

**Теорема 2.** Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \in \mathbb{R}$ , то

$$1) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B,$$

$$2) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B,$$

3) если дополнительно  $B \neq 0$ , то функция  $f(x)/g(x)$  определена в некоторой  $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)/g(x)) = A/B$ .

**Доказательство.** Пункты 1, 2 следуют из теорем о пределе суммы последовательностей, пределе произведения последовательностей и определении предела функции по Гейне.

Докажем пункт 3. Так как  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \neq 0$ , то по теореме 1 имеем  $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = |B| > 0$ . Возьмем  $\varepsilon = |B|$ , тогда  $\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \hookrightarrow |g(x)| \in U_\varepsilon(|B|) = (0, 2|B|)$ . Следовательно,  $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \hookrightarrow g(x) \neq 0$  и функция  $f(x)/g(x)$  определена в  $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$ . Пользуясь определением Гейне, из теоремы о пределе частного последовательностей получаем требуемое утверждение.  $\square$

**Теорема 3.** (О предельном переходе в неравенствах.) Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \in \overline{\mathbb{R}}$  и  $\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) \leq g(x)$ , то  $A \leq B$ .

**Доказательство** следует непосредственно из теоремы о предельном переходе в неравенствах для последовательностей и определения предела функции по Гейне.  $\square$

**Теорема 4.** (О трех функциях.) Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A \in \mathbb{R}$  и  $\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ , то  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ .

**Доказательство** следует непосредственно из теоремы о трех последовательностях и определения предела функции по Гейне.  $\square$

**Лемма 1.** (О сохранении знака.) Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ ,  $A \neq 0$ . Тогда в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$  значение  $f(x)$  имеет тот же знак, что и знак числа  $A$ .

**Доказательство.** Пусть для определенности  $A > 0$ . Положим  $\varepsilon = A$ . По определению предела существует число  $\delta > 0$  такое, что для любого  $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$  справедливо включение  $f(x) \in U_\varepsilon(A) = (0, 2A)$ , а значит,  $f(x) > 0$  при  $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ .  $\square$

### § 3. Критерий Коши существования предела функции

**Лемма 1.** Пусть задана функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  и

$\forall$  посл. Гейне  $\{x_n\} \subset X$  в точке  $x_0$   $\exists A \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

Тогда этот предел не зависит от последовательности Гейне:

$\exists A \in \mathbb{R} : \forall$  посл. Гейне  $\{x_n\} \subset X$  в точке  $x_0 \hookrightarrow A = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ .

**Доказательство.** Пусть имеются две произвольные последовательности Гейне в точке  $x_0$ :  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$  и  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \neq x_0, y_n \neq x_0$ . Составим из них последовательность  $\{z_k\}$ :

$$z_k = \begin{cases} x_n, & k = 2n - 1, \\ y_n, & k = 2n. \end{cases}$$

Последовательность  $\{z_k\}$  также является последовательностью Гейне, так как  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = x_0, \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow z_k \neq x_0$ . Поэтому, в силу условия леммы,  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k)$ . Так как последовательности  $\{f(x_n)\}$  и  $\{f(y_n)\}$  являются подпоследовательностями сходящейся последовательности  $\{f(z_k)\}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$ .  $\square$

**Определение.** Пусть функция  $f$  определена в некоторой  $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$ . Условие Коши существования предела функции в точке  $x_0$  состоит в том, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, \delta_0] : \forall x_1, x_2 \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \quad (1)$$

**Теорема 1.** (Критерий Коши.)  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R} \iff$  выполнено условие Коши существования предела функции  $f$  в точке  $x_0$ .

**Доказательство.** 1) Пусть  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ , тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, \delta_0] : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon/2.$$

Следовательно,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, \delta_0] : \forall x_1, x_2 \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ , т. е. выполнено условие Коши (1).

2) Пусть выполнено условие Коши (1). Возьмем произвольную последовательность Гейне в точке  $x_0$ :  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \neq x_0$ , тогда

$$\forall \delta \in (0, \delta_0] \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in \overset{o}{U}_\delta(x_0). \quad (2)$$

Используя условие (2) для  $\delta$  из (1), получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \forall k \geq N \hookrightarrow |f(x_n) - f(x_k)| < \varepsilon,$$

т. е. выполнено условие Коши существования предела последовательности  $\{f(x_n)\}$ . В силу критерия Коши для последовательностей существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$ .

Итак,  $\forall$  последовательности Гейне  $\{x_n\}$  в точке  $x_0 \exists A = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \in \mathbb{R}$ , тогда по лемме 1

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall \text{ посл. Гейне } \{x_n\} \subset X \text{ в точке } x_0 \hookrightarrow A = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Пользуясь определением предела функции по Гейне, получаем  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ .  $\square$

### Задача 1. Пусть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta \hookrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Верно ли, что  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ ?

**Задача 2.** Пусть задана функция  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Верно ли, что  $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ , если

$$\text{а) } \forall \varepsilon > 0 \forall d > 0 \exists x_0 > 0 : \forall x > x_0 \hookrightarrow |f(x+d) - f(x)| < \varepsilon;$$

$$\text{б) } \forall \varepsilon > 0 \exists x_0 > 0 : \forall d > 0 \hookrightarrow |f(x_0+d) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Рассмотреть данный вопрос отдельно для каждого из условий (а) и (б).

## § 4. Предел по множеству

**Определение.** Элемент  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  называется *предельной точкой* множества  $X \subset \mathbb{R}$ , если существует  $\{x_n\} \subset X$  – последовательность Гейне в точке  $x_0$ .

**Определение.** Точка  $x_0 \in \mathbb{R}$  называется *изолированной точкой* множества  $X \subset \mathbb{R}$ , если  $x_0 \in X$  и  $\exists \delta > 0 : \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap X = \emptyset$ .

**Лемма 1.** Для любого множества  $X \subset \mathbb{R}$  и любой точки  $x_0 \in \mathbb{R}$  следующие условия эквивалентны:

- (1)  $x_0$  является предельной точкой множества  $X$ ;
- (2)  $x_0$  является точкой прикосновения множества  $X$  (см. § 11 главы 1) и  $x_0$  не является изолированной точкой множества  $X$ .

**Доказательство.** (1)  $\Rightarrow$  (2). Пусть  $x_0$  – предельная точка множества  $X$ . Тогда существует  $\{x_n\} \subset X$  – последовательность Гейне в точке  $x_0$ . Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , то в силу критерия точки прикосновения (теорема 1 § 11 главы 1) справедливо включение  $x_0 \in \overline{X}$ , т. е.  $x_0$  является точкой прикосновения множества  $X$ . Поскольку  $\forall \delta > 0 \exists n : x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ , то  $\forall \delta > 0 \quad \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap X \neq \emptyset$ . Следовательно,  $x_0$  не является изолированной точкой множества  $X$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1). Пусть  $x_0$  – точка прикосновения множества  $X$  и  $x_0$  не является изолированной точкой множества  $X$ . Покажем, что  $x_0$  – предельная точка множества  $X$ .

Рассмотрим случай, когда  $x_0 \notin X$ . Так как  $x_0$  – точка прикосновения множества  $X$ , то в силу теоремы 1 § 11 главы 1 существует последовательность  $\{x_n\} \subset X$  такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Так как  $x_0 \notin X$  и  $x_n \in X$ , то  $x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Поэтому  $\{x_n\}$  – последовательность Гейне в точке  $x_0$  и, следовательно,  $x_0$  – предельная точка множества  $X$ .

Пусть теперь  $x_0 \in X$ . Так как  $x_0$  не является изолированной точкой множества  $X$ , то  $\forall \delta > 0 \hookrightarrow \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap X \neq \emptyset$ . Следовательно,  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \overset{\circ}{U}_{1/n}(x_0) \cap X \neq \emptyset$ . Поэтому  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in \overset{\circ}{U}_{1/n}(x_0) \cap X$ . Последовательность  $\{x_n\} \subset X$  является последовательностью Гейне в точке  $x_0$ . Поэтому  $x_0$  – предельная точка множества  $X$ .  $\square$

**Определение.** Пусть элемент  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  является предельной точкой множества  $X \subset \mathbb{R}$ . Будем говорить, что элемент  $A \in \overline{\mathbb{R}}$  является *пределом* функции  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  по множеству  $X$  и писать  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = A$ , если

(определение Коши):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A);$$

(определение Гейне):

$$\forall \{x_n\} \subset X - \text{посл. Гейне в точке } x_0 \hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Эквивалентность определений Коши и Гейне доказывается так же, как и раньше (см. доказательство теоремы 1 § 1).

**Задача 1.** Пусть заданы множества  $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}$  и функция  $f : X_1 \cup X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть  $x_0$  – предельная точка множеств  $X_1$  и  $X_2$ . Доказать, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X_1 \cup X_2}} f(x) = A \Leftrightarrow \left( \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X_1}} f(x) = A \text{ и } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X_2}} f(x) = A \right).$$

**Пример.** Рассмотрим *функцию Дирихле*:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Непосредственно из определений следует, что любая точка  $x_0 \in \mathbb{R}$  является предельной точкой множеств  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  и  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) = 1$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} f(x) = 0$ . При этом для любой точки  $x_0 \in \mathbb{R}$  предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  не существует.

## § 5. Односторонние пределы

**Определение.** Пусть функция  $f$  определена на интервале  $(a, x_0)$ . Предел функции  $f$  в точке  $x_0$  по множеству  $(a, x_0)$  называют *пределом слева* функции  $f$  в точке  $x_0$  и обозначают  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$  или  $f(x_0 - 0)$ .

Используя определение предела по множеству, получаем

$$\begin{aligned} f(x_0 - 0) = A \in \overline{\mathbb{R}} & \quad \text{опр. Коши} \\ \Leftrightarrow & \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, x_0 - a) : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_0 - 0) = A \in \overline{\mathbb{R}} & \quad \text{опр. Гейне} \\ \Leftrightarrow & \quad \forall \{x_n\} \subset (a, x_0) : \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \right) \hookrightarrow \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \right). \end{aligned}$$

**Определение.** Пусть функция  $f$  определена на интервале  $(x_0, b)$ . Предел функции  $f$  в точке  $x_0$  по множеству  $(x_0, b)$  называют *пределом справа* функции  $f$  в точке  $x_0$  и обозначают  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$  или  $f(x_0 + 0)$ .

**Лемма 1.** Пусть функция  $f$  определена в некоторой  $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}} \iff (\exists f(x_0 \pm 0) \in \overline{\mathbb{R}} \text{ и } f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)).$$

**Доказательство.** Запишем определение по Коши того, что  $\exists f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A \in \overline{\mathbb{R}}$ :

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 \in (0, \delta_0], \delta_2 \in (0, \delta_0] : \\ & \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_2) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A). \end{aligned} \quad (1)$$

Это условие эквивалентно условию

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, \delta_0] : \\ & \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A). \end{aligned} \quad (2)$$

Действительно, из условия (1) следует условие (2), где  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Из условия (2) следует условие (1), где  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ . Так как  $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) = \overset{o}{U}_\delta(x_0)$ , то условие (2) эквивалентно условию  $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .  $\square$

**Определение.** *Минимумом (максимумом, инфимумом, супремумом) функции  $f$  на множестве  $X$  называется минимум (максимум, инфимум, супремум) множества  $f(X)$ :*  $\min_{x \in X} f(x) = \min f(X)$ ,  $\sup_{x \in X} f(x) = \sup f(X)$  и так далее.

Непосредственно из определений инфимума и супремума имеем

$$\begin{aligned} m = \inf_{x \in X} f(x) & \iff \begin{cases} \forall x \in X \hookrightarrow m \leq f(x), \\ \forall m' > m \exists x \in X : m' > f(x); \end{cases} \\ M = \sup_{x \in X} f(x) & \iff \begin{cases} \forall x \in X \hookrightarrow M \geq f(x), \\ \forall M' < M \exists x \in X : M' < f(x). \end{cases} \end{aligned}$$

Заметим, что это верно не только в случае конечных, но и в случае бесконечных верхних и нижних граней.

**Определение.** Функция  $f$  называется *нестрого возрастающей* на множестве  $X \subset \mathbb{R}$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \hookrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Функция  $f$  называется *нестрого убывающей* на множестве  $X \subset \mathbb{R}$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \hookrightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Если функция является нестрогой возрастающей или нестрогой убывающей, то она называется *монотонной*.

Функция  $f$  называется *строго возрастающей* на множестве  $X \subset \mathbb{R}$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \hookrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Функция  $f$  называется *строго убывающей* на множестве  $X \subset \mathbb{R}$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \hookrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

**Теорема 1.** 1) Если функция  $f$  нестрогой возрастает на  $(a, x_0)$ , то  $\exists f(x_0 - 0) = \sup_{x \in (a, x_0)} f(x)$ .

2) Если функция  $f$  нестрогой убывает на  $(a, x_0)$ , то  $\exists f(x_0 - 0) = \inf_{x \in (a, x_0)} f(x)$ .

3) Если функция  $f$  нестрогой возрастает на  $(x_0, b)$ , то  $\exists f(x_0 + 0) = \inf_{x \in (x_0, b)} f(x)$ .

4) Если функция  $f$  нестрогой убывает на  $(x_0, b)$ , то  $\exists f(x_0 + 0) = \sup_{x \in (x_0, b)} f(x)$ .

**Доказательство.** 1) Пусть функция  $f$  нестрогой возрастает на  $(a, x_0)$ . Так как конечный или бесконечный супремум любого множества существует, то существует  $\sup_{x \in (a, x_0)} f(x) = M \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

Из определения супремума следует, что  $\forall x \in (a, x_0) \hookrightarrow f(x) \leq M$  и, кроме того,  $\forall M_1 < M \exists x_1 \in (a, x_0) : M_1 < f(x_1)$ . Отсюда и из возрастания функции  $f$  следует, что  $\forall x \in (x_1, x_0) \hookrightarrow M_1 < f(x_1) \leq f(x)$ .

Итак,  $\forall M_1 < M \exists x_1 \in (a, x_0) : \forall x \in (x_1, x_0) \hookrightarrow M_1 < f(x) \leq M$ . Следовательно,  $\forall \varepsilon > 0 \exists x_1 \in (a, x_0) : \forall x \in (x_1, x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M)$ , т. е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = x_0 - x_1 > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M)$ , а значит,  $M = f(x_0 - 0)$ . Другие случаи рассмотреть самостоятельно.  $\square$

## § 6. Непрерывность функции в точке

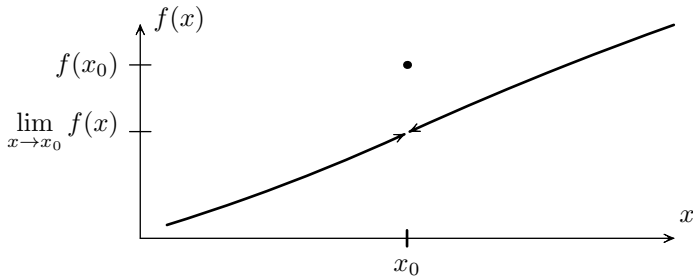
**Определение.** 1) Пусть функция  $f$  определена в некоторой  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$ . Тогда  $f$  называется *непрерывной в точке*  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

2) Пусть функция  $f$  определена на  $(a, x_0]$ . Тогда  $f$  называется *непрерывной слева* в точке  $x_0$ , если  $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ .

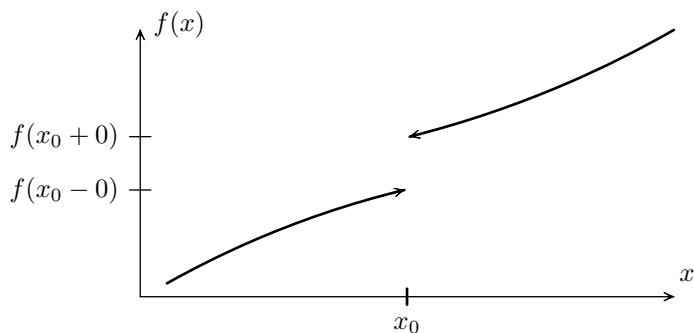
Пусть функция  $f$  определена на  $[x_0, b)$ . Тогда  $f$  называется *непрерывной справа* в точке  $x_0$ , если  $f(x_0 + 0) = f(x_0)$ .

3) Пусть  $f$  определена в  $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$ . Тогда

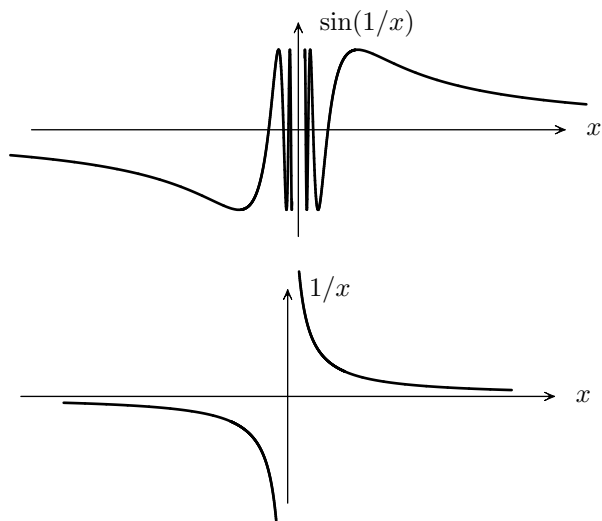
а) если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ , но в точке  $x_0$  функция  $f$  не определена либо  $f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , то точка  $x_0$  называется *точкой устранимого разрыва*;



б) если  $\exists f(x_0 \pm 0) \in \mathbb{R}$ , но  $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ , то  $x_0$  — *точка разрыва первого рода*;



в) если какой-либо из пределов  $f(x_0 - 0)$ ,  $f(x_0 + 0)$  не существует или бесконечен, то  $x_0$  — *точка разрыва второго рода*.



**Задача 1.** Существует ли функция  $f : [x_0, x_0 + \delta_0) \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывная справа в точке  $x_0$  и такая, что

$$\forall \delta \in (0, \delta_0) \exists x_1, x_2 \in (x_0, x_0 + \delta) : f(x_1) > 0, f(x_2) < 0?$$

**Задача 2.** Существует ли функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывная справа в каждой точке  $x_0 \in \mathbb{R}$  и такая, что

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \quad \exists x_1, x_2 \in (a, b) : f(x_1) > 0, f(x_2) < 0?$$

**Лемма 1.** Пусть  $f$  определена в  $U_{\delta_0}(x_0)$ . Следующие условия эквивалентны:

- 1)  $f$  непрерывна в  $x_0$ ;
- 2)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, \delta_0] : \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ;
- 3)  $\forall \{x_n\} \subset U_{\delta_0}(x_0) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ .

**Доказательство.** (1)  $\Leftrightarrow$  (2) : следует из определения  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  по Коши; в данном случае условие  $x \neq x_0$  можно не писать, так как при  $x = x_0$  выполняется:  $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ .

(1)  $\Leftrightarrow$  (3) : следует из определения  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  по Гейне; в данном случае условие  $x_n \neq x_0$  можно не писать, так как при  $x_n = x_0$  выполняется:  $f(x_n) = f(x_0)$ .  $\square$

**Задача 3.** Пусть функция  $f$  определена в  $U_{\delta_0}(x_0)$ . Как связаны следующие условия с непрерывностью функции  $f$  в точке  $x_0$ ?

- 1)  $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon \in (0, \delta_0] : \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$ ;
- 2)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, \delta_0] : \forall x : |x - x_0| \leq \delta \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ;
- 3)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, \delta_0] : \forall x : |x - x_0| < \delta \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ ;
- 4)  $\forall \varepsilon > 0 \forall \delta \in (0, \delta_0] \exists x \in U_\delta(x_0) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ;
- 5)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, \delta_0], \exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ ;
- 6)  $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in U_{\delta_0}(x_0) \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ;
- 7)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, \delta_0] : \forall x_1, x_2 \in U_{\delta_0}(x_0) : |x_1 - x_2| < \delta \hookrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ ;
- 8) (условие Липшица)  $\exists L \in \mathbb{R} : \forall x_1, x_2 \in U_{\delta_0}(x_0) \hookrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ .

**Теорема 1.** Пусть функции  $f$  и  $g$  определены в  $U_\delta(x_0)$  и непрерывны в точке  $x_0$ . Тогда функции  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$  непрерывны в точке  $x_0$ . Если дополнительно  $g(x_0) \neq 0$ , то функция  $f(x)/g(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ .

**Доказательство** состоит в применении теоремы 2 § 2.

**Определение.** Пусть заданы множества  $X, Y \subset \mathbb{R}$  и функции  $y : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ , причем  $y(X) \subset Y$ . Функция  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = f(y(x))$  называется *суперпозицией* функций  $y$  и  $f$ , или *сложной функцией*.

**Пример.** Пусть  $x_0, y_0, A \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y_0$ ,  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = A$ .  
Верно ли, что  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(y(x)) = A$ ?

**Решение.** Неверно. Например,  $y(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(y) =$   
 $= \begin{cases} 0, & y \neq 0, \\ 1, & y = 0. \end{cases}$  Тогда  $A = 0$ , но  $f(y(x)) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  и  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(y(x)) = 1 \neq A$ .  $\square$

**Теорема 2.** (О пределе сложной функции.) Пусть заданы функции  $y : \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f : \overset{\circ}{U}_{\beta_0}(y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ , пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = A \in \overline{\mathbb{R}}$  и пусть выполнено хотя бы одно из следующих дополнительных условий:

- (a)  $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \hookrightarrow y(x) \neq y_0$  или
- (b)  $f(y_0) = A$  (т.е. функция  $f$  непрерывна в точке  $y_0$ ).

Тогда сложная функция  $\varphi(x) = f(y(x))$  определена в некоторой  $\overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(y(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = A$ .

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное число  $\varepsilon > 0$ . Так как  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = A$ , то

$$\exists \beta \in (0, \beta_0) : \forall y \in \overset{\circ}{U}_{\beta}(y_0) \hookrightarrow f(y) \in U_{\varepsilon}(A). \quad (1)$$

По определению  $\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y_0$

$$\exists \delta \in (0, \delta_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow y(x) \in U_{\beta}(y_0). \quad (2)$$

Покажем, что сложная функция  $\varphi(x) = f(y(x))$  определена в  $\overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$  и

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow f(y(x)) \in U_{\varepsilon}(A). \quad (3)$$

Зафиксируем произвольную точку  $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$ . В силу условия (2) получаем  $y(x) \in U_{\beta}(y_0)$ . В случае  $y(x) \neq y_0$  имеем  $y(x) \in \overset{\circ}{U}_{\beta}(y_0)$  и согласно (1) включение  $f(y(x)) \in U_{\varepsilon}(A)$  выполнено. Рассмотрим случай  $y(x) = y_0$ . В этом случае дополнительное условие (a) реализоваться не может. Следовательно, реализуется дополнительное условие (b), а значит,  $f(y(x)) = f(y_0) = A \in U_{\varepsilon}(A)$ . Таким образом, доказано соотношение (3). Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(y(x)) \in U_\varepsilon(A).$$

Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(y(x)) = A$ .  $\square$

**Теорема 3.** (О непрерывности сложной функции в точке.) Пусть функция  $y$  определена в некоторой  $U_{\delta_0}(x_0)$  и непрерывна в точке  $x_0$ . Пусть функция  $f$  определена в некоторой  $U_{\beta_0}(y_0)$  и непрерывна в точке  $y_0 = y(x_0)$ . Тогда сложная функция  $\varphi(x) = f(y(x))$  определена в некоторой  $U_{\delta_1}(x_0)$  и непрерывна в точке  $x_0$ .

**Доказательство** состоит в применении пункта (b) теоремы 2 для случая  $y_0 = y(x_0)$ .  $\square$

## § 7. Непрерывность функции на множестве

**Определение.** Функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  называется *непрерывной в точке*  $x_0 \in X$  по множеству  $X \subset \mathbb{R}$ , если

(a) точка  $x_0$  является предельной точкой множества  $X$  и  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0)$  либо

(b) точка  $x_0$  является изолированной точкой множества  $X$ .

Заметим, что согласно лемме 1 § 4 точка  $x_0 \in X$  является либо предельной, либо изолированной точкой множества  $X$ . В случае, когда точка  $x_0$  является изолированной точкой множества  $X$ , любая функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в точке  $x_0$  по множеству  $X$ .

**Определение.** Функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  называется *непрерывной на множестве*  $X \subset \mathbb{R}$ , если  $f$  непрерывна в каждой точке  $x_0 \in X$  по множеству  $X$ .

**Лемма 1.** Для функции  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  следующие условия эквивалентны:

- 1)  $f$  непрерывна на множестве  $X$ ;
- 2)  $\forall x_0 \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap X \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ;
- 3)  $\forall x_0 \in X \forall \{x_n\} \subset X : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ .

**Доказательство** аналогично доказательству леммы 1 § 6.  $\square$

**Задача 1.** Пусть заданы множества  $X, Y \subset \mathbb{R}$  и функции  $y : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y(X) \subset Y$ , пусть функция  $y$  непрерывна на

множестве  $X$ , а функция  $f$  непрерывна на множестве  $Y$ . Доказать, что сложная функция  $\varphi(x) = f(y(x))$  непрерывна на множестве  $X$ .

**Задача 2.** Пусть на интервале  $(a, b)$  задана функция  $f$ . Доказать, что функция  $f$  непрерывна на  $(a, b)$  тогда и только тогда, когда для любых чисел  $m, M \in \mathbb{R}$  множества  $\{x \in (a, b) : f(x) < M\}$  и  $\{x \in (a, b) : f(x) > m\}$  открыты.

Напомним, что множество  $X \subset \mathbb{R}$  называется компактом, если из любой последовательности  $\{x_n\} \subset X$  можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому  $x \in X$ .

**Теорема 1.** Пусть  $f$  непрерывна на компакте  $X$ . Тогда  $f(X)$  – компакт. (Другими словами, непрерывная функция переводит компакт в компакт.)

**Доказательство.** Пусть задана произвольная последовательность  $\{y_n\} \subset f(X)$ . Требуется доказать, что из  $\{y_n\}$  можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому  $y_0 \in f(X)$ . Так как  $y_n \in f(X)$ , то  $\exists x_n \in X: f(x_n) = y_n$ . В силу компактности  $X$  существует сходящаяся подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}: \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \in X$ . В силу непрерывности  $f$  имеем  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$ , т. е.  $\{y_{n_k}\}$  – подпоследовательность последовательности  $\{y_n\}$ , сходящаяся к  $y_0 = f(x_0) \in f(X)$ .  $\square$

**Задача 3.** Верно ли, что непрерывная функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  переводит

- а) открытое множество в открытое;
- б) замкнутое множество в замкнутое;
- в) ограниченное множество в ограниченное;
- г) замкнутое и ограниченное множество в замкнутое и ограниченное?

**Определение.** Последовательность  $\{x_n\} \subset X$  называется *минимизирующей* (соответственно *максимизирующей*) *последовательностью* функции  $f$  на множестве  $X$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \inf_{x \in X} f(x)$  (соответственно  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \sup_{x \in X} f(x)$ ).

**Лемма 2.** Для любого непустого множества  $X$  и любой функции  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  существуют минимизирующая и максимизирующая последовательности функции  $f$  на множестве  $X$ .

**Доказательство.** По теореме о существовании инфимума существует  $\inf_{x \in X} f(x) = m \in \mathbb{R}$ . По определению инфимума  $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X : f(x) \in U_\varepsilon(m)$ . Следовательно,  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in X : f(x_n) \in U_{1/n}(m)$ . Таким образом, построена минимизирующая последовательность  $\{x_n\}$ . Аналогично строится максимизирующая последовательность.  $\square$

**Теорема 2.** (Теорема Вейерштрасса.) Если функция  $f$  непрерывна на компакте  $X \subset \mathbb{R}$ , то существуют  $\max_{x \in X} f(x)$  и  $\min_{x \in X} f(x)$ .

**Доказательство.** Обозначим  $m = \inf_{x \in X} f(x)$ . В силу леммы 2 существует минимизирующая последовательность  $\{x_n\} \subset X$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = m$ . Поскольку  $X$  – компакт, то из последовательности  $\{x_n\}$  можно выделить подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ , сходящуюся к некоторому  $x_0 \in X$ . Поскольку последовательность  $\{f(x_{n_k})\}$  является подпоследовательностью последовательности  $\{f(x_n)\}$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = m$ . Отсюда и из непрерывности функции  $f$  следует, что  $m = f(x_0)$ . Поэтому в точке достигается  $\min_{x \in X} f(x)$ . Существование максимума доказывается аналогично.  $\square$

**Определение.** Функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  называется *ограниченной* на  $X$ , если множество ее значений  $f(X)$  ограничено.

**Следствие 1.** Если функция  $f$  непрерывна на компакте  $X \subset \mathbb{R}$ , то она ограничена на  $X$ .

**Доказательство.** По теореме Вейерштрасса существуют  $\min_{x \in X} f(x) = m \in \mathbb{R}$  и  $\max_{x \in X} f(x) = M \in \mathbb{R}$ . По определению минимума и максимума функция  $f$  на множестве  $X$  ограничена снизу числом  $m$  и ограничена сверху числом  $M$ .  $\square$

Любой отрезок  $[a, b]$  ограничен и замкнут, следовательно, в силу критерия компактности (теорема 2 § 11 главы 1) отрезок является компактом. Отсюда вытекают еще два следствия.

**Следствие 2.** Если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то существуют  $\max_{x \in [a, b]} f(x)$  и  $\min_{x \in [a, b]} f(x)$ .

**Следствие 3.** Если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она ограничена на  $[a, b]$ .

**Задача 4.** Пусть функция  $f$  непрерывна на  $[a, b]$  и  $\forall x \in [a, b] \hookrightarrow f(x) > 0$ . Верно ли, что  $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in [a, b] \hookrightarrow f(x) \geq \varepsilon$ ?

**Задача 5.** Пусть функция  $f$  непрерывна на  $(a, b)$  и  $\forall x \in (a, b) \hookrightarrow f(x) > 0$ . Верно ли, что  $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (a, b) \hookrightarrow f(x) \geq \varepsilon$ ?

**Задача 6.** Пусть функция  $f$  непрерывна на  $[0, +\infty)$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ . Верно ли, что функция  $f$  ограничена на  $\mathbb{R}$ ?

**Теорема 3.** (Теорема Больцано–Коши о промежуточном значении.) Пусть заданы функция  $f$ , непрерывная на  $[a, b]$ , и число  $y_0$  такие, что либо  $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$ , либо  $f(b) \leq y_0 \leq f(a)$ . Тогда существует  $x_0 \in [a, b] : f(x_0) = y_0$ .

**Доказательство.** Пусть, например,  $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$ . Обозначим  $[a_0, b_0] = [a, b]$ . Пусть определен отрезок  $[a_k, b_k]$ , причем  $f(a_k) \leq y_0 \leq f(b_k)$ . Определим  $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ ,

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, c_k], & \text{если } y_0 \leq f(c_k), \\ [c_k, b_k], & \text{если } f(c_k) < y_0, \end{cases}$$

тогда  $f(a_{k+1}) \leq y_0 \leq f(b_{k+1})$ .

Получаем последовательность вложенных отрезков  $\{[a_k, b_k]\}$  таких, что  $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow f(a_k) \leq y_0 \leq f(b_k)$ . По теореме Кантора существует общая точка  $x_0 \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k]$ .

Так как  $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \rightarrow 0$ , то  $|x_0 - a_k| \leq |b_k - a_k| \rightarrow 0$ , следовательно,  $a_k \rightarrow x_0$ , аналогично,  $b_k \rightarrow x_0$ .

В силу непрерывности  $f$  имеем  $f(a_k) \rightarrow f(x_0)$ ,  $f(b_k) \rightarrow f(x_0)$ . Так как  $f(a_k) \leq y_0 \leq f(b_k)$ , то по теореме о предельном переходе в неравенствах  $f(x_0) \leq y_0 \leq f(x_0)$ , т. е.  $y_0 = f(x_0)$ .  $\square$

**Теорема 4.** Если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то  $f([a, b]) = [m, M]$ , где  $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ .

**Доказательство.** Если  $m = M$ , то отрезок  $[m, M]$  вырождается в одну точку, а функция  $f$  равна константе  $m = M$  на  $[a, b]$ . При этом утверждение теоремы тривиально выполняется. Поэтому будем предполагать, что  $m < M$ .

Из определений минимума и максимума следует, что  $\forall x \in [a, b] \hookrightarrow m \leq f(x) \leq M$ , т.е.  $f([a, b]) \subset [m, M]$ . Покажем, что  $[m, M] \subset f([a, b])$ . Из определений минимума и максимума также следует, что  $m, M \in f([a, b])$ , т.е.  $\exists x_1, x_2 \in [a, b]: f(x_1) = m, f(x_2) = M$ . По теореме Больцано–Коши о промежуточном значении для любого числа  $y_0 \in [m, M]$  существует точка  $x_0$ , лежащая на отрезке с концами  $x_1, x_2$  и такая, что  $f(x_0) = y_0$ . Поэтому  $y_0 \in f([a, b])$ . Следовательно,  $[m, M] \subset f([a, b])$ .  $\square$

**Следствие.** Непрерывная функция переводит отрезок в отрезок или в точку.

Напомним, что множество  $X \subset \mathbb{R}$  называется числовым промежутком, если  $X$  является отрезком, точкой, интервалом, полуинтервалом, лучом (открытым и замкнутым) или всей числовой прямой.

**Теорема 5.** (Обобщенная теорема о промежуточном значении.) Пусть функция  $f$  непрерывна на числовом промежутке  $X$  и пусть  $\inf_{x \in X} f(x) = m \in \mathbb{R}, \sup_{x \in X} f(x) = M \in \overline{\mathbb{R}}$ . Тогда

$$\forall y_0 \in (m, M) \quad \exists x_0 \in X : f(x_0) = y_0.$$

**Доказательство.** Пусть задано произвольное число  $y_0 \in (m, M)$ . Так как  $m < y_0$ , то из определения инфимума следует:  $\exists x_1 \in X : f(x_1) < y_0$ . Так как  $M > y_0$ , то из определения супремума следует:  $\exists x_2 \in X : f(x_2) > y_0$ . По теореме Больцано–Коши о промежуточном значении существует точка  $x_0$ , лежащая на отрезке с концами  $x_1, x_2$  (а значит, поскольку  $X$  – числовой промежуток, то  $x_0 \in X$ ) и такая, что  $f(x_0) = y_0$ .  $\square$

**Следствие.** Непрерывная функция переводит числовой промежуток в числовой промежуток.

**Доказательство.** Пусть функция  $f$  непрерывна на числовом промежутке  $X$ . Обозначим  $m = \inf_{x \in X} f(x), M = \sup_{x \in X} f(x)$ . В силу теоремы 5 получаем  $(m, M) \subset f(X)$ .

Поэтому если  $m = -\infty$  и  $M = +\infty$ , то  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \subset f(X) \subset \mathbb{R}$ , а значит,  $f(X) = \mathbb{R}$  – числовой промежуток.

Рассмотрим случай  $m \in \mathbb{R}, M = +\infty$ . Тогда  $(m, +\infty) = (m, M) \subset f(X)$  и по определению инфимума  $f(X) \subset [m, +\infty)$ . Поэтому если

$m \in f(X)$ , то  $f(X) = [m, +\infty)$ , а если  $m \notin f(X)$ , то  $f(X) = (m, +\infty)$ . В обоих случаях  $f(X)$  – числовой промежуток.

Остальные случаи рассмотреть самостоятельно.  $\square$

**Задача 7.** Верно ли, что непрерывная функция переводит

- а) интервал в интервал;
- б) числовую прямую в числовую прямую?

**Задача 8.** Пусть функция  $f$  непрерывна и неограничена на луче  $[0, +\infty)$ . Верно ли, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$ ?

**Задача 9.** Пусть функция  $f$  непрерывна на луче  $[0, +\infty)$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$ . Верно ли, что выполнено одно из соотношений  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  или  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ?

## § 8. Обратная функция

**Лемма 1.** Строго монотонная функция обратима. Обратная к строго возрастающей функции является строго возрастающей функцией; обратная к строго убывающей функции строго убывает.

**Доказательство.** Пусть для определенности функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  строго возрастает. Из определений (см. введение) следует обратимость функции  $f$ , т.е. существование функции  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ , обратной к  $f$ . Докажем, что функция  $f^{-1}$  строго возрастает. Пусть  $y_1, y_2 \in f(X)$ ,  $y_1 < y_2$ . Обозначим  $x_i = f^{-1}(y_i)$  ( $i = 1, 2$ ). Равенство  $x_1 = x_2$  не может выполняться, так как  $f(x_1) = y_1 \neq y_2 = f(x_2)$ . Неравенство  $x_2 < x_1$  также не может выполняться, так как в силу строго возрастания  $f$  из условия  $x_2 < x_1$  следует, что  $y_2 = f(x_2) < f(x_1) = y_1$ . Поэтому выполняется неравенство  $x_1 < x_2$ . Итак,  $\forall y_1, y_2 \in f(X) : y_1 < y_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ , т.е. функция  $f^{-1}$  строго возрастает.  $\square$

**Лемма 2.** Пусть функция  $f$  монотонна на числовом промежутке  $X$  и множество значений  $f(X)$  – числовой промежуток. Тогда функция  $f$  непрерывна на  $X$ .

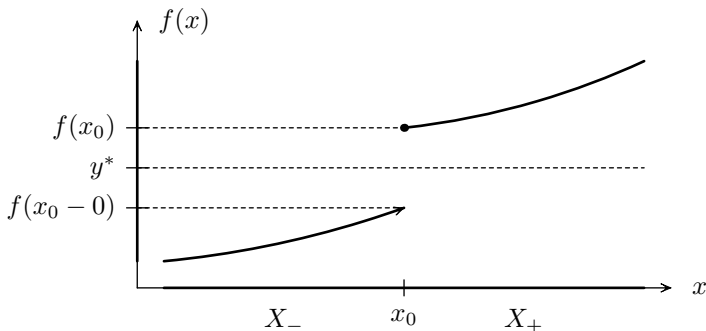
**Доказательство.** Пусть для определенности  $f$  нестрого возрастает на  $X$ . Пусть точка  $x_0 \in X$  не является левым концом промежутка  $X$ . Покажем, что  $f$  непрерывна слева в точке  $x_0$ . Разобьем

множество  $X$  на два множества:  $X_- = \{x \in X : x < x_0\}$  и  $X_+ = \{x \in X : x \geq x_0\}$ . По теореме об одностороннем пределе монотонной функции существует  $f(x_0 - 0) = \sup_{x \in X_-} f(x)$ . Поскольку  $f(x) \leq f(x_0)$  для любого  $x \in X_-$ , то  $f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$ . Предположим, что  $f$  не является непрерывной слева в точке  $x_0$ , т.е.  $f(x_0 - 0) \neq f(x_0)$ . Тогда  $f(x_0 - 0) < f(x_0)$  и, следовательно, существует число  $y^*$  такое, что  $f(x_0 - 0) < y^* < f(x_0)$ . Зафиксируем  $x_1 \in X_-$ . Тогда  $f(x_1) \leq \sup_{x \in X_-} f(x) = f(x_0 - 0) < y^* < f(x_0)$ . Так как значения  $f(x_1)$  и  $f(x_0)$  лежат на числовом промежутке  $f(X)$ , а число  $y^*$  лежит между ними, то  $y^* \in f(X)$ . С другой стороны,

$$\forall x \in X_- \hookrightarrow f(x) \leq \sup_{x \in X_-} f(x) = f(x_0 - 0) < y^*,$$

$$\forall x \in X_+ \hookrightarrow f(x) \geq f(x_0) > y^*.$$

Поэтому  $\forall x \in X \hookrightarrow f(x) \neq y^*$ , что противоречит включению  $y^* \in f(X)$ . Полученное противоречие доказывает, что  $f$  непрерывна слева в любой точке  $x_0$ , не являющейся левым концом промежутка  $X$ . Аналогично,  $f$  непрерывна справа в любой точке  $x_0$ , не являющейся правым концом промежутка  $X$ . Таким образом, функция  $f$  непрерывна на  $X$ .  $\square$



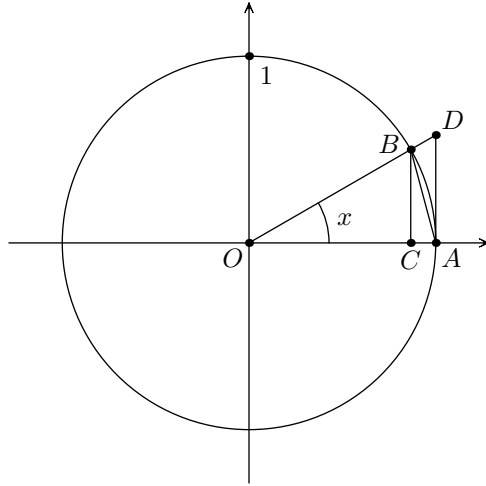
**Теорема 1.** Если функция  $f$  определена, строго монотонна и непрерывна на числовом промежутке  $X$ , то обратная функция определена, строго монотонна и непрерывна на числовом промежутке  $f(X)$ .

**Доказательство.** По теореме 5 § 7 множество  $f(X)$  является числовым промежутком. По лемме 1 обратная функция  $f^{-1}$  строго монотонна на  $f(X)$ . Поскольку монотонная функция  $f^{-1}$  переводит числовой промежуток  $f(X)$  в числовой промежуток  $X$ , то по лемме 2 функция  $f^{-1}$  непрерывна на  $f(X)$ .  $\square$

## § 9. Тригонометрические функции

**Лемма 1.**  $\forall x \in (0, \pi/2) \hookrightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x$ .

**Доказательство.** Нарисуем на координатной плоскости окружность единичного радиуса с центром в начале координат, а также точки  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 0)$ ,  $B(\cos x, \sin x)$ ,  $C(\cos x, 0)$  и  $D(1, \operatorname{tg} x)$ . Заметим, что точка  $B$  лежит на прямой  $(O, D)$ .



Так как  $S_{\triangle AOB} < S_{\text{сект. } AOB} < S_{\triangle AOD}$ ,  $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot BC = \frac{1}{2}\sin x$ ,  $S_{\text{сект. } AOB} = \frac{1}{2}(OA)^2 \cdot x = \frac{1}{2}x$ ,  $S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}OA \cdot AD = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$ , то  $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$ .  $\square$

**Теорема 1.** Функции  $\sin x$ ,  $\cos x$  непрерывны на  $\mathbb{R}$ . Функция  $\operatorname{tg} x$  непрерывна во всех точках  $x \in \mathbb{R}$ , кроме точек  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

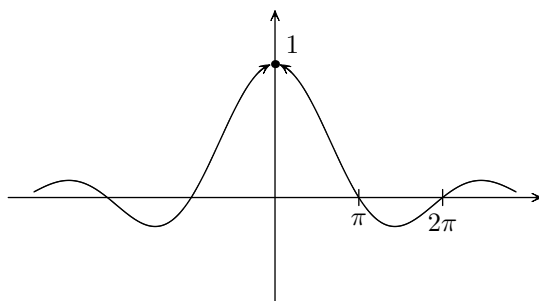
**Доказательство.** Так как  $|\sin x - \sin x_0| = 2 \sin \left| \frac{x-x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x+x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|$  при  $x \in (-\pi, \pi)$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} |\sin x - \sin x_0| = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ , т. е.  $\sin x$  — непрерывная функция.

Функцию  $\cos x$  можно представить как суперпозицию непрерывных функций  $y(x) = \frac{\pi}{2} - x$  и  $f(y) = \sin y$ :  $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = f(y(x))$ , следовательно,  $\cos x$  – непрерывная функция.

По теореме о непрерывности частного функция  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  непрерывна во всех точках, где знаменатель не обращается в 0.  $\square$

**Теорема 2.** (Первый замечательный предел.)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



**Доказательство.** По лемме 1 при  $x \in (0, \pi/2)$  справедливы неравенства  $1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$ , т.е.  $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ . В силу четности функций  $\cos x$  и  $\frac{\sin x}{x}$  эти неравенства имеют место при всех  $x$ :  $|x| < \pi/2$ ,  $x \neq 0$ . Из непрерывности косинуса следует, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$ . По теореме о трех функциях (теорема 4 § 2) получаем требуемое утверждение.  $\square$

**Пример.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ .

**Решение.** Из теоремы 2 и непрерывности косинуса следует:  $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow 0$ .  $\square$

Функции  $\arcsin$ ,  $\arccos$ ,  $\operatorname{arctg}$  вводятся как обратные к монотонным функциям:

$$\begin{aligned} f_1 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] &\rightarrow \mathbb{R}, & f_1(x) &= \sin x, & \arcsin y &= f_1^{-1}(y); \\ f_2 : [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}, & f_2(x) &= \cos x, & \arccos y &= f_2^{-1}(y); \\ f_3 : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) &\rightarrow \mathbb{R}, & f_3(x) &= \operatorname{tg} x, & \operatorname{arctg} y &= f_3^{-1}(y). \end{aligned}$$

Из теоремы 4 § 7 следует, что множеством значений функции  $f_1$  (а значит, и множеством определения функции  $\arcsin$ ) является отрезок  $[m, M]$ , где  $m = \min_{x \in [-\pi/2, \pi/2]} \sin x = -1$ ,  $M = \max_{x \in [-\pi/2, \pi/2]} \sin x = 1$ . Аналогично множеством определения функции  $\arccos$  также является отрезок  $[-1, 1]$ . Поскольку

$$\inf_{x \in (-\pi/2, \pi/2)} \operatorname{tg} x = -\infty, \quad \sup_{x \in (-\pi/2, \pi/2)} \operatorname{tg} x = +\infty,$$

то по теореме 5 § 7

$$\forall y_0 \in (-\infty, \infty) \quad \exists x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \quad \operatorname{tg}(x_0) = y_0.$$

Следовательно, множеством значений функции  $f_3(x) = \operatorname{tg} x$  (а значит, и множеством определения функции  $\operatorname{arctg}$ ) является вся числовая прямая.

В силу теоремы о непрерывности обратной функции функции  $\arcsin$ ,  $\arccos$ ,  $\operatorname{arctg}$  непрерывны на своих множествах определения.

**Пример.** а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ , б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ .

**Решение.** Докажем утверждение (а). Определим функции  $y(x) = \operatorname{arctg} x$ ,  $f(y) = \begin{cases} \frac{y}{\operatorname{tg} y}, & y \neq 0, \\ 1, & y = 0. \end{cases}$

Из предыдущего примера следует, что функция  $f(y)$  непрерывна на интервале  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . По теореме о непрерывности сложной функции функция  $\varphi(x) = f(y(x))$  — непрерывна. Так как  $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ , то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \varphi(0) = 1.$$

Утверждение (б) доказывается аналогично. □

## § 10. Степенная, показательная и логарифмическая функции

**Лемма 1.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(x) = x^n$ . Тогда

- 1) функция  $f$  непрерывна и строго возрастает на  $[0, +\infty)$ ;
- 2)  $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$ .

**Доказательство.** 1) Непрерывность  $f$  следует из теоремы о непрерывности произведения (теорема 1 § 6) и непрерывности функции  $\varphi(x) = x$ . Строгое возрастание  $f$  доказывается индукцией по  $n$ .

2) Поскольку  $\inf_{x \in [0, +\infty)} f(x) = 0$ ,  $\sup_{x \in [0, +\infty)} f(x) = +\infty$ , то в силу теоремы 5 § 7 имеем

$$\forall y_0 \in (0, +\infty) \quad \exists x_0 \in [0, +\infty) : \quad x_0^n = y_0,$$

т. е.  $(0, +\infty) \subset f([0, +\infty))$ . Отсюда и из равенства  $f(0) = 0$  следует, что  $[0, +\infty) \subset f([0, +\infty))$ . Поскольку  $\forall x \in [0, +\infty) \hookrightarrow f(x) \geq 0$ , то справедливо и обратное включение.  $\square$

**Определение.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y \in [0, +\infty)$ . Через  $y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y}$  обозначается значение функции  $f^{-1}(y)$ , обратной к функции  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^n$ .

В силу леммы 1 и теоремы об обратной функции (теоремы 1 § 8) функция  $g(y) = \sqrt[n]{y}$  определена, строго возрастает и непрерывна на луче  $[0, +\infty)$ .

**Определение.** Если  $x > 0$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$  и дробь  $\frac{m}{n}$  — несократима, определим:  $x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$ ,  $x^{-\frac{m}{n}} = 1/(x^{\frac{m}{n}})$ .

Тем самым мы определили  $x^p$  для любых  $x \in (0, +\infty)$ ,  $p \in \mathbb{Q}$ .

Используя эти определения, можно получить следующие свойства степеней с рациональным показателем.

- 1)  $\forall x, y \in \mathbb{Q} \quad \forall a > 0 \quad \hookrightarrow \quad \begin{aligned} (a^x)^y &= a^{xy}, \\ a^x a^y &= a^{x+y}; \end{aligned}$
- 2)  $\forall a, b \in \mathbb{R} : 0 < a < b \quad \forall x \in \mathbb{Q} \quad \hookrightarrow \quad \begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow a^x < b^x \\ x < 0 &\Rightarrow a^x > b^x; \end{aligned}$
- 3)  $\forall x, y \in \mathbb{Q} : x < y \quad \forall a \in \mathbb{R} : a > 0 \quad \hookrightarrow \quad \begin{aligned} a > 1 &\Rightarrow a^x < a^y; \\ a < 1 &\Rightarrow a^x > a^y. \end{aligned}$

**Лемма 2.**  $\forall a > 0 \hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$ .

**Доказательство.** Рассмотрим случай  $a > 1$ . Обозначим  $b_n = a^{1/n} - 1$ . Тогда  $b_n > 0$  и в силу неравенства Бернулли  $a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n > nb_n$ , следовательно,  $b_n < a/n \rightarrow 0$ , а значит,  $a^{1/n} \rightarrow 1$ .

Случай  $a \in (0, 1)$  сводится к предыдущему: так как  $\frac{1}{a} > 1$ , то  $(\frac{1}{a})^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$  и  $a^{\frac{1}{n}} = 1 / (\frac{1}{a})^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Теорема-определение 1.** Пусть  $a > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Тогда для любой последовательности  $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ , сходящейся к  $x$ , существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} \in \mathbb{R}$ . Этот предел при данном  $x$  не зависит от последовательности  $\{x_n\}$  и обозначается  $a^x$ .

**Доказательство.** Пусть для определенности  $a \geq 1$ . Покажем, что последовательность  $\{a^{x_n}\}$  – фундаментальна. Так как  $\{x_n\}$  – ограничена, то существует  $M \in \mathbb{N}$ :  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |x_n| \leq M$ . Следовательно, существует  $C = a^M$ :  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a^{x_n} \in (0, C]$ . Поэтому для любых  $m, k \in \mathbb{N}$  справедливо неравенство

$$|a^{x_m} - a^{x_k}| = a^{x_k} \cdot |a^{x_m - x_k} - 1| \leq C \cdot |a^{x_m - x_k} - 1|. \quad (1)$$

Так как последовательность  $\{x_n\}$  сходится, то она фундаментальна:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, k \geq N \hookrightarrow |x_m - x_k| < \varepsilon$ , следовательно,  $\forall n \in \mathbb{N} \exists N : \forall m, k \geq N \hookrightarrow |x_m - x_k| < 1/n$ . Поэтому  $\forall m, k \geq N \hookrightarrow a^{x_m - x_k} \in [a^{-1/n}, a^{1/n}]$ .

Так как по лемме 2  $a^{1/n} \rightarrow 1$ ,  $a^{-1/n} \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, k \geq N \hookrightarrow |a^{x_m - x_k} - 1| < \varepsilon$ , следовательно, с учетом (1), получаем  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, k \geq N \hookrightarrow |a^{x_m} - a^{x_k}| < C\varepsilon$ , следовательно, последовательность  $\{a^{x_n}\}$  фундаментальна. В силу критерия Коши последовательность  $\{a^{x_n}\}$  сходится. Так же, как в лемме 1 § 3, доказывается, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$  не зависит от последовательности  $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ , сходящейся к  $x$ .  $\square$

Используя свойства степеней с рациональным показателем, предельным переходом получаем следующие свойства степеней с действительным показателем.

- 1)  $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall a > 0 \quad \hookrightarrow \quad \begin{aligned} (a^x)^y &= a^{xy}, \\ a^x a^y &= a^{x+y}; \end{aligned}$
- 2)  $\forall a, b \in \mathbb{R} : 0 < a < b \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \hookrightarrow \quad \begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow a^x < b^x \\ x < 0 &\Rightarrow a^x > b^x; \end{aligned}$
- 3)  $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \quad \forall a \in \mathbb{R} : a > 0 \quad \hookrightarrow \quad \begin{aligned} a > 1 &\Rightarrow a^x < a^y; \\ a < 1 &\Rightarrow a^x > a^y. \end{aligned}$

**Лемма 3.**  $\forall a > 0 \hookrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1.$

**Доказательство.** Рассмотрим сначала случай, когда  $a \geq 1$ . В силу леммы 2  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$ , следовательно,  $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : (a^{-1/n}, a^{1/n}) \subset (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ . Поэтому в силу монотонности показательной функции  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{1}{n} > 0 : \forall x \in (-\delta, \delta) \hookrightarrow a^x \in (a^{-1/n}, a^{1/n}) \subset (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ .  $\square$

**Теорема 2.**  $\forall a \geq 0$  функция  $f(x) = a^x$  непрерывна на  $\mathbb{R}$ .

**Доказательство.** В силу леммы 3 для любого  $x_0 \in \mathbb{R}$  имеем  $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = \lim_{y \rightarrow 0} a^{x_0+y} = a^{x_0} \lim_{y \rightarrow 0} a^y = a^{x_0}$ .  $\square$

**Определение.** Пусть  $a > 0, a \neq 1, y > 0$ . Тогда через  $\log_a y$  обозначим значение обратной функции  $f^{-1}(y)$  к функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a^x$ .

В силу монотонности функции  $f(x) = a^x$  при  $a > 0, a \neq 1$  она обратима. Так как  $\inf_{x \in \mathbb{R}} a^x = 0, \sup_{x \in \mathbb{R}} a^x = +\infty$ , то по теореме 5 § 7 функция  $f^{-1}(y) = \log_a y$  определена при всех  $y \in (0, +\infty)$ . По теореме о непрерывности обратной функции функция  $f^{-1}(y) = \log_a y$  непрерывна.

**Определение.** Пусть  $x > 0$ , тогда  $\ln x = \log_e x$ , где число  $e$  определено в § 7 главы 1.

**Лемма 4.**  $\forall a \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \quad \forall b > 0 \hookrightarrow \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}.$

**Доказательство.** Поскольку  $f(x) = \log_a x$  – функция, обратная к функции  $g(x) = a^x$ , то  $a^{\log_a b} = b, e^{\ln a} = a, e^{\ln b} = b$ . Следовательно,

$$e^{\ln a \cdot \log_a b} = (e^{\ln a})^{\log_a b} = a^{\log_a b} = b = e^{\ln b}.$$

Отсюда и из обратимости функции  $e^x$  следует, что  $\ln a \log_a b = \ln b$ , т. е.  $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$ .  $\square$

**Теорема 3.** Пусть  $a > 0$ . Тогда функция  $f(x) = \log_x a$  непрерывна на множестве  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ .

**Доказательство** следует из непрерывности  $\ln x$ , леммы 4 и теоремы о непрерывности частного.  $\square$

**Теорема 4.** Пусть  $p \in \mathbb{R}$ . Тогда функция  $f(x) = x^p$  непрерывна на  $(0, +\infty)$ .

**Доказательство** следует из формулы  $x^p = e^{p \ln x}$ , непрерывности логарифма и экспоненты и теоремы о непрерывности сложной функции.  $\square$

## § 11. Второй замечательный предел

**Лемма 1.** Если  $\{n_k\}$  – произвольная (не обязательно строго возрастающая) последовательность натуральных чисел такая, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e.$$

**Доказательство.** Как показано в примере § 7 главы 1,  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , где  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Поэтому  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow a_n \in U_\varepsilon(e)$ . Так как  $n_k \rightarrow +\infty$  при  $k \rightarrow \infty$ , то  $\forall N \exists K : \forall k \geq K \hookrightarrow n_k \geq N$ . Таким образом,  $\forall \varepsilon > 0 \exists K : \forall k \geq K \hookrightarrow a_{n_k} \in U_\varepsilon(e)$ , т. е.  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = e$ .  $\square$

**Лемма 2.**  $\lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{1/x} = e$ .

**Доказательство.** Воспользуемся определением предела справа по Гейне. Пусть задана произвольная последовательность  $\{x_k\}$  такая, что  $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_k > 0$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ . Требуется доказать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1+x_k)^{1/x_k} = e. \quad (1)$$

Так как  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{x_k} = +\infty$ , то  $\exists k_0 : \forall k > k_0 \hookrightarrow \frac{1}{x_k} \geq 1$ .

При  $k > k_0$  определим  $n_k$  как целую часть числа  $1/x_k$ , т. е.  $n_k \in \mathbb{N}$ ,  $n_k \leq 1/x_k < n_k + 1$ , тогда  $1 + \frac{1}{n_k+1} \leq 1 + x_k \leq 1 + \frac{1}{n_k}$  и,

следовательно,

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} \leq (1 + x_k)^{1/x_k} \leq \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1}. \quad (2)$$

В силу леммы 1 при  $k \rightarrow \infty$  имеем

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} &= \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1} \bigg/ \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right) \rightarrow e, \\ \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1} &= \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \left(1 + \frac{1}{n_k}\right) \rightarrow e. \end{aligned}$$

Поэтому из неравенств (2) по теореме о трех последовательностях следует (1).  $\square$

**Лемма 3.**  $\lim_{x \rightarrow -0} (1 + x)^{1/x} = e$ .

**Доказательство.** Пусть задана произвольная последовательность  $\{x_k\}$  такая, что  $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_k < 0$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ . Тогда  $\exists k_0 : \forall k > k_0 \hookrightarrow x_k \in (-1, 0)$ . При  $k > k_0$  определим  $y_k = -\frac{x_k}{1+x_k}$ .

Заметим, что

$$(1 + y_k)(1 + x_k) = 1, \quad x_k = -\frac{y_k}{1 + y_k}, \quad (1 + x_k)^{1/x_k} = (1 + y_k)^{1+(1/y_k)}.$$

Так как  $y_k > 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$ , то в силу леммы 2  $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + y_k)^{1/y_k} = e$ , следовательно,  $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + x_k)^{1/x_k} = e$ . Пользуясь определением Гейне, получаем требуемое утверждение.  $\square$

Из лемм 2, 3 следует

**Теорема 1.** (Второй замечательный предел.)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

**Теорема 2.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ .

**Доказательство.** Заметим, что  $\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln((1+x)^{1/x}) = \ln(f(y(x)))$ , где  $\forall y > 0 \hookrightarrow f(y) = \ln y$  и  $\forall x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \hookrightarrow y(x) = (1+x)^{1/x}$ . Поскольку согласно теореме 1  $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = e$  и согласно

теореме 3 § 10 функция  $f$  непрерывна в точке  $y_0 = e$ , то по теореме о пределе сложной функции (теорема 2(б) § 6) получаем, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(y(x)) = f(y_0) = \ln e = 1$ .  $\square$

**Теорема 3.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .

**Доказательство.** Определим функцию  $y(x) = e^x - 1$ . Заметим, что  $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{y(x)}{\ln(1+y(x))} = f(y(x))$ , где  $\forall y \in (-1, 0) \cup (0, 1) \hookrightarrow f(y) = \frac{y}{\ln(1+y)}$ . Из теоремы 2 следует, что  $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$ . Так как функция  $y(x)$  непрерывна, то  $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = y(0) = 0$ . Так как функция  $y(x)$  строго возрастает, то  $\forall x \neq 0 \hookrightarrow y(x) \neq y(0) = 0$ . Поэтому, применяя теорему о пределе сложной функции (теорема 2(а) § 6), получаем, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(y(x)) = \lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$ .  $\square$

**Определение.** (Гиперболические функции.)

*Косинус гиперболический* :  $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,

*синус гиперболический* :  $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,

*тангенс гиперболический* :  $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ ,

*котангенс гиперболический* :  $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ .

**Пример.** Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{x} = 1.$$

**Решение.** В силу теоремы 3  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ .

Так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ch} x = \operatorname{ch} 0 = 1$ , то  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$ .  $\square$

## § 12. Сравнение функций

**Определение.** Пусть функции  $f$  и  $g$  определены и не обращаются в 0 в некоторой  $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ . Функции  $f$  и  $g$  называются *эквивалентными* (пишут:  $f(x) \sim g(x)$ ) при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

**Лемма 1.** 1) Если  $f(x) \sim g(x)$ ,  $g(x) \sim h(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , то  $f(x) \sim h(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ .

2) Если  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , то  $g(x) \sim f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ .

**Доказательство** следует из теорем о пределе произведения и пределе частного.

Из теорем и примеров § 9 и § 11 следует, что при  $x \rightarrow 0$

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x \sim \arcsin x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim \operatorname{sh} x \sim \operatorname{th} x. \quad (1)$$

**Лемма 2.** Пусть функции  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$  определены и не обращаются в 0 в некоторой  $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$  и пусть  $f_1(x) \sim f_2(x)$ ,  $g_1(x) \sim g_2(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ . Тогда  $f_1(x)g_1(x) \sim f_2(x)g_2(x)$ ,  $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$  при  $x \rightarrow x_0$ .

**Доказательство** следует из теорем о пределе произведения и пределе частного.

**Замечание.** Из условий  $f_1(x) \sim f_2(x)$ ,  $g_1(x) \sim g_2(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  не следует  $f_1(x) + g_1(x) \sim f_2(x) + g_2(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ . Например,  $-x \sim -x$ ,  $x + x^2 \sim x + x^3$  при  $x \rightarrow 0$ , но  $-x + x + x^2 \not\sim -x + x + x^3$  при  $x \rightarrow 0$ .

**Лемма 3.** Если  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , а если один из пределов не существует, то не существует и другой.

**Доказательство.** Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \mathbb{R}$ , то по теореме о пределе произведения  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . Аналогично, если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ , то  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

**Следствие.** При вычислении пределов произведений и частных функций эти функции можно заменять на эквивалентные.

**Лемма 4.** Пусть  $f(y) \sim g(y)$  при  $y \rightarrow y_0$  и пусть  $y(x) \rightarrow y_0$  при  $x \rightarrow x_0$  и  $y(x) \neq y_0$  при  $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$ . Тогда  $f(y(x)) \sim g(y(x))$  при  $x \rightarrow x_0$ .

**Доказательство.** По теореме о пределе сложной функции (теореме 2(а) § 6) имеем  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(y(x))}{g(y(x))} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(y)}{g(y)} = 1$ .  $\square$

**Пример.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \arcsin x^2}{\operatorname{th} x \ln^2(1+x)}$ .

**Решение.** Так как  $\arcsin x^2 \sim x^2$ ,  $e^x - 1 \sim x$ ,  $\operatorname{th} x \sim x$ ,  $\ln(1+x) \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ , то  $\frac{(e^x - 1) \arcsin x^2}{\operatorname{th} x \ln^2(1+x)} \sim \frac{x^2 \cdot x}{x \cdot x^2} = 1$  при  $x \rightarrow 0$ , следовательно, предел равен 1.  $\square$

**Определение.** Пусть функции  $f$  и  $g$  определены в  $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$  и функция  $g(x)$  не обращается в 0. Говорят, что функция  $f$  является *бесконечно малой относительно функции  $g$*  при  $x \rightarrow x_0$  и пишут  $f(x) = o(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

**Замечание.**  $o(g(x))$  – это класс функций. Запись  $f(x) = o(g(x))$  означает, что функция  $f(x)$  принадлежит классу функций  $o(g(x))$ . Поэтому равенство в записи  $f(x) = o(g(x))$  необратимо, т. е. нельзя писать  $o(g(x)) = f(x)$ . Например,  $x^3 = o(x)$ ,  $x^2 = o(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , но  $x^3 \neq x^2$ .

**Теорема 2.**  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow x_0 \iff f(x) - g(x) = o(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0$ .

**Доказательство.**  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow x_0 \iff$   
 $\iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \iff$   
 $\iff f(x) - g(x) = o(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

Из теоремы 2 следует, что эквивалентности (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sin x &= x + o(x), & \operatorname{tg} x &= x + o(x), \\ \arcsin x &= x + o(x), & \operatorname{arctg} x &= x + o(x), \\ e^x &= 1 + x + o(x), & \ln(1+x) &= x + o(x), \\ \operatorname{sh} x &= x + o(x), & \operatorname{th} x &= x + o(x) \end{aligned} \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

**Определение.** Пусть функции  $f$  и  $g$  определены в  $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$ . Говорят, что функция  $f$  *ограничена относительно функции  $g$* , и пишут  $f(x) = O(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0$ , если

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow |f(x)| \leq C|g(x)|.$$

**Теорема 3.** (Свойство  $o$ -малого и  $O$ -большого.)

Для функций, не обращающихся в 0 в некоторой  $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$  при  $x \rightarrow x_0$ , справедливы равенства:

- |                             |                                                              |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------|
| 1) $o(f) \pm o(f) = o(f)$ ; | 6) $O(O(f)) = O(f)$ ;                                        |
| 2) $O(f) \pm O(f) = O(f)$ ; | 7) $o(f) \cdot O(g) = o(fg)$ ;                               |
| 3) $o(f) = O(f)$ ;          | 8) $O(f) \cdot O(g) = O(fg)$ ;                               |
| 4) $o(O(f)) = o(f)$ ;       | 9) $(o(f))^\alpha = o(f^\alpha) \quad \forall \alpha > 0$ ;  |
| 5) $O(o(f)) = o(f)$ ;       | 10) $(O(f))^\alpha = O(f^\alpha) \quad \forall \alpha > 0$ . |

**Докажем**, например, первое утверждение. Требуется доказать, что если  $g_1(x) = o(f(x))$ ,  $g_2(x) = o(f(x))$  при  $x \rightarrow x_0$ , то  $g_1(x) \pm g_2(x) = o(f(x))$  при  $x \rightarrow x_0$ . Действительно, из условий  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_1(x)}{f(x)} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_2(x)}{f(x)} = 0$  следует  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_1(x) \pm g_2(x)}{f(x)} = 0$ , т. е.  $g_1(x) \pm g_2(x) = o(f(x))$  при  $x \rightarrow x_0$ . Остальные утверждения проверяются аналогично.  $\square$

## ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

## § 1. Определение и геометрический смысл производной и дифференциала

**Определение.** Пусть функция  $f$  определена в  $U_\delta(x_0)$ . Производной функции  $f$  в точке  $x_0$  называется

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \in \overline{\mathbb{R}}$$

и обозначается  $f'(x_0)$ . Если указанный предел не существует, то производная  $f'(x_0)$  не существует.

Выясним геометрический смысл производной.

Напишем уравнение секущей, проходящей через точки графика  $(x_0, f(x_0))$  и  $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ :

$y_{\text{СЕК}}(x, \Delta x) = kx + b$ , где числа  $k$  и  $b$  определяются из системы уравнений

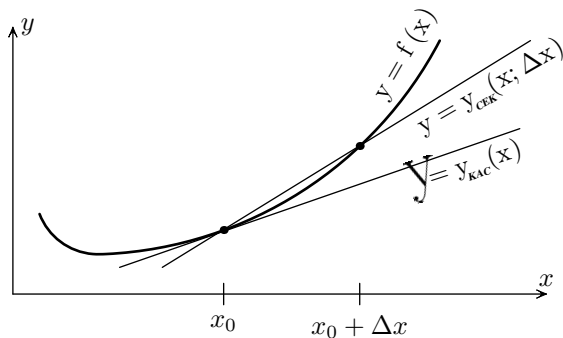
$$\begin{cases} f(x_0) = y_{\text{СЕК}}(x_0, \Delta x), \\ f(x_0 + \Delta x) = y_{\text{СЕК}}(x_0 + \Delta x, \Delta x), \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} f(x_0) = kx_0 + b, \\ f(x_0 + \Delta x) = k(x_0 + \Delta x) + b. \end{cases}$$

Решая систему,  $b = f(x_0) - kx_0$ ,  $k = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ , получаем уравнение секущей:

$$y_{\text{СЕК}}(x, \Delta x) = f(x_0) + \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}(x - x_0). \quad (1)$$



**Определение.** *Невертикальной касательной* к графику функции  $f$  в точке  $x_0$  называется невертикальная прямая, которая является предельным положением секущей:

$$\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow y_{\text{КАС}}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{СЕК}}(x, \Delta x).$$

Непосредственно из определений и формулы (1) следует

**Теорема 1.** (Геометрический смысл производной.) Существование невертикальной касательной к графику функции  $f$  в точке  $x_0$  эквивалентно существованию конечной производной функции  $f$  в точке  $x_0$ . Уравнение касательной имеет вид

$$y_{\text{КАС}}(x) = f(x_0) + k_{\text{КАС}} \cdot (x - x_0), \quad \text{где} \quad k_{\text{КАС}} = f'(x_0).$$

**Определение.** Пусть функция  $f$  определена в  $U_\delta(x_0)$ . Функция  $f$  называется *дифференцируемой* в точке  $x_0$ , если существует число  $A$  такое, что приращение функции  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  имеет вид  $\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  (число  $A$  не зависит от  $\Delta x$ , но зависит от  $x_0$ ).

**Теорема 2.** (Связь дифференцируемости и существования производной.) Функция  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда существует конечная производная  $f'(x_0)$ . Число  $A$  в определении дифференцируемой функции совпадает с  $f'(x_0)$ , т. е.  $\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}
 \Delta f &= A\Delta x + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \\
 &\text{по опр. } o\text{-малого} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f - A\Delta x}{\Delta x} = 0 \quad \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= A \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \exists f'(x_0) = A \in \mathbb{R}. \quad \square
 \end{aligned}$$

**Определение.** Пусть функция  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ . *Дифференциалом функции  $f$*  называется следующая линейная функция переменного  $\Delta x$ :  $df(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \Delta x$ . При записи дифференциала функции аргумент  $\Delta x$  обычно не пишут, но подразумевают:

$$df(x_0) = f'(x_0) \Delta x.$$

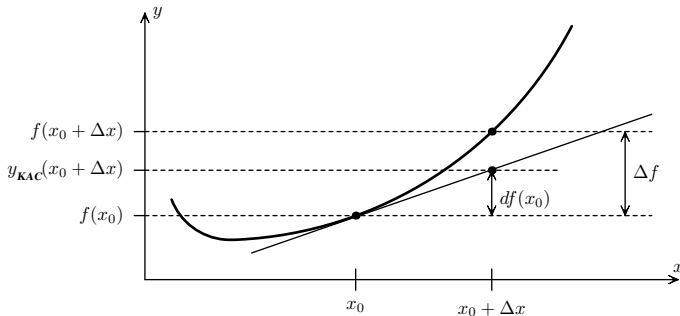
**Определение.** *Дифференциалом независимой переменной* называется ее приращение:  $dx = \Delta x = x - x_0$ .

Итак, в случае дифференцируемости функции  $f$  в точке  $x_0$  справедливы формулы

$$df(x_0) = f'(x_0) dx,$$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0) + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Заметим, что дифференциал, будучи линейной функцией, определен для всех  $\Delta x$ , а приращение функции  $\Delta f$  определено только для тех  $\Delta x$ , для которых  $x_0 + \Delta x$  лежит во множестве определения функции  $f$ .



Из теорем 1, 2 следует

**Теорема 3.** (Геометрический смысл дифференциала.) Существование дифференциала эквивалентно существованию невертикальной касательной. В случае существования дифференциал равен приращению ординаты касательной:  $y_{\text{кас}}(x) - y_{\text{кас}}(x_0) = df(x_0)$ .

**Определение.** (Односторонние производные.)

1) Если функция определена на  $(x_0 - \delta, x_0)$  и существует односторонний предел  $f(x_0 - 0) \in \mathbb{R}$ , то *левой производной* в точке  $x_0$  называется левый предел

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0 - 0)}{x - x_0}.$$

2) Если функция определена на  $(x_0, x_0 + \delta)$  и существует односторонний предел  $f(x_0 + 0) \in \mathbb{R}$ , то *правой производной* в точке  $x_0$  называется правый предел

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0 + 0)}{x - x_0}.$$

**Лемма 1.** Если функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , то  $\exists f'(x_0) \iff \exists f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ .

**Доказательство** состоит в применении леммы об односторонних пределах (лемма 1 § 5 главы 2).  $\square$

**Теорема 4.** (Связь непрерывности и дифференцируемости.) Функция, дифференцируемая в точке  $x_0$ , является непрерывной в этой точке. Обратное неверно.

**Доказательство.** 1) Пусть функция  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Тогда  $\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Следовательно,  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \rightarrow 0$  ( $\Delta x \rightarrow 0$ ), а значит,  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ .

2) Например, функция  $f(x) = |x|$  непрерывна в точке 0, но не является дифференцируемой в этой точке.  $\square$

**Задача 1.** Пусть функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Верно ли, что существует окрестность точки  $x_0$ , в которой  $f$  непрерывна?

## § 2. Правила дифференцирования

**Теорема 1.** Если функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы в точке  $x_0$ , то

- 1)  $\exists (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$
  - 2)  $\exists (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$
  - 3) Если дополнительно  $g(x) \neq 0$ , то
- $$\exists \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

**Доказательство.** Обозначим  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ,  $\Delta g = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$ . Заметим, что при  $\Delta x \rightarrow 0$  справедливы соотношения:  $\Delta f \rightarrow 0$ ,  $\Delta g \rightarrow 0$ ,  $\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0)$ ,  $\frac{\Delta g}{\Delta x} \rightarrow g'(x_0)$ .

- 1)  $\frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0) + g'(x_0)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ ;
- 2)  $\Delta(fg) = f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0) = (f(x_0) + \Delta f)(g(x_0) + \Delta g) - f(x_0)g(x_0) = f(x_0)\Delta g + g(x_0)\Delta f + \Delta f\Delta g$ , следовательно,  $\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = f(x_0)\frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x_0)\frac{\Delta f}{\Delta x} + \Delta g\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ ;
- 3)  $\frac{\Delta(f/g)}{\Delta x} = \frac{(f(x_0) + \Delta f)/(g(x_0) + \Delta g) - f(x_0)/g(x_0)}{\Delta x} =$   
 $= \frac{g(x_0)\Delta f - f(x_0)\Delta g}{g(x_0)(g(x_0) + \Delta g)\Delta x} \rightarrow \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . □

**Теорема 2.** (Производная сложной функции.) Пусть функция  $y(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , а функция  $z(y)$  дифференцируема в точке  $y_0 = y(x_0)$ . Тогда сложная функция  $z = f(x) = z(y(x))$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $f'(x_0) = z'(y_0)y'(x_0)$ , что записывают также в форме  $z'_x = z'_y y'_x$ .

**Доказательство.** Определим функцию

$$g(y) = \begin{cases} \frac{z(y) - z(y_0)}{y - y_0}, & y \neq y_0, \\ z'(y_0), & y = y_0. \end{cases}$$

Так как по определению производной  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{z(y) - z(y_0)}{y - y_0} = z'(y_0) = g(y_0)$ , то функция  $g$  непрерывна в точке  $y_0$ .

В силу теоремы о непрерывности дифференцируемой функции функция  $y(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ . Следовательно, сложная функция  $g(y(x))$  непрерывна в точке  $x_0$ , т.е.  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(y(x)) = g(y(x_0)) = g(y_0) = z'(y_0)$ .

Из определения функции  $g$  следует равенство  $z(y) - z(y_0) = g(y)(y - y_0)$ , которое справедливо не только в некоторой проколотовой окрестности точки  $y_0$ , но и при  $y = y_0$ . Поэтому в некоторой окрестности точки  $x_0$  справедливо равенство  $f(x) - f(x_0) = z(y(x)) - z(y_0) = g(y(x))(y(x) - y_0)$ . Отсюда по теореме о пределе произведения следует, что существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} g(y(x)) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = z'(y_0) y'(x_0),$$

т. е.  $\exists f'(x_0) = z'(y_0) y'(x_0)$ . □

**Следствие.** (Инвариантность формы первого дифференциала.) Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда дифференциалы простой функции  $z(y)$  и сложной функции  $z = f(x) = z(y(x))$  могут быть записаны в одной и той же (инвариантной) форме:  $dz = z'(y_0) dy$ . Хотя в первом случае  $dy$  – приращение независимой переменной  $y$ , а во втором случае  $dy = dy(x_0)$  – дифференциал функции.

**Доказательство.** В случае простой функции формула  $dz = dz(y_0) = z'(y_0) dy$  следует из определения дифференциала.

В случае сложной функции по определению дифференциала получаем  $dz = df(x_0) = f'(x_0) dx$ . В силу теоремы 2  $f'(x_0) = z'(y_0) y'(x_0)$ , следовательно,  $dz = z'(y_0) y'(x_0) dx = z'(y_0) dy(x_0) = z'(y_0) dy$ . □

**Теорема 3.** (Производная обратной функции.) Пусть функция  $y(x)$  определена, строго монотонна и непрерывна в некоторой  $U_\delta(x_0)$ . Пусть  $\exists y'(x_0) \in \mathbb{R}$ ,  $y'(x_0) \neq 0$ . Тогда обратная функция  $x(y)$  дифференцируема в точке  $y_0 = y(x_0)$  и  $x'(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)} = \frac{1}{y'(x(y_0))}$ .

**Доказательство.** Существование обратной функции следует из строгой монотонности  $y(x)$ . По теореме о непрерывности обратной функции функция  $x(y)$  непрерывна в точке  $y_0$ , т. е.  $\lim_{y \rightarrow y_0} x(y) = x_0$ .

Для любого  $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$  определим  $f(x) = \frac{y(x) - y_0}{x - x_0}$ . По определению производной  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y'(x_0)$ . В силу обратимости функции  $x(y)$  при  $y \neq y_0$  справедливо неравенство  $x(y) \neq x_0$ , следовательно,  $f(x(y)) = \frac{y - y_0}{x(y) - x_0}$  при  $y \neq y_0$ . Пользуясь теоремой о пределе сложной функции (теорема 2(а) § 6), получаем равенства

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{x(y) - x_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x(y)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y'(x_0).$$

Следовательно,  $\exists x'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{x(y) - x_0}{y - y_0} = \frac{1}{y'(x_0)}$ . □

**Теорема 4.** (Производные элементарных функций.)

- 1)  $C' = 0$  ( $C = \text{const}$ );
- 2)  $(a^x)' = a^x \ln a$ ,  $a > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;
- 3)  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x > 0$ ;
- 4)  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$ ;  
 $(x^n)' = nx^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;
- 5)  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(\cos x)' = -\sin x$ ;
- 6)  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ,  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ;
- 7)  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;
- 8)  $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ ;
- 9)  $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ ,  $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ ;
- 10)  $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ ,  $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ .

**Доказательство.** 1)  $f(x) = C \Rightarrow \Delta f = 0 \Rightarrow f' = 0$ .

2) В силу теоремы 3 § 11 главы 2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ , следовательно,  
 $(e^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$ , поэтому по теореме  
о производной сложной функции  $(a^x)' = (e^{\ln a x})' = e^{\ln a x} (\ln a x)' =$   
 $= a^x \ln a$ . Здесь использовано равенство  $x' = 1$ , которое следует непосредственно из определения производной.

3) По теореме о производной обратной функции  $(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} =$   
 $= \frac{1}{a^y \ln a}$ , где  $y = \log_a x$ , т. е.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ .

4) При  $x > 0$ :  $(x^\alpha)' = (e^{\ln x \alpha})' = e^{\ln x \alpha} (\ln x \alpha)' = \alpha x^\alpha / x = \alpha x^{\alpha-1}$ .

Формула  $(x^n)' = nx^{n-1}$  при  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  доказывается индукцией по  $n$ .

5) Заметим, что  $\sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos(x + \frac{1}{2} \Delta x) \sin(\frac{1}{2} \Delta x)$ .  
Используя первый замечательный предел и непрерывность косинуса, получаем

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \frac{1}{2}\Delta x) \frac{\sin(\frac{1}{2}\Delta x)}{\frac{1}{2}\Delta x} = \cos x.$$

Пользуясь формулой для производной сложной функции, получаем  $(\cos x)' = (\sin(\pi/2 - x))' = -\cos(\pi/2 - x) = -\sin x$ .

$$6) (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = (\operatorname{tg}(\pi/2 - x))' = -\frac{1}{\cos^2(\pi/2 - x)} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$7) (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}, \text{ где } y = \arcsin x, \text{ т. е. } (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{Так как } \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \text{ то } (\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$8) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y, \text{ где } y = \operatorname{arctg} x, \text{ т. е. } (\operatorname{arctg} x)' = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\text{Так как } \operatorname{arctctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x, \text{ то } (\operatorname{arctctg} x)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$9) (\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

$$10) (\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - (\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{th} x}\right)' = -\frac{(\operatorname{th} x)'}{\operatorname{th}^2 x} = -\frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \quad \square$$

## Производная неявной функции

**Определение.** Функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  называется *неявной* функцией, заданной уравнением  $F(x, y) = 0$ , если  $\forall x \in X \hookrightarrow F(x, f(x)) = 0$ .

Например, уравнение  $x^2 + y^2 = 1$  задает следующие непрерывные неявные функции:  $y = f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$  и  $y = f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ .

Пусть неявная функция  $y = f(x)$  задана уравнением  $F(x, y) = 0$ . Тогда производную неявной функции  $f(x)$  (если она существует) можно найти из условия равенства нулю производной сложной функции  $\varphi(x) = F(x, f(x)) = 0$ :  $\varphi'(x) = 0$ .

**Пример.** Найти производную в точке  $x = 0$  функции  $y(x)$ , заданной уравнением  $\sin x + x - y - y^3 = 0$ .

**Решение.** Так как  $\varphi(x) = \sin x + x - y(x) - y^3(x) = 0$ , то  $0 = \varphi'(x) = \cos x + 1 - y'(x) - 3y^2(x)y'(x)$ , следовательно,  $y'(x) = \frac{\cos x + 1}{1 + 3y^2(x)}$ . При  $x = 0$  имеем  $0 = y^3 + y = y(y^2 + 1)$ , следовательно,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = \frac{1+1}{1+0} = 2$ .  $\square$

## Производная параметрически заданной функции

**Определение.** Пусть заданы функции  $x(t)$  и  $y(t)$ . Пусть функция  $x(t)$  обратима, т.е. существует обратная функция  $t(x)$ . Тогда функция  $y = \varphi(x) = y(t(x))$  называется *параметрически заданной* функцией.

Если выполнены условия теоремы о производной обратной функции, то  $\exists t'(x) = \frac{1}{x'(t)}$ , где  $t = t(x)$ .

Если выполнены условия теоремы о производной сложной функции, то  $\exists y'_x(x) = \varphi'(x) = y'_t(t(x)) t'(x) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$ , где  $t = t(x)$ . Итак, при выполнении условий этих теорем справедлива формула

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

**Теорема 5.** (Правила вычисления дифференциала.) Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в точке  $x_0$ . Тогда

- 1)  $\exists \quad d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$ ,
- 2)  $\exists \quad d(fg)(x_0) = g(x_0) df(x_0) + f(x_0) dg(x_0)$ ,
- 3) если  $g(x_0) \neq 0$ , то  $\exists \quad d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0) df(x_0) - f(x_0) dg(x_0)}{g^2(x_0)}$ .

**Доказательство.** 1) Так как функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в точке  $x_0$ , то по теореме 1  $\exists (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ . В силу определения дифференциала получаем  $\exists d(f + g)(x_0) = (f + g)'(x_0) dx = f'(x_0) dx + g'(x_0) dx = df(x_0) + dg(x_0)$ .

Пункты (2) и (3) доказываются аналогично.  $\square$

## § 3. Производные и дифференциалы высших порядков

Производная  $f^{(n)}(x)$  порядка  $n$  определяется индукцией по порядку.

**Определение.** Производная нулевого порядка – это сама функция:  $f^{(0)}(x) = f(x)$ . Производная первого порядка  $f^{(1)}(x) = f'(x)$  была определена ранее. Если функция  $f^{(n)}$  определена в  $U_\delta(x)$ , то  $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$ .

**Определение.** Факториалом числа  $n \in \mathbb{N}$  называется число  $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$ .

Строгое определение факториала числа  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  дается по индукции:  $0! = 1$ ,  $1! = 1$ ,  $n! = n \cdot (n-1)!$ .

**Определение.** Пусть  $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $k \leq n$ . Определим биномиальный коэффициент:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

**Лемма 1.** (Свойства биномиальных коэффициентов.)

- 1)  $C_n^0 = 1$ ,  $C_n^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ;
- 2)  $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k \quad \forall n, k \in \mathbb{N} : k \leq n$ .

**Доказательство.** 1)  $C_n^0 = \frac{n!}{n!0!} = 1$ , аналогично  $C_n^n = 1$ .

$$2) C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} = \frac{n!}{(n-k+1)!k!}(n-k+1 + k) = \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!k!} = C_{n+1}^k. \quad \square$$

**Теорема 1.** (Формула Лейбница.) Пусть существуют производные функций  $u(x)$ ,  $v(x)$  в точке  $x$  порядка  $n$ . Тогда

$$\begin{aligned} \exists \quad (u(x)v(x))^{(n)} &= \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) = \\ &= C_n^0 u^{(0)}(x) v^{(n)}(x) + C_n^1 u^{(1)}(x) v^{(n-1)}(x) + \dots + C_n^n u^{(n)}(x) v^{(0)}(x). \end{aligned}$$

**Доказательство.** При  $n = 1 \quad (uv)' = u'v + uv' = \sum_{k=0}^1 C_1^k u^{(k)} v^{(1-k)}$  теорема справедлива.

Пусть формула Лейбница справедлива при  $n = s$ , тогда  $(uv)^{(s)} = \sum_{k=0}^s C_s^k u^{(k)} v^{(s-k)}$ . Покажем, что формула Лейбница справедлива при  $n = s + 1$ .

$$\begin{aligned}
(uv)^{(s+1)} &= ((uv)^{(s)})' = \sum_{k=0}^s C_s^k (u^{(k)} v^{(s-k)})' = \\
&= \sum_{k=0}^s C_s^k u^{(k+1)} v^{(s-k)} + \sum_{k=0}^s C_s^k u^{(k)} v^{(s+1-k)} \quad j \equiv k+1 \\
&= \sum_{j=1}^{s+1} C_s^{j-1} u^{(j)} v^{(s+1-j)} + \sum_{k=0}^s C_s^k u^{(k)} v^{(s+1-k)} \quad k \equiv j \\
&= \sum_{k=1}^s C_s^{k-1} u^{(k)} v^{(s+1-k)} + C_s^s u^{(s+1)} v^{(0)} + \\
&\quad + C_s^0 u^{(0)} v^{(s+1)} + \sum_{k=1}^s C_s^k u^{(k)} v^{(s+1-k)} \quad \text{свойство 1} \\
&= u^{(0)} v^{(s+1)} + \sum_{k=1}^s (C_s^{k-1} + C_s^k) u^{(k)} v^{(s+1-k)} + u^{(s+1)} v^{(0)} \quad \text{свойства 1, 2} \\
&= C_{s+1}^0 u^{(0)} v^{(s+1)} + \sum_{k=1}^s C_{s+1}^k u^{(k)} v^{(s+1-k)} + C_{s+1}^{s+1} u^{(s+1)} v^{(0)} = \\
&= \sum_{k=0}^{s+1} C_{s+1}^k u^{(k)} v^{(s+1-k)},
\end{aligned}$$

т. е. формула Лейбница верна при  $n = s + 1$ . По индукции получаем, что формула Лейбница справедлива для любого  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Аналогично доказательству теоремы 1 проводится доказательство *бинома Ньютона*:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Этой формуле коэффициенты  $C_n^k$  и обязаны своим названием.

**Определение.** Дифференциал первого порядка  $d^1 f(x) = df(x)$  был определен ранее. Пусть в  $U_\delta(x_0)$  существует дифференциал  $n$ -го

порядка функции  $f$ :  $d^n f(x)$ . Дифференциалом порядка  $n + 1$  называется дифференциал первого порядка от дифференциала порядка  $n$ :  $d^{n+1}f(x_0) = d(d^n f)(x_0)$ .

Дифференциал  $d^n f(x)$  является функцией двух переменных:  $x$  и  $dx$ . При вычислении  $d^{n+1}f(x_0)$  нужно зафиксировать  $dx$  и дифференцировать  $d^n f(x)$  как функцию одной переменной  $x$ .

Функция  $f$  называется  $n$  раз дифференцируемой в точке  $x_0$ , если  $\exists d^n f(x_0)$ .

**Теорема 2.** 1)  $\exists d^n f(x_0) \iff \exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ ;  
2) если  $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ , то  $d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0) (dx)^n$ .

**Доказательство.** При  $n = 1$  утверждение теоремы следует из определения дифференциала первого порядка.

Пусть утверждение теоремы справедливо при  $n = k$  (предположение индукции).

Если ни в какой окрестности точки  $x_0$  не существует  $f^{(k)}(x) \in \mathbb{R}$ , то в силу предположения индукции не существует  $d^k f(x)$ . Тогда не существует  $f^{(k+1)}(x_0)$  и не существует  $d^{k+1}f(x_0)$ , и при  $n = k + 1$  утверждение теоремы тривиально выполнено.

Пусть теперь в некоторой  $U_\delta(x_0) \ni f^{(k)}(x) \in \mathbb{R}$ . Тогда в силу предположения индукции в  $U_\delta(x_0) \ni d^k f(x) = f^{(k)}(x) (dx)^k$ . По определению дифференциала порядка  $k + 1$

$$\begin{aligned} d^{k+1}f(x_0) &= d(d^k f)(x_0) = d(f^{(k)}(x) (dx)^k) \Big|_{x=x_0} = \\ &= d(f^{(k)}(x)) \Big|_{x=x_0} (dx)^k = f^{(k+1)}(x_0) dx (dx)^k = f^{(k+1)}(x_0) (dx)^{k+1}. \end{aligned}$$

Поэтому существование  $d^{k+1}f(x_0)$  эквивалентно существованию  $f^{(k+1)}(x_0) \in \mathbb{R}$  и в случае существования  $f^{(k+1)}(x_0) \in \mathbb{R}$  справедлива формула  $d^{k+1}f(x_0) = f^{(k+1)}(x_0) (dx)^{k+1}$ . Следовательно, утверждение теоремы справедливо при  $n = k + 1$ . По индукции получаем, что теорема справедлива при любом  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Замечание.** (Неинвариантность формы дифференциалов выше 1-го порядка.)

Пусть заданы дважды дифференцируемые функции  $y(x)$  и  $z(y)$ . Найдем второй дифференциал сложной функции  $z = \varphi(x) = z(y(x))$ .

В силу инвариантности формы первого дифференциала  $d\varphi(x) = z'(y(x)) dy(x)$ .

По правилу вычисления дифференциала произведения  $d^2\varphi(x) = d(z'(y(x))) \cdot dy(x) + z'(y(x)) \cdot d(dy(x)) = z''(y(x))(dy(x))^2 + z'(y(x))d^2y(x)$ .

Итак, для сложной функции  $z = z(y(x))$ :  $d^2z = z''(y)(dy)^2 + z'(y)d^2y$ , в то время как для простой функции  $z = z(y)$ :  $d^2z = z''(y)(dy)^2$ . Таким образом, формулы для вторых дифференциалов простой и сложной функций не совпадают. То же относится к дифференциалам порядков  $n > 2$ .

## § 4. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

**Определение.** Пусть задана функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Точка  $x_0 \in X$  называется *точкой локального минимума* функции  $f$  по множеству  $X$ , если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x_0) \leq f(x).$$

2. Точка  $x_0 \in X$  называется *точкой локального максимума* функции  $f$  по множеству  $X$ , если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x_0) \geq f(x).$$

3. Точка  $x_0 \in X$  называется *точкой локального экстремума* функции  $f$ , если  $x_0$  является точкой локального минимума или максимума  $f$ .

Точки локального экстремума, которые мы сейчас определили, называются также точками *нестроого* локального экстремума. Определим точки строгого локального экстремума.

4. Точка  $x_0 \in X$  называется *точкой строгого локального минимума* функции  $f$  по множеству  $X$ , если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x_0) < f(x). \quad (1)$$

5. Точка  $x_0 \in X$  называется *точкой строгого локального максимума* функции  $f$  по множеству  $X$ , если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x_0) > f(x).$$

6. Точки строгого локального минимума и строгого локального максимума называются *точками строгого локального экстремума*.

**Замечание.** Непосредственно из определения следует, что точка строго локального экстремума является точкой нестрогого локального экстремума. Обратное неверно. Например, для функции, равной константе, все точки множества определения являются точками нестрогого экстремума, а строгих экстремумов нет.

**Замечание.** Если  $x_0 \in \text{int } X$ , то в определении локального экстремума можно не указывать множество  $X$  и вместо  $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap X$  писать  $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ . В этом случае получится эквивалентное определение. Действительно. Если  $x_0 \in \text{int } X$ , то существует число  $\delta_0 > 0$  такое, что  $U_{\delta_0}(x_0) \subset X$ . Если, например,  $x_0$  является точкой строго локального минимума функции  $f$  по множеству  $X$ , то выполнено соотношение (1). Определим  $\delta_1 = \min\{\delta, \delta_0\}$ . Тогда

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0) \hookrightarrow f(x_0) < f(x). \quad (2)$$

Обратно, если выполнено соотношение (2), то  $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0) \cap X \hookrightarrow f(x_0) < f(x)$  и, следовательно, справедливо соотношение (1).

**Теорема 1.** (Теорема Ферма.) Пусть функция  $f$  определена на  $(a, b)$  и  $x_0 \in (a, b)$  – точка (нестрогого) локального экстремума функции  $f$ . Тогда если  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

**Доказательство.** Пусть для определенности  $x_0$  – точка локального минимума  $f$ .

Определим  $\delta_0 = \min\{b - x_0, x_0 - a\}$ . Тогда  $\exists \delta \in (0, \delta_0] : \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x_0) \leq f(x)$ . Поэтому при  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  выполняется неравенство  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ , следовательно, по теореме о предельном переходе в неравенствах правая производная неотрицательна:  $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ . Аналогично,  $f'_-(x_0) \leq 0$ . Если  $\exists f'(x_0)$ , то  $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$  и, следовательно,  $f'(x_0) = 0$ .  $\square$

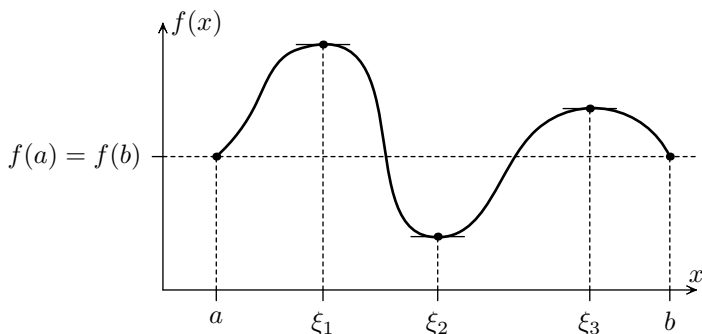
**Замечание.** В точке локального экстремума производная может а) не существовать, как, например, для  $f(x) = |x|$  не существует  $f'(0)$  или

б) быть бесконечной, как, например, для  $f(x) = \sqrt{|x|}$   $f'(0) = \infty$ .

**Замечание.** Если функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  достигает экстремума в точке  $x_0 \in X$ , которая не является внутренней точкой множества

$X$ , то в точке  $x_0$  может существовать конечная (односторонняя), не равная нулю, производная функции  $f$ . Например, функция  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , заданная формулой  $f(x) = x$ , достигает минимума в точке  $x_0 = 0$ , но  $f'_+(x_0) = 1 \neq 0$ .

**Теорема 2.** (Теорема Ролля.) Пусть функция  $f$  непрерывна на  $[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$  и пусть  $f(a) = f(b)$ . Тогда  $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$ .



**Доказательство.** По теореме Вейерштрасса (теорема 2 § 7 главы 2)  $\exists m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$  и  $\exists M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ .

Если  $m = M$ , то  $f(x) = \text{const}$  на  $[a, b]$ . Взяв произвольную точку  $\xi \in (a, b)$ , получаем требуемое утверждение.

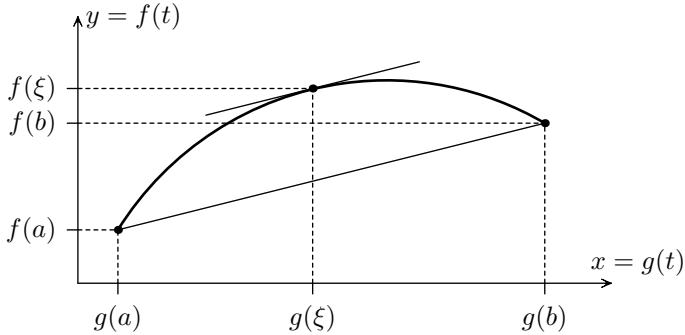
Если  $m \neq M$ , то либо  $m < f(a)$ , либо  $f(a) < M$ . Рассмотрим, например, случай  $m < f(a)$ . По определению минимума  $\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = m < f(a) = f(b)$ . Следовательно,  $\xi \in (a, b)$  и по теореме Ферма  $f'(\xi) = 0$ .  $\square$

**Теорема 3.** (Теорема Коши о среднем.) Пусть функции  $f$  и  $g$  непрерывны на  $[a, b]$  и дифференцируемы на  $(a, b)$ . Пусть  $\forall x \in (a, b) \hookrightarrow g'(x) \neq 0$ . Тогда

$$\exists \xi \in (a, b) : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

**Доказательство.** Из теоремы Ролля и условия  $\forall x \in (a, b) \hookrightarrow \hookrightarrow g'(x) \neq 0$  следует, что  $g(b) \neq g(a)$ . Рассмотрим функцию  $\varphi(x) = f(x) - kg(x)$ , где коэффициент  $k$  определим из условия  $\varphi(a) = \varphi(b)$ :  $f(b) - kg(b) = f(a) - kg(a)$ , т. е.  $k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ .

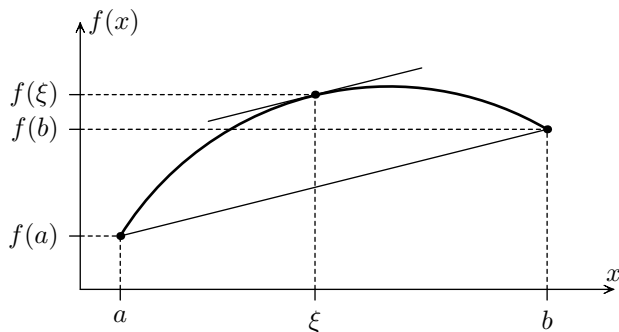
По теореме Ролля  $\exists \xi \in (a, b) : \varphi'(\xi) = 0$ , т. е.  $f'(\xi) - kg'(\xi) = 0$ , следовательно,  $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ .  $\square$



**Геометрическая интерпретация.** Пусть функции  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяют условиям теоремы Коши о среднем. Построим график параметрически заданной функции  $x = g(t)$ ,  $y = f(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Проведем отрезок (хорду), соединяющий точки  $(g(a), f(a))$  и  $(g(b), f(b))$ . Тангенс угла наклона этой хорды равен  $k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ . Согласно теореме Коши найдется точка  $\xi \in (a, b)$  такая, что  $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = k$ . Используя формулу вычисления производной функции, заданной параметрически (см. § 2), получаем, что в точке  $t = \xi$  справедливы равенства  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{f'_t}{g'_t} = k$ . Следовательно, в точке  $(g(\xi), f(\xi))$  тангенс угла наклона касательной к графику функции  $y(x)$  равен тангенсу угла наклона хорды. Таким образом, теорема Коши утверждает, что на графике функции, заданной параметрически, найдется точка, в которой касательная параллельна хорде.

**Теорема 4.** (Теорема Лагранжа о среднем.) Пусть функция  $f$  непрерывна на  $[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда существует точка  $\xi \in (a, b)$ , для которой справедлива *формула конечных приращений Лагранжа*:  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ .

**Доказательство** состоит в применении теоремы Коши о среднем для функций  $f(x)$  и  $g(x) = x$ .



**Геометрическая интерпретация** теоремы Лагранжа состоит в том, что для функции  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющей условиям этой теоремы, найдется точка  $\xi \in (a, b)$ , в которой касательная к графику  $f$  параллельна хорде.

**Задача 1.** Существует ли функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  с непрерывной производной такая, что

$$\forall \delta > 0 \exists x_1, x_2 \in (0, \delta) : f(x_1) \geq x_1, \quad f(x_2) \leq -x_2?$$

**Задача 2.** Пусть функция  $f$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и  $\forall x \in (a, b) \hookrightarrow f'(x) \neq 0$ . Обязана ли функция  $f'$  сохранять знак на  $(a, b)$ ?

**Следствие из теоремы Лагранжа о среднем.** (1) Пусть функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[x_0, x_0 + \delta]$  и дифференцируема на интервале  $(x_0, x_0 + \delta)$ . Пусть существует односторонний предел производной  $f'(x_0 + 0)$ . Тогда существует односторонняя производная  $f'_+(x_0)$  и  $f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0)$ .

(2) Пусть функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[x_0 - \delta, x_0]$  и дифференцируема на интервале  $(x_0 - \delta, x_0)$ . Пусть существует односторонний предел производной  $f'(x_0 - 0)$ . Тогда существует односторонняя производная  $f'_-(x_0)$  и  $f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0)$ .

(3) Пусть функция  $f$  непрерывна в  $U_\delta(x_0)$  и дифференцируема в  $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$ . Пусть существует предел производной  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ . Тогда существует производная  $f'(x_0)$  и  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ .

**Доказательство.** Докажем пункт (1). По теореме Лагранжа о среднем для любой точки  $x \in (x_0; x_0 + \delta)$  существует точка  $\xi(x) \in (x_0; x)$  такая, что  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi(x))$ . По теореме о трех функциях имеем  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} \xi(x) = x_0$ . Используя теорему о пределе сложной функции для одностороннего предела, аналогичную теореме 2(а) § 6 главы 2, получаем  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(\xi(x)) = \lim_{\xi \rightarrow x_0+0} f'(\xi) = f'(x_0 + 0)$ . Следовательно, существует

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(\xi(x)) = f'(x_0 + 0).$$

Доказательство пункта (2) аналогично. Пункт (3) следует из пунктов (1), (2).  $\square$

**Задача 3.** Пусть функция  $f$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$ . Может ли  $f'$  на  $(a, b)$  иметь

- а) разрыв первого рода;
- б) разрыв второго рода?

## § 5. Формула Тейлора

**Определение.** Пусть  $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

называется *многочленом Тейлора* функции  $f$  в точке  $x_0$ ;

$r_n(x) = f(x) - P_n(x)$  называется *остаточным членом* в формуле Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x).$$

**Лемма 1.** Пусть  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_k(x) = (x - x_0)^k$ . Тогда

$$1) \quad \varphi_k^{(s)}(x) = \begin{cases} \frac{k!}{(k-s)!} (x - x_0)^{k-s} & \text{при } s \in \{0, \dots, k\}, \\ 0 & \text{при } s > k; \end{cases}$$

$$2) \varphi_k^{(s)}(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq k, \\ k! & \text{при } s = k. \end{cases}$$

**Доказательство.** 1)  $\varphi_k'(x) = k(x-x_0)^{k-1}$ ,  $\varphi_k''(x) = k(k-1)(x-x_0)^{k-2}$  и так далее, при  $s \leq k$ :  $\varphi_k^{(s)}(x) = k(k-1)\dots(k-(s-1))(x-x_0)^{k-s} = \frac{k!}{(k-s)!}(x-x_0)^{k-s}$ . Следовательно,  $\varphi_k^{(k)}(x) = k!$  и  $\varphi_k^{(s)}(x) = 0$  при  $s > k$ .

Пункт (2) следует из пункта (1).  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\forall s \in \{0, \dots, n\} \hookrightarrow r_n^{(s)}(x_0) = 0$ .

**Доказательство.** Заметим, что

$$P_n^{(s)}(x) = \left( \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \varphi_k(x) \right)^{(s)} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \varphi_k^{(s)}(x).$$

Из леммы 1(б) следует, что при  $s \leq n$ :

$$P_n^{(s)}(x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \varphi_k^{(s)}(x_0) = f^{(s)}(x_0),$$

а значит,  $r_n^{(s)}(x_0) = f^{(s)}(x_0) - P_n^{(s)}(x_0) = 0$ .  $\square$

**Определение.** Будем говорить, что число  $\xi$  *лежит строго между числами*  $x_0$  и  $x$ , если  $x < \xi < x_0$  или  $x_0 < \xi < x$ .

**Теорема 1.** (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.) Пусть  $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ , тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \quad \text{при } x \rightarrow x_0.$$

**Доказательство.** Требуется доказать, что  $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$  при  $x \rightarrow x_0$ , то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0, \quad (1)$$

где  $\varphi_n(x) = (x-x_0)^n$ . Поскольку  $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ , то существует окрестность  $U_\delta(x_0)$ , в которой определена  $f^{(n-1)}$ , а значит, и  $f^{(k)}$  при всех

$k \in \{0, \dots, n-1\}$ . Так как  $r_n(x_0) = 0$ ,  $\varphi_n(x_0) = 0$ , то по теореме Коши о среднем  $\forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$  существует число  $\xi_1$ , лежащее строго между  $x$  и  $x_0$ , такое, что

$$\frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)} = \frac{r'_n(\xi_1)}{\varphi'_n(\xi_1)}.$$

Согласно леммам 1, 2 имеем  $r'_n(x_0) = r_n^{(n-1)}(x_0) = 0$ ,  $\varphi'_n(x_0) = \varphi_n^{(n-1)}(x_0) = 0$ . Поэтому по теореме Коши о среднем найдется число  $\xi_2$ , лежащее строго между  $\xi_1$  и  $x_0$  (а значит, лежащее строго между  $x$  и  $x_0$ ), такое, что

$$\frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{r'_n(\xi_1)}{\varphi'_n(\xi_1)} = \frac{r'_n(\xi_1) - r'_n(x_0)}{\varphi'_n(\xi_1) - \varphi'_n(x_0)} = \frac{r''_n(\xi_2)}{\varphi''_n(\xi_2)}.$$

Продолжая эти рассуждения, для любого  $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$  получаем  $\xi_{n-1} = \xi_{n-1}(x)$ , лежащее строго между  $x$  и  $x_0$ , такое, что

$$\frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{r_n^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{\varphi_n^{(n-1)}(\xi_{n-1})}.$$

Так как  $r_n^{(n-1)}(x_0) = 0$ ,  $\varphi_n^{(n-1)}(x) = n! (x - x_0)$ , то

$$\frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{r_n^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{n! (\xi_{n-1} - x_0)}.$$

Поскольку  $\lim_{x \rightarrow x_0} \xi_{n-1}(x) = x_0$  и  $\forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow \xi_{n-1}(x) \neq x_0$ , то по теореме о пределе сложной функции (теорема 2(а) § 6 главы 2) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)} &= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(\xi_{n-1}(x)) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{\xi_{n-1}(x) - x_0} = \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(\xi) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{\xi - x_0}. \end{aligned}$$

Отсюда по определению производной  $r_n^{(n)}(x_0)$  получаем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{1}{n!} r_n^{(n)}(x_0). \quad (2)$$

Поскольку согласно лемме 2 справедливо равенство  $r_n^{(n)}(x_0) = 0$ , то из равенства (2) следует равенство (1).  $\square$

**Теорема 2.** (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.)

Пусть в некоторой  $U_\delta(x_0)$  существует  $f^{(n+1)}(x)$ . Тогда  $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \exists \xi$ , лежащее строго между  $x$  и  $x_0$ , такое, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

**Доказательство.** Пусть  $\varphi_{n+1}(x) = (x - x_0)^{n+1}$ . Применяя  $n+1$  раз теорему Коши о среднем и используя леммы 1, 2, для любого  $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$  получаем существование чисел  $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$ , лежащих строго между  $x$  и  $x_0$ , и таких, что

$$\frac{r_n(x)}{\varphi_{n+1}(x)} = \frac{r'_n(\xi_1)}{\varphi'_{n+1}(\xi_1)} = \dots = \frac{r_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{\varphi_{n+1}^{(n+1)}(\xi_{n+1})}.$$

Поскольку  $P_n(x)$  – многочлен степени  $n$ , то  $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow P_n^{(n+1)}(x) = 0$ . Следовательно,  $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow f^{(n+1)}(x) = r_n^{(n+1)}(x)$ . Поэтому, используя соотношение  $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow \varphi_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)!$  и обозначая  $\xi = \xi_{n+1}$ , получаем

$$\frac{r_n(x)}{\varphi_{n+1}(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Итак,

$$f(x) - P_n(x) = r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \varphi_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

$\square$

**Теорема 3.** (Единственность разложения по формуле Тейлора.) Пусть  $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$  и пусть при  $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) =$$

$$= a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Тогда  $\forall k \in \{0, \dots, n\}$   $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ .

**Доказательство.** В силу теоремы 1 справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, следовательно,

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) = \\ & = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $x \rightarrow x_0$ , получаем  $a_0 = f(x_0)$ . Отбросив в левой и правой частях одинаковые слагаемые  $a_0$  и  $f(x_0)$  и разделив обе части полученного равенства на  $x - x_0$ , получаем

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1}) = \\ & = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1}). \end{aligned}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при  $x \rightarrow x_0$ , находим  $a_1 = f'(x_0)$ . Продолжая эти рассуждения по индукции, получаем утверждение теоремы.  $\square$

**Задача 1.** Пусть  $f(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$ ,  $x \rightarrow x_0$ . Верно ли, что

а)  $\exists f'(x_0)$ ;

б)  $\exists f''(x_0)$ ?

**Теорема 4.** (О почленном дифференцировании формулы Тейлора.) Пусть  $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$  и пусть

$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$  при  $x \rightarrow x_0$ . Тогда

$f'(x) = \sum_{k=1}^n a_k k(x - x_0)^{k-1} + o((x - x_0)^{n-1})$  при  $x \rightarrow x_0$ .

**Доказательство.** По теореме 3 (о единственности разложения Тейлора)  $\forall k \in \{0, \dots, n\} \hookrightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ . В силу теоремы 1, примененной к функции  $g(x) = f'(x)$ ,

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^{n-1}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^{n-1}) = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} (k+1) (x-x_0)^k + o((x-x_0)^{n-1}) \stackrel{k=s-1}{=} \\
&= \sum_{s=1}^n a_s s (x-x_0)^{s-1} + o((x-x_0)^{n-1}) \stackrel{s=k}{=} \\
&= \sum_{k=1}^n a_k k (x-x_0)^{k-1} + o((x-x_0)^{n-1}). \quad \square
\end{aligned}$$

**Теорема 5.** (О почленном интегрировании формулы Тейлора.) Пусть  $\exists f^{(n+1)}(x_0)$  и пусть

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \text{ при } x \rightarrow x_0. \text{ Тогда}$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} + o((x-x_0)^{n+1}) \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

**Доказательство** аналогично доказательству теоремы 4.

## § 6. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора

Из теоремы 1 § 5 при  $x_0 = 0$  следует

**Теорема 1.** (Формула Маклорена.) Если  $\exists f^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$ , то

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \text{ при } x \rightarrow 0.$$

**Лемма 1.** Пусть  $f$  — дифференцируемая функция. Тогда

1) если  $f$  — четная, то  $f'$  — нечетная функция;

2) если  $f$  — нечетная, то  $f'$  — четная функция.

**Доказательство.** 1) Пусть  $f$  — четная, т. е.  $f(-x) = f(x)$ . Так как  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ , то  $f'(-x) =$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x+\Delta x) - f(-x)}{\Delta x} \stackrel{\text{в силу четности } f}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \stackrel{t=-\Delta x}{=} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -f'(x)$$

$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{-t} = -f'(x)$ . Итак,  $\forall x \hookrightarrow f'(-x) = -f'(x)$ , т. е.  $f'$  – нечетная функция.

Доказательство пункта 2 – аналогично.  $\square$

**Лемма 2.** 1) Пусть функция  $f$  – четная и пусть  $\exists f^{(2n+1)}(0)$ . Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0.$$

2) Пусть функция  $f$  – нечетная и пусть  $\exists f^{(2n+2)}(0)$ . Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0.$$

**Доказательство.** 1) Так как  $f(x)$  – четная, то  $f'(x)$  – нечетная, следовательно,  $f''(x)$  – четная и так далее:  $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow f^{(2k)}(x)$  – четная,  $f^{(2k-1)}(x)$  – нечетная. Так как  $f^{(2k-1)}(x)$  – нечетные, то  $f^{(2k-1)}(0) = -f^{(2k-1)}(0)$ , т. е.  $f^{(2k-1)}(0) = 0$ . По теореме 1  $f(x) = P_{2n+1}(x) + o(x^{2n+1})$  при  $x \rightarrow 0$ , где

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(x) &= \sum_{s=0}^{2n+1} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} x^s = \\ &= \sum_{s=0,2,4,\dots,2n} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} x^s + \sum_{s=1,3,5,\dots,2n+1} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} x^s = \\ &= \sum_{s=0,2,4,\dots,2n} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} x^s \stackrel{s=2k}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}. \end{aligned}$$

2) Доказательство второго пункта аналогично.  $\square$

**Экспонента.** Если  $f(x) = e^x$ , то  $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \hookrightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ , следовательно,

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

**Гиперболические функции.** Если  $f(x) = \operatorname{sh} x$ , то  $f^{(2k)}(x) = \operatorname{sh} x$ ,  $f^{(2k+1)}(x) = \operatorname{ch} x$ , следовательно,  $f^{(2k)}(0) = 0$ ,  $f^{(2k+1)}(0) = 1$ ,

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

**Тригонометрические функции.** Если  $f(x) = \sin x$ , то  $f^{(s)}(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}s)$ ,  $f^{(2k)}(0) = \sin(\pi k) = 0$ ,  $f^{(2k+1)}(0) = \sin(\frac{\pi}{2} + \pi k) = (-1)^k$ , следовательно,

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

**Степенная функция.** Если  $f(x) = (1+x)^\alpha$ , то  $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))(1+x)^{\alpha-k}$ , следовательно,  $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))$ . Обозначим

$$C_\alpha^0 = 1, \quad C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n C_\alpha^k x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

Отметим важный частный случай последней формулы:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

**Логарифм.** Если  $f(x) = \ln(1+x)$ , то  $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o(x^n)$ ,  $x \rightarrow 0$ , следовательно, по теореме 5 § 5 о почленном интегрировании формулы Тейлора, с учетом  $\ln(1) = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Арктангенс.** Если  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ , то  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1})$ ,  $x \rightarrow 0$ , следовательно, по теореме о почленном интегрировании формулы Тейлора, с учетом  $\operatorname{arctg} 0 = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Замечание.** Если требуется разложить функцию  $f(x)$  в окрестности точки  $x_0 \neq 0$ , то прежде всего нужно сделать замену переменной:  $t = x - x_0$ , затем разложить функцию  $\varphi(t) = f(x_0 + t)$  по формуле Маклорена в окрестности точки  $t = 0$ , после чего вернуться к исходным переменным, подставив  $t = x - x_0$ .

**Пример.** Разложить  $\ln x$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $x_0$ ,  $x_0 > 0$ .

**Решение.**  $\ln x \stackrel{t=x-x_0}{=} \ln(x_0+t) = \ln(x_0(1+t/x_0)) = \ln x_0 + \ln(1+t/x_0)$ . Так как  $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$ ,  $x \rightarrow 0$ , то  $\ln x = \ln x_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} t^k}{x_0^k k} + o(t^n) = \ln x_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} (x-x_0)^k}{x_0^k k} + o((x-x_0)^n)$ ,  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

Заметим, что разложение  $\ln x = \ln(1+(x-1)) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} (x-1)^k}{k} + o((x-1)^n)$  при  $x_0 \neq 1$  не является решением данной задачи, так как  $x-1 \not\rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

**Пример.** Разложить по формуле Маклорена до  $o(x^4)$  функцию  $\operatorname{tg} x$ .

**Решение.**  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ . При  $x \rightarrow 0$ :  $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$ ;  $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-x^2/2+o(x^3)} = \frac{1}{1+y(x)}$ , где  $y(x) = -x^2/2 + o(x^3)$ . Так как  $y(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ , то  $\frac{1}{1+y(x)} = -y(x) + y^2(x) + o(y^2(x))$  при  $x \rightarrow 0$ . Следовательно,  $\frac{1}{\cos x} = 1 - (-x^2/2 + o(x^3)) + (-x^2/2 + o(x^3))^2 + o((-x^2/2 + o(x^3))^2) = 1 + x^2/2 + o(x^3)$ , поэтому  $\operatorname{tg} x = (x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4))(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^4) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$ .  $\square$

**Пример.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - \operatorname{sh} x}$ .

**Решение.** Так как при  $x \rightarrow 0$ :  $\operatorname{tg} x = x + x^3/3 + o(x^4)$ ,  $\sin x = x - x^3/6 + o(x^4)$ ,  $\operatorname{sh} x = x + x^3/6 + o(x^4)$ , то  $\frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - \operatorname{sh} x} = \frac{x^3/3 + o(x^4)}{-x^3/3 + o(x^4)} = \frac{1+o(x)}{-1+o(x)} = -1 + o(1)$ , следовательно,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - \operatorname{sh} x} = -1$ .  $\square$

## § 7. Правило Лопиталья

**Теорема 1.** (Неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ .) Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы на интервале  $(a, b)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0 \quad \text{и} \quad \forall x \in (a, b) \hookrightarrow g'(x) \neq 0.$$

Пусть

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда существует

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Доказательство.** Доопределим функции  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке  $a$ , полагая  $f(a) = g(a) = 0$ . Тогда функции  $f$  и  $g$  будут непрерывны на  $[a, b)$ . По теореме Коши о среднем

$$\forall x \in (a, b) \exists \xi = \xi(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Так как  $\lim_{x \rightarrow a+0} \xi(x) = a$  и  $\xi(x) \neq a$ , то по теореме о пределе сложной функции  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{\xi \rightarrow a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = C$ , следовательно,  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = C$ .  $\square$

**Следствие 1.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы на луче  $(A, +\infty)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \text{и}$$

$$\forall x \in (A, +\infty) \hookrightarrow g'(x) \neq 0.$$

Пусть

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда существует

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Доказательство.** Введем переменную  $t = \frac{1}{x}$  и рассмотрим функции  $f_1(t) = f(1/t)$ ,  $g_1(t) = g(1/t)$ . Определим  $A_1 = \max\{A, 1\}$ . Тогда функции  $f_1$  и  $g_1$  дифференцируемы на интервале  $(0, \frac{1}{A_1})$ . Заметим, что  $\lim_{t \rightarrow +0} f_1(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +0} g_1(t) = 0$ ,

$$\forall t \in \left(0, \frac{1}{A_1}\right) \hookrightarrow f_1'(t) = -\frac{f'(1/t)}{t^2}, \quad g_1'(t) = -\frac{g'(1/t)}{t^2} \neq 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f_1'(t)}{g_1'(t)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C.$$

Поэтому по теореме 1 существует  $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f_1(t)}{g_1(t)} = C$ , т.е. существует  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C$ .  $\square$

Аналогично можно сформулировать теорему для раскрытия неопределенности вида  $\frac{0}{0}$  при  $x \rightarrow b - 0$ ,  $x \rightarrow x_0$  и при  $x \rightarrow -\infty$ .

**Теорема 2.** (Неопределенность вида  $\frac{\infty}{\infty}$ .) Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы на интервале  $(a, b)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} |f(x)| = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} |g(x)| = +\infty \quad \text{и}$$

$$\forall x \in (a, b) \hookrightarrow g'(x) \neq 0.$$

Пусть

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \mathbb{R}.$$

Тогда существует

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Так как  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C$ , то

$$\exists a_\varepsilon \in (a, b) : \forall \xi \in (a, a_\varepsilon) \hookrightarrow \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - C \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

В силу теоремы Коши о среднем для любого  $x \in (a, a_\varepsilon)$  существует число  $\xi \in (x, a_\varepsilon)$  такое, что  $\frac{f(x)-f(a_\varepsilon)}{g(x)-g(a_\varepsilon)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ . Для любого  $x \in (a, a_\varepsilon)$  обозначим

$$H(x) = \frac{f(x) - f(a_\varepsilon)}{g(x) - g(a_\varepsilon)}.$$

Тогда в силу соотношения (1) имеем

$$\forall x \in (a, a_\varepsilon) \hookrightarrow |H(x) - C| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

Покажем, что

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \left( H(x) - \frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0. \quad (3)$$

Действительно,

$$H(x) - \frac{f(x)}{g(x)} = H(x) \left( 1 - \frac{g(x) - g(a_\varepsilon)}{f(x) - f(a_\varepsilon)} \frac{f(x)}{g(x)} \right) = H(x) \left( 1 - \frac{1 - \frac{g(a_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a_\varepsilon)}{f(x)}} \right).$$

Из соотношения (2) следует, что функция  $H(x)$  ограничена. Поскольку  $\lim_{x \rightarrow a+0} |f(x)| = +\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow a+0} |g(x)| = +\infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(a_\varepsilon)}{f(x)} = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{g(a_\varepsilon)}{g(x)} = 0$ . Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow a+0} \left( 1 - \frac{1 - g(a_\varepsilon)/g(x)}{1 - f(a_\varepsilon)/f(x)} \right) = 0$ . Поэтому функция  $H(x) - \frac{f(x)}{g(x)}$  при  $x \rightarrow a + 0$  является бесконечно малой как произведение ограниченной функции на бесконечно малую. Таким образом, соотношение (3) справедливо. Из соотношения (3) следует существование числа  $\tilde{a}_\varepsilon \in (a, a_\varepsilon)$  такого, что

$$\forall x \in (a, \tilde{a}_\varepsilon) \hookrightarrow \left| H(x) - \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из соотношения (2) получаем

$$\forall x \in (a, \tilde{a}_\varepsilon) \hookrightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - C \right| < \varepsilon.$$

Поэтому существует  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = C$ . □

**Следствие 2.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы на луче  $(A, +\infty)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty \quad \text{и}$$

$$\forall x \in (A, +\infty) \hookrightarrow g'(x) \neq 0.$$

Пусть

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \mathbb{R}.$$

Тогда существует

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство следствия 2 аналогично доказательству следствия 1.

Аналогично можно сформулировать теорему для раскрытия неопределенности вида  $\frac{\infty}{\infty}$  при  $x \rightarrow b - 0$ ,  $x \rightarrow x_0$  и при  $x \rightarrow -\infty$ .

**Теорема 3.** а)  $\forall \alpha > 0 \hookrightarrow \ln x = o(x^\alpha)$  при  $x \rightarrow +\infty$ ;

б)  $\forall \alpha > 0 \hookrightarrow x^\alpha = o(e^x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

**Доказательство.** а) В силу следствия 2 имеем  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$

б) Определим  $y(x) = e^x$ ,  $\beta = 1/\alpha$ , тогда в силу пункта (а)  
 $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(\ln y)}{y^\beta} = 0$  и, следовательно,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln y(x))^\alpha}{y(x)} =$   
 $= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln y}{y^\beta} \right)^\alpha = 0. \quad \square$

Теорема 3 показывает, что при  $x \rightarrow +\infty$  степенная функция растет быстрее логарифмической, а экспонента растет быстрее степенной.

## § 8. Исследование функций с помощью производных

**Теорема 1.** Пусть функция  $f$  непрерывна на  $[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда

1)  $\forall x \in (a, b) \hookrightarrow f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$  нестрого возрастает на  $[a, b]$ ;

2)  $\forall x \in (a, b) \hookrightarrow f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$  нестрого убывает на  $[a, b]$ ;

3) если  $\forall x \in (a, b) \hookrightarrow f'(x) > 0$ , то  $f$  строго возрастает на  $[a, b]$ ;

4) если  $\forall x \in (a, b) \hookrightarrow f'(x) < 0$ , то  $f$  строго убывает на  $[a, b]$ .

**Доказательство.** 1. а) Пусть  $\forall x \in (a, b) \hookrightarrow f'(x) \geq 0$ . Покажем, что функция  $f$  нестрого возрастает на  $[a, b]$ . Пусть заданы произвольные  $x_1, x_2 \in [a, b]$ :  $x_1 < x_2$ . Требуется доказать, что  $f(x_2) \geq f(x_1)$ . По теореме Лагранжа о среднем  $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ :  $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi)$ . Так как  $f'(\xi) \geq 0$ , то  $f(x_2) \geq f(x_1)$ .

б) Пусть функция  $f$  нестрого возрастает на  $[a, b]$ . Зафиксируем произвольную точку  $x_0 \in (a, b)$  и покажем, что  $f'(x_0) \geq 0$ . Так как

$f$  нестрого возрастает на  $[a, b]$ , то для любой точки  $x \in [a, b]$  такой, что  $x \neq x_0$ , справедливо неравенство  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ . В силу теоремы о предельном переходе в неравенствах получаем  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ .

Пункт 2 доказывается аналогично. Доказательство пунктов 3, 4 аналогично доказательству пункта 1 а).  $\square$

**Замечание.** Из строгого возрастания дифференцируемой функции  $f$  не следует неравенство  $f'(x) > 0$ . Например, функция  $f(x) = x^3$  строго возрастает, но  $f'(0) = 0$ .

**Теорема 2.** (Первое достаточное условие экстремума.) Пусть функция  $f$  непрерывна в некоторой  $U_\delta(x_0)$  и дифференцируема в  $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ . Тогда

1) если  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow f'(x) > 0$  и  $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow f'(x) < 0$  (т.е. производная меняет знак с плюса на минус), то  $x_0$  – точка строгого локального максимума  $f$ ;

2) если  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow f'(x) < 0$  и  $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow f'(x) > 0$  (т.е. производная меняет знак с минуса на плюс), то  $x_0$  – точка строгого локального минимума  $f$ .

**Доказательство.** 1) По теореме 1 функция  $f$  строго убывает на  $[x_0 - \delta/2, x_0]$  и строго возрастает на  $[x_0, x_0 + \delta/2]$ . Следовательно,  $x_0$  – точка строгого локального минимума  $f$ . Доказательство пункта 2 – аналогично.  $\square$

Аналогично можно сформулировать достаточные условия нестрогого экстремума.

**Теорема 3.** (Второе достаточное условие экстремума.) Пусть в некоторой окрестности точки  $x_0$  определена функция  $f$  такая, что  $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ , пусть  $\forall k \in \{1, \dots, n-1\} \hookrightarrow f^{(k)}(x_0) = 0$  и  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . Тогда

1) если  $n$  – четно, то при  $f^{(n)}(x_0) > 0$   $x_0$  является точкой строгого локального минимума функции  $f$ , при  $f^{(n)}(x_0) < 0$   $x_0$  является точкой строгого локального максимума функции  $f$ ;

2) если  $n$  – нечетно, то  $x_0$  не является точкой (нестрогого) локального экстремума функции  $f$ .

**Доказательство.** В силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеем  $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$  при  $x \rightarrow x_0$ . Следовательно,  $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0) + o(1)$  при

$x \rightarrow x_0$ , т. е.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$ . По лемме о сохранении знака (лемма 1 § 2 главы 2) существует число  $\delta > 0$  такое, что при  $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$  величина  $\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n}$  имеет тот же знак, что и знак числа  $f^{(n)}(x_0)$ . Пусть, например,  $f^{(n)}(x_0) > 0$ . Тогда

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} > 0.$$

Поэтому в случае четного  $n$   $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$ , следовательно,  $x_0$  — точка строгого локального минимума. В случае нечетного  $n$ :  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow f(x) - f(x_0) < 0$  и  $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$ , следовательно,  $x_0$  не является точкой нестрогого экстремума. Случай  $f^{(n)}(x_0) < 0$  рассматривается аналогично.  $\square$

Рассмотрим необходимые условия экстремума. Необходимым условием экстремума в терминах первой производной является теорема Ферма (теорема 1 § 4).

**Теорема 4.** (Необходимое условие экстремума в терминах второй производной.) Пусть функция  $f$  определена в некоторой  $U_\delta(x_0)$  и  $\exists f''(x_0)$ . Тогда

- 1) если  $x_0$  — точка (нестрогого) локального минимума функции  $f$ , то  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) \geq 0$ ;
- 2) если  $x_0$  — точка (нестрогого) локального максимума функции  $f$ , то  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) \leq 0$ .

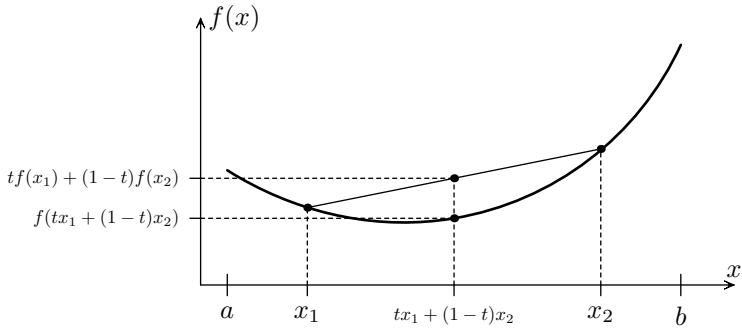
**Доказательство.** 1) Пусть  $x_0$  — точка локального минимума. В силу теоремы Ферма  $f'(x_0) = 0$ . Если  $f''(x_0) < 0$ , то по теореме 3  $x_0$  является точкой строгого локального максимума и, следовательно, не может являться точкой (нестрогого) локального минимума. Полученное противоречие показывает, что  $f''(x_0) \geq 0$ .

Доказательство пункта 2 — аналогично.  $\square$

**Замечание.** Из условий  $\exists f''(x_0)$  и  $x_0$  — точка строго локального минимума не следует неравенство  $f''(x_0) > 0$ . Например,  $x_0 = 0$  является точкой строгого минимума функции  $f(x) = x^4$ , но  $f''(0) = 0$ .

**Определение.** Функция  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  называется *выпуклой вниз*, если каждая точка любой хорды к графику функции  $f$  лежит не ниже графика  $f$ . Функция  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  называется *выпуклой вверх*, если каждая точка любой хорды к графику функции  $f$  лежит не выше графика  $f$ .

На рисунке изображен график выпуклой вниз функции.



Каждая точка хорды, соединяющей точки  $(x_1, f(x_1))$  и  $(x_2, f(x_2))$ , может быть записана в виде  $(tx_1 + (1-t)x_2, tf(x_1) + (1-t)f(x_2))$ , где  $t \in [0, 1]$ . Поэтому условие выпуклости вниз функции  $f$  на  $(a, b)$  можно записать в виде

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad \forall t \in [0, 1] \hookrightarrow f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2),$$

а условие выпуклости вверх функции  $f$  на  $(a, b)$  – в виде

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad \forall t \in [0, 1] \hookrightarrow f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

**Замечание.** Если в последних двух формулах нестрогие неравенства заменить строгими, то получатся определения строгой выпуклости вниз и вверх.

**Замечание.** Нередко в литературе используется немного иная терминология: выпуклую вниз функцию называют *выпуклой*, а выпуклую вверх – *вогнутой*.

**Задача 1.** Пусть функция  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  выпукла вниз. Доказать, что  $f$  непрерывна на  $(a, b)$ .

**Задача 2.** Пусть функция  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  выпукла вниз и дифференцируема в точке  $x_0$ . Доказать, что  $\forall x \in (a, b) \hookrightarrow f(x) \geq y_{\text{кас}}(x)$ , где  $y_{\text{кас}}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

**Теорема 5.** Пусть функция  $f$  дважды дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда

- 1) функция  $f$  выпукла вниз на  $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) \hookrightarrow f''(x) \geq 0$ ;
- 2) функция  $f$  выпукла вверх на  $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) \hookrightarrow f''(x) \leq 0$ .

**Доказательство.** 1. а) Пусть функция  $f$  выпукла вниз на  $(a, b)$ . Зафиксируем произвольное  $x_0 \in (a, b)$  и покажем, что  $f''(x_0) \geq 0$ . Определим  $\delta = \min\{x_0 - a, b - x_0\}$ . Тогда  $\forall u \in (-\delta, \delta)$  справедливы условия  $x_0 \pm u \in (a, b)$ . Применяя условие выпуклости вниз для  $x_1 = x_0 - u$ ,  $x_2 = x_0 + u$ ,  $t = \frac{1}{2}$  и замечая, что  $tx_1 + (1 - t)x_2 = x_0$ , получаем

$$f(x_0) \leq \frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u) \quad \forall u \in (-\delta, \delta). \quad (1)$$

Раскладывая по формуле Тейлора, имеем  $f(x_0 \pm u) = f(x_0) \pm f'(x_0)u + \frac{1}{2}f''(x_0)u^2 + o(u^2)$  при  $u \rightarrow 0$ , следовательно,

$$\frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)u^2 + o(u^2).$$

Отсюда и из формулы (1) имеем

$$\frac{1}{2}f''(x_0)u^2 + o(u^2) = \frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u) - f(x_0) \geq 0.$$

Деля это неравенство на  $u^2$ , получаем  $\frac{1}{2}f''(x_0) + o(1) \geq 0$ , где  $o(1) \rightarrow 0$  — это такая функция  $\varphi(u)$ , что  $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u) = 0$ . Переходя к пределу при  $u \rightarrow 0$ , получаем  $\frac{1}{2}f''(x_0) \geq 0$ , т. е.  $f''(x_0) \geq 0$ .

б) Пусть  $\forall x \in (a, b) \hookrightarrow f''(x) \geq 0$ . Покажем, что функция  $f$  выпукла вниз на  $(a, b)$ . Зафиксируем произвольные числа  $t \in [0, 1]$  и  $x_1, x_2$  такие, что  $a < x_1 < x_2 < b$ . Обозначим  $x_0 = tx_1 + (1 - t)x_2$ . Требуется доказать, что

$$f(x_0) \leq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2). \quad (2)$$

Если  $t = 0$  или  $t = 1$ , то неравенство (2) тривиально выполняется (выполняется равенство). Поэтому будем предполагать, что  $t \in (0, 1)$ .

В силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$\exists \xi_1 \in (x_1, x_0) : f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(x_1 - x_0)^2$$

и

$$\exists \xi_2 \in (x_0, x_2) : f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(x_2 - x_0)^2.$$

Поскольку  $f''(\xi_1) \geq 0$  и  $f''(\xi_2) \geq 0$ , то  $f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$  и  $f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$ , следовательно,

$$\begin{aligned} & tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq \\ & \geq tf(x_0) + (1-t)f(x_0) + f'(x_0)(t(x_1 - x_0) + (1-t)(x_2 - x_0)) = \\ & = f(x_0) + f'(x_0)(tx_1 + (1-t)x_2 - x_0) \stackrel{\text{по опр. } x_0}{=} f(x_0). \end{aligned}$$

Поэтому справедливо неравенство (2).

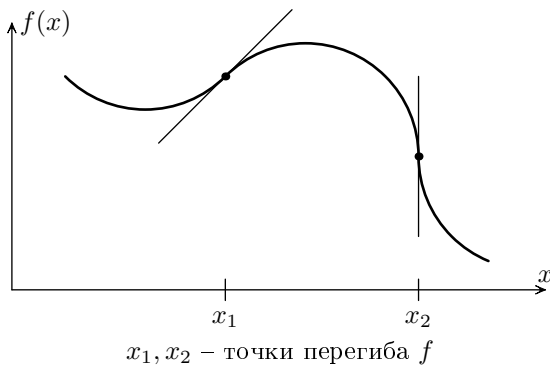
Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.  $\square$

**Определение.** Точка  $x_0$  называется *точкой перегиба* функции  $f$ , если

1) функция  $f$  определена и непрерывна в некоторой окрестности точки  $x_0$ ,

2) существует  $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$ , т.е. в точке  $x_0$  существует касательная к графику функции  $f$  и

3) в точке  $x_0$  меняется направление выпуклости функции  $f$ , т.е. существует число  $\delta > 0$  такое, что на одном из интервалов  $(x_0 - \delta, x_0)$ ,  $(x_0, x_0 + \delta)$  функция выпукла вниз, а на другом – выпукла вверх.



**Теорема 6.** (Необходимые и достаточные условия точки перегиба.) Пусть функция  $f$  непрерывна в  $U_{\delta_0}(x_0)$  и дважды дифференцируема в  $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$ , пусть  $\exists f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$ . Тогда  $x_0$  является точкой перегиба функции  $f$  в том и только в том случае, когда существует  $\delta \in (0, \delta_0]$ :

либо  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow f''(x) \geq 0$  и  $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow f''(x) \leq 0$ ,  
либо  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow f''(x) \leq 0$  и  $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow f''(x) \geq 0$ ,  
т. е. вторая производная меняет знак в точке  $x_0$ .

**Доказательство** следует непосредственно из теоремы 5 и определения точки перегиба.  $\square$

**Теорема 7.** Пусть функция  $f$  дважды дифференцируема в некоторой  $U_{\delta_0}(x_0)$ . Пусть  $x_0$  — точка перегиба функции  $f$ ,  $y_{\text{кас}}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  — уравнение касательной. Тогда

$$\exists \delta > 0 : \quad \left[ \begin{array}{l} \text{либо} \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow y_{\text{кас}}(x) \leq f(x) \text{ и} \\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow y_{\text{кас}}(x) \geq f(x), \end{array} \right. \\ \text{либо} \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow y_{\text{кас}}(x) \geq f(x) \text{ и} \\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow y_{\text{кас}}(x) \leq f(x), \end{array} \right. \end{array} \right.$$

т. е. график функции переходит с одной стороны касательной на другую.

**Доказательство.** В силу теоремы 6  $f''(x)$  меняет в точке  $x_0$  знак. Для определенности будем предполагать, что  $f''(x)$  меняет знак с плюса на минус, т. е.

$$\exists \delta \in (0, \delta_0] : \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow f''(x) \geq 0 \text{ и} \\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow f''(x) \leq 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Пользуясь формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получаем, что для любого  $x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$  существует точка  $\xi$ , лежащая строго между  $x$  и  $x_0$  и такая, что

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2.$$

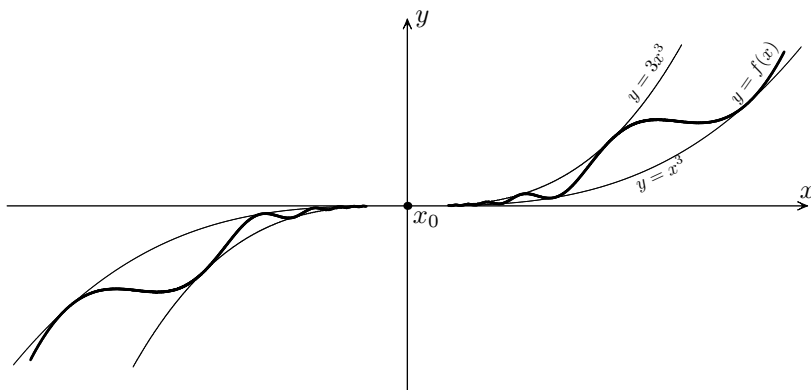
Отсюда в силу условия (3) имеем

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \hookrightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = y_{\text{кас}}(x) \text{ и}$$

$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = y_{\text{кас}}(x)$ . А значит, график функции переходит с одной стороны касательной на другую.  $\square$

**Замечание.** Из того, что график функции  $f$  в точке  $x_0$  переходит с одной стороны касательной на другую не следует, что  $x_0$  является точкой перегиба функции  $f$ . Например, график функции

$$f(x) = \begin{cases} (2 + \sin \frac{1}{x})x^3, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



переходит в точке  $x_0 = 0$  с одной стороны касательной  $y = 0$  на другую, но точка  $x_0$  не является точкой перегиба функции  $f$ , так как не существует левой и правой полукрестностей точки  $x_0$ , в которых сохраняется направление выпуклости функции  $f$ .

## Асимптоты

**Определение.** Говорят, что график функции  $y = f(x)$  имеет *вертикальную асимптоту*  $x = x_0$ , если хотя бы один из пределов  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$  бесконечен.

Например, график функции  $y = e^{1/x}$  имеет вертикальную асимптоту  $x = 0$ , так как  $\lim_{x \rightarrow +0} e^{1/x} = +\infty$ .

**Определение.** Прямая  $y = kx + b$  называется *невертикальной асимптотой* графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , если  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ .

Если  $k \neq 0$ , то асимптота  $y = kx + b$  называется *наклонной*. Если  $k = 0$ , то асимптота  $y = kx + b = b$  называется *горизонтальной*.

Аналогично вводится понятие асимптоты при  $x \rightarrow -\infty$ .

Следующая теорема показывает метод нахождения невертикальной асимптоты.

**Теорема 8.** Прямая  $y = kx + b$  является асимптотой графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  тогда и только тогда, когда

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b.$$

**Доказательство.** 1) Если  $y = kx + b$  — асимптота при  $x \rightarrow +\infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ , поэтому  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - kx - b}{x} = 0$  и, следовательно,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx + b}{x} = k$ . Из равенства  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ , следует также, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$ .

2) Пусть  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$  и, следовательно, прямая  $y = kx + b$  — асимптота.  $\square$

**Задача 3.** Пусть функция  $f$  выпукла вниз на луче  $(x_0, +\infty)$  и прямая  $y = kx + b$  является асимптотой графика  $f$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Доказать, что  $\forall x > x_0 \hookrightarrow f(x) > kx + b$ .

### План построения графика функции $f$

1) Найти множество определения функции. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или периодической. Найти точки пересечения графика функции  $f$  с осями координат.

2) Вычислить  $f'(x)$  и  $f''(x)$ .

3) Составить таблицу знаков  $f'$  и  $f''$ . Указать промежутки монотонности и выпуклости  $f$ .

4) Найти точки экстремумов и перегиба, а также точки недифференцируемости  $f$ . Вычислить (если возможно) в этих точках значения  $f(x)$  и  $f'(x)$ .

5) Исследовать асимптоты графика.

6) Нарисовать график функции.

# НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## § 1. Элементарные методы интегрирования

**Определение.** Пусть  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  и на  $(a, b)$  заданы функции  $f(x)$  и  $F(x)$ . Функция  $F(x)$  называется *первообразной* функции  $f(x)$  на  $(a, b)$ , если

$$\forall x \in (a, b) \hookrightarrow F'(x) = f(x).$$

**Лемма 1.** Пусть на  $(a, b)$  задана функция  $\varphi(x)$  и  $\forall x \in (a, b) \hookrightarrow \varphi'(x) = 0$ . Тогда  $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in (a, b) \hookrightarrow \varphi(x) = C$ .

**Доказательство.** Зафиксируем произвольную точку  $x_0 \in (a, b)$  и обозначим  $C = \varphi(x_0)$ . По теореме Лагранжа о среднем  $\forall x \in (a, b) : x \neq x_0 \exists \xi$ , лежащее строго между  $x$  и  $x_0$ :  $\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(\xi)$ . Так как  $\varphi'(\xi) = 0$ , то  $\varphi(x) = \varphi(x_0) = C$ .  $\square$

**Теорема 1.** (О структуре множества первообразных.) Пусть функция  $F(x)$  является первообразной функции  $f(x)$  на  $(a, b)$ . Тогда функция  $F_1(x)$  является первообразной функции  $f(x)$  на  $(a, b)$  в том и только в том случае, если  $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in (a, b) \hookrightarrow F_1(x) = F(x) + C$ .

**Доказательство.** 1) Если  $F_1(x) = F(x) + C$ , то  $F_1'(x) = F'(x) = f(x)$  и, следовательно, функция  $F_1(x)$  является первообразной функции  $f(x)$ .

2) Если  $F_1(x)$  — первообразная функции  $f(x)$ , то  $\forall x \in (a, b) \hookrightarrow F_1'(x) = f(x) = F'(x)$  и  $F_1'(x) - F'(x) = 0$ . По лемме 1, примененной к функции  $\varphi(x) = F_1(x) - F(x)$ ,  $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in (a, b) \hookrightarrow F_1(x) - F(x) = C$ .  $\square$

**Определение.** *Неопределенным интегралом*  $\int f(x) dx$  называется множество всех первообразных функции  $f(x)$ .

Из теоремы 1 следует

**Теорема 2.** Пусть функция  $F(x)$  является первообразной функции  $f(x)$ . Тогда неопределенный интеграл функции  $f(x)$  – это множество функций вида  $F(x) + C$ , где  $C \in \mathbb{R}$  – произвольная константа:  $\int f(x) dx = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$ , что для краткости записывают в виде

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

**Замечание.** Нужно понимать, что неопределенный интеграл – это не одна функция, а множество функций. Иначе говоря, константа  $C$ , стоящая в правой части последней формулы, – не фиксированная константа, а параметр, пробегающий множество всех действительных чисел. Непонимание этого факта может привести к недоразумениям. Например, из формул  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$  не следует, что  $\arcsin x = -\arccos x$ . (На самом деле справедливо равенство  $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ ).

**Лемма 2.** Операция взятия дифференциала  $d$  и операция взятия неопределенного интеграла  $\int$  являются взаимно обратными:

а) если функция  $f(x)$  на  $(a, b)$  имеет первообразную, то на  $(a, b)$

$$d \int f(x) dx = f(x) dx;$$

б) если функция  $F(x)$  дифференцируема на  $(a, b)$ , то на  $(a, b)$

$$\int d(F(x) + C) = F(x) + C.$$

**Доказательство.** а) Пусть  $F(x)$  – первообразная функции  $f(x)$ , тогда по теореме 2  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , следовательно,  $d \int f(x) dx = dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx$ .

б) Обозначим  $f(x) = F'(x)$ . Тогда  $\int d(F(x) + C) = \int f(x) dx = F(x) + C$ .  $\square$

**Лемма 3.** (Свойство линейности неопределенного интеграла.) Если функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  имеют первообразные на  $(a, b)$ ,  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ ,

$\alpha_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ , то на  $(a, b)$

$$\int (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)) dx = \alpha_1 \int f_1(x) dx + \alpha_2 \int f_2(x) dx.$$

**Доказательство.** Пусть  $F_1(x)$  – первообразная функции  $f_1(x)$ ,  $F_2(x)$  – первообразная функции  $f_2(x)$ . Тогда  $F_1'(x) = f_1(x)$ ,  $F_2'(x) = f_2(x)$  и  $(\alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x))' = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ , следовательно,  $\int (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)) dx = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + C$   $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$   
 $= \alpha_1 (F_1(x) + C_1) + \alpha_2 (F_2(x) + C_2) = \alpha_1 \int f_1(x) dx + \alpha_2 \int f_2(x) dx.$  □

**Теорема 3.** (Замена переменной или метод интегрирования подстановкой.)  
 Пусть на  $(a, b)$

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

а функция  $x : (t_1, t_2) \rightarrow (a, b)$  дифференцируема. Тогда на  $(t_1, t_2)$

$$\int f(x(t)) dx(t) = F(x(t)) + C.$$

**Доказательство.** Так как  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , то  $F'(x) = f(x)$ . В силу инвариантности формы первого дифференциала  $dF(x(t)) = F'(x(t)) dx(t) = f(x(t)) dx(t)$ . По лемме 2 (б)  $\int f(x(t)) dx(t) = \int dF(x(t)) = F(x(t)) + C.$  □

**Теорема 4.** (Метод интегрирования по частям.) Пусть на  $(a, b)$  заданы дифференцируемые функции  $u(x)$  и  $v(x)$ . Тогда на  $(a, b)$

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x).$$

**Доказательство.** Так как  $d(u(x)v(x)) = u(x) dv(x) + v(x) du(x)$ , то по свойству линейности (лемма 3)  $\int u(x) dv(x) = \int d(u(x)v(x)) - \int v(x) du(x) \stackrel{\text{Л.2(6)}}{=} u(x)v(x) + C - \int v(x) du(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x)$ . Последнее равенство объясняется тем, что произвольная константа  $C$  уже присутствует в  $\int v(x) du(x)$ .  $\square$

Используя доказанные ранее формулы для производных элементарных функций, получаем следующую таблицу интегралов.

### Таблица интегралов

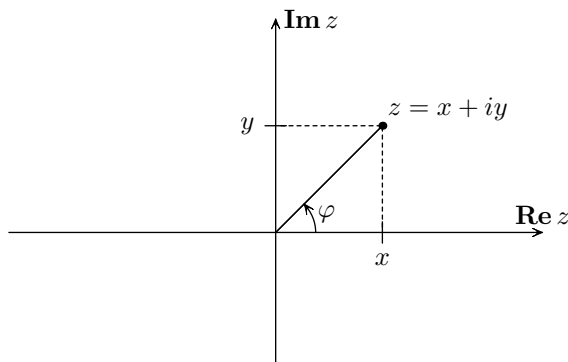
- 1)  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1, x > 0.$
- 2)  $\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C, \quad x \neq -a.$
- 3)  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1.$
- 4)  $\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C.$
- 5)  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \neq \pi k.$
- 6)  $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C, \quad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$
- 7)  $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C, \quad x \neq 0.$
- 8)  $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a > 0.$
- 9)  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, \quad |x| < a.$
- 10)  $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad x \neq \pm a.$
- 11)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0, x^2 > -a.$

## § 2. Комплексные числа

**Определение.** *Комплексным числом  $z$  называется выражение вида  $z = x + iy$ , где  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $i$  – мнимая единица. При этом  $x$  называется *вещественной частью*, а  $y$  – *мнимой частью* комплексного числа  $z$ :  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ . Множество комплексных чисел обозначается через  $\mathbb{C}$ .*

Любое вещественное число  $x \in \mathbb{R}$  будем отождествлять с комплексным числом  $x + i0$ . Поэтому  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

Комплексное число  $z = x + iy$  можно изобразить как вектор с координатами  $(x, y)$  на комплексной плоскости, т. е. на координатной плоскости с осями  $\operatorname{Re} z$ ,  $\operatorname{Im} z$ .



**Определение.** Если  $\operatorname{Re} z = r \cos \varphi$ ,  $\operatorname{Im} z = r \sin \varphi$ ,  $r \geq 0$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ , то  $r$  называется *модулем*, а  $\varphi$  – *аргументом* комплексного числа  $z$ :  $r = |z|$ ,  $\varphi = \arg z$ ,  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .

Заметим, что если  $\varphi$  – аргумент числа  $z$ , то любое число вида  $\varphi + 2\pi k$ , где  $k$  – целое, также является аргументом числа  $z$ . Поэтому аргумент комплексного числа определен с точностью до  $2\pi k$ .

**Определение.** Пусть  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ , где  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ . Тогда

- 1)  $z_1 = z_2 \iff (x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2)$ ;
- 2)  $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$ ,  $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$ ,  
т. е. сумма и разность комплексных чисел определяется как сумма и разность векторов комплексной плоскости;

3)  $z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ , т. е. при вычислении произведения  $(x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2)$  нужно раскрыть скобки и воспользоваться тем, что  $i^2 = -1$ ;

4) Пусть  $z_2 \neq 0$ , т. е.  $x_2 \neq 0$  или  $y_2 \neq 0$ . Тогда частным  $\frac{z_1}{z_2}$  называется такое комплексное число  $z$ , что  $z_1 = z z_2$ .

Свойства операций комплексных чисел

а)  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ,  $z_1 z_2 = z_2 z_1$ ,

б)  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ ,  $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ ,

в)  $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

доказывать самостоятельно.

**Определение.** Экспонентой комплексного числа  $z = x + i y$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) называется комплексное число  $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$ .

Из определения экспоненты комплексного числа следует *формула Эйлера*:  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$ .

Из формулы Эйлера и определений модуля и аргумента комплексного числа следует, что любое комплексное число  $z$  может быть представлено в *экспоненциальной форме*:

$$z = r e^{i\varphi}, \quad \text{где} \quad r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$

**Лемма 1.** (Свойство экспоненты.)

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \hookrightarrow e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

**Доказательство.** Пусть  $z_1 = x_1 + i y_1$ ,  $z_2 = x_2 + i y_2$  ( $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ ). Тогда

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1 + i y_1} e^{x_2 + i y_2} = e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ &= e^{x_1 + x_2} (\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i (\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)) = \\ &= e^{x_1 + x_2} (\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = e^{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = e^{z_1 + z_2}. \end{aligned}$$

□

**Следствие 1.** Для любых  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

1)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ;

2)  $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ .

**Доказательство.** Пусть  $r_1 = |z_1|$ ,  $\varphi_1 = \arg z_1$ ,  $r_2 = |z_2|$ ,  $\varphi_2 = \arg z_2$ . Тогда  $z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ . Следовательно,  $|z_1 z_2| = r_1 r_2$ ,  $\arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2$ .  $\square$

**Следствие 2.** Пусть  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $z_2 \neq 0$ . Тогда частное  $\frac{z_1}{z_2}$  существует и единственно, причем

$$1) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$2) \arg \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \arg z_1 - \arg z_2.$$

**Доказательство.** Пусть  $z \in \mathbb{C}$ . Обозначим через  $r, r_1, r_2$  — модули, а через  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$  — аргументы чисел  $z, z_1, z_2$ . Тогда  $z = \frac{z_1}{z_2} \xLeftrightarrow{\text{опр.}} \iff z_1 = z z_2 \xLeftrightarrow{\text{Сл.1.}} \left( r_1 = r r_2, \varphi_1 = \varphi + \varphi_2 \right) \iff \left( r = \frac{r_1}{r_2}, \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \right)$ .  $\square$

**Определение.** Если  $z \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , то  $z^n = \underbrace{z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ раз}}$ .

Пусть  $r = |z|$ ,  $\varphi = \arg z$ . Из леммы 1 следует, что  $z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$ . Поэтому  $|z^n| = |z|^n$ ,  $\arg z^n = n \arg z$ .

**Определение.** *Сопряженным* к комплексному числу  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) называется комплексное число  $\bar{z} = x - iy$ .

Свойства операции сопряжения комплексных чисел

$$1) \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2,$$

$$2) \bar{\bar{z}} = z,$$

$$3) z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z, \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z, \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2,$$

$$4) |\bar{z}| = |z|, \quad \arg \bar{z} = -\arg z$$

доказать самостоятельно.

### § 3. Разложение многочлена на множители

**Определение.** *Многочленом* степени  $n$  называется функция

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0,$$

где  $a_j \in \mathbb{C}$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Степень многочлена  $P$  будем обозначать через  $\deg P$ .

**Лемма 1.** Для любых чисел  $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}$  следующие условия эквивалентны:

$$(1) \quad \forall z \in \mathbb{C} \hookrightarrow \sum_{k=0}^n a_k z^k = \sum_{k=0}^n b_k z^k;$$

$$(2) \quad \forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n b_k x^k;$$

$$(3) \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \hookrightarrow a_k = b_k.$$

**Доказательство** (2)  $\Rightarrow$  (3) проводится аналогично доказательству теоремы о единственности разложения по формуле Тейлора (теорема 3 § 5 главы 3). Доказательство (3)  $\Rightarrow$  (1)  $\Rightarrow$  (2) очевидно.  $\square$

Деление многочленов можно производить "в столбик". Например, разделим  $P(x) = x^2$  на  $Q(x) = x - 1$ :

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x^2 - x \\ \hline x \\ x - 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

следовательно,  $\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ .

**Лемма 2.** Пусть заданы многочлены  $P(z)$  и  $Q(z)$ ,  $\deg P \geq \deg Q$ . Тогда существуют и единственны многочлены  $D(z)$  и  $R(z)$  такие, что  $\deg R < \deg Q$  и

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = D(z) + \frac{R(z)}{Q(z)}. \quad (1)$$

Многочлен  $R(z)$  называется *остатком* от деления  $P(z)$  на  $Q(z)$ .

**Доказательство.** Пусть  $\deg P = n$ ,  $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ ,  $\deg Q = m$ ,  $Q(z) = b_m z^m + \dots + b_0$ . Приводя уравнение (1) к общему знаменателю, получаем

$$P(z) = D(z) Q(z) + R(z). \quad (2)$$

Так как  $\deg R < \deg P$ , то  $\deg(P - R) = n$  и  $\deg D = n - m$ . Определим коэффициенты многочлена  $D(z) = d_{n-m} z^{n-m} + \dots + d_0$ , начиная с коэффициента при старшей степени. Уравнение (2) принимает вид  $a_n z^n + \dots = d_{n-m} z^{n-m} b_m z^m + \dots$ . Приравнявая коэффициенты при

$z^n$ , согласно лемме 1 получаем  $d_{n-m} = \frac{a_n}{b_m}$ . При известном коэффициенте  $d_{n-m}$  задача деления многочлена  $P(z)$  на  $Q(z)$  сводится к задаче деления  $\tilde{P}(z)$  на  $Q(z)$ , где  $\tilde{P}(z) = P(z) - d_{n-m} z^{n-m} Q(z)$  – многочлен степени  $\leq n-1$ :  $\frac{P(z)}{Q(z)} = d_{n-m} z^{n-m} + \frac{\tilde{P}(z)}{Q(z)}$ . Применяя те же рассуждения к дроби  $\frac{\tilde{P}(z)}{Q(z)}$  и так далее, получаем разложение (1). Так как коэффициент  $d_{n-m}$  определяется однозначно, то многочлен  $\tilde{P}(z)$  определяется однозначно. По индукции получаем, что все коэффициенты многочленов  $D(z)$  и  $R(z)$  определяются однозначно.  $\square$

Заметим, что доказательство леммы 2 является формальным описанием алгоритма деления многочленов "в столбик".

**Определение.** Пусть  $P(x)$  и  $Q(x)$  – многочлены. Функция вида  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  называется *правильной рациональной дробью*, если  $\deg P < \deg Q$  и многочлены  $P(x)$ ,  $Q(x)$  не имеют общих корней.

Согласно лемме 2 дробь  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , если она не является правильной, можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби.

**Теорема 1.** (Теорема Безу.) Пусть задано число  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Многочлен  $P(z)$  делится на  $z - z_0$  без остатка  $\iff P(z_0) = 0$ .

**Доказательство.** Разделив  $P(z)$  на  $Q(z) = z - z_0$ , согласно лемме 2 получаем  $P(z) = D(z)(z - z_0) + R(z)$ , где  $\deg R < 1$ , т. е.  $R(z) = c_0$  – константа. Итак,  $P(z) = D(z)(z - z_0) + c_0$ . Поэтому  $P(z)$  делится на  $z - z_0$  без остатка  $\iff c_0 = 0 \iff P(z_0) = 0$ .  $\square$

**Теорема 2.** (Основная теорема алгебры.) Для любого многочлена  $P(z)$  степени  $\deg P \geq 1$  существует корень, т. е.  $\exists z_0 \in \mathbb{C} : P(z_0) = 0$ .

Доказательство основной теоремы алгебры проводится в курсе теории функции комплексного переменного.

**Теорема 3.** Любой многочлен  $P(z)$  степени  $\deg P = n$  можно представить в виде

$$P(z) = a(z - z_1) \dots (z - z_n),$$

где  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ ,  $z_1, \dots, z_n$  – корни многочлена  $P(z)$ , среди которых могут быть равные.

**Доказательство.** В силу основной теоремы алгебры  $\exists z_1 \in \mathbb{C} : P(z_1) = 0$ . По теореме Безу  $P(z)$  делится на  $z - z_1$  без остатка,

т. е.  $P(z) = (z - z_1) P_1(z)$ . Аналогично, применяя основную теорему алгебры и теорему Безу к многочлену  $P_1(z)$ , получаем  $P_1(z) = (z - z_2) P_2(z)$ . И так далее по индукции получаем требуемое разложение.  $\square$

**Определение.** Число  $z_0 \in \mathbb{C}$  называется *корнем кратности  $k$*  многочлена  $P(z)$ , если  $P(z)$  делится без остатка на  $(z - z_0)^k$  и не делится без остатка на  $(z - z_0)^{k+1}$ .

**Лемма 3.** Пусть  $z_0$  – корень кратности  $k$  многочлена  $P(z)$ , все коэффициенты которого вещественны. Тогда комплексно-сопряженное число  $\bar{z}_0$  – также корень кратности  $k$  многочлена  $P(z)$ .

**Доказательство.** По условию леммы

$$\forall z \in \mathbb{C} \hookrightarrow P(z) = D(z) (z - z_0)^k, \quad (3)$$

причем  $D(z_0) \neq 0$ . Возьмем комплексное сопряжение от левой и правой частей равенства (3). Так как коэффициенты многочлена  $P(z)$  вещественны, то  $\overline{P(z)} = \overline{a_n z^n + \dots + a_0} = a_n \bar{z}^n + \dots + a_0 = P(\bar{z})$ , следовательно,

$$\forall z \in \mathbb{C} \hookrightarrow P(\bar{z}) = \overline{D(z)} (\bar{z} - \bar{z}_0)^k.$$

Поэтому

$$\forall z \in \mathbb{C} \hookrightarrow P(z) = D_1(z) (z - \bar{z}_0)^k,$$

где  $D_1(z) = \overline{D(\bar{z})}$ . Следовательно,  $D_1(\bar{z}_0) = \overline{D(z_0)} \neq 0$ . Поэтому  $\bar{z}_0$  – также корень кратности  $k$  многочлена  $P(z)$ .  $\square$

Из теоремы 3 и леммы 3 следует

**Теорема 4.** (О разложении многочлена на элементарные множители.) Пусть  $P(x)$  – многочлен, все коэффициенты которого вещественны. Пусть  $x_1, \dots, x_s$  – вещественные корни многочлена  $P(x)$  кратностей  $k_1, \dots, k_s$ , а  $(z_1, \bar{z}_1), \dots, (z_t, \bar{z}_t)$  – пары комплексно-сопряженных корней многочлена  $P(x)$  кратностей  $\ell_1, \dots, \ell_t$ . Тогда

$$\begin{aligned} P(x) &= a (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_s)^{k_s} (x - z_1)^{\ell_1} (x - \bar{z}_1)^{\ell_1} \dots (x - z_t)^{\ell_t} (x - \bar{z}_t)^{\ell_t} = \\ &= a (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_s)^{k_s} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\ell_1} \dots (x^2 + p_t x + q_t)^{\ell_t}, \end{aligned}$$

где  $p_j = -(z_j + \bar{z}_j) = -2\operatorname{Re} z_j \in \mathbb{R}$ ,  $q_j = z_j \bar{z}_j = |z_j|^2 \in \mathbb{R}$ , причем дискриминанты трехчленов отрицательны:  $D_j = p_j^2 - 4q_j = (z_j - \bar{z}_j)^2 = (2i \operatorname{Im} z_j)^2 = -4(\operatorname{Im} z_j)^2 < 0$ .

## § 4. Разложение правильной рациональной дроби в сумму элементарных дробей

В этом параграфе все коэффициенты рассматриваемых многочленов вещественные.

**Лемма 1.** Пусть  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  – правильная рациональная дробь. Пусть  $x_1$  – вещественный корень кратности  $k$  знаменателя (т.е.  $Q(x) = (x - x_1)^k \tilde{Q}(x)$ ), и  $x_1$  не является корнем многочлена  $\tilde{Q}(x)$ . Тогда существуют и единственны число  $A \in \mathbb{R}$  и многочлен  $F(x)$  такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x - x_1)^k} + \frac{F(x)}{(x - x_1)^{k-1} \tilde{Q}(x)}. \quad (1)$$

При этом  $\frac{F(x)}{(x - x_1)^{k-1} \tilde{Q}(x)}$  – правильная рациональная дробь.

**Доказательство.** Приводя формулу (1) к общему знаменателю, получаем  $P(x) = A \tilde{Q}(x) + F(x)(x - x_1)$ . Поэтому требуется доказать, что существуют число  $A \in \mathbb{R}$  и многочлен  $F(x)$  такие, что

$$P(x) - A \tilde{Q}(x) = F(x)(x - x_1). \quad (2)$$

Таким образом, требуется доказать, что существует число  $A \in \mathbb{R}$  такое, что многочлен  $\varphi(x) = P(x) - A \tilde{Q}(x)$  делится на  $x - x_1$  без остатка. По теореме Безу это эквивалентно условию  $\varphi(x_1) = 0$ , т.е.  $P(x_1) - A \tilde{Q}(x_1) = 0$ . Так как  $\tilde{Q}(x_1) \neq 0$ , то такое  $A \in \mathbb{R}$  существует и единственно:  $A = \frac{P(x_1)}{\tilde{Q}(x_1)}$ . При найденном  $A$  многочлен  $F(x)$  определяется формулой (2) однозначно:  $F(x) = \frac{P(x) - A \tilde{Q}(x)}{x - x_1}$ .

Так как  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  – правильная дробь, то  $\deg P < \deg Q$ . Отсюда и из соотношений  $\deg \tilde{Q} = \deg Q - k < \deg Q$  следует, что  $\deg(P - A \tilde{Q}) < \deg Q$ . Поэтому в силу равенства (2) имеем

$$\deg F = \deg(P - A \tilde{Q}) - 1 < \deg Q - 1 = \deg \tilde{Q} + k - 1.$$

Следовательно, дробь  $\frac{F(x)}{(x - x_1)^{k-1} \tilde{Q}(x)}$  является правильной. □

**Лемма 2.** Пусть  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  – правильная рациональная дробь. Пусть  $z_1$  – не вещественный корень кратности  $\ell$  знаменателя (т.е. согласно

лемме 2 § 3 имеем  $Q(x) = (x^2 + px + q)^\ell \tilde{Q}(x)$ , где  $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)$ ,  $z_1$  не является корнем многочлена  $\tilde{Q}(x)$ . Тогда существуют и единственны числа  $B, C \in \mathbb{R}$  и многочлен  $F(x)$  такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^\ell} + \frac{F(x)}{(x^2 + px + q)^{\ell-1} \tilde{Q}(x)}. \quad (3)$$

При этом  $\frac{F(x)}{(x^2 + px + q)^{\ell-1} \tilde{Q}(x)}$  — правильная рациональная дробь.

**Доказательство.** Приводя формулу (3) к общему знаменателю, получаем  $P(x) = (Bx + C)\tilde{Q}(x) + F(x)(x^2 + px + q)$ . Поэтому требуется доказать, что существуют числа  $B, C \in \mathbb{R}$  и многочлен  $F(x)$  такие, что

$$P(x) - (Bx + C)\tilde{Q}(x) = F(x)(x - z_1)(x - \bar{z}_1). \quad (4)$$

Таким образом, требуется доказать, что существуют числа  $B, C \in \mathbb{R}$  такие, что многочлен  $\varphi(x) = P(x) - (Bx + C)\tilde{Q}(x)$  делится на  $x - z_1$  и  $x - \bar{z}_1$  без остатка. По теореме Безу и лемме 2 § 3 это эквивалентно условию  $\varphi(z_1) = 0$ , т. е.  $P(z_1) - (Bz_1 + C)\tilde{Q}(z_1) = 0$ . Так как  $\tilde{Q}(z_1) \neq 0$ , то последнее равенство эквивалентно равенству

$$Bz_1 + C = \frac{P(z_1)}{\tilde{Q}(z_1)}. \quad (5)$$

Покажем, что существуют и единственны числа  $B, C \in \mathbb{R}$ , удовлетворяющие равенству (5). Обозначим  $x_1 = \operatorname{Re} z_1$ ,  $y_1 = \operatorname{Im} z_1$ ,  $x_0 = \operatorname{Re} \frac{P(z_1)}{\tilde{Q}(z_1)}$ ,  $y_0 = \operatorname{Im} \frac{P(z_1)}{\tilde{Q}(z_1)}$ . Тогда равенство (5) можно записать в виде  $Bx_1 + iBy_1 + C = x_0 + iy_0$ . Следовательно, равенство (5) эквивалентно системе

$$\begin{cases} By_1 = y_0, \\ C = x_0 - Bx_1. \end{cases} \quad (6)$$

Так как  $z_1 \notin \mathbb{R}$ , то  $y_1 = \operatorname{Im} z_1 \neq 0$ . Поэтому система (6) имеет единственное решение  $B, C \in \mathbb{R}$ . Следовательно, существуют и единственны числа  $B, C \in \mathbb{R}$  такие, что многочлен  $\varphi(x)$  делится на  $x - z_1$  и  $x - \bar{z}_1$  без остатка. При найденных  $B$  и  $C$  многочлен  $F(x)$  определяется формулой (4) однозначно:  $F(x) = \frac{P(x) - (Bx + C)\tilde{Q}(x)}{x^2 + px + q}$ .

Доказательство того, что дробь  $\frac{F(x)}{(x^2 + px + q)^{\ell-1} \tilde{Q}(x)}$  является правильной проводится аналогично доказательству леммы 1.  $\square$

**Теорема 1.** Пусть  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  – правильная рациональная дробь с вещественными коэффициентами. Пусть

$$Q(x) = a(x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_s)^{k_s} (x^2 + p_1x + q_1)^{\ell_1} \dots (x^2 + p_tx + q_t)^{\ell_t},$$

где  $x_1, \dots, x_s$  – различные вещественные корни многочлена  $Q(x)$ , а  $(x^2 + p_1x + q_1), \dots, (x^2 + p_tx + q_t)$  – различные квадратные трехчлены с отрицательными дискриминантами. Тогда дробь  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  можно представить как сумму *элементарных дробей*:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \Sigma_1^{\text{вещ}} + \Sigma_2^{\text{вещ}} + \dots + \Sigma_s^{\text{вещ}} + \Sigma_1^{\text{компл}} + \dots + \Sigma_t^{\text{компл}},$$

где вещественному корню  $x_j$  кратности  $k_j$  соответствует сумма

$$\Sigma_j^{\text{вещ}} = \sum_{k=1}^{k_j} \frac{A_{jk}}{(x - x_j)^k}, \quad j \in \{1, \dots, s\},$$

а множителю  $(x^2 + p_jx + q_j)^{\ell_j}$  в разложении знаменателя соответствует сумма

$$\Sigma_j^{\text{компл}} = \sum_{\ell=1}^{\ell_j} \frac{B_{j\ell}x + C_{j\ell}}{(x^2 + p_jx + q_j)^\ell}, \quad j \in \{1, \dots, t\},$$

причем все коэффициенты являются действительными числами и определены однозначно.

**Доказательство** состоит в многократном применении лемм 1 и 2. □

## § 5. Интегрирование рациональных дробей

Пусть многочлены  $P(x)$  и  $Q(x)$  не имеют общих корней. Алгоритм интегрирования рациональной дроби  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  состоит из следующих шагов:

1) если  $\deg P \geq \deg Q$ , то методом деления многочленов "в столбик" представить дробь в виде  $\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ , где  $D(x)$  – многочлен,  $\frac{R(x)}{Q(x)}$  – правильная рациональная дробь;

2) найти корни знаменателя и разложить знаменатель  $Q(x)$  на элементарные множители;

3) методом неопределенных коэффициентов разложить правильную рациональную дробь  $\frac{R(x)}{Q(x)}$  (или  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  при  $\deg P < \deg Q$ ) в сумму элементарных дробей. В силу теоремы 1 § 4 разложение в сумму элементарных дробей существует и единственно;

4) проинтегрировать элементарные дроби и многочлен  $D(x)$  при  $\deg P \geq \deg Q$ .

### Интегрирование элементарных дробей

1) Интегралы вида  $\int \frac{A dx}{(x-x_1)^k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  являются табличными.

2) Интеграл  $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k} dx$  сводится к интегралу  $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$ :

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{B}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k},$$

$$\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} = \begin{cases} \ln|x^2+px+q| & \text{при } k=1, \\ -\frac{1}{(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}} & \text{при } k>1. \end{cases}$$

3) Вычислим интеграл  $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$ , где знаменатель не имеет вещественных корней. Выделим полный квадрат в знаменателе:  $x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$ . Поскольку знаменатель не имеет вещественных корней, то  $q - \frac{p^2}{4} > 0$ . Обозначим  $a = \sqrt{q - p^2/4}$  и выполним замену переменной интегрирования:  $t = x + p/2$ . Тогда  $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = I_k(t)$ .

При  $k=1$  имеем  $I_1(t) = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{t}{a} + C$ .

Выведем рекуррентную формулу для вычисления  $I_k(t)$  при  $k>1$ .

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} I_k(t) &= \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k \int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} = \\ &= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k \int \frac{(t^2+a^2) dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} - 2ka^2 \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{t}{(t^2 + a^2)^k} + 2k I_k(t) - 2a^2 k I_{k+1}(t),$$

следовательно,

$$I_{k+1}(t) = \frac{1}{2a^2 k} \left( (2k - 1) I_k(t) + \frac{t}{(t^2 + a^2)^k} \right).$$

Поскольку интеграл каждой элементарной дроби выражается через элементарные функции, то интеграл произвольной рациональной дроби выражается через элементарные функции.

## § 6. Интегрирование иррациональных, тригонометрических и гиперболических функций

**Определение.** Функция  $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$  вида  $f(x_1, \dots, x_n) = a x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ , где  $a \in \mathbb{R}$ ,  $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , называется *одночленом*. Сумма конечного числа одночленов называется *многочленом*. Если  $P(x_1, \dots, x_n)$ ,  $Q(x_1, \dots, x_n)$  — многочлены от  $n$  переменных, то функция вида  $R(x_1, \dots, x_n) = \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{Q(x_1, \dots, x_n)}$  называется *рациональной функцией*.

**1) Интеграл вида**

$$\int R(x^{1/n}) dx, \tag{1}$$

где  $n \in \mathbb{N}$ , а  $R(t)$  — рациональная функция, сводится к интегралу от рациональной дроби с помощью подстановки  $t = x^{1/n}$ . Действительно,  $\int R(x^{1/n}) dx = n \int R(t) t^{n-1} dt$ .

**2) Интеграл**

$$\int R \left( x, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{1}{n}} \right) dx, \tag{2}$$

где  $n \in \mathbb{N}$ , а  $R(u, v)$  — рациональная функция, сводится к интегралу вида (1), если воспользоваться дробно-линейной подстановкой  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ . Следовательно, подстановка  $t = y^{1/n} = \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{1}{n}}$  приводит данный интеграл к интегралу от рациональной дроби.

### 3) Подстановки Эйлера.

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad (3)$$

где  $R(u, v)$  – рациональная функция.

**а)** Если квадратный трехчлен  $ax^2 + bx + c$  имеет вещественные корни  $x_1, x_2$ , то  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = |x - x_2| \sqrt{a \frac{x - x_1}{x - x_2}}$ . Поэтому в данном случае интеграл (3) является частным случаем интеграла вида (2) и сводится к интегралу от рациональной дроби при помощи подстановки  $t = \sqrt{\frac{x - x_1}{x - x_2}}$ .

**б)** Пусть квадратный трехчлен  $ax^2 + bx + c$  не имеет вещественных корней. Тогда при  $a < 0$  выражение  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  не определено, так как  $ax^2 + bx + c < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . При  $a > 0$  подстановки Эйлера  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} + t$  сводят интеграл (3) к интегралу от рациональной дроби.

### 4) Интеграл от дифференциального бинома

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx, \quad \text{где } m, n, p - \text{рациональные числа}, \quad (4)$$

в следующих трех случаях сводится к интегралу от рациональной дроби.

**Случай 1.**  $p$  – целое.

В этом случае  $x^m (ax^n + b)^p = R(x^m, x^n)$  – рациональная функция переменных  $x^m, x^n$ . Поэтому в данном случае интеграл (4) является частным случаем интеграла (1) и подстановка  $t = x^{1/q}$ , где  $q$  – общий знаменатель дробей  $m$  и  $n$ , приводит интеграл (4) к интегралу от рациональной дроби.

**Случай 2.**  $\frac{m+1}{n}$  – целое.

Тогда путем подстановки  $t = (ax^n + b)^{1/s}$ , где  $s$  – знаменатель дроби  $p$ , интеграл (4) сводится к интегралу от рациональной дроби.

**Случай 3.**  $\frac{m+1}{n} + p$  – целое.

В этом случае подстановка  $t = \left(\frac{ax^n + b}{x^n}\right)^{1/s}$ , где  $s$  – знаменатель дроби  $p$ , сводит интеграл (4) к интегралу от рациональной дроби.

**Теорема Чебышева.** Если не реализуется ни один из трех выше перечисленных случаев, то интеграл от дифференциального бинома (6) не выражается через элементарные функции.

**5) Тригонометрические подстановки.**

Универсальная тригонометрическая подстановка  $t = \operatorname{tg}(x/2)$  сводит интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x) dx, \quad (5)$$

где  $R(u, v)$  – рациональная функция, к интегралу от рациональной дроби.

Универсальная тригонометрическая подстановка часто приводит к громоздким вычислениям. Укажем частные случаи, в которых интеграл (5) следует вычислять с помощью других подстановок.

**а)** Если функция  $R(\sin x, \cos x)$  периодична с периодом  $\pi$ , то следует использовать подстановку  $t = \operatorname{tg} x$ .

**б)** Если интеграл (5) можно представить в виде  $\int R_1(\cos x) d\cos x$ , где  $R_1(u)$  – рациональная функция, то следует использовать подстановку  $t = \cos x$ .

**в)** Аналогично, если интеграл (5) можно представить в виде  $\int R_2(\sin x) d\sin x$ , где  $R_2(u)$  – рациональная функция, следует использовать подстановку  $t = \sin x$ .

**6) Универсальная гиперболическая подстановка  $t = \operatorname{th}(x/2)$  сводит интеграл**

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx \quad (6)$$

к интегралу от рациональной дроби.

**7) Некоторые интегралы от иррациональных функций удобно вычислять с помощью гиперболических или тригонометрических подстановок.**

**а)** Интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx,$$

где  $a > 0$ ,  $R(u, v)$  – рациональная функция, сводится к интегралу вида (6) подстановкой  $x = a \operatorname{sh} t$ .

**б)** Интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx,$$

где  $a > 0$ ,  $R(u, v)$  – рациональная функция, сводится к интегралу вида (6) подстановкой  $x = a \operatorname{ch} t$ .

**в)** Интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx,$$

где  $a > 0$ ,  $R(u, v)$  – рациональная функция, сводится к интегралу вида (5) подстановкой  $x = a \cos t$ .

## ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

### § 1. Линейное пространство

**Определение.** Говорят, что во множестве  $X$  *определена операция сложения*, если любым двум элементам  $x, y \in X$  поставлен в соответствие единственный элемент  $x + y \in X$ .

Во множестве  $X$  *определена операция умножения на вещественное число*, если любому элементу  $x \in X$  и любому вещественному числу  $\alpha \in \mathbb{R}$  поставлен в соответствие единственный элемент  $\alpha x \in X$ .

**Определение.** Множество  $X$  называется *вещественным линейным (векторным) пространством*, если в  $X$  определены операции сложения и умножения на вещественное число, удовлетворяющие следующим аксиомам:

- 1)  $\forall x, y \in X \hookrightarrow x + y = y + x$ ;
- 2)  $\forall x, y, z \in X \hookrightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$ ;
- 3)  $\exists \bar{0} \in X : \forall x \in X \hookrightarrow x + \bar{0} = x$ ;
- 4)  $\forall x \in X \exists -x \in X : x + (-x) = \bar{0}$ ;
- 5)  $\forall x \in X \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \hookrightarrow \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ ;
- 6)  $\forall x \in X \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \hookrightarrow (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ;
- 7)  $\forall x, y \in X \forall \alpha \in \mathbb{R} \hookrightarrow \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ ;
- 8)  $\forall x \in X \hookrightarrow 1x = x$ , где  $1 \in \mathbb{R}$ .

**Определение.** Множество  $X$  называется *комплексным линейным пространством*, если в  $X$  определены операции сложения и умножения на комплексное число, удовлетворяющие тем же аксиомам.

**Пример.** Вывести из аксиом линейного пространства:

- 1)  $\bar{0}$  единствен;
- 2)  $\forall x \in X \hookrightarrow -x$  единствен;
- 3)  $\forall x \in X \hookrightarrow 0x = \bar{0}$ ;

**Решение.** 1) Пусть  $\bar{0}_1, \bar{0}_2 \in X$  и  $\forall x \in X \hookrightarrow x + \bar{0}_1 = x, x + \bar{0}_2 = x$ . Тогда  $\bar{0}_1 = \bar{0}_1 + \bar{0}_2 = \bar{0}_2 + \bar{0}_1 = \bar{0}_2$ , т. е.  $\bar{0}_1 = \bar{0}_2$ .

2) Пусть  $x + (-x)_1 = \bar{0}$ ,  $x + (-x)_2 = \bar{0}$ . Тогда  $(-x)_1 = (-x)_1 + \bar{0} = (-x)_1 + (x + (-x)_2) = ((-x)_1 + x) + (-x)_2 = (-x)_2 + (x + (-x)_1) = (-x)_2 + \bar{0} = (-x)_2$ .

3)  $0x = 0x + \bar{0} = 0x + (x + (-x)) = (0x + x) + (-x) = (0x + 1x) + (-x) = (0 + 1)x + (-x) = 1x + (-x) = x + (-x) = \bar{0}$ .  $\square$

**Определение.** Арифметическим  $n$ -мерным пространством  $\mathbb{R}^n$  называется множество упорядоченных наборов из  $n$  чисел:  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , где  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Определим в  $\mathbb{R}^n$  операции сложения и умножения на число: если  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то  $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ ,  $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$ .  $\square$

**Лемма 1.** Пространство  $\mathbb{R}^n$  является вещественным линейным пространством.

**Доказательство** состоит в проверке аксиом, которые, очевидно, выполняются. В частности,  $\bar{0} = (0, \dots, 0)$ ,  $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$ .

**Определение.** Элементы линейного пространства называются *векторами*.

Заметим, что векторы на плоскости или векторы трехмерного геометрического пространства со стандартными операциями сложения векторов и умножения вектора на число удовлетворяют аксиомам линейного пространства и, следовательно, являются векторами в смысле данного определения. Поскольку  $\mathbb{R}^n$  является линейным пространством, то его элементы  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  также являются векторами.

Пусть на плоскости задана система координат. Множество координат  $(x_1, x_2)$  точек на плоскости образует двумерное арифметическое пространство  $\mathbb{R}^2$ . При этом операции суммы и умножения на число в  $\mathbb{R}^2$  соответствуют операциям суммы и умножения на число радиус-векторов точек на плоскости. Поскольку соответствие между точками на плоскости и их координатами является взаимно однозначным и сохраняет операции суммы и умножения на число, то при фиксированной системе координат плоскость можно отождествить с  $\mathbb{R}^2$ . Аналогично, трехмерное геометрическое пространство можно отождествить с  $\mathbb{R}^3$ .

## § 2. Евклидово пространство

**Определение.** Вещественное линейное пространство  $X$  называется *евклидовым*, если в нем определено скалярное произведение, т. е. любым элементам  $x, y \in X$  поставлено в соответствие единственное число  $(x, y) \in \mathbb{R}$ , причем выполняются аксиомы

- 1)  $\forall x \in X \hookrightarrow (x, x) \geq 0$ ;
- 2)  $\forall x \in X : (x, x) = 0 \hookrightarrow x = \bar{0}$ ;
- 3)  $\forall x, y, z \in X \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \hookrightarrow (\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z)$ ;
- 4)  $\forall x, y \in X \hookrightarrow (x, y) = (y, x)$ .

**Лемма 1.** Линейное пространство  $\mathbb{R}^n$  со скалярным произведением  $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ , где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , является евклидовым.

**Доказательство** состоит в проверке аксиом, которые, очевидно, выполняются.  $\square$

**Замечание.** Определенное выше скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$  соответствует скалярному произведению векторов на плоскости и в трехмерном геометрическом пространстве, данному в аналитической геометрии в случае ортонормированного базиса.

**Теорема 1.** (Неравенство Коши–Буняковского.) Пусть  $X$  – евклидово пространство. Тогда

$$\forall x, y \in X \hookrightarrow (x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y).$$

**Доказательство.** В силу аксиом скалярного произведения  $\forall t \in \mathbb{R} \hookrightarrow (tx + y, tx + y) \geq 0$ . Следовательно, дискриминант квадратного трехчлена  $(x, x)t^2 + 2(x, y)t + (y, y)$  меньше либо равен 0:  $D = 4(x, y)^2 - 4(x, x) \cdot (y, y) \leq 0$ , т. е.  $(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$ .  $\square$

Применяя неравенство Коши–Буняковского в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , получаем:

**Следствие.** Для любых чисел  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$  справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.$$

### § 3. Нормированное пространство

**Определение.** Линейное пространство  $X$  называется *нормированным*, если в пространстве  $X$  определена *норма*, т. е. каждому элементу  $x \in X$  поставлено в соответствие единственное число  $\|x\|$  (норма элемента  $x$ ), причем выполняются аксиомы

- 1)  $\forall x \in X \hookrightarrow \|x\| \geq 0$ ;
- 2)  $\forall x \in X : \|x\| = 0 \hookrightarrow x = \bar{0}$ ;
- 3)  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in X \hookrightarrow \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ ;
- 4)  $\forall x, y \in X \hookrightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (неравенство треугольника).

**Следствие из неравенства треугольника.** Если  $X$  – нормированное пространство, то

$$\forall x, y \in X \hookrightarrow \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

**Доказательство.** В силу неравенства треугольника  $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ , следовательно,  $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ . Аналогично,  $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$ . Поэтому  $\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$ .  $\square$

**Лемма 1.** Любое евклидово пространство  $X$  является нормированным пространством с евклидовой нормой  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ .

**Доказательство.** Выполнение аксиом (1), (2), (3) нормы следует из аксиом (1), (2), (3) скалярного произведения. Докажем неравенство треугольника.  $\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2$ . В силу неравенства Коши–Буняковского  $(x, y) \leq \sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)} = \|x\| \cdot \|y\|$  получаем  $\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ . Следовательно,  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .  $\square$

Из леммы 1 § 2 и леммы 1 § 3 получаем следующую лемму.

**Лемма 2.** Пространство  $\mathbb{R}^n$  является нормированным пространством с нормой  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ , где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

**Определение.** Евклидову норму  $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  вектора  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  также называют *длиной* или *модулем вектора*  $x$  и обозначают через  $|x|$ :

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}. \quad (1)$$

**Лемма 3.** Если  $X$  – евклидово пространство,  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  – евклидова норма, то для любых  $x, y \in X$  справедливо равенство

параллелограмма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \quad (2)$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) = \\ &= (x, x) + 2(x, y) + (y, y) + (x, x) - 2(x, y) + (y, y) = \\ &= 2(x, x) + 2(y, y) = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned}$$

□

**Пример.** В линейном пространстве  $\mathbb{R}^n$  можно рассматривать неевклидовы нормы, например,

$$\|x\|_{\max} = \max_{k \in \{1, \dots, n\}} |x_k| \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

удовлетворяет всем аксиомам нормы. При  $n \geq 2$  для векторов  $x = (1, 0, 0, \dots, 0)$  и  $y = (0, 1, 0, \dots, 0)$  имеем  $\|x\|_{\max} = 1$ ,  $\|y\|_{\max} = 1$ ,  $\|x \pm y\|_{\max} = 1$ . Поэтому равенство (2) не выполнено. Следовательно, нельзя так ввести скалярное произведение в линейном пространстве  $\mathbb{R}^n$ , чтобы  $\|x\|_{\max} = \sqrt{(x, x)}$ .

**Задача 1.** Пусть  $[a, b]$  – некоторый отрезок. Пространством  $C[a, b]$  называется линейное нормированное пространство, элементами которого являются все непрерывные на  $[a, b]$  функции  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Линейные операции в  $C[a, b]$  определяются естественным образом:

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \quad \forall f, g \in C[a, b] \quad \forall x \in [a, b], \\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x) \quad \forall f \in C[a, b] \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Показать, что норма

$$\|f\|_C = \max |f(x)|, \quad f \in C[a, b]$$

удовлетворяет всем аксиомам нормы. Показать, что в  $C[a, b]$  нельзя ввести скалярное произведение так, чтобы  $\|f\|_C = \sqrt{(f, f)}$  для всех  $f \in C[a, b]$ , т.е. чтобы  $\|f\|_C$  была бы евклидовой нормой.

Указание: воспользоваться леммой 3 (показать, что равенство параллелограмма для нормы  $\|f\|_C$  может быть не выполнено).

## § 4. Метрическое пространство

**Определение.** *Метрическим пространством* называется множество  $X$  с введенной на нем метрикой  $\varrho$ , т.е. функцией  $\varrho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , которая каждой паре  $(x, y)$ , где  $x \in X$  и  $y \in X$ , ставит в соответствие единственное число  $\varrho(x, y)$ , называемое расстоянием между элементами  $x$  и  $y$ , причем выполнены аксиомы

- 1)  $\forall x, y \in X \hookrightarrow \varrho(x, y) \geq 0$ ;
- 2)  $\forall x, y \in X \hookrightarrow \varrho(x, y) = 0 \iff x = y$ ;
- 3)  $\forall x, y \in X \hookrightarrow \varrho(y, x) = \varrho(x, y)$ ;
- 4)  $\forall x, y, z \in X \hookrightarrow \varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$  (неравенство треугольника).

**Лемма 1.** Любое нормированное пространство является метрическим с метрикой  $\varrho(x, y) = \|x - y\|$ .

**Доказательство.** Проверим аксиомы метрики для  $\varrho(x, y) = \|x - y\|$ .

1) Из первой аксиомы нормированного пространства следует, что  $\varrho(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ .

2) Если  $\varrho(x, y) = 0$ , то  $\|x - y\| = 0$  и в силу второй аксиомы нормы имеем  $x - y = \bar{0}$ . Следовательно,  $x = y$ . Обратно, пусть  $x = y$ . Тогда  $\varrho(x, y) = \|x - y\| = \|x - x\| = \|\bar{0}\| = \|0 \cdot \bar{0}\| = 0 \cdot \|\bar{0}\| = 0$ .

3) Используя третью аксиому нормы, имеем  $\varrho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = \|x - y\| = \varrho(x, y)$ .

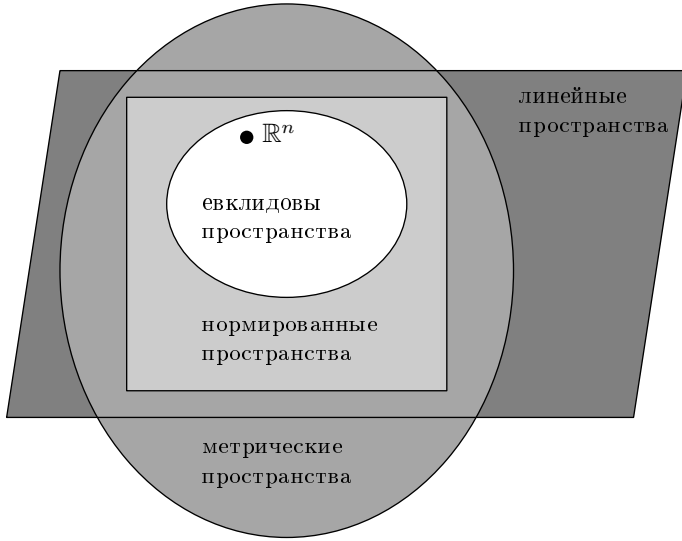
4) В силу неравенства треугольника для нормы получаем  $\varrho(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ .  $\square$

Из леммы 2 § 3 и леммы 1 текущего параграфа получаем следующую лемму.

**Лемма 2.** Пространство  $\mathbb{R}^n$  является метрическим пространством с метрикой

$$\varrho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \quad \begin{array}{l} \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n. \end{array} \quad (1)$$

На следующем рисунке схематично показана вложенность рассматриваемых типов пространств.



**Определение.** Пусть  $X$  – метрическое пространство с метрикой  $\varrho$ , пусть  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $x_0 \in X$  называется множество

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \varrho(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

**Определение.** Пусть в метрическом пространстве  $X$  заданы последовательность  $\{x_n\} \subset X$  и элемент  $x_0 \in X$ . Будем писать  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  или  $x_n \rightarrow x_0$  при  $n \rightarrow \infty$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(x_0),$$

т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, x_0) = 0$ .

**Определение.** Пусть  $X$  – метрическое пространство с метрикой  $\varrho_X$ ,  $Y$  – метрическое пространство с метрикой  $\varrho_Y$ . Пусть заданы функция  $f : X \rightarrow Y$  и элементы  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$ . Будем писать  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$  или  $f(x) \rightarrow y_0$  при  $x \rightarrow x_0$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(y_0),$$

где

$$\begin{aligned}\overset{o}{U}_\delta(x_0) &= \{x \in X : 0 < \varrho_X(x, x_0) < \delta\}, \\ U_\varepsilon(y_0) &= \{y \in Y : \varrho_Y(y, y_0) < \varepsilon\}.\end{aligned}$$

Также как и для функции одной переменной доказывается, что это определение предела функции по Коши эквивалентно следующему определению предела функции по Гейне:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ , если для любой  $\{x_n\} \subset X$  — последовательности Гейне в точке  $x_0 \in X$  справедливо соотношение  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$ . Как и раньше, последовательность  $\{x_n\}$  называется последовательностью Гейне в точке  $x_0$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  и  $x_n \neq x_0$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ .

Непосредственно из определения следует, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varrho_Y(f(x), y_0) = 0. \quad (2)$$

**Определение.** Пусть  $X$  и  $Y$  — метрические пространства. Функция  $f : X \rightarrow Y$  называется непрерывной в точке  $x_0 \in X$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

## § 5. Предел и производная вектор-функции

**Определение.**  $n$ -мерной *вектор-функцией*  $\bar{a}(t)$ , заданной на множестве  $T \subset \mathbb{R}$ , называется функция (отображение)  $\bar{a} : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ставящая в соответствие каждому числу  $t \in T$  единственный вектор  $\bar{a}(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ .

Задание  $n$ -мерной вектор-функции  $\bar{a}(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))$  на множестве  $T$  эквивалентно заданию  $n$  скалярных функций  $a_1(t), \dots, a_n(t)$  на множестве  $T$ .

**Лемма 1.** Пусть задан вектор  $\bar{a}^0 = (a_1^0, \dots, a_n^0)$  и в некоторой проколотой окрестности точки  $t_0 \in \mathbb{R}$  задана вектор-функция  $\bar{a}(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- а)  $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{a}(t) = \bar{a}^0$ ;
- б)  $\lim_{t \rightarrow t_0} \varrho(\bar{a}(t), \bar{a}^0) = 0$ ;
- в)  $\lim_{t \rightarrow t_0} |\bar{a}(t) - \bar{a}^0| = 0$ ;

$$\text{г)} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \hookrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} a_i(t) = a_i^0.$$

**Доказательство.** Эквивалентность (а)  $\Leftrightarrow$  (б) следует из формулы (2) § 4. Эквивалентность (б)  $\Leftrightarrow$  (в) следует из формулы (1) § 4 и формулы (1) § 3.

Используя равенство (1) § 3 (определение нормы в  $\mathbb{R}^n$ ), получаем

$$\begin{aligned} \text{(в)} \quad & \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} |\bar{a}(t) - \bar{a}^0| = 0 \quad \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} |\bar{a}(t) - \bar{a}^0|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} (|a_1(t) - a_1^0|^2 + \dots + |a_n(t) - a_n^0|^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} \hookrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} |a_i(t) - a_i^0|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{(г)}. \end{aligned}$$

□

**Лемма 2.** Если  $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{a}(t) = \bar{a}^0$ , то  $\lim_{t \rightarrow t_0} |\bar{a}(t)| = |\bar{a}^0|$ .

**Доказательство.** По следствию из неравенства треугольника  $||\bar{a}(t)| - |\bar{a}^0|| \leq |\bar{a}(t) - \bar{a}^0| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow t_0$ . □

**Лемма 3.** Если  $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{a}(t) = \bar{a}^0$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \varphi_0$ , то  $\exists \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) \bar{a}(t) = \varphi_0 \bar{a}^0$ .

**Доказательство.**  $|\varphi(t) \bar{a}(t) - \varphi_0 \bar{a}^0| = |\varphi(t) \bar{a}(t) - \varphi(t) \bar{a}^0 + \varphi(t) \bar{a}^0 - \varphi_0 \bar{a}^0| \leq |\varphi(t)| |\bar{a}(t) - \bar{a}^0| + |\varphi(t) - \varphi_0| |\bar{a}^0| \rightarrow |\varphi_0| \cdot 0 + 0 \cdot |\bar{a}^0| = 0$  при  $t \rightarrow t_0$ . □

**Лемма 4.** Если  $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{a}(t) = \bar{A}$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{b}(t) = \bar{B}$ , то

$$1) \exists \lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{a}(t) + \bar{b}(t)) = \bar{A} + \bar{B},$$

$$2) \exists \lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{a}(t), \bar{b}(t)) = (\bar{A}, \bar{B}),$$

**Доказательство.** 1)  $|\bar{a}(t) + \bar{b}(t) - (\bar{A} + \bar{B})| \leq |\bar{a}(t) - \bar{A}| + |\bar{b}(t) - \bar{B}| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow t_0$ .

$$2) |(\bar{a}(t), \bar{b}(t)) - (\bar{A}, \bar{B})| = |(\bar{a}(t), \bar{b}(t)) - (\bar{A}, \bar{b}(t)) + (\bar{A}, \bar{b}(t)) - (\bar{A}, \bar{B})| \leq |\bar{a}(t) - \bar{A}| |\bar{b}(t)| + |\bar{A}| |\bar{b}(t) - \bar{B}| \rightarrow 0 \cdot |\bar{B}| + |\bar{A}| \cdot 0 = 0 \text{ при } t \rightarrow t_0. \quad \square$$

**Определение.** Векторным произведением векторов  $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$  и  $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$  называется вектор

$$\begin{aligned} [\bar{a}, \bar{b}] &= \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1). \end{aligned}$$

Заметим, что данное определение векторного произведения соответствует определению векторного произведения в случае правого ортонормированного базиса, данному в аналитической геометрии. Легко проверить, что векторное произведение обладает свойствами

- 1)  $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^3 \hookrightarrow [\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}];$
- 2)  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad \forall \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b} \in \mathbb{R}^3 \hookrightarrow [\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2, \bar{b}] = \alpha_1 [\bar{a}_1, \bar{b}] + \alpha_2 [\bar{a}_2, \bar{b}];$
- 3)  $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^3 \hookrightarrow |[\bar{a}, \bar{b}]| \leq |\bar{a}| |\bar{b}|.$

**Лемма 5.** Если  $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{a}(t) = \bar{A} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{b}(t) = \bar{B} \in \mathbb{R}^3$ , то  $\exists \lim_{t \rightarrow t_0} [\bar{a}(t), \bar{b}(t)] = [\bar{A}, \bar{B}].$

**Доказательство.**  $|[\bar{a}(t), \bar{b}(t)] - [\bar{A}, \bar{B}]| \leq |[\bar{a}(t) - \bar{A}, \bar{b}(t)]| + |[\bar{A}, \bar{b}(t) - \bar{B}]| \leq |\bar{a}(t) - \bar{A}| |\bar{b}(t)| + |\bar{A}| |\bar{b}(t) - \bar{B}| \rightarrow 0.$   $\square$

**Определение.** Вектор-функция  $\bar{a}(t)$  называется *непрерывной* в точке  $t_0$ , если она определена в некоторой  $U_\delta(t_0)$  и  $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{a}(t) = \bar{a}(t_0).$

**Определение.** Пусть вектор-функция  $\bar{a}(t)$  определена в некоторой  $U_\delta(t_0)$ . *Производной* вектор-функции  $\bar{a}(t)$  в точке  $t_0$  называется

$$\bar{a}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{a}(t_0 + \Delta t) - \bar{a}(t_0)}{\Delta t}.$$

Если указанный предел не существует, то производная  $\bar{a}'(t_0)$  не существует.

**Лемма 6.** Существование производной вектор-функции  $\bar{a}(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))$  эквивалентно существованию конечных производных всех ее компонент  $a_i(t)$ , причем  $\bar{a}'(t) = (a_1'(t), \dots, a_n'(t)).$

**Доказательство** состоит в применении леммы 1.  $\square$

Производные высших порядков вектор-функции  $\bar{a}(t)$  определяются по индукции:  $\bar{a}^{(1)}(t) = \bar{a}'(t)$ ,  $\bar{a}^{(n+1)}(t) = (\bar{a}^{(n)}(t))'.$

**Лемма 7.** (Правила дифференцирования.) Пусть вектор-функции  $\bar{a}(t)$ ,  $\bar{b}(t)$  и скалярная функция  $\varphi(t)$  имеют производные в точке  $t_0$ . Тогда в точке  $t_0$  существуют производные функций  $\bar{a} + \bar{b}$ ,  $\varphi \bar{a}$ ,  $(\bar{a}, \bar{b})$ ,  $[\bar{a}, \bar{b}]$ , причем

$$\begin{aligned}
(\bar{a} + \bar{b})' &= \bar{a}' + \bar{b}', & (\varphi \bar{a})' &= \varphi' \bar{a} + \varphi \bar{a}', \\
(\bar{a}, \bar{b})' &= (\bar{a}', \bar{b}') + (\bar{a}, \bar{b}'), & [\bar{a}, \bar{b}]' &= [\bar{a}', \bar{b}] + [\bar{a}, \bar{b}'].
\end{aligned}$$

**Докажем**, например, последнее равенство. Обозначим  $\Delta \bar{a} = \bar{a}(t_0 + \Delta t) - \bar{a}(t_0)$ ,  $\Delta \bar{b} = \bar{b}(t_0 + \Delta t) - \bar{b}(t_0)$ . Тогда

$$\begin{aligned}
[\bar{a}, \bar{b}]'(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\bar{a}(t_0 + \Delta t), \bar{b}(t_0 + \Delta t)] - [\bar{a}(t_0), \bar{b}(t_0)]}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\bar{a}(t_0) + \Delta \bar{a}, \bar{b}(t_0) + \Delta \bar{b}] - [\bar{a}(t_0), \bar{b}(t_0)]}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\Delta \bar{a}, \bar{b}(t_0)] + [\bar{a}(t_0), \Delta \bar{b}] + [\Delta \bar{a}, \Delta \bar{b}]}{\Delta t} = \\
&= \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta t}, \bar{b}(t_0) \right] + \left[ \bar{a}(t_0), \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{b}}{\Delta t} \right] + \\
&+ \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \bar{b} \right] = [\bar{a}', \bar{b}](t_0) + [\bar{a}, \bar{b}'](t_0). \quad \square
\end{aligned}$$

**Лемма 8.** (Производная сложной функции.) Пусть в окрестности точки  $s_0$  задана скалярная функция  $t(s)$ , а в окрестности точки  $t_0 = t(s_0)$  задана вектор-функция  $\bar{a}(t)$ . Пусть  $\exists t'(s_0) \in \mathbb{R}$ ,  $\exists \bar{a}'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ . Тогда в точке  $s_0$  существует производная сложной функции  $\bar{b}(s) = \bar{a}(t(s))$ :  $\bar{b}'(s_0) = \bar{a}'(t_0) \cdot t'(s_0)$ .

**Доказательство** состоит в применении леммы 6 и теоремы о производной сложной функции для скалярных функций.  $\square$

**Определение.** Пусть в  $\overset{o}{U}_\delta(t_0)$  заданы вектор-функция  $\bar{a}(t)$  и скалярная функция  $\varphi(t)$ , причем  $\forall t \in \overset{o}{U}_\delta(t_0) \hookrightarrow \varphi(t) \neq 0$ . Тогда функция  $\bar{a}(t)$  называется *бесконечно малой* относительно функции  $\varphi(t)$ :

$$\bar{a}(t) = \bar{o}(\varphi(t)) \quad \text{при } t \rightarrow t_0, \quad \text{если} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\bar{a}(t)}{\varphi(t)} = \bar{0}.$$

**Лемма 9.** Пусть в  $\overset{o}{U}_\delta(t_0)$  заданы вектор-функция  $\bar{a}(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))$  и скалярная функция  $\varphi(t)$ . Тогда при  $t \rightarrow t_0$ :

$$\bar{a}(t) = \bar{o}(\varphi(t)) \Leftrightarrow \left( a_1(t) = o(\varphi(t)), \dots, a_n(t) = o(\varphi(t)) \right).$$

**Доказательство** следует из леммы 1.

**Определение.** Вектор-функция  $\bar{a}(t) \in \mathbb{R}^n$ , определенная в некоторой  $U_\delta(t_0)$ , называется *дифференцируемой* в точке  $t_0$ , если  $\exists \bar{A} \in \mathbb{R}^n$ :

$$\Delta \bar{a} = \bar{a}(t_0 + \Delta t) - \bar{a}(t_0) = \bar{A} \Delta t + \bar{o}(\Delta t) \quad \text{при} \quad \Delta t \rightarrow 0.$$

При этом линейная вектор-функция  $\bar{A} \Delta t$  называется *дифференциалом* вектор-функции  $\bar{a}(t)$  в точке  $t_0$ :

$$d\bar{a}(t_0) = \bar{A} \Delta t = \bar{A} dt, \quad \Delta \bar{a} = d\bar{a}(t_0) + \bar{o}(\Delta t) \quad \text{при} \quad \Delta t \rightarrow 0.$$

Аналогично доказательству теоремы о связи производной и дифференциала для скалярных функций легко доказать, что

**Лемма 10.**  $\exists d\bar{a}(t_0) \iff \exists \bar{a}'(t_0).$

Для дифференцируемой вектор-функции:  $d\bar{a}(t_0) = \bar{a}'(t_0) dt.$

**Замечание.** Теорема Лагранжа о среднем для скалярных функций непосредственно не обобщается на вектор-функции. Например, для вектор-функции  $\bar{a}(t) = (\cos t, \sin t)$  не существует  $\xi \in (0, 2\pi)$ :  $\bar{a}(2\pi) - \bar{a}(0) = \bar{a}'(\xi) \cdot 2\pi$ . Действительно,  $\bar{a}(2\pi) - \bar{a}(0) = (1, 0) - (1, 0) = (0, 0)$ , но  $\bar{a}'(\xi) = (-\sin \xi, \cos \xi)$  и  $\forall \xi \in (0, 2\pi) \hookrightarrow |\bar{a}'(\xi)| = \sqrt{\sin^2 \xi + \cos^2 \xi} = 1 \neq 0$ , следовательно,  $\bar{a}(2\pi) - \bar{a}(0) = (0, 0) \neq \bar{a}'(\xi) \cdot 2\pi$ .

**Теорема 1.** (Теорема Лагранжа о среднем для вектор-функции.) Пусть вектор-функция  $\bar{a}(t)$  непрерывна на  $[t_0, t_1]$  и дифференцируема на  $(t_0, t_1)$ . Тогда

$$\exists \xi \in (t_0, t_1) : |\bar{a}(t_1) - \bar{a}(t_0)| \leq |\bar{a}'(\xi)|(t_1 - t_0).$$

**Доказательство.** Определим скалярную функцию  $\varphi(t) = (\bar{a}(t), \bar{a}(t_1) - \bar{a}(t_0))$ . По теореме Лагранжа о среднем для скалярной функции  $\varphi(t)$   $\exists \xi \in (t_0, t_1) : \varphi(t_1) - \varphi(t_0) = \varphi'(\xi)(t_1 - t_0)$ , т. е.

$$(\bar{a}(t_1), \bar{a}(t_1) - \bar{a}(t_0)) - (\bar{a}(t_0), \bar{a}(t_1) - \bar{a}(t_0)) = (\bar{a}'(\xi), \bar{a}(t_1) - \bar{a}(t_0))(t_1 - t_0),$$

следовательно,

$$|\bar{a}(t_1) - \bar{a}(t_0)|^2 \leq |\bar{a}'(\xi)| |\bar{a}(t_1) - \bar{a}(t_0)| (t_1 - t_0).$$

Если  $\bar{a}(t_1) = \bar{a}(t_0)$ , то доказываемое неравенство выполняется автоматически  $\forall \xi \in (t_0, t_1)$ . Если  $\bar{a}(t_1) \neq \bar{a}(t_0)$ , то, сокращая последнее неравенство на  $|\bar{a}(t_1) - \bar{a}(t_0)|$ , получаем требуемое утверждение.  $\square$

**Теорема 2.** (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.) Пусть вектор-функция  $\bar{a}(t)$  определена в  $U_\delta(t_0)$  и  $\exists \bar{a}^{(n)}(t_0)$ . Тогда

$$\bar{a}(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\bar{a}^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k + o((t - t_0)^n) \quad \text{при } t \rightarrow t_0.$$

**Доказательство.** Воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для каждой компоненты вектор-функции  $\bar{a}(t)$ . Поскольку остаточные члены для каждой компоненты являются  $o((t - t_0)^n)$ , то в силу леммы 9 составленный из них вектор является  $o((t - t_0)^n)$ .  $\square$

## § 6. Кривые

**Определение.** *Годографом* вектор-функции  $\bar{r} : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется множество точек  $\bar{r}(t)$ , где параметр  $t$  пробегает множество  $T$ .

**Определение.** *Кривой*  $\Gamma$  называется годограф непрерывной вектор-функции  $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\}.$$

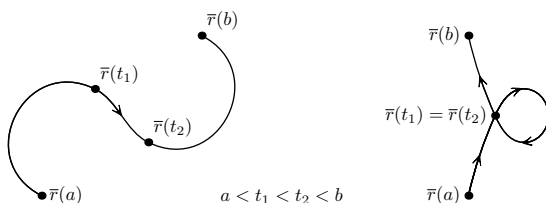
**Определение.** Если концы кривой  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\}$  совпадают, т. е.  $\bar{r}(a) = \bar{r}(b)$ , то кривая  $\Gamma$  называется *замкнутой*.

**Определение.** Точка  $\bar{r}_0$  называется *точкой самопересечения* кривой  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\}$ , если  $\exists t_1, t_2 \in [a, b] : t_1 \neq t_2$  и  $\bar{r}_0 = \bar{r}(t_1) = \bar{r}(t_2)$ .

**Определение.** Если для кривой  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\}$  не существует чисел  $t_1, t_2$  таких, что  $a \leq t_1 < t_2 \leq b$  и  $\bar{r}(t_1) = \bar{r}(t_2)$  кроме,

быть может,  $t_1 = a$ ,  $t_2 = b$  (иначе говоря, нет других точек самопересечения, кроме концов кривой), то кривая  $\Gamma$  называется *простой кривой*.

**Определение.** (Ориентация простой незамкнутой кривой.) Пусть задана простая незамкнутая кривая  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\}$ . Будем говорить, что точка  $\bar{r}_2 \in \Gamma$  *следует за* точкой  $\bar{r}_1 \in \Gamma$  или точка  $\bar{r}_1$  *предшествует* точке  $\bar{r}_2$ , если  $\bar{r}_1 = \bar{r}(t_1)$ ,  $\bar{r}_2 = \bar{r}(t_2)$ ,  $t_1 < t_2$ . При этом кривую  $\Gamma$  называют *ориентированной* по возрастанию параметра  $t$ .



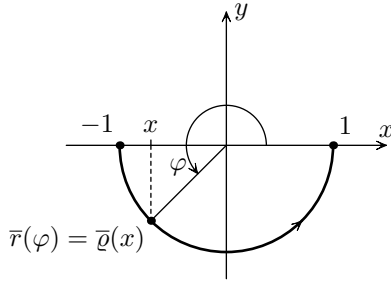
**Определение.** *Разбиением отрезка  $[a, b]$*  называется конечный набор точек  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_I\}$  таких, что  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_I = b$ .

**Определение.** Пусть задана кривая  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\}$  и разбиение  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_I\}$  отрезка  $[a, b]$ . Тогда будем говорить, что кривая  $\Gamma$  *разбита на кривые*  $\Gamma_i = \{\bar{r}(t) : t \in [t_{i-1}, t_i]\}$ ,  $i = 1, \dots, I$ .

**Определение.** (Ориентация кривой, состоящей из конечного числа простых незамкнутых кривых.) Пусть кривая  $\Gamma$  разбита на простые незамкнутые кривые  $\Gamma_i$ , ориентированные по возрастанию параметра  $t$ . Тогда упорядоченная по возрастанию параметра  $t$  совокупность  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_I$  называется *ориентированной кривой*  $\Gamma$ :  $\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_I$ .

Далее мы рассматриваем только ориентированные кривые. Для краткости будем говорить "кривая" но всегда подразумевать ориентированную кривую.

**Замечание.** Разные вектор-функции могут задавать одну и ту же кривую. Например, кривая  $\Gamma = \{(\cos \varphi, \sin \varphi) : \varphi \in [-\pi, 0]\}$ , задаваемая вектор-функцией  $\bar{r}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ ,  $\varphi \in [-\pi, 0]$ , может быть задана другой вектор-функцией  $\bar{\varrho}(x) = (x, -\sqrt{1-x^2})$ ,  $x \in [-1, 1]$ :  $\Gamma = \{(x, -\sqrt{1-x^2}) : x \in [-1, 1]\}$ .



**Определение.** Вектор-функция  $\bar{\varrho}(s)$ ,  $s \in [s_1, s_2]$  называется *допустимой параметризацией* кривой  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [t_1, t_2]\}$ , если существует непрерывная строго возрастающая функция  $t(s)$  такая, что  $t(s_1) = t_1$ ,  $t(s_2) = t_2$  и  $\forall s \in [s_1, s_2] \hookrightarrow \bar{\varrho}(s) = \bar{r}(t(s))$ .

При этом считается, что вектор функции  $\bar{r}(t)$  и  $\bar{\varrho}(s)$  параметризуют (задают) одну и ту же кривую  $\Gamma$ .

**Замечание.** Так как при допустимой замене параметра старый параметр является строго возрастающей функцией нового параметра, то ориентация кривой не меняется.

## § 7. Длина кривой

**Определение.** *Отрезком*  $[\bar{r}_1, \bar{r}_2]$  в  $\mathbb{R}^n$  называется множество точек  $\{\bar{r}_1 + t(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) : t \in [0, 1]\}$ .

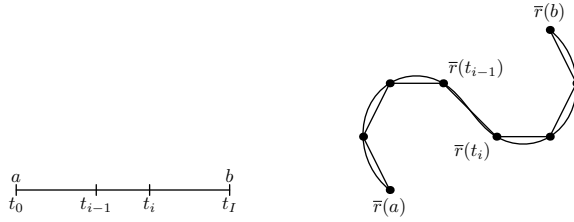
**Определение.** Пусть задана кривая  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\}$  и разбиение  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_I\}$  отрезка  $[a, b]$ . *Ломаной*  $\mathcal{P}$ , вписанной в кривую  $\Gamma$ , называется упорядоченный по возрастанию параметра  $t$  набор отрезков  $[\bar{r}(t_{i-1}), \bar{r}(t_i)]$ :

$$\mathcal{P} = ([\bar{r}(t_0), \bar{r}(t_1)], [\bar{r}(t_1), \bar{r}(t_2)], \dots, [\bar{r}(t_{I-1}), \bar{r}(t_I)]).$$

При этом говорят, что разбиение  $T$  порождает ломаную  $\mathcal{P}$ . Отрезки  $[\bar{r}(t_{i-1}), \bar{r}(t_i)]$  называются *звеньями ломаной*  $\mathcal{P}$ .

*Длиной ломаной*  $\mathcal{P}$  называется сумма длин ее звеньев:

$$|\mathcal{P}| = \sum_{i=1}^I |\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})|.$$



**Определение.** *Длиной кривой  $\Gamma$  называется точная верхняя грань длин ломанных, вписанных в  $\Gamma$ :*

$$|\Gamma| = \sup_{\mathcal{P}} |\mathcal{P}| = \sup_{\mathbf{T}} \sum_{i=1}^I |\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})|.$$

Если  $|\Gamma| < +\infty$ , то кривая  $\Gamma$  называется *спрямляемой*.

**Лемма 1.** Если спрямляемая кривая  $\Gamma$  разбита на кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , то кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  спрямляемы, причем  $|\Gamma| = |\Gamma_1| + |\Gamma_2|$ .

**Доказательство.** 1) Покажем, что кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  спрямляемы и  $|\Gamma_1| + |\Gamma_2| \leq |\Gamma|$ .

Пусть  $\mathcal{P}_1$  – ломанная, вписанная в  $\Gamma_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  – ломанная, вписанная в  $\Gamma_2$ , тогда  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2$  – ломанная, вписанная в  $\Gamma$ . Так как  $|\mathcal{P}_1| + |\mathcal{P}_2| = |\mathcal{P}| \leq |\Gamma|$ , то  $\sup_{\mathcal{P}_1} |\mathcal{P}_1| < +\infty$ ,  $\sup_{\mathcal{P}_2} |\mathcal{P}_2| < +\infty$  и  $|\Gamma_1| + |\Gamma_2| = \sup_{\mathcal{P}_1} |\mathcal{P}_1| + \sup_{\mathcal{P}_2} |\mathcal{P}_2| \leq |\Gamma|$ .

2) Покажем, что  $|\Gamma| \leq |\Gamma_1| + |\Gamma_2|$ .

Пусть кривая  $\Gamma$  параметризована вектор-функцией  $\bar{r}(t)$ :  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\}$ . Пусть точка  $c \in (a, b)$  разбивает  $\Gamma$  на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ :  $\Gamma_1 = \{\bar{r}(t) : t \in [a, c]\}$ ,  $\Gamma_2 = \{\bar{r}(t) : t \in [c, b]\}$ . Пусть  $\mathcal{P}$  – произвольная ломанная, вписанная в кривую  $\Gamma$ ,  $\mathbf{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_I\}$  – разбиение отрезка  $[a, b]$ , порождающее ломаную  $\mathcal{P}$ . Определим  $j$  из условия  $t_{j-1} < c \leq t_j$ . Ломанную, вписанную в кривую  $\Gamma_1$  и порожденную разбиением  $\mathbf{T}_1 = \{t_0, t_1, \dots, t_{j-1}, c\}$ , обозначим через  $\mathcal{P}_1$ . Ломанную, вписанную в кривую  $\Gamma_2$  и порожденную разбиением  $\mathbf{T}_2 = \{c, t_j, t_{j+1}, \dots, t_I\}$ , обозначим через  $\mathcal{P}_2$  (если  $c = t_j$ , то  $\mathbf{T}_2 = \{t_j, t_{j+1}, \dots, t_I\}$ ). По определению верхней грани  $|\mathcal{P}_1| \leq |\Gamma_1|$ ,  $|\mathcal{P}_2| \leq |\Gamma_2|$ .

Длины ломаных  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  равны соответственно

$$\begin{aligned}
|\mathcal{P}| &= \sum_{i=1}^I |\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})| = \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} |\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})| + |\bar{r}(t_j) - \bar{r}(t_{j-1})| + \sum_{i=j+1}^I |\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})|, \\
|\mathcal{P}_1| &= \sum_{i=1}^{j-1} |\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})| + |\bar{r}(c) - \bar{r}(t_{j-1})|, \\
|\mathcal{P}_2| &= |\bar{r}(t_j) - \bar{r}(c)| + \sum_{i=j+1}^I |\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})|.
\end{aligned}$$

В силу неравенства треугольника  $|\bar{r}(t_j) - \bar{r}(t_{j-1})| \leq |\bar{r}(c) - \bar{r}(t_{j-1})| + |\bar{r}(t_j) - \bar{r}(c)|$ , следовательно,  $|\mathcal{P}| \leq |\mathcal{P}_1| + |\mathcal{P}_2| \leq |\Gamma_1| + |\Gamma_2|$ . Итак,  $|\Gamma| = \sup_{\mathcal{P}} |\mathcal{P}| \leq |\Gamma_1| + |\Gamma_2| \leq |\Gamma|$ , т. е.  $|\Gamma_1| + |\Gamma_2| = |\Gamma|$ .  $\square$

**Определение.** Функция  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  называется *непрерывно дифференцируемой*, если

- 1)  $\forall t \in [a, b] \quad \exists f'(t)$ , где при  $t = a$  под  $f'(t)$  понимается правая, а при  $t = b$  — левая производная и
- 2) функция  $f'(t)$  непрерывна на  $[a, b]$ .

Непрерывная дифференцируемость вектор-функции  $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  определяется аналогично.

**Теорема 1.** (Достаточное условие спрямляемости кривой.) Пусть вектор-функция  $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , параметризующая кривую  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\}$ , непрерывно дифференцируема. Тогда  $\Gamma$  спрямляема и

$$|\Gamma| \leq (b - a) \max_{t \in [a, b]} |\bar{r}'(t)|.$$

**Доказательство.** Так как скалярная функция  $|\bar{r}'(t)|$  непрерывна на  $[a, b]$ , то по теореме Вейерштрасса для скалярных функций  $\exists \max_{t \in [a, b]} |\bar{r}'(t)| = M$ .

Пусть  $\mathcal{P}$  — ломаная, вписанная в кривую  $\Gamma$ , порожденная некоторым разбиением  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_I\}$  отрезка  $[a, b]$ . По теореме Лагранжа для вектор-функций  $\forall i \in \{1, 2, \dots, I\} \quad \exists \xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ :

$$|\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})| \leq |\bar{r}'(\xi_i)| (t_i - t_{i-1}) \leq M (t_i - t_{i-1}),$$

следовательно,

$$|\mathcal{P}| = \sum_{i=1}^I |\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})| \leq M \sum_{i=1}^I (t_i - t_{i-1}) = M(b-a).$$

Поэтому  $|\Gamma| = \sup_{\mathcal{P}} |\mathcal{P}| \leq \max_{t \in [a,b]} |\bar{r}'(t)| (b-a)$ .  $\square$

**Определение.** Пусть кривая  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\}$  спрямляема. Определим переменную дугу  $\Gamma_t = \{\bar{r}(u) : u \in [a, t]\}$ . Функцию  $s(t) = |\Gamma_t|$  называют *переменной длиной дуги* кривой  $\Gamma$ .

**Теорема 2.** Пусть вектор-функция  $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , параметризующая кривую  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\}$ , непрерывно дифференцируема. Тогда переменная длина дуги  $s(t)$  непрерывно дифференцируема и  $\forall t_0 \in [a, b] \hookrightarrow s'(t_0) = |\bar{r}'(t_0)|$  (здесь при  $t_0 = a$  и при  $t_0 = b$  имеются в виду односторонние производные).

**Доказательство.** Пусть  $t_0 \in [a, b]$ ,  $\Delta t \in (0, b - t_0)$ . Обозначим  $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ ,  $\Delta \bar{r} = \bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)$ .

В силу леммы 1 длина кривой  $\Delta \Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [t_0, t_0 + \Delta t]\}$  равна  $|\Delta \Gamma| = \Delta s$ . Так как длина отрезка  $[\bar{r}(t_0), \bar{r}(t_0 + \Delta t)]$  не превосходит длины дуги  $\Delta \Gamma$ , то

$$|\Delta \bar{r}| \leq |\Delta \Gamma|. \quad (1)$$

По теореме 1  $|\Delta \Gamma| \leq \max_{t \in [t_0, t_0 + \Delta t]} |\bar{r}'(t)| |\Delta t|$ . По определению максимума  $\exists \xi \in [t_0, t_0 + \Delta t] : \max_{t \in [t_0, t_0 + \Delta t]} |\bar{r}'(t)| = |\bar{r}'(\xi)|$ , следовательно,  $|\Delta \Gamma| \leq |\bar{r}'(\xi)| |\Delta t|$ , откуда в силу (1) получаем  $\frac{|\Delta \bar{r}|}{|\Delta t|} \leq \frac{|\Delta \Gamma|}{|\Delta t|} \leq |\bar{r}'(\xi)|$ . Поэтому

$$\left| \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \right| \leq \frac{\Delta s}{\Delta t} \leq |\bar{r}'(\xi)|. \quad (2)$$

Так как  $|t_0 - \xi| \leq |\Delta t|$ , то при  $\Delta t \rightarrow +0$  выполняется  $\xi \rightarrow t_0 + 0$  и в силу непрерывности функции  $\bar{r}'(t) \quad \exists \lim_{\Delta t \rightarrow +0} |\bar{r}'(\xi)| = |\bar{r}'(t_0)|$ . Кроме того, по определению производной  $\exists \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \bar{r}'(t_0)$ , следовательно,  $\exists \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \left| \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \right| = |\bar{r}'(t_0)|$ . Поэтому из (2) по теореме о трех функциях следует, что  $\exists \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = |\bar{r}'(t_0)|$ , т. е.  $\exists s'_+(t_0) = |\bar{r}'(t_0)|$ . Аналогично  $\forall t_0 \in (a, b) \exists s'_-(t_0) = |\bar{r}'(t_0)|$ .  $\square$

**Определение.** Будем говорить, что вектор-функция  $\bar{\varrho}[0, |\Gamma|] \rightarrow \mathbb{R}^n$  является *натуральной параметризацией* кривой  $\Gamma = \{\bar{\varrho}(t) : t \in [0, |\Gamma|]\}$ , если параметр  $t$  является переменной длины дуги, т. е.  $\forall t \in [0, |\Gamma|] \rightarrow s(t) = t$ .

**Определение.** Кривая  $\Gamma$  называется *гладкой*, если

- 1) возможна натуральная параметризация кривой  $\Gamma : \Gamma = \{\bar{\varrho}(s) : s \in [0, |\Gamma|]\}$  и
- 2) вектор-функция  $\bar{\varrho}[0, |\Gamma|] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , задающая натуральную параметризацию кривой  $\Gamma$ , непрерывно дифференцируема на  $[0, |\Gamma|]$ .

**Определение.** Пусть вектор-функция  $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , параметризующая кривую  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\}$ , дифференцируема на  $[a, b]$ . Точка  $t_0 \in [a, b]$  называется *особой точкой* параметризации  $\bar{r}$ , если  $\bar{r}'(t_0) = \bar{0}$ .

**Теорема 3.** (О существовании натуральной параметризации.) Пусть вектор-функция  $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , параметризующая кривую  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\}$ , непрерывно дифференцируема и не имеет особых точек. Тогда

- 1) натуральная параметризация  $\bar{\varrho} : [0, |\Gamma|] \rightarrow \mathbb{R}^n$  кривой  $\Gamma$  является допустимой;
- 2)  $\forall t \in [a, b] \quad \exists \bar{\varrho}'(s)|_{s=s(t)} = \frac{\bar{r}'(t)}{|\bar{r}'(t)|}$ ;
- 3) кривая  $\Gamma$  является гладкой.

**Доказательство.** 1) По теореме 2  $\forall t \in [a, b] \quad \exists s'(t) = |\bar{r}'(t)|$ . Так как  $\bar{r}'(t) \neq \bar{0}$ , то  $s'(t) > 0$ . Следовательно, переменная длина дуги  $s(t)$  является строго возрастающей непрерывной функцией. Поэтому существует обратная к ней функция  $t(s)$ , которая также строго возрастает и непрерывна. По определению допустимой параметризации получаем, что параметризация  $\bar{\varrho}(s) = \bar{r}(t(s))$ , где  $s \in [0, |\Gamma|]$ , является допустимой.

2) Так как  $\exists s'(t) = |\bar{r}'(t)| \neq 0$ , то по теореме о производной обратной функции  $\exists t'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\bar{r}'(t)|}$ . По теореме о производной сложной функции  $\exists \bar{\varrho}'(s) = \bar{r}'(t) t'(s) = \frac{\bar{r}'(t)}{|\bar{r}'(t)|}$ .

3) Так как вектор-функция  $\bar{r}(t)$  непрерывно дифференцируема и  $\bar{r}'(t) \neq \bar{0}$ , то вектор-функция  $\bar{\varrho}'(s) = \frac{\bar{r}'(t(s))}{|\bar{r}'(t(s))|}$  непрерывна, следовательно, вектор-функция  $\bar{\varrho}(s)$  – непрерывно дифференцируема и кривая  $\Gamma$  – гладкая.  $\square$

**Замечание.** Условие отсутствия особых точек является существенным для гладкости кривой. Например, кривая  $\Gamma = \{(t^3, |t|^3) : t \in [-1, 1]\}$  задается непрерывно дифференцируемой вектор-функцией  $\bar{r}(t) = (t^3, |t|^3)$ , так как ее производная  $\bar{r}'(t) = (3t^2, 3t^2 \operatorname{sign} t)$  – непрерывная вектор-функция. Однако  $\Gamma$  не является гладкой, так как в натуральной параметризации  $\Gamma = \{\bar{\varrho}(s) : s \in [0, 2\sqrt{2}]\}$  задается вектор-функцией  $\bar{\varrho}(s) = (\frac{s}{\sqrt{2}} - 1, |\frac{s}{\sqrt{2}} - 1|)$ , не являющейся дифференцируемой в точке  $s = \sqrt{2}$ .

## § 8. Первое приближение кривой (касательная)

Пусть кривая  $\Gamma = \{\bar{r}(s) : s \in [0, |\Gamma|]\}$  задана в натуральной параметризации. Пусть  $s_0, s_0 + \Delta s \in [0, |\Gamma|]$ ,  $\Delta s \neq 0$ . Обозначим  $\bar{r}_0 = \bar{r}(s_0)$ ,  $\Delta \bar{r} = \bar{r}(s_0 + \Delta s) - \bar{r}_0$ . Уравнение секущей, проходящей через точки  $\bar{r}_0$  и  $\bar{r}(s_0 + \Delta s)$ , имеет вид  $\bar{r} = \bar{r}_0 + \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} u$  (где  $u \in \mathbb{R}$  – параметр прямой).

**Определение.** Прямая  $\bar{r} = \bar{r}_{\text{кас}}(u) = \bar{r}_0 + \bar{\tau} u$  называется *касательной* к кривой  $\Gamma = \{\bar{r}(s) : s \in [0, |\Gamma|]\}$  в точке  $\bar{r}_0$ , если эта прямая является предельным положением секущей:

$$\forall u \in \mathbb{R} \hookrightarrow \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left( \bar{r}_0 + \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} u \right) = \bar{r}_{\text{кас}}(u) = \bar{r}_0 + \bar{\tau} u.$$

**Теорема 1.** Пусть кривая  $\Gamma = \{\bar{r}(s) : s \in [0, |\Gamma|]\}$  задана в натуральной параметризации. Тогда существование касательной к кривой  $\Gamma$  в точке  $\bar{r}(s_0)$  эквивалентно существованию производной  $\frac{d\bar{r}}{ds}$  в точке  $s_0$ . При этом вектор  $\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}$  является единичным вектором касательной, направленным по возрастанию параметра  $s$ .

**Доказательство.** Из определения касательной следует, что прямая  $\bar{r} = \bar{r}(s_0) + \bar{\tau} u$  является касательной тогда и только тогда, когда  $\bar{\tau} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s}$ , т. е.  $\exists \frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{r}'(s_0) = \bar{\tau}$ . Из теоремы 2 § 7 следует, что  $|\bar{r}'(s)| = s'(s) = 1$ , т. е.  $|\bar{\tau}| = 1$ . Так как при достаточно малых  $\Delta s$  вектор  $\Delta \bar{r}$  направлен в сторону возрастания параметра  $s$ , то вектор  $\bar{\tau} = \lim_{\Delta s \rightarrow +0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s}$  направлен в ту же сторону.  $\square$

**Теорема 2.** Пусть кривая  $\Gamma = \{\bar{r}(s) : s \in [0, |\Gamma|]\}$  задана в натуральной параметризации и пусть  $\exists \bar{r}'(s_0)$ . Тогда

$$\bar{r}(s) = \bar{r}_{\text{кас}}(s - s_0) + \bar{o}(s - s_0) \quad \text{при} \quad s \rightarrow s_0,$$

т. е. в окрестности точки  $\bar{r}(s_0)$  кривая  $\Gamma$  в первом приближении совпадает со своей касательной.

**Доказательство.** Разложим вектор-функцию  $\bar{r}(s)$  по формуле Тейлора:  $\bar{r}(s) = \bar{r}(s_0) + \bar{r}'(s_0)(s - s_0) + \bar{o}(s - s_0)$  при  $s \rightarrow s_0$ . Так как по теореме 1 имеем  $\bar{r}'(s_0) = \bar{\tau}$ , то  $\bar{r}(s) = \bar{r}(s_0) + \bar{\tau}(s - s_0) + \bar{o}(s - s_0) = \bar{r}_{\text{кас}}(s - s_0) + \bar{o}(s - s_0)$  при  $s \rightarrow s_0$ .  $\square$

**Теорема 3.** Пусть вектор-функция  $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , параметризующая кривую  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\}$  непрерывно дифференцируема и не имеет особых точек. Тогда в любой точке  $\bar{r}_0 = \bar{r}(t_0) \in \Gamma$  существует касательная к кривой  $\Gamma$ :  $\bar{r} = \bar{r}_{\text{кас}}(u) = \bar{r}_0 + \bar{\tau}u$ , где единичный вектор касательной, указывающий ориентацию кривой  $\Gamma$  по возрастанию параметра  $t$  имеет вид

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{r}'(t_0)}{|\bar{r}'(t_0)|}.$$

**Доказательство.** В силу теоремы 3 § 7 кривую  $\Gamma$  можно задать в натуральной параметризации:  $\bar{\varrho}(s) = \bar{r}(t(s))$ , где  $t(s)$  – функция, обратная к переменной длине дуги. По теореме 1 вектор  $\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}$  является единичным вектором касательной, направленным по возрастанию параметра  $s$  (а значит, и по возрастанию параметра  $t$ ). В силу пункта 2 теоремы 3 § 7  $\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{\bar{r}'(t_0)}{|\bar{r}'(t_0)|}$ .  $\square$

## § 9. Второе приближение кривой

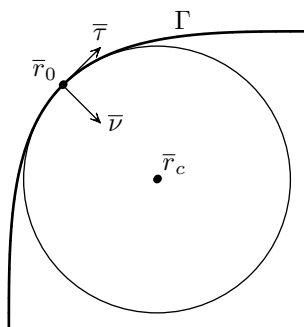
**Определение.** Пусть кривая  $\Gamma = \{\bar{r}(s) : s \in [0, |\Gamma|]\}$  задана в натуральной параметризации. Пусть вектор-функция  $\bar{r} : [0, |\Gamma|] \rightarrow \mathbb{R}^n$  дважды дифференцируема на  $[0, |\Gamma|]$ . Пусть  $\bar{\tau}(s) = \frac{d\bar{r}(s)}{ds}$  – единичный вектор касательной. Тогда число  $k = k(s_0) = \left| \frac{d\bar{\tau}}{ds}(s_0) \right|$  называется *кривизной* кривой  $\Gamma$  в точке  $\bar{r}_0 = \bar{r}(s_0)$ .

Если в точке  $\bar{r}_0$  кривизна  $k(s_0) \neq 0$ , то

1) число  $R = R(s_0) = \frac{1}{k(s_0)}$  называется *радиусом кривизны*,

2) единичный вектор  $\bar{\nu} = \bar{\nu}(s_0) = \frac{1}{k(s_0)} \frac{d\bar{\tau}}{ds}(s_0)$  – *вектором главной нормали*,

- 3) прямая с направляющим вектором  $\bar{\nu}$ , проходящая через точку  $\bar{r}_0$ , – *главной нормалью*,
- 4) плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль, – *соприкасающейся плоскостью*,
- 5) точка  $\bar{r}_c = \bar{r}_c(s_0) = \bar{r}_0 + R(s_0) \bar{\nu}(s_0)$  – *центром кривизны*,
- 6) окружность с центром в точке  $\bar{r}_c$ , радиусом  $R$ , лежащая в соприкасающейся плоскости, называется *соприкасающейся окружностью* кривой  $\Gamma$  в точке  $\bar{r}_0$ .



**Лемма 1.** Если в некоторой точке кривой  $\Gamma$  определены вектор касательной  $\bar{\tau}$  и вектор главной нормали  $\bar{\nu}$ , то  $\bar{\tau} \perp \bar{\nu}$ .

**Доказательство.** Так как  $(\bar{\tau}(s), \bar{\tau}(s)) = |\bar{\tau}(s)|^2 = 1 \quad \forall s \in [0, |\Gamma|]$ , то  $(\bar{\tau}(s), \bar{\tau}(s))' = 0$ , следовательно,  $(\bar{\tau}'(s), \bar{\tau}(s)) = 0$ , т. е.  $(\bar{\nu}(s), \bar{\tau}(s)) = 0$ .  $\square$

Напишем векторное уравнение соприкасающейся окружности кривой  $\Gamma$  в точке  $\bar{r}_0$ .

Пусть сначала в плоскости  $xu$  задана прямоугольная система координат с единичными базисными векторами  $\bar{i}, \bar{j}$ . Окружность радиуса  $R$  с центром в  $\bar{0}$ , лежащая в плоскости векторов  $\bar{i}, \bar{j}$ , может быть задана формулами

$$x = -R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

или в векторной форме:  $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} = -R \cos \varphi \bar{i} + R \sin \varphi \bar{j}$ . Если в  $\mathbb{R}^n$  заданы два ортогональных единичных вектора  $\bar{\tau}$  и  $\bar{\nu}$  и точка  $\bar{r}_c$ , то уравнение окружности радиуса  $R$ , лежащей в плоскости векторов  $\bar{\tau}, \bar{\nu}$  и с центром в точке  $\bar{r}_c$ , имеет вид  $\bar{r} = \bar{r}_{\text{окр}}(\varphi) = \bar{r}_c - R \cos \varphi \bar{\nu} + R \sin \varphi \bar{\tau}$ . Следовательно, с учетом определения центра кривизны

$\bar{r}_c = \bar{r}_0 + R(s_0) \bar{\nu}(s_0)$ , соприкасающаяся окружность кривой  $\Gamma$  в точке  $\bar{r}_0 = \bar{r}(s_0)$  задается уравнением

$$\bar{r} = \bar{r}_{\text{окр}}(\varphi) = \bar{r}_0 + R \sin \varphi \bar{\tau} + R(1 - \cos \varphi) \bar{\nu}. \quad (1)$$

**Теорема 1.** Пусть кривая  $\Gamma = \{\bar{r}(s) : s \in [0, |\Gamma|]\}$  задана в натуральной параметризации. Пусть вектор-функция  $\bar{r} : [0, |\Gamma|] \rightarrow \mathbb{R}^n$  дважды дифференцируема. Тогда

1) если  $\bar{r}''(s_0) \neq \bar{0}$ , то в окрестности точки  $\bar{r}_0 = \bar{r}(s_0)$  кривая  $\Gamma$  во втором приближении совпадает с соприкасающейся окружностью:

$$\bar{r}(s) = \bar{r}_{\text{окр}}\left(\frac{s - s_0}{R}\right) + \bar{o}((s - s_0)^2) \quad \text{при } s \rightarrow s_0;$$

2) если  $\bar{r}''(s_0) = \bar{0}$ , то в окрестности точки  $\bar{r}(s_0)$  кривая  $\Gamma$  во втором приближении совпадает с касательной:

$$\bar{r}(s) = \bar{r}_{\text{кас}}(s - s_0) + \bar{o}((s - s_0)^2) \quad \text{при } s \rightarrow s_0.$$

**Доказательство.** 1) Пользуясь разложениями  $\cos \varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + o(\varphi^2)$ ,  $\sin \varphi = \varphi + o(\varphi^2)$  при  $\varphi \rightarrow 0$ , из формулы (1) получаем при  $s \rightarrow s_0$ :

$$\bar{r}_{\text{окр}}\left(\frac{s - s_0}{R}\right) = \bar{r}(s_0) + \bar{\tau}(s - s_0) + \frac{\bar{\nu}}{2R}(s - s_0)^2 + \bar{o}((s - s_0)^2).$$

Так как  $\bar{\tau} = \bar{r}'(s_0)$ ,  $\frac{\bar{\nu}}{R} = k \bar{\nu} = \bar{r}''(s_0)$ , то при  $s \rightarrow s_0$ :

$$\bar{r}_{\text{окр}}\left(\frac{s - s_0}{R}\right) = \bar{r}(s_0) + \bar{r}'(s_0)(s - s_0) + \frac{\bar{r}''(s_0)}{2}(s - s_0)^2 + \bar{o}((s - s_0)^2).$$

С другой стороны, в силу формулы Тейлора при  $s \rightarrow s_0$

$$\bar{r}(s) = \bar{r}(s_0) + \bar{r}'(s_0)(s - s_0) + \frac{\bar{r}''(s_0)}{2}(s - s_0)^2 + \bar{o}((s - s_0)^2).$$

Сравнивая разложения  $\bar{r}(s)$  и  $\bar{r}_{\text{окр}}\left(\frac{s - s_0}{R}\right)$ , получаем утверждение пункта (1).

Доказательство пункта (2) аналогично доказательству теоремы 2 § 8.  $\square$

**Теорема 2.** Пусть вектор-функция  $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , параметризующая кривую  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^3$ , дважды дифференцируема и не имеет особых точек (т.е.  $\bar{r}'(t) \neq 0$ ) на  $[a, b]$ . Тогда

$$1) \quad \left[ \bar{\tau}, \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right] = \frac{[\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)]}{|\bar{r}'(t)|^3};$$

2) кривизна кривой  $\Gamma$  в каждой точке  $\bar{r}(t) \in \Gamma$  существует и выражается формулой

$$k = \frac{|[\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)]|}{|\bar{r}'(t)|^3}.$$

**Доказательство.** 1) По теореме 3 § 8 имеем  $\bar{\tau} = \frac{\bar{r}'(t)}{|\bar{r}'(t)|}$ . Так как  $\bar{r}(t)$  дважды дифференцируема, то  $\exists \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{\bar{r}''(t)}{|\bar{r}'(t)|} + \bar{r}'(t) \left( \frac{1}{|\bar{r}'(t)|} \right)'$ .

Так как по теореме 2 § 7 справедливо равенство  $\frac{ds}{dt} = |\bar{r}'(t)|$ , то

$$\exists \quad \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{d\bar{\tau}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\bar{r}'(t)|} \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{\bar{r}''(t)}{|\bar{r}'(t)|^2} + \frac{\bar{r}'(t)}{|\bar{r}'(t)|} \left( \frac{1}{|\bar{r}'(t)|} \right)'$$

Еще раз используя равенство  $\bar{\tau} = \frac{\bar{r}'(t)}{|\bar{r}'(t)|}$ , получаем

$$\left[ \bar{\tau}, \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right] = \frac{1}{|\bar{r}'(t)|} \left[ \bar{r}'(t), \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right] = \frac{[\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)]}{|\bar{r}'(t)|^3}.$$

2) Из существования  $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$  следует существование кривизны  $k = \left| \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right|$ . В силу леммы 1, векторы  $\bar{\tau}$  и  $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$  взаимно перпендикулярны, кроме того,  $|\bar{\tau}| = 1$ , следовательно,

$$k = \left| \left[ \bar{\tau}, \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right] \right| = \frac{|[\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)]|}{|\bar{r}'(t)|^3}. \quad \square$$

### Следствия

1) Формула для вычисления кривизны, записанная через координаты вектор-функции  $\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , принимает вид

$$k = \frac{\sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2}}{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^{3/2}}.$$

2) Если  $\Gamma$  – плоская кривая, т.е.  $z(t) = 0$ , то

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

3) Если плоская кривая  $\Gamma$  задана как график функции  $y = f(x)$ , то  $x' = 1$ ,  $x'' = 0$ ,  $y' = f'$ ,  $y'' = f''$  и, следовательно,

$$k = \frac{|f''|}{(1 + (f')^2)^{3/2}}.$$

## § 10. Сопровождающий трехгранник кривой

В данном параграфе всегда будем предполагать, что кривая  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^3$

1) параметризована дважды дифференцируемой вектор-функцией  $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

2) не имеет особых точек (т. е.  $\forall t \in [a, b] \quad \bar{r}'(t) \neq \bar{0}$ ) и

3) кривизна не обращается в 0 (т. е. согласно теореме 2 § 6  $\forall t \in [a, b] \quad [\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)] \neq \bar{0}$ ).

**Определение.** Пусть  $\bar{\tau}$  – единичный вектор касательной,  $\bar{\nu}$  – единичный вектор главной нормали кривой  $\Gamma$  в точке  $\bar{r}_0$ . Тогда вектор  $\bar{\beta} = [\bar{\tau}, \bar{\nu}]$  называется *вектором бинормали* в точке  $\bar{r}_0$ . Прямая с направляющим вектором  $\bar{\beta}$ , проходящая через точку  $\bar{r}_0$ , называется *бинормалью* кривой  $\Gamma$  в точке  $\bar{r}_0$ .

**Замечание.** Поскольку векторы  $\bar{\tau}$  и  $\bar{\nu}$  – единичные и взаимно перпендикулярны, то в силу определения векторного произведения тройка векторов  $\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}$  образует правый ортонормированный базис, а касательная, главная нормаль и бинормаль в данной точке – это три взаимно перпендикулярные прямые.

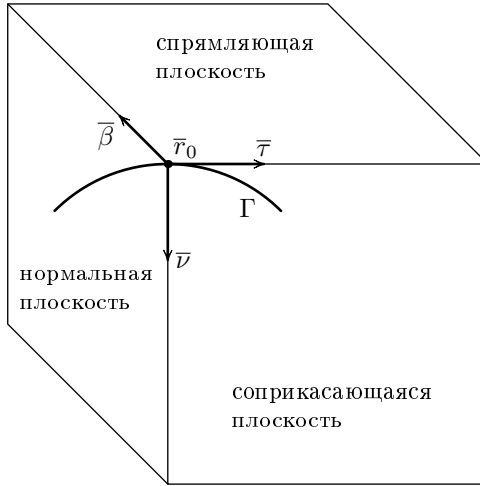
**Определение.** Отложим векторы  $\bar{\tau}, \bar{\nu}$  и  $\bar{\beta}$ , вычисленные для точки  $\bar{r}_0$  кривой  $\Gamma$ , от точки  $\bar{r}_0$ . Образовавшийся трехгранник называется *сопровождающим трехгранником Френе* кривой  $\Gamma$ .

Трехгранник Френе в точке  $\bar{r}_0$  задает следующие три взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через точку  $\bar{r}_0$ :

плоскость, перпендикулярная касательной, называется *нормальной плоскостью*,

плоскость, перпендикулярная бинормали, называется *соприкасающейся плоскостью*,

плоскость, перпендикулярная главной нормали, называется *спрямляющей плоскостью*.



**Замечание.** (Геометрический смысл соприкасающейся и спрямляющей плоскостей.)

Как следует из теоремы 1 § 6, кривая  $\Gamma$  с точностью до  $\bar{o}((s-s_0)^2)$  совпадает с соприкасающейся окружностью:

$$\bar{r} = \bar{r}_{\text{окр}}(\varphi) = \bar{r}_0 + R \sin \varphi \bar{\tau} + R(1 - \cos \varphi) \bar{\nu}.$$

Так как соприкасающаяся окружность лежит в соприкасающейся плоскости, то кривая  $\Gamma$  с точностью до  $\bar{o}((s-s_0)^2)$  при  $s \rightarrow s_0$  лежит в соприкасающейся плоскости. Так как проекция соприкасающейся окружности на спрямляющую плоскость принадлежит касательной к кривой  $\Gamma$ , то с точностью до  $\bar{o}((s-s_0)^2)$  при  $s \rightarrow s_0$  проекция кривой  $\Gamma$  на спрямляющую плоскость является прямой. Этим объясняются названия соприкасающейся и спрямляющей плоскостей.

Напишем уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей в точке  $\bar{r}_0 = \bar{r}(t_0)$ . Согласно определениям эти уравнения можно записать в следующем виде.

Нормальная плоскость:  $(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{\tau}) = 0$ .

Спрямляющая плоскость:  $(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{\nu}) = 0$ .

Соприкасающаяся плоскость:  $(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{\beta}) = 0$ .

Напишем более явные уравнения этих плоскостей.

Так как  $\bar{\tau} = \frac{\bar{r}'(t)}{|\bar{r}'(t)|}$ , то нормальная плоскость задается уравнением

$$(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{r}'(t_0)) = 0.$$

Поскольку  $\bar{\nu} = \frac{1}{k} \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{k} \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ , то спрямляющая плоскость задается уравнением

$$\left( \bar{r} - \bar{r}_0, \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}(t_0) \right) = 0.$$

Используя равенство  $\bar{\beta} = [\bar{\tau}, \bar{\nu}]$ , запишем уравнение соприкасающейся плоскости через смешанное произведение:  $(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{\tau}, \bar{\nu}) = 0$ . В силу пункта (1) теоремы 2 § 6 и определения вектора главной нормали  $\bar{\nu} = \frac{1}{k} \frac{d\bar{\tau}}{ds}$  получаем  $[\bar{\tau}, \bar{\nu}] = \frac{[\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)]}{k |\bar{r}'(t)|^3}$ . Поэтому соприкасающаяся плоскость в точке  $\bar{r}_0$  задается уравнением

$$(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{r}'(t_0), \bar{r}''(t_0)) = 0.$$

## § 11. Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$

Напомним, что  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$  называется множество

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(x_0) &= \{x \in \mathbb{R}^n : \varrho(x, x_0) < \varepsilon\} = \\ &= \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : \sqrt{(x^1 - x_0^1)^2 + \dots + (x^n - x_0^n)^2} < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

**Определение.** Точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  называется *внутренней точкой* множества  $X \subset \mathbb{R}^n$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x_0) \subset X.$$

*Внутренностью* множества  $X$  называется  $\text{int } X$  – множество всех внутренних точек  $X$ . Множество  $X$  называется *открытым*, если все точки  $X$  являются внутренними, т. е.  $X \subset \text{int } X$ . Пустое множество  $\emptyset$  по определению считается открытым.

**Определение.** Точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  называется *точкой прикосновения* множества  $X \subset \mathbb{R}^n$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(x_0) \cap X \neq \emptyset.$$

*Замыканием* множества  $X$  называется  $\overline{X}$  – множество всех точек прикосновения  $X$ . Множество  $X$  называется *замкнутым*, если все точки прикосновения лежат в  $X$ , т.е.  $\overline{X} \subset X$ . Пустое множество  $\emptyset$  по определению считается замкнутым.

**Лемма 1.**  $\forall X \subset \mathbb{R}^n \hookrightarrow \text{int } X \subset X \subset \overline{X}$ .

**Доказательство.** 1) Если  $x_0 \in \text{int } X$ , то  $\exists \varepsilon > 0$ :  $U_\varepsilon(x_0) \subset X$ , следовательно,  $x_0 \in X$ .

2) Если  $x_0 \in X$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow x_0 \in U_\varepsilon(x_0) \cap X$ , следовательно,  $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(x_0) \cap X \neq \emptyset$ , а значит,  $x_0 \in \overline{X}$ .  $\square$

**Следствие.** 1) Множество  $X$  открыто  $\Leftrightarrow X = \text{int } X$ .

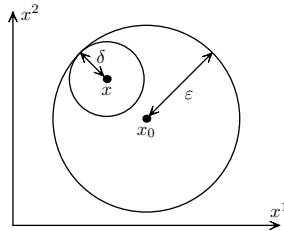
2) Множество  $X$  замкнуто  $\Leftrightarrow X = \overline{X}$ .

**Лемма 2.** Если  $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n$ , то  $\text{int } X \subset \text{int } Y$ ,  $\overline{X} \subset \overline{Y}$ .

**Доказательство** следует непосредственно из определений.

**Лемма 3.**  $\forall \varepsilon > 0 \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow$  множество  $U_\varepsilon(x_0)$  открыто.

**Доказательство.** Пусть  $x \in U_\varepsilon(x_0)$ . Требуется доказать, что  $x \in \text{int } U_\varepsilon(x_0)$ . Определим  $\delta = \varepsilon - |x_0 - x|$ . Так как  $|x - x_0| < \varepsilon$ , то  $\delta > 0$ .



Покажем, что  $U_\delta(x) \subset U_\varepsilon(x_0)$ . Действительно, если  $y \in U_\delta(x)$ , то  $|x - y| < \delta$  и по неравенству треугольника  $|y - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| < \delta + |x - x_0| = \varepsilon$ , следовательно,  $y \in U_\varepsilon(x_0)$ . Итак,  $U_\delta(x) \subset U_\varepsilon(x_0)$ . Поэтому  $x \in \text{int } U_\varepsilon(x_0)$ .  $\square$

**Теорема 1.**  $\forall X \subset \mathbb{R}^n$  выполняется:

- 1)  $\text{int } X$  является открытым множеством;
- 2)  $\overline{X}$  является замкнутым множеством.

**Доказательство.** 1) Обозначим  $Y = \text{int } X$ . Пусть  $x_0 \in Y$ . Требуется доказать, что  $x_0 \in \text{int } Y$ . Так как  $x_0 \in Y = \text{int } X$ , то  $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x_0) \subset X$ . По лемме 2  $\text{int } U_\varepsilon(x_0) \subset \text{int } X$ . В силу леммы 3  $\text{int } U_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0)$ , следовательно,  $U_\varepsilon(x_0) \subset \text{int } X = Y$ . Поэтому  $x_0 \in \text{int } Y$ .

2) Обозначим  $Y = \overline{X}$ . Пусть  $x_0 \in \overline{Y}$ . Требуется доказать, что  $x_0 \in Y$ . Так как  $x_0 \in \overline{Y}$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_{\varepsilon/2}(x_0) \cap Y \neq \emptyset$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists x_1(\varepsilon) \in U_{\varepsilon/2}(x_0) \cap Y$ . Так как  $x_1(\varepsilon) \in Y = \overline{X}$ , то  $\exists x_2(\varepsilon) \in U_{\varepsilon/2}(x_1(\varepsilon)) \cap X$ . В силу неравенства треугольника  $|x_0 - x_2(\varepsilon)| \leq |x_0 - x_1(\varepsilon)| + |x_1(\varepsilon) - x_2(\varepsilon)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ . Итак,  $\forall \varepsilon > 0 \exists x_2(\varepsilon) \in X \cap U_\varepsilon(x_0)$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow X \cap U_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset$ , а значит,  $x_0 \in \overline{X} = Y$ .  $\square$

**Лемма 4.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда

1)  $\mathbb{R}^n \setminus \text{int } X = \overline{\mathbb{R}^n \setminus X}$ ;

2)  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{X} = \text{int } (\mathbb{R}^n \setminus X)$ .

**Доказательство.** 1)  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \text{int } X \Leftrightarrow \neg(x_0 \in \text{int } X) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \neg(\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x_0) \subset X) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(x_0) \not\subset X \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset \Leftrightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus X}.$$

2) Доказать самостоятельно.  $\square$

**Теорема 2.**  $X$  замкнуто  $\iff \mathbb{R}^n \setminus X$  открыто.

**Доказательство.**  $X$  замкнуто  $\Leftrightarrow X = \overline{X} \Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus X = \mathbb{R}^n \setminus \overline{X} \xrightarrow{\text{Л.4}} \mathbb{R}^n \setminus X = \text{int } (\mathbb{R}^n \setminus X) \Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus X$  открыто.  $\square$

**Определение.** Границей множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется множество  $\partial X = \overline{X} \setminus \text{int } X$ . Точки множества  $\partial X$  называются *граничными точками* множества  $X$ .

**Лемма 5.**  $x_0 \in \partial X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x_1 \in U_\varepsilon(x_0) \cap X, \exists x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \setminus X$ .

**Доказательство.** По определению  $\overline{X}$  имеем  $x_0 \in \overline{X} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x_1 \in U_\varepsilon(x_0) \cap X$ .

По определению  $\text{int } X$  имеем  $x_0 \notin \text{int } X \Leftrightarrow \neg(\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x_0) \subset X) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(x_0) \not\subset X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \setminus X$ .

Поэтому  $x_0 \in \overline{X} \setminus \text{int } X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) : x_1 \in X, x_2 \notin X$ .  $\square$

**Задача 1.** Доказать, что для любого множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  справедливы равенства  $\text{int } X = X \setminus \partial X$ ,  $\overline{X} = X \cup \partial X$ .

**Задача 2.** Найти  $\text{int } X$ ,  $\overline{X}$ ,  $\partial X$ . Выяснить, является ли множество  $X$  открытым или замкнутым.

- а) полуплоскость  $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 \in \mathbb{R}\}$ ;
- б) интервал  $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, x_2 \in (-1, 1)\}$ .

**Задача 3.** Верно ли, что для любых множеств  $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^n$  справедливы включения:

- 1)  $\text{int}(X_1 \cup X_2) \subset \text{int } X_1 \cup \text{int } X_2$ ;
- 2)  $\text{int}(X_1 \cup X_2) \supset \text{int } X_1 \cup \text{int } X_2$ ;
- 3)  $\overline{X_1 \cup X_2} \subset \overline{X_1} \cup \overline{X_2}$ ;
- 4)  $\overline{X_1 \cup X_2} \supset \overline{X_1} \cup \overline{X_2}$ ;
- 5)  $\partial(X_1 \cup X_2) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2$ ;
- 6)  $\partial(X_1 \cup X_2) \supset \partial X_1 \cup \partial X_2$ ?

## § 12. Сходимость в $\mathbb{R}^n$

В соответствии с определением сходимости последовательности в метрическом пространстве последовательность  $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$  *сходится* к точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall k \geq N \hookrightarrow x_k \in U_\varepsilon(x_0),$$

т. е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k \geq N \hookrightarrow \varrho(x_k, x_0) < \varepsilon$ , т. е.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varrho(x_k, x_0) = 0$ .

**Лемма 1.** Пусть заданы последовательность  $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)$  и точка  $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \iff \forall i \in \{1, \dots, n\} \hookrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^i = x_0^i.$$

**Доказательство.** 1) Пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ . Тогда  $\forall i \in \{1, \dots, n\} \hookrightarrow (x_k^i - x_0^i)^2 \leq \varrho(x_k, x_0)^2 \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , следовательно,  $x_k^i \rightarrow x_0^i$  при  $k \rightarrow \infty$ .

2) Пусть  $\forall i \in \{1, \dots, n\} \hookrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^i = x_0^i$ . Тогда по теореме о пределе суммы  $\varrho(x_k, x_0)^2 = (x_k^1 - x_0^1)^2 + \dots + (x_k^n - x_0^n)^2 \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , следовательно,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ .  $\square$

**Теорема 1.** (Критерий точки прикосновения.)

$$x_0 \in \overline{X} \iff \exists \{x_k\} \subset X : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0.$$

**Доказательство.** 1) Пусть  $\exists \{x_k\} \subset X : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ . По определению предела имеем  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k \geq N \hookrightarrow x_k \in U_\varepsilon(x_0)$ . Поскольку  $x_k \in X$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(x_0) \cap X \neq \emptyset$ , т. е.  $x_0 \in \overline{X}$ .

2) Пусть  $x_0 \in \overline{X}$ . Тогда по определению  $\overline{X}$  имеем  $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow X \cap U_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset$ , следовательно,  $\forall k \in \mathbb{N} \exists x_k \in X \cap U_{1/k}(x_0)$ . Так как  $\varrho(x_k, x_0) < 1/k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ .  $\square$

**Определение.** Множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется *ограниченным*, если  $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in X \hookrightarrow |x| \leq C$ . В частности, последовательность  $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$  называется *ограниченной*, если  $\exists C \in \mathbb{R} : \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow |x_k| \leq C$ .

Напомним, что последовательность  $\{y_j\}_{j=1}^\infty$  называется *подпоследовательностью* последовательности  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ , если существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел  $\{k_j\} : \forall j \in \mathbb{N} \hookrightarrow y_j = x_{k_j}$ .

**Теорема 2.** (Теорема Больцано–Вейерштрасса в  $\mathbb{R}^n$ .)

Из любой ограниченной последовательности  $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

**Доказательство** проведем индукцией по размерности пространства  $\mathbb{R}^n$ . При  $n = 1$  доказываемая теорема следует из теоремы Больцано–Вейерштрасса для числовых последовательностей. Пусть доказываемая теорема справедлива при  $n = n_0$ . Докажем тогда, что данная теорема справедлива при  $n = n_0 + 1$ . Пусть последовательность  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  ограничена,  $x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^{n_0}, x_k^{n_0+1}) \in \mathbb{R}^{n_0+1}$ . Рассмотрим последовательность  $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ , где  $y_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^{n_0}) \in \mathbb{R}^{n_0}$ . Поскольку  $|y_k| \leq |x_k|$ , то последовательность  $\{y_k\}$  также ограничена. По предположению индукции из последовательности  $\{y_k\}_{k=1}^\infty$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{y_{k_m}\}_{m=1}^\infty$ . Рассмотрим подпоследовательность  $\{x_{k_m}\}_{m=1}^\infty$  последовательности  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ . Так как  $\{y_{k_m}\}_{m=1}^\infty$  сходится, то первые  $n_0$  координат последовательности  $\{x_{k_m}\}_{m=1}^\infty$  сходятся. Рассмотрим числовую последовательность  $\{x_{k_m}^{n_0+1}\}_{m=1}^\infty$ , составленную из  $n_0 + 1$ -й координаты последовательности  $\{x_{k_m}\}_{m=1}^\infty$ . Пользуясь теоремой Больцано–Вейерштрасса для

ограниченной числовой последовательности  $\{x_{k_m}^{n_0+1}\}_{m=1}^{\infty}$ , выделим из нее сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{k_{m_j}}^{n_0+1}\}_{j=1}^{\infty}$ . Тогда все координаты подпоследовательности  $\{x_{k_{m_j}}\}_{j=1}^{\infty}$  сходятся и по лемме 1 подпоследовательность  $\{x_{k_{m_j}}\}_{j=1}^{\infty}$  сходится. Итак, доказано, что из произвольной ограниченной последовательности  $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^{n_0+1}$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{k_{m_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ , т. е. данная теорема справедлива при  $n = n_0 + 1$ , что по индукции доказывает теорему при любом  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Определение.** Множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется *компактом*, если из любой последовательности  $\{x_k\} \subset X$  можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу множества  $X$ .

**Теорема 3.** (Критерий компактности множества.) Множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  является компактом тогда и только тогда, когда  $X$  ограничено и замкнуто.

**Доказательство.** 1) Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  – ограниченное замкнутое множество. Покажем, что  $X$  – компакт. Пусть  $\{x_k\}$  – произвольная последовательность элементов множества  $X$ . Так как последовательность  $\{x_k\}$  ограничена, то по теореме Больцано–Вейерштрасса можно выделить подпоследовательность  $\{x_{k_j}\}$ , сходящуюся к некоторому  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Поскольку  $\{x_{k_j}\} \subset X$  и  $x_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j}$ , то по теореме 1  $x_0 \in \overline{X}$ . В силу замкнутости  $X$   $x_0 \in X$ .

Итак, показано, что из произвольной последовательности  $\{x_k\} \subset X \subset \mathbb{R}^n$  можно выделить подпоследовательность  $\{x_{k_j}\}$ , сходящуюся к некоторому элементу  $x_0$  множества  $X$ , т. е.  $X$  – компакт.

2) Пусть  $X$  – компакт. Доказательство того, что множество  $X$  ограничено и замкнуто, проведем методом от противного.

а) Предположим, что множество  $X$  неограничено. Тогда  $\forall k \in \mathbb{N} \exists x_k \in X : |x_k| > k$ . Поскольку для любой подпоследовательности  $\{x_{k_j}\}$  последовательности  $\{x_k\}$  выполняется  $\lim_{j \rightarrow \infty} |x_{k_j}| = +\infty$ , то из последовательности  $\{x_k\}$  нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу множества  $X$ . Следовательно, множество  $X$  не является компактом. Полученное противоречие показывает, что множество  $X$  ограничено.

б) Предположим, что множество  $X$  незамкнуто. Тогда  $\exists x_0 \in \overline{X} \setminus X$ . Так как  $x_0 \in \overline{X}$ , то по теореме 1  $\exists \{x_k\} \subset X : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ . Так как любая подпоследовательность  $\{x_{k_j}\}$  сходится к  $x_0 \notin X$ , то из последовательности  $\{x_k\}$  нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу множества  $X$ . Следовательно, множество  $X$  не является компактом. Полученное противоречие показывает, что множество  $X$  замкнуто.  $\square$

**Определение.** Последовательность  $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$  называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k \geq N \forall m \geq N \hookrightarrow |x_k - x_m| < \varepsilon.$$

**Задача 1.** Доказать критерий Коши в  $\mathbb{R}^n$ : последовательность  $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$  сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

### § 13. Лемма Гейне-Бореля

**Определение.** *Открытым покрытием* множества  $X$  называется семейство открытых множеств  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$  таких, что  $X \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ . Если множество  $A'$  содержится во множестве индексов  $A$  (т.е.  $A' \subset A$ ) и  $X \subset \bigcup_{\alpha \in A'} V_\alpha$ , то  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A'}$  называется *подпокрытием* множества  $X$ . Если множество  $A'$  конечно, то это подпокрытие называется *конечным подпокрытием*.

**Лемма 1.** Из любого открытого покрытия отрезка можно выделить конечное подпокрытие этого отрезка.

**Доказательство.** Предположим противное:  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$  – открытое покрытие отрезка  $[a, b]$ , из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Построим последовательность вложенных отрезков  $[a_k, b_k] \subset [a, b]$ , удовлетворяющих условию

$$\mathcal{P}[a_k, b_k] : \begin{cases} \text{из покрытия } \{V_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ нельзя выделить} \\ \text{конечное подпокрытие отрезка } [a_k, b_k]. \end{cases}$$

Положим  $[a_1, b_1] = [a, b]$ . Тогда условие  $\mathcal{P}[a_1, b_1]$  выполнено. Пусть задан отрезок  $[a_k, b_k] \subset [a, b]$ , обладающих свойством  $\mathcal{P}[a_k, b_k]$ . Разделим отрезок  $[a_k, b_k]$  пополам точкой  $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ . Заметим, что хотя бы одно из условий  $\mathcal{P}[a_k, c_k]$  или  $\mathcal{P}[c_k, b_k]$  выполнено. Иначе из

покрытия  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$  можно выделить конечное подпокрытие отрезка  $[a_k, c_k]$  и отрезка  $[c_k, b_k]$ , объединение которых является конечным покрытием отрезка  $[a_k, b_k]$ , что противоречит условию  $\mathcal{P}[a_k, b_k]$ .

Определим

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, c_k], & \text{условие } \mathcal{P}[a_k, c_k] \text{ выполнено,} \\ [c_k, b_k], & \text{условие } \mathcal{P}[a_k, c_k] \text{ не выполнено.} \end{cases}$$

Так как одно из условий  $\mathcal{P}[a_k, c_k]$  или  $\mathcal{P}[c_k, b_k]$  выполнено, то выполнено условие  $\mathcal{P}[a_{k+1}, b_{k+1}]$ . Поэтому данный процесс можно продолжать бесконечно. В результате получаем стягивающуюся последовательность вложенных отрезков  $[a_k, b_k]$ , каждый из которых удовлетворяет условию  $\mathcal{P}[a_k, b_k]$ .

По теореме Кантора существует общая точка  $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k]$ . Поскольку  $x \in [a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ , то найдется индекс  $\alpha_0 \in A$  такой, что  $x \in V_{\alpha_0}$ . Так как множество  $V_{\alpha_0}$  открыто, то найдется число  $\varepsilon > 0$  такое, что  $U_\varepsilon(x) \subset V_{\alpha_0}$ . Поскольку  $b_k - a_k \rightarrow 0$ , то найдется индекс  $k_0$  такой, что  $b_{k_0} - a_{k_0} < \varepsilon$ . Тогда в силу условия  $x \in [a_{k_0}, b_{k_0}]$  получаем, что  $[a_{k_0}, b_{k_0}] \subset U_\varepsilon(x) \subset V_{\alpha_0}$ . Таким образом, из покрытия  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$  можно выделить конечное подпокрытие отрезка  $[a_{k_0}, b_{k_0}]$ , состоящее из одного множества  $V_{\alpha_0}$ , что противоречит условию  $\mathcal{P}[a_{k_0}, b_{k_0}]$ .  $\square$

**Замечание.** Существует открытое покрытие интервала, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Например, таким покрытием интервала  $(0, 1)$  является семейство интервалов  $\{(\frac{1}{k}, 1)\}_{k \geq 2}$ .

**Определение.** *Клеткой* в пространстве  $\mathbb{R}^n$  будем называть декартово произведение отрезков  $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ , т.е. замкнутый прямоугольный параллелепипед

$$\Pi = \{x = (x_1, \dots, x_n) : a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, n}\}.$$

**Лемма 2.** Из любого открытого покрытия клетки в  $\mathbb{R}^n$  можно выделить конечное подпокрытие этой клетки.

**Доказательство.** Предположим противное: существует клетка  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  и открытое покрытие  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$  этой клетки, для которого справедливо условие

$$\mathcal{P}(\Pi) : \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{из покрытия } \{V_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ нельзя выделить} \\ \text{конечное подпокрытие клетки } \Pi. \end{array} \right.$$

Построим последовательность вложенных клеток  $\Pi_k$ , удовлетворяющих условию  $\mathcal{P}(\Pi_k)$ . Положим  $\Pi_1 = \Pi$ . Пусть задана клетка  $\Pi_k$ . Разобьем пополам каждый отрезок, декартовым произведением которых является клетка  $\Pi_k$ . Получим разбиение клетки  $\Pi_k$  на  $2^n$  клеток одинаковых размеров. Среди них найдется клетка  $\Pi_{k+1}$ , удовлетворяющая условию  $\mathcal{P}(\Pi_{k+1})$ . Продолжая этот процесс бесконечно, получим последовательность вложенных клеток  $\Pi_k$ . Эта последовательность имеет общую точку  $x \in \mathbb{R}^n$ . Для доказательства последнего достаточно применить теорему Кантора о вложенных отрезках к проекциям клеток  $\Pi_k$  на  $i$ -ую координатную ось. Эти проекции имеют общую для всех  $k$  точку  $x_i$ , а точка  $x = (x_1, \dots, x_n)$  является общей точкой клеток  $\Pi_k$ . Далее аналогично лемме 1 найдется  $\alpha_0 \in A$  и  $\varepsilon > 0$  такие, что  $U_\varepsilon(x) \subset V_{\alpha_0}$  и найдется клетка  $\Pi_{k_0} \subset U_\varepsilon(x) \subset V_{\alpha_0}$ . Это противоречит условию  $\mathcal{P}(\Pi_{k_0})$ .  $\square$

**Теорема 1.** Пусть множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  является компактом. Тогда из любого открытого покрытия  $X$  можно выделить конечное подпокрытие  $X$ .

**Доказательство.** Так как компакт  $X$  является ограниченным множеством, то найдется клетка  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  такая, что  $X \subset \Pi$ . Пусть  $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$  – открытое покрытие множества  $X$ . Поскольку компакт  $X$  является замкнутым множеством, то его дополнение  $V^0 = \mathbb{R}^n \setminus X$  – открытое множество. Поэтому  $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \cup \{V^0\}$  – открытое покрытие  $\mathbb{R}^n$ , а значит, – открытое покрытие клетки  $\Pi$ . В силу леммы 2 из покрытия  $\mathcal{V}'$  можно выделить конечное подпокрытие  $\mathcal{V}'_{\text{кон}}$  клетки  $\Pi$ . Так как  $X \subset \Pi$ , то  $\mathcal{V}'_{\text{кон}}$  является покрытием множества  $X$ .

Поскольку  $X \cap V^0 = \emptyset$ , то  $\mathcal{V}_{\text{кон}} := \mathcal{V}'_{\text{кон}} \setminus \{V^0\}$  также является покрытием множества  $X$ . Итак, из покрытия  $\mathcal{V}$  мы выделили конечное подпокрытие множества  $X$ .  $\square$

**Задача 1.** Доказать утверждение, обратное к теореме 1: если из любого открытого покрытия множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  можно выделить конечное подпокрытие  $X$ , то  $X$  – компакт.

# ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## § 1. Предел функции нескольких переменных

**Определение.** Пусть задано множество  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Говорят, что на множестве  $X$  определена *функция нескольких переменных*  $f(x) = f(x^1, x^2, \dots, x^n)$  и пишут  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , если каждой точке  $x = (x^1, \dots, x^n) \in X$  поставлено в соответствие единственное число  $f(x)$ , являющееся значением функции  $f$  в точке  $x$ .

Напомним, что проколотой  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  называется множество

$$\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

**Определение.** Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой  $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ . Говорят, что элемент  $A \in \overline{\mathbb{R}}$  называется *пределом* функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  (*по совокупности переменных*) и пишут  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  или  $\lim_{\substack{x^1 \rightarrow x_0^1 \\ x^2 \rightarrow x_0^2 \\ \vdots \\ x^n \rightarrow x_0^n}} f(x^1, \dots, x^n) = A$ , если

(определение Коши):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, \delta_0] : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A);$$

(определение Гейне):

$\forall$  последовательности Гейне  $\{x_k\} \subset \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$  (т. е. такой последовательности, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$  и  $x_k \neq x_0 \forall k \in \mathbb{N}$ ) выполняется условие  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = A$ .

Эквивалентность двух определений предела функции нескольких переменных доказывается так же, как и для функции одной переменной. Для функций нескольких переменных справедливы теоремы о предельном переходе в неравенствах, а также о пределах суммы,

произведения и частного, аналогичные соответствующим теоремам для функций одной переменной.

**Определение.** *Направлением* в пространстве  $\mathbb{R}^n$  называется любой вектор  $\ell \in \mathbb{R}^n$  единичной длины ( $|\ell| = 1$ ).

**Определение.** Элемент  $A \in \mathbb{R}$  называется *пределом* функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  *по направлению*  $\ell \in \mathbb{R}^n$  ( $|\ell| = 1$ ), если  $\lim_{t \rightarrow +0} f(x_0 + t\ell) = A$ , т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in (0, \delta) \hookrightarrow f(x_0 + t\ell) \in U_\varepsilon(A). \quad (1)$$

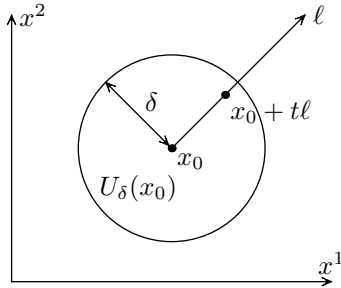
**Теорема 1.** 1) Если  $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , то по любому направлению предел функции  $f$  в точке  $x_0$  существует и равен  $A$ .

2) Обратное неверно.

**Доказательство.** 1) Пусть  $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A). \quad (2)$$

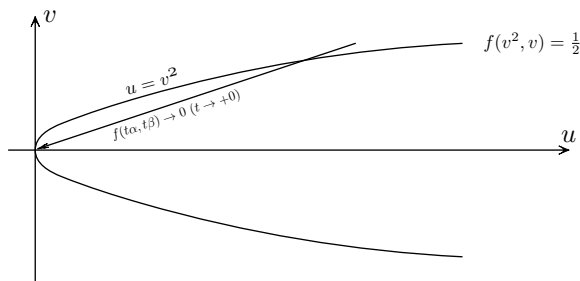
Зафиксируем произвольное направление  $\ell \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\ell| = 1$ . Тогда  $\forall t \in (0, \delta)$  при  $x = x_0 + t\ell$  выполнены соотношения  $|x - x_0| = t|\ell| = t < \delta$ , т. е.  $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ . Отсюда, учитывая (2), получаем (1), т. е.  $\lim_{t \rightarrow +0} f(x_0 + t\ell) = A$ .



2) Пусть  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$ ,  $x = (u, v)$ ,  $f(u, v) = \frac{uv^2}{u^2 + v^4}$ . Покажем, что в точке  $x_0 = (0, 0)$  предел функции  $f$  по любому направлению  $\ell = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ , где  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , существует и равен 0, однако предела по совокупности переменных  $\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ v \rightarrow 0}} f(u, v)$  не существует.

а) Поскольку  $f(x_0 + t\ell) = f(t \cos \varphi, t \sin \varphi) = \frac{t^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{t^2 \cos^2 \varphi + t^4 \sin^4 \varphi} = \frac{t \cos \varphi \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + t^2 \sin^4 \varphi}$ , то при  $\cos \varphi \neq 0$  имеет место неравенство  $|f(t \cos \varphi, t \sin \varphi)| \leq \left| \frac{t \cos \varphi \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right| \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow +0$ ), а при  $\cos \varphi = 0$  имеем  $\sin \varphi \neq 0$ , и выполняется равенство  $f(t \cos \varphi, t \sin \varphi) = 0$ .

Следовательно,  $\forall \ell \in \mathbb{R}^2 : |\ell| = 1 \quad \exists \lim_{t \rightarrow +0} f(x_0 + t\ell) = 0$ .



б) Заметим, что при  $u = v^2 \neq 0$  справедливо равенство  $f(u, v) = \frac{v^4}{2v^4} = \frac{1}{2}$ , а при  $u = 0, v \neq 0$  — равенство  $f(u, v) = 0$ . Рассмотрим две последовательности:  $\{(u_k, v_k)\} = \{(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k})\}$  и  $\{(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)\} = \{(0, \frac{1}{k})\}$ . Эти две последовательности являются последовательностями Гейне, сходящимися к точке  $(0, 0)$ . Так как  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(u_k, v_k) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} f(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)$ , то предела функции  $f$  в точке  $(0, 0)$  по совокупности переменных не существует.  $\square$

### Метод исследования предела функции нескольких переменных

Рассмотрим метод исследования предела функции двух переменных, основанный на введении полярных координат (для функции трех и более переменных можно использовать подобный метод, основанный на введении сферических или обобщенных сферических координат). Пусть требуется исследовать

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y). \quad (3)$$

Введем полярные координаты с центром в точке  $(x_0, y_0)$ :

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \varrho \cos \varphi, \\y &= y_0 + \varrho \sin \varphi.\end{aligned}$$

**Шаг 1.** Для любого  $\varphi \in [0, 2\pi]$  рассмотрим предел по направлению  $\ell = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ :

$$\lim_{\varrho \rightarrow +0} f(x_0 + \varrho \cos \varphi, y_0 + \varrho \sin \varphi) = A(\varphi). \quad (4)$$

Если при некотором  $\varphi \in [0, 2\pi]$  предел (4) не существует или этот предел  $A(\varphi)$  зависит от  $\varphi$ , т.е. от направления, то согласно пункту (1) теоремы 1 предел по совокупности переменных (3) не существует и исследование закончено.

Будем предполагать теперь, что для любого  $\varphi \in [0, 2\pi]$  предел (4) существует и не зависит от  $\varphi$ :  $A(\varphi) = A_0$ . Согласно пункту (2) теоремы 1 указанное предположение не гарантирует существование предела по совокупности переменных.

**Шаг 2.** Предположим, что существует функция  $g(\varrho) \rightarrow 0$  при  $\varrho \rightarrow +0$  такая, что для некоторого  $\varrho_0 > 0$  справедлива следующая *равномерная оценка*

$$\left| f(x_0 + \varrho \cos \varphi, y_0 + \varrho \sin \varphi) - A_0 \right| \leq g(\varrho) \quad \forall \varrho \in (0, \varrho_0) \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (5)$$

Эта оценка называется равномерной (по  $\varphi$ ) потому, что правая часть неравенства не зависит от  $\varphi$ . В этом случае предел (3) существует и равен  $A_0$ . Действительно, так как  $g(\varrho) \rightarrow 0$  при  $\varrho \rightarrow +0$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $\delta \in (0, \varrho_0]$  такое, что при  $\varrho \in (0, \delta)$  справедливо неравенство  $g(\varrho) < \varepsilon$ . Следовательно, в этом случае

$$\forall (x, y) \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0, y_0) \hookrightarrow |f(x, y) - A_0| \leq g(\varrho) < \varepsilon,$$

где  $\varrho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ . Таким образом, в данном случае исследование предела по совокупности закончено.

**Шаг 3.** Иначе можно подобрать последовательность  $\{(x_k, y_k)\}$  такую, что

$$(x_k, y_k) \rightarrow (x_0, y_0), \quad f(x_k, y_k) \not\rightarrow A_0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Тогда согласно определению Гейне  $A_0$  не является пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  по совокупности переменных. Однако в силу пункта 1 теоремы 1 предел по совокупности, если он существует, обязан

совпадать с  $A_0$  – пределом по направлению. Таким образом, в данном случае предел (3) не существует и исследование закончено.

Покажем, что если не существует равномерной оценки (5) такой, что  $g(\varrho) \rightarrow 0$  при  $\varrho \rightarrow +0$ , то всегда можно подобрать последовательность  $\{(x_k, y_k)\}$ , удовлетворяющую условиям (6). Определим

$$\hat{g}(\varrho) = \sup_{\varphi \in [0, 2\pi]} |f(x_0 + \varrho \cos \varphi, y_0 + \varrho \sin \varphi) - A_0|.$$

Тогда  $\hat{g}(\varrho) \not\rightarrow 0$  при  $\varrho \rightarrow +0$ , т.к. для функции  $g(\varrho) = \hat{g}(\varrho)$  справедлива равномерная оценка (5). Следовательно, согласно определению супремума найдутся последовательность  $\{\varphi_k\} \subset [0, 2\pi]$  и сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел  $\{\varrho_k\}$  такие, что  $f(x_0 + \varrho_k \cos \varphi_k, y_0 + \varrho_k \sin \varphi_k) - A_0 \not\rightarrow 0$ . Таким образом, последовательность  $\{(x_k, y_k)\} = \{(x_0 + \varrho_k \cos \varphi_k, y_0 + \varrho_k \sin \varphi_k)\}$  удовлетворяет условиям (6).

### Примеры. Исследовать пределы

$$\text{а) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\text{sh}(xy)}{x^2 + y^2}; \quad \text{б) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\text{sh}(x^2 y)}{x^2 + y^2}.$$

**Решение.** Введем полярные координаты  $x = \varrho \cos \varphi$ ,  $y = \varrho \sin \varphi$ .

а) Для функции  $f_1(x, y) = \frac{\text{sh}(xy)}{x^2 + y^2}$  рассмотрим предел по направлению:

$$\lim_{\varrho \rightarrow +0} f_1(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) = \lim_{\varrho \rightarrow +0} \frac{\text{sh}(\varrho^2 \cos \varphi \sin \varphi)}{\varrho^2} = \cos \varphi \sin \varphi.$$

Поскольку предел по направлению зависит от направления, предела по совокупности переменных не существует.

б) Для функции  $f_2(x, y) = \frac{\text{sh}(x^2 y)}{x^2 + y^2}$  рассмотрим предел по направлению:

$$\lim_{\varrho \rightarrow +0} f_2(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) = \lim_{\varrho \rightarrow +0} \frac{\text{sh}(\varrho^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi)}{\varrho^2} = 0.$$

Проведем равномерную оценку:

$$|f_2(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi)| \leq \frac{\text{sh}(\varrho^3)}{\varrho^2} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varrho \rightarrow +0.$$

Здесь важно, что величина  $\frac{\text{sh}(\varrho^3)}{\varrho^2}$  не зависит от  $\varphi$ , т.е. оценка равномерная по  $\varphi$ . Таким образом предел функции  $f_2$  в точке  $(0, 0)$  по совокупности переменных равен 0.

## Повторный предел

**Определение.** Пусть задана функция двух переменных  $f(x, y)$  и точка  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Для любого фиксированного числа  $y$  предел функции одной переменной  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$  (если он существует) обозначим через  $\varphi(y)$ . Тогда

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$$

называется *повторным пределом* функции  $f$  в точке  $(x_0, y_0)$ . Предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$  также называется повторным пределом функции  $f$  в точке  $(x_0, y_0)$ . Аналогично можно определить повторные пределы функции  $n$  переменных.

**Замечание 1.** Из существования повторного предела не следует существование предела по совокупности переменных. Например, для функции  $f(u, v) = \frac{uv^2}{u^2+v^4}$  повторные пределы в точке  $(0, 0)$  равны нулю, а предел по совокупности не существует.

**Замечание 2.** Из существования предела по совокупности переменных не следует существование повторного предела. Например, для функции

$$f(u, v) = \begin{cases} (u + v) \sin \frac{1}{u} \sin \frac{1}{v}, & uv \neq 0, \\ 0, & uv = 0 \end{cases}$$

предел по совокупности переменных в точке  $(0, 0)$  равен 0, а повторные пределы не существуют.

## Предел по множеству

**Определение.** Точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  называется *предельной точкой* множества  $X \subset \mathbb{R}^n$ , если существует  $\{x_n\} \subset X$  – последовательность Гейне в точке  $x_0$ .

Точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  называется *изолированной точкой* множества  $X \subset \mathbb{R}^n$ , если  $x_0 \in X$  и  $\exists \delta > 0 : \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap X = \emptyset$ .

Напомним, что точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  называется *точкой прикосновения* множества  $X \subset \mathbb{R}^n$ , если  $\forall \delta > 0 \hookrightarrow U_\delta(x_0) \cap X \neq \emptyset$ .

**Лемма 2.** Для любого множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  и любой точки  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  следующие условия эквивалентны:

- (1)  $x_0$  является предельной точкой множества  $X$ ;
- (2)  $x_0$  является точкой прикосновения множества  $X$  и  $x_0$  не является изолированной точкой множества  $X$ .

**Доказательство** проводится так же, как в случае  $n = 1$  (см. лемму 1 § 4 главы 2).

**Определение.** Пусть  $x_0$  – предельная точка множества  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Элемент  $A \in \overline{\mathbb{R}}$  будем называть *пределом* функции  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$  по множеству  $X$  и писать  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = A$ , если

(определение Коши):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X \cap \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A);$$

(определение Гейне):

$$\forall \{x_n\} \subset X \text{ – посл. Гейне в точке } x_0 \hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

**Замечание 3.** Непосредственно из определений следует, что если  $\exists \delta_0 > 0 : \overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0) \subset X$ , то предел функции  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  по множеству  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x)$  – это то же самое, что и предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  (по совокупности переменных, без указания множества).

**Определение.** Говорят, что на множестве  $X \subset \mathbb{R}^n$  задана *вектор-функция*  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ , если каждому вектору  $x \in X$  поставлен в соответствие единственный вектор  $f(x) \in \mathbb{R}^m$ .

**Замечание 4.** Задание вектор-функции  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  эквивалентно заданию  $m$  скалярных функций  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ , являющихся компонентами вектор-функции  $f : f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ .

**Определение.** Пусть  $x_0$  – предельная точка множества  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Вектор  $A \in \mathbb{R}^m$  будем называть пределом вектор-функции  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  в точке  $x_0$  по множеству  $X$  и писать  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = A$ , если

(определение Коши):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X \cap \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A);$$

(определение Гейне):

$$\forall \{x_n\} \subset X - \text{посл. Гейне в точке } x_0 \hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

**Замечание 5.** Вектор  $A = (A_1, \dots, A_m)$  является пределом вектор-функции  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  в точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  по множеству  $X \subset \mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f_i(x) = A_i$  для каждой компоненты  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Этот факт доказывается так же, как и в случае  $n = 1$  (см. лемму 1 § 2 главы 5).

## § 2. Непрерывность функции нескольких переменных в точке

**Определение.** Вектор-функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется *непрерывной в точке*  $x_0 \in X$  по множеству  $X \subset \mathbb{R}^n$ , если

- (а) точка  $x_0$  является предельной точкой множества  $X$  и  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0)$  либо
- (б) точка  $x_0$  является изолированной точкой множества  $X$ .

**Определение.** Пусть  $x_0$  – внутренняя точка множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  (т.е.  $\exists \delta_0 > 0 : U_{\delta_0}(x_0) \subset X$ ). Вектор-функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется *непрерывной в точке*  $x_0$  (по совокупности переменных), если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , т.е.

(определение Коши):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, \delta_0] : \forall x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \delta \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon;$$

(определение Гейне):

$$\forall \{x_k\} \subset U_{\delta_0}(x_0) : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \hookrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0).$$

Здесь в определении Коши не требуется, что  $x \neq x_0$ , а в определении Гейне не требуется, что  $x_k \neq x_0$ , так как при  $x = x_0$  выполняется равенство  $f(x) = f(x_0)$ .

**Замечание 1.** Если  $x_0 \in \text{int } X$ , то непрерывность вектор-функции  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  в точке  $x_0$  по множеству  $X$  эквивалентна

непрерывности функции  $f$  в точке  $x_0$  (без указания множества). Это следует непосредственно из определений.

**Замечание 2.** Вектор-функция  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  непрерывна в точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда каждая координата  $f_i(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ . Это следует из замечания 5 параграфа § 1.

**Определение.** Функция  $f(x) = f(x^1, \dots, x^n)$  называется *непрерывной* в точке  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$  по переменной  $x^i$ , если функция  $\varphi(x^i) = f(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x^i, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n)$  непрерывна в точке  $x_0^i$ .

**Замечание 3.** Если функция  $f(x^1, \dots, x^n)$  непрерывна по совокупности переменных в точке  $x_0$ , то она непрерывна по каждой переменной в отдельности. Это легко следует из определений.

**Замечание 4.** Из непрерывности функции  $f(x^1, \dots, x^n)$  по каждой переменной в отдельности не следует непрерывность  $f$  по совокупности переменных. Например, функция

$$f(u, v) = \begin{cases} \frac{uv^2}{u^2+v^4}, & u^2 + v^2 \neq 0, \\ 0, & u^2 + v^2 = 0 \end{cases}$$

непрерывна в каждой точке по каждой переменной в отдельности, но не является непрерывной в точке  $(0, 0)$  по совокупности переменных.

### § 3. Непрерывность функции нескольких переменных на множестве

**Определение.** Пусть вектор-функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  определена на множестве  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Вектор-функция  $f$  называется *непрерывной на множестве  $X$* , если она непрерывна в каждой точке  $x_0 \in X$  по множеству  $X$ .

**Теорема 1.** (О непрерывности сложной функции.) Пусть заданы множества  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$  и вектор-функции  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^p$ , непрерывные на своих множествах определения. Пусть  $f(X) \subset Y$ . Тогда сложная вектор-функция  $\varphi(x) = g(f(x))$  непрерывна на множестве  $X$ .

**Доказательство.** Так как функция  $g$  непрерывна на множестве  $Y$ , то

$$\forall y_0 \in Y \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sigma > 0 : \quad \forall y \in Y : |y - y_0| < \sigma \hookrightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon. \quad (1)$$

Из непрерывности функции  $f$  на множестве  $X$  следует, что

$$\forall x_0 \in X \quad \forall \sigma > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in X : |x - x_0| < \delta \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \sigma.$$

Отсюда, применяя условие (1) для  $y = f(x)$ ,  $y_0 = f(x_0)$ , получаем

$$\forall x_0 \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in X : |x - x_0| < \delta \hookrightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon,$$

т. е. вектор-функция  $\varphi(x) = g(f(x))$  непрерывна на множестве  $X$ .  $\square$

**Теорема 2.** Пусть вектор-функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  непрерывна на компакте  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда множество значений  $f(X)$  является компактом.

**Доказательство** повторяет доказательство теоремы 1 § 7 главы 2.  $\square$

**Следствие.** Если вектор-функция  $f$  непрерывна на компакте  $X \subset \mathbb{R}^n$ , то она ограничена на  $X$ .

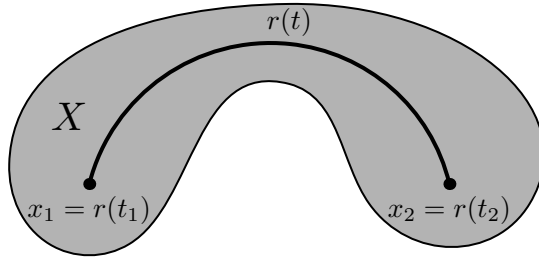
**Доказательство.** В силу теоремы 2 множество  $f(X)$  – компакт, следовательно, является ограниченным множеством. Это и означает ограниченность вектор-функции  $f$  на множестве  $X$ .  $\square$

**Теорема 3.** (Вейерштрасс.) Пусть скалярная функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на компакте  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\exists \min_{x \in X} f(x) \in \mathbb{R}, \quad \exists \max_{x \in X} f(x) \in \mathbb{R}.$$

**Доказательство** повторяет доказательство теоремы Вейерштрасса (теоремы 2 § 7 главы 2) для функции одной переменной.  $\square$

**Определение.** Множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется *линейно-связным*, если любые две точки  $x_1$  и  $x_2$  множества  $X$  можно соединить кривой  $\Gamma$ , лежащей в  $X$ , т. е.  $\forall x_1, x_2 \in X$  существует вектор-функция  $r(t)$ , непрерывная на некотором отрезке  $[t_1, t_2]$  и такая, что  $r(t_1) = x_1$ ,  $r(t_2) = x_2$  и  $\forall t \in [t_1, t_2] \hookrightarrow r(t) \in X$ .



**Теорема 4.** (О промежуточном значении.) Пусть скалярная функция  $f(x)$  непрерывна на линейно-связном множестве  $X \subset \mathbb{R}^n$  и принимает на  $X$  значения  $y_1$  и  $y_2$ . Тогда  $f(x)$  принимает на  $X$  все значения, лежащие между  $y_1$  и  $y_2$ .

**Доказательство.** Пусть функция  $f(x)$  принимает значения  $y_1$  и  $y_2$  в точках  $x_1, x_2 \in X$ :  $f(x_1) = y_1$ ,  $f(x_2) = y_2$ . В силу линейно-связности множества  $X$  существует непрерывная на отрезке  $[t_1, t_2]$  вектор-функция  $r : [t_1, t_2] \rightarrow X$  такая, что  $r(t_1) = x_1$ ,  $r(t_2) = x_2$ . Так как сложная функция  $\varphi(t) = f(r(t))$  непрерывна на отрезке  $[t_1, t_2]$ , то по теореме Больцано–Коши о промежуточном значении для функции одной переменной для любого числа  $y_0$ , лежащего между  $y_1$  и  $y_2$ , существует  $t_0 \in [t_1, t_2]$ :  $\varphi(t_0) = y_0$ . Следовательно,  $x_0 = r(t_0) \in X$  и  $f(x_0) = y_0$ .  $\square$

**Определение.** Открытое линейно-связное множество называется *областью*.

Заметим, что множество определения функции может не являться областью. Поэтому лучше говорить не "область определения функции" а "множество определения функции".

**Задача 1.** Являются ли областями в  $\mathbb{R}^n$  следующие множества:

- а)  $U_\varepsilon(x_0)$ , где  $\varepsilon > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ;
- б)  $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| > \varepsilon\}$ , где  $\varepsilon > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ;
- в)  $U_{\varepsilon_1}(a) \cup U_{\varepsilon_2}(b)$ , где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^n$ ,  $|b - a| > \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ?

Указания: 1) открытость  $\varepsilon$ -окрестности в  $\mathbb{R}^n$  доказана в главе 5;

2) для доказательства отсутствия линейно-связности множества

(в) применить теорему о промежуточном значении для непрерывной функции  $f(x) = |x - a|$ .

## § 4. Равномерная непрерывность функции на множестве

**Определение.** Пусть функция  $f(x)$  определена на множестве  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Говорят, что  $f(x)$  *равномерно непрерывна* на  $X$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X : |x - x'| < \delta \hookrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \quad (1)$$

**Лемма 1.** Если функция  $f(x)$  равномерно непрерывна на множестве  $X$ , то она непрерывна на множестве  $X$ . Обратное неверно.

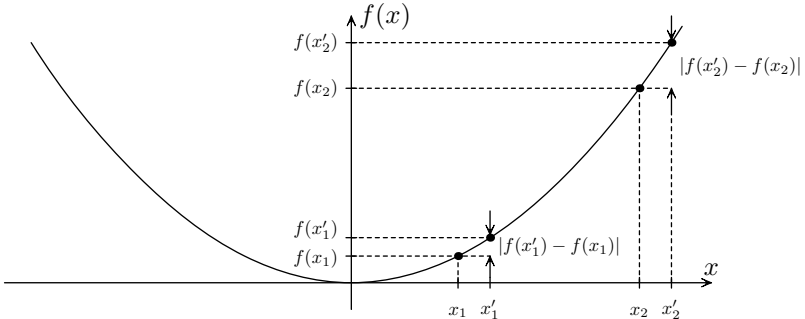
**Доказательство.** Условие непрерывности функции на множестве  $X$  можно записать в виде

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x' \in X : |x - x'| < \delta \hookrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \quad (2)$$

Формально условия (1) и (2) отличаются порядком кванторов; фактическое отличие этих условий состоит в том, что в условии (1) число  $\delta$  — единое для всех  $x$ , т.е. не зависит от  $x$ , а в условии (2) число  $\delta$  — свое для каждого  $x$ . Поэтому из условия (1) следует условие (2).

Покажем, что из условия (2) не следует условие (1). Рассмотрим функцию  $f(x) = x^2$  на множестве  $X = \mathbb{R}$ . Поскольку  $f(x) = x^2$  — непрерывная функция, то условие (2) выполняется. Покажем, что для этой функции условие (1) не выполняется, т.е.

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x, x' \in X : |x - x'| < \delta \text{ и } |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon.$$



Действительно, возьмем  $\varepsilon = 1$ , тогда  $\forall \delta > 0 \exists x = \frac{1}{\delta}, x' = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} :$   
 $|x - x'| = \delta/2 < \delta$  и  $|f(x) - f(x')| = \left| \left( \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right)^2 - \frac{1}{\delta^2} \right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > \varepsilon$ . Следовательно, функция  $f(x) = x^2$  не является равномерно непрерывной на  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Теорема 1.** (Теорема Кантора.) Если функция  $f$  непрерывна на компакте  $X \subset \mathbb{R}^n$ , то она равномерно непрерывна на этом компакте.

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное число  $\varepsilon > 0$ . Так как функция  $f$  непрерывна на множестве  $X$ , то для любого  $x \in X$  найдется число  $\delta(x) > 0$  такое, что

$$\forall x' \in X : |x' - x| < \delta(x) \hookrightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon. \quad (3)$$

Поскольку  $X$  – компакт, то в силу теоремы 1 § 13 главы 5 из открытого покрытия  $\{U_{\delta(x)/2}(x)\}_{x \in X}$  множества  $X$  можно выделить конечное подпокрытие, т.е. найдется конечный набор  $x_1, \dots, x_N$  элементов множества  $X$  такой, что

$$X \subset \bigcup_{k \in \overline{1, N}} U_{\delta(x_k)/2}(x_k). \quad (4)$$

Обозначим  $\delta = \min_{k \in \overline{1, N}} \frac{\delta(x_k)}{2}$ . Тогда  $\delta > 0$ . Пусть  $x, x' \in X$ ,  $|x - x'| < \delta$ . В силу включения (4) найдется индекс  $k \in \overline{1, N}$  такой, что  $x \in U_{\delta(x_k)/2}(x_k)$ . Так как  $|x - x'| < \delta \leq \frac{\delta(x_k)}{2}$ , то  $x' \in U_{\delta(x_k)}(x_k)$ . Следовательно, согласно соотношению (3) имеем  $|f(x') - f(x_k)| < \varepsilon$  и  $|f(x) - f(x_k)| < \varepsilon$ . Используя неравенство треугольника, получаем  $|f(x) - f(x')| < 2\varepsilon$ . Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X : |x - x'| < \delta \hookrightarrow |f(x) - f(x')| < 2\varepsilon.$$

Это означает равномерную непрерывность функции  $f$  на множестве  $X$ .  $\square$

**Определение.** Функция  $\omega(\delta) = \sup_{\substack{x, x' \in X \\ |x - x'| < \delta}} |f(x) - f(x')|$  называется *модулем непрерывности* функции  $f$  на множестве  $X$ .

**Лемма 2.** Функция  $f(x)$  равномерно непрерывна на множестве  $X \subset \mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(\delta) = 0$ .

**Доказательство.** а) Пусть функция  $f$  равномерно непрерывна на множестве  $X$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_0 > 0 : \forall x, x' \in X : |x - x'| < \delta_0 \hookrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \quad (5)$$

Тогда при  $\delta \in (0, \delta_0]$ ,  $x, x' \in X$ ,  $|x - x'| < \delta$  выполняется неравенство  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ . Следовательно,  $\omega(\delta) \leq \varepsilon$  при  $\delta \in (0, \delta_0]$ . Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_0 > 0 : \forall \delta \in (0, \delta_0] \hookrightarrow \omega(\delta) \leq \varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства  $\omega(\delta) \geq 0$  следует, что  $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(\delta) = 0$ .

б) Пусть  $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(\delta) = 0$ . Тогда по определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_0 > 0 : \forall \delta \in (0, \delta_0] \hookrightarrow \omega(\delta) < \varepsilon.$$

Тогда для любых  $x, x' \in X$  таких, что  $|x - x'| < \delta_0$  выберем число  $\delta$  из условия  $|x - x'| < \delta < \delta_0$  и получим  $|f(x) - f(x')| \leq \omega(\delta) < \varepsilon$ . Следовательно, выполняется условие (5), т. е. функция  $f$  равномерно непрерывна на множестве  $X$ .  $\square$

**Задача 1.** Найти модуль непрерывности функции  $f(x) = \sqrt{x}$  на множестве  $X = [0, +\infty)$ . Является ли функция  $f$  равномерно непрерывной на множестве  $X$ ?

**Задача 2.** Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$ . Как связаны условия

- а) функция  $f$  равномерно непрерывна на  $(a, b)$ ;
- б) производная функции  $f$  ограничена на  $(a, b)$ ?

**Задача 3.** Пусть функция  $f$  непрерывна на полуинтервале  $[a, b)$ . Как связаны условия

- а) функция  $f$  равномерно непрерывна на  $[a, b)$ ;
- б) существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ ?

## § 5. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Геометрический смысл градиента и дифференциала

**Определение.** Пусть функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  определена в  $U_\delta(x^0) \subset \mathbb{R}^n$ . Функция  $f(x)$  называется *дифференцируемой* в точке  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ , если существует вектор  $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{R}^n$  такой, что

$$f(x) - f(x^0) = (A, x - x^0) + o(|x - x^0|) \quad \text{при } x \rightarrow x^0,$$

где  $(A, x - x^0) = A_1(x_1 - x_1^0) + \dots + A_n(x_n - x_n^0)$  – скалярное произведение векторов  $A$  и  $x - x^0$ ;  $o(|x - x^0|)$  – это такая функция  $\varphi(x)$ , что  $\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{\varphi(x)}{|x - x^0|} = 0$ .

При этом вектор  $A$  называется *градиентом* функции  $f$  в точке  $x^0$  и обозначается через  $\text{grad } f(x^0)$ .

Итак, функция  $f$  дифференцируема в точке  $x^0$ , если существует вектор  $\text{grad } f(x^0) \in \mathbb{R}^n$  такой, что

$$f(x) - f(x^0) = (\text{grad } f(x^0), x - x^0) + o(|x - x^0|) \quad \text{при } x \rightarrow x^0.$$

**Определение.** *Дифференциалом* функции  $f$  в точке  $x^0$  называется линейная относительно приращений независимых переменных  $x_i - x_i^0$  функция  $df(x^0) = (\text{grad } f(x^0), x - x^0)$ .

Для дифференцируемой в точке  $x^0$  функции  $f$  справедливо равенство

$$f(x) - f(x^0) = \Delta f = df(x^0) + o(|x - x^0|) \quad \text{при } x \rightarrow x^0.$$

Выясним геометрический смысл градиента и дифференциала. Для простоты будем рассматривать функцию двух переменных  $f(x, y)$ , заданную на множестве  $G \subset \mathbb{R}^2$ .

**Определение.** *Графиком* функции  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  называется множество

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in G, z = f(x, y)\}.$$

Зафиксируем точку  $(x_0, y_0) \in \text{int } G$ . Через точку графика  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  проведем плоскость  $\alpha$  с нормальным вектором  $n = (n_x, n_y, n_z)$ . Уравнение этой плоскости имеет вид

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - f(x_0, y_0)) = 0.$$

Будем предполагать, что плоскость  $\alpha$  невертикальна, т.е.  $n_z \neq 0$ . При этом уравнение плоскости  $\alpha$  можно переписать в виде  $z = f(x_0, y_0) - \frac{n_x}{n_z}(x - x_0) - \frac{n_y}{n_z}(y - y_0)$ . Обозначив  $N_x = -\frac{n_x}{n_z}$ ,  $N_y = -\frac{n_y}{n_z}$ , получаем уравнение плоскости  $\alpha$  в следующем виде:

$$z = z_\alpha(x, y) = f(x_0, y_0) + N_x(x - x_0) + N_y(y - y_0). \quad (1)$$

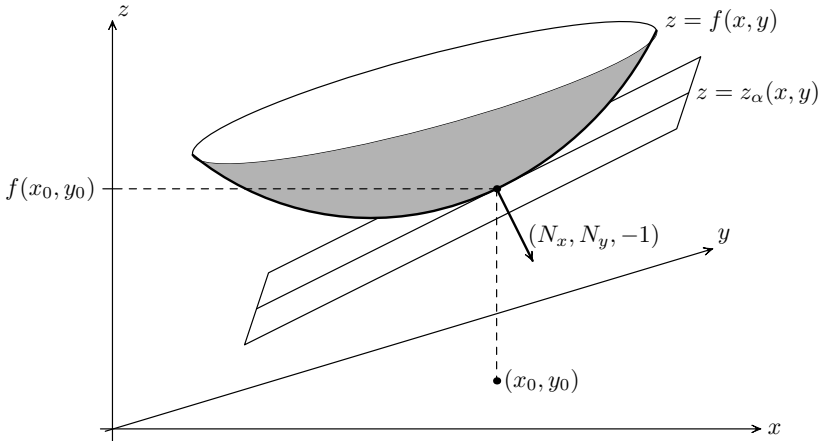
Вектор  $(N_x, N_y, -1)$  является нормальным вектором плоскости  $\alpha$ .

**Определение.** Плоскость вида (1) будем называть *касательной плоскостью* к графику функции  $f(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ , если она приближает график функции с точностью до  $o(\varrho)$  при  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ , где  $\varrho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ , т. е.

$$f(x, y) - z_\alpha(x, y) = o(\varrho) \quad \text{при} \quad (x, y) \rightarrow (x_0, y_0). \quad (2)$$

**Теорема 1.** (О геометрическом смысле градиента и дифференциала.) Пусть функция  $f(x, y)$  определена в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ . Касательная плоскость к графику функции  $f$  в точке  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  существует тогда и только тогда, когда функция  $f$  дифференцируема в точке  $(x_0, y_0)$ . Для дифференцируемой функции вектор  $(\text{grad } f(x_0, y_0), -1)$  является нормальным вектором касательной плоскости, а дифференциал функции равен приращению аппликаты касательной плоскости:

$$df(x_0, y_0) = z_\alpha(x, y) - z_\alpha(x_0, y_0).$$



**Доказательство.** Из формул (1), (2) следует, что касательная плоскость  $\alpha$  существует в том и только в том случае, когда существуют числа  $N_x, N_y$  такие, что

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) - N_x(x - x_0) - N_y(y - y_0) = o(\varrho) \quad \text{при} \quad (x, y) \rightarrow (x_0, y_0).$$

Это условие эквивалентно дифференцируемости функции  $f$  в точке  $(x_0, y_0)$ , причем в случае дифференцируемости  $\text{grad } f(x_0, y_0) = (N_x, N_y)$ . Нормальный вектор касательной плоскости  $\alpha$  можно записать в виде  $(N_x, N_y, -1) = (\text{grad } f(x_0, y_0), -1)$ .

Из условия  $\text{grad } f(x_0, y_0) = (N_x, N_y)$  и формулы (1) получаем

$$df(x_0, y_0) = N_x(x - x_0) + N_y(y - y_0) = z_\alpha(x, y) - z_\alpha(x_0, y_0).$$

□

## § 6. Необходимые условия дифференцируемости. Производные по направлению и частные производные

**Теорема 1.** (Первое необходимое условие дифференцируемости.) Если функция  $f(x)$  определена в окрестности точки  $x^0$  и дифференцируема в этой точке, то функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x^0$ .

**Доказательство.** Из условия дифференцируемости функции  $f$  в точке  $x^0$

$$f(x) - f(x^0) = (A, x - x^0) + o(|x - x^0|) \quad \text{при } x \rightarrow x^0$$

следует, что  $\lim_{x \rightarrow x^0} (f(x) - f(x^0)) = 0$ , т. е. функция  $f$  непрерывна в точке  $x^0$ . □

**Определение.** Производной функции  $f$  в точке  $x^0$  по вектору  $\ell \in \mathbb{R}^n$  называется

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(x^0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x^0 + t\ell) - f(x^0)}{t}.$$

В частности, если  $\ell$  – единичный вектор (т. е. является направлением), то  $\frac{\partial f}{\partial \ell}(x^0)$  называется *производной по направлению*.

**Теорема 2.** (Второе необходимое условие дифференцируемости.) Если функция  $f$  дифференцируема в точке  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , то производная по любому вектору  $\ell \in \mathbb{R}^n$  существует и равна скалярному произведению градиента на вектор  $\ell$ :

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(x^0) = (\text{grad } f(x^0), \ell).$$

**Доказательство.** Пусть функция  $f$  дифференцируема в точке  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , т.е.

$$f(x) - f(x^0) = (\text{grad } f(x^0), x - x^0) + o(|x - x^0|) \quad \text{при } x \rightarrow x^0.$$

Зафиксировав произвольный вектор  $\ell \in \mathbb{R}^n$  и подставив  $x = x^0 + t\ell$  в предыдущую формулу, получаем

$$f(x^0 + t\ell) - f(x^0) = (\text{grad } f(x^0), t\ell) + o(t) \quad \text{при } t \rightarrow +0,$$

следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(x^0) = (\text{grad } f(x^0), \ell) + \lim_{t \rightarrow +0} \frac{o(t)}{t} = (\text{grad } f(x^0), \ell). \quad \square$$

**Лемма 1.** (Второй геометрический смысл градиента.) Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x^0$  и  $\text{grad } f(x^0) \neq \bar{0}$ , то направление  $\text{grad } f(x^0)$  является направлением наиболее быстрого возрастания функции  $f$  в точке  $x^0$ , а направление  $-\text{grad } f(x^0)$  является направлением наиболее быстрого убывания функции  $f$  в точке  $x^0$ . Иными словами,

- 1)  $\max_{\ell \in \mathbb{R}^n: |\ell|=1} \frac{\partial f}{\partial \ell}(x^0)$  достигается на векторе  $\ell_{\max} = \frac{\text{grad } f(x^0)}{|\text{grad } f(x^0)|}$ ;
- 2)  $\min_{\ell \in \mathbb{R}^n: |\ell|=1} \frac{\partial f}{\partial \ell}(x^0)$  достигается на векторе  $\ell_{\min} = -\frac{\text{grad } f(x^0)}{|\text{grad } f(x^0)|}$ .

**Доказательство.** 1) Из теоремы 2 следует, что  $\forall \ell \in \mathbb{R}^n: |\ell| = 1$  выполняются соотношения  $\frac{\partial f}{\partial \ell}(x^0) = (\text{grad } f(x^0), \ell) \leq |\text{grad } f(x^0)|$   $|\ell| = |\text{grad } f(x^0)| = (\text{grad } f(x^0), \ell_{\max}) = \frac{\partial f}{\partial \ell_{\max}}(x^0)$ . Следовательно,  $\max_{\ell: |\ell|=1} \frac{\partial f}{\partial \ell}(x^0)$  достигается на векторе  $\ell_{\max}$ .

Пункт (2) доказывается аналогично.  $\square$

**Замечание 1.** Из существования производных по всем направлениям (и по всем векторам) функции  $f$  в точке  $x^0$  не следует дифференцируемость функции  $f$  в точке  $x^0$ .

Действительно, рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x \neq y^2 \text{ или } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (1)$$

Поскольку для любого вектора  $\ell = (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2 \exists \delta > 0 : \forall t \in (0, \delta) \hookrightarrow \rightarrow f(\delta\ell_1, \delta\ell_2) = 0$ , то производная  $\frac{\partial f}{\partial \ell}(0, 0)$  по любому вектору  $\ell \in \mathbb{R}^2$  существует и равна 0, однако функция  $f$  не является дифференцируемой и даже непрерывной в точке  $(0, 0)$ .

**Определение.** Частной производной функции  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  по переменной  $x_i$  в точке  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  называется производная функции одной переменной  $\varphi(x_i) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$  в точке  $x_i^0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) &= f'_{x_i}(x^0) = \varphi'(x_i^0) = \\ &= \lim_{x_i \rightarrow x_i^0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{x_i - x_i^0}. \end{aligned}$$

Иными словами, для того, чтобы вычислить частную производную функции  $f$  по переменной  $x_i$ , нужно зафиксировать все остальные переменные (при этом получится функция одной переменной  $x_i$ ), а затем – вычислить производную полученной функции одной переменной.

**Лемма 2.** (О связи частных производных и производных по направлению.) Частная производная  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$  существует тогда и только тогда, когда для направлений  $\ell_i^+ = (0, \dots, 0, +1, 0, \dots, 0)$  и  $\ell_i^- = (0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$  (где  $\pm 1$  стоит на  $i$ -м месте) производные по направлению  $\frac{\partial f}{\partial \ell_i^+}(x^0)$  и  $\frac{\partial f}{\partial \ell_i^-}(x^0)$  существуют и  $\frac{\partial f}{\partial \ell_i^+}(x^0) = -\frac{\partial f}{\partial \ell_i^-}(x^0)$ . При этом  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \frac{\partial f}{\partial \ell_i^+}(x^0) = -\frac{\partial f}{\partial \ell_i^-}(x^0)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим функцию одной переменной  $\varphi(t) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + t, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) = f(x^0 + t\ell_i^+)$ . Из определений частной производной и производной по направлению следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) &= \varphi'(0), \quad \frac{\partial f}{\partial \ell_i^+}(x^0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'_+(0), \\ \frac{\partial f}{\partial \ell_i^-}(x^0) &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\varphi(-t) - \varphi(0)}{t} = -\lim_{t \rightarrow -0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = -\varphi'_-(0). \end{aligned} \tag{2}$$

Как было доказано в главе 3, производная функции одной переменной  $\varphi'(0)$  существует тогда и только тогда, когда правая и левая производные  $\varphi'_+(0)$  и  $\varphi'_-(0)$  существуют и равны между собой и при этом

$\varphi'(0) = \varphi'_+(0) = \varphi'_-(0)$ . Отсюда и из формул (2) получаем утверждение леммы.  $\square$

**Теорема 3.** (Третье необходимое условие дифференцируемости.) Если функция  $f$  дифференцируема в точке  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , то в этой точке все частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$  существуют и совпадают с соответствующими координатами вектора градиента:

$$\text{grad } f(x^0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right).$$

**Доказательство.** По теореме 2 производные по направлениям координатных осей  $\ell_i^+ = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  (где 1 стоит на  $i$ -м месте) существуют и  $\frac{\partial f}{\partial \ell_i^+}(x^0) = (\text{grad } f(x^0), \ell_i^+)$ , т.е. равны соответствующим координатам вектора градиента. Аналогично, производные по противоположным направлениям  $\frac{\partial f}{\partial \ell_i^-}(x^0)$  (где  $\ell_i^- = -\ell_i^+$ ) существуют и равны соответствующим координатам вектора градиента с обратным знаком. Отсюда и из леммы 2 получаем, что частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$  существуют и равны соответствующим координатам вектора градиента.  $\square$

**Замечание 2.** Из существования частных производных по всем переменным не следует дифференцируемость, а значит, не следует существование градиента функции. Например, все частные производные функции (1) в точке  $(0, 0)$  существуют и равны нулю, однако эта функция недифференцируема в точке  $(0, 0)$ .

**Теорема 4.** (О связи частных производных и дифференциала функции.) Если функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  дифференцируема в точке  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ , то для дифференциала функции  $f$  в точке  $x^0$  справедлива формула

$$df(x^0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) dx_i, \quad \text{где } dx_i = x_i - x_i^0.$$

**Доказательство.** По определению дифференциала  $df(x^0) = (\text{grad } f(x^0), x - x^0)$ . Следовательно, по теореме 3  $df(x^0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) (x_i - x_i^0)$ .  $\square$

## § 7. Достаточные условия дифференцируемости

**Теорема 1.** Если все частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  определены в окрестности точки  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  и непрерывны в точке  $x^0$ , то функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x^0$ .

**Доказательство** проведем для функции двух переменных  $f(x, y)$ , где  $x, y \in \mathbb{R}$ . Пусть частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  непрерывны в точке  $(x_0, y_0)$ .

Представим приращение функции  $f$  как сумму приращений по каждой переменной:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0). \quad (1)$$

Зафиксировав  $y$  и применив теорему Лагранжа о среднем к функции одной переменной  $\varphi(x) = f(x, y)$ , получаем, что существует число  $\xi$ , лежащее между  $x$  и  $x_0$ , такое, что  $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi) \cdot (x - x_0)$ . Иными словами, существует число  $\theta \in (0, 1)$ , зависящее от  $x$  и  $y$ , такое, что

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0),$$

то есть

$$f(x, y) - f(x_0, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(x - x_0), y) \cdot (x - x_0).$$

Определим функцию  $\varepsilon(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(x - x_0), y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ . Тогда

$$f(x, y) - f(x_0, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \varepsilon(x, y) \cdot (x - x_0). \quad (2)$$

Так как частная производная  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  непрерывна в точке  $(x_0, y_0)$  и  $\theta \in (0, 1)$ , то  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(x - x_0), y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ , и, следовательно,  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \varepsilon(x, y) = 0$ . Обозначая  $\varrho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ , получаем

$$\frac{|\varepsilon(x, y) \cdot (x - x_0)|}{\varrho} \leq |\varepsilon(x, y)| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} 0,$$

т. е.  $\varepsilon(x, y) \cdot (x - x_0) = o(\varrho)$  при  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ . Отсюда и из (2) получаем при  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$

$$f(x, y) - f(x_0, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \cdot (x - x_0) + o(\varrho).$$

Аналогично, при  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$

$$f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + o(\varrho).$$

Следовательно, учитывая (1), получаем при  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + o(\varrho),$$

что доказывает дифференцируемость функции  $f(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$ . Случай функции  $n$  переменных ( $n \geq 3$ ) рассматривается аналогично.  $\square$

## § 8. Дифференцирование сложной вектор-функции

**Определение.** Пусть вектор-функция  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  определена в некоторой окрестности точки  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ . Будем говорить, что вектор-функция  $f$  *дифференцируема* в точке  $x^0$ , если все ее координаты  $f_k(x)$  ( $k = 1, \dots, m$ ) дифференцируемы в точке  $x^0$ . *Дифференциалом* вектор-функции  $f$  в точке  $x^0$  называется линейная вектор-функция относительно вектора  $dx = x - x^0$ , компоненты которой равны дифференциалам соответствующих компонент вектор-функции  $f$ :

$$df(x^0) = \begin{pmatrix} df_1(x^0) \\ \dots \\ df_m(x^0) \end{pmatrix}.$$

*Матрицей Якоби* вектор-функции  $f$  в точке  $x^0$  называется следующая матрица, составленная из частных производных:

$$\mathcal{D}f(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в  $k$ -й строке матрицы Якоби стоят координаты градиента скалярной функции  $f_k(x)$ .

**Лемма 1.** Вектор-функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  дифференцируема в точке  $x^0 \in \text{int } X \subset \mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда существует матрица  $A$  размера  $m \times n$ , такая, что

$$f(x) - f(x^0) = A(x - x^0) + \bar{o}(|x - x^0|) \quad \text{при } x \rightarrow x^0, \quad (1)$$

где  $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $\bar{o}(|x - x^0|) = \begin{pmatrix} o(|x - x^0|) \\ \dots \\ o(|x - x^0|) \end{pmatrix}$  — столбцы высоты  $m$ ,  $n$  и  $m$  соответственно, а  $A(x - x^0)$  — произведение матрицы  $A$  на столбец  $x - x^0$ .

Причем если выполняется условие (1), то матрица  $A$  совпадает с матрицей Якоби вектор-функции  $f$  в точке  $x^0$ .

**Доказательство.** По определению дифференцируемости скалярная функция  $f_k(x)$  дифференцируема в точке  $x^0$  тогда и только тогда, когда существует вектор  $a_k = (a_{k1}, \dots, a_{kn}) \in \mathbb{R}^n$  такой, что

$$f_k(x) - f_k(x^0) = \sum_{i=1}^n a_{ki}(x_i - x_i^0) + o(|x - x^0|) \quad \text{при } x \rightarrow x^0. \quad (2)$$

Так как набор условий (2) при  $k = 1, \dots, m$  можно записать в матричном виде (1), где  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ , то условие (1) эквивалентно дифференцируемости вектор-функции  $f$  в точке  $x^0$ .

В силу третьего необходимого условия дифференцируемости (теорема 3 § 6) из условия (2) следует, что  $a_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x^0)$ , поэтому из условия (1) следует, что  $A = \mathcal{D}f(x^0)$ .  $\square$

**Лемма 2.** Если вектор-функция  $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$  дифференцируема в точке  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , то

$$df(x^0) = \mathcal{D}f(x^0) dx. \quad (3)$$

**Доказательство.** В силу теоремы 4 § 6

$$df_k(x^0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x^0) dx_i, \quad k \in \{1, \dots, m\}.$$

Записывая эти уравнения в матричном виде, получаем уравнение (3). □

**Теорема 1.** (О дифференцировании сложной функции.) Пусть заданы множества  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$  и вектор-функции  $f : X \rightarrow Y$  и  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Пусть вектор-функция  $f$  дифференцируема в точке  $x^0 \in \text{int } X$ , а вектор-функция  $g$  дифференцируема в точке  $y^0 = f(x^0) \in \text{int } Y$ . Тогда сложная функция  $\varphi(x) = g(f(x))$  дифференцируема в точке  $x^0$ , а матрица Якоби функции  $\varphi$  равна произведению матриц Якоби функций  $g$  и  $f$ :

$$\mathcal{D}\varphi(x^0) = \mathcal{D}g(y^0) \cdot \mathcal{D}f(x^0),$$

или в координатной форме:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x^0) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(y^0) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x^0)$$

$$(i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, n).$$

**Доказательство.** Применяя лемму 1 для вектор-функций  $f(x)$  и  $g(y)$ , получаем

$$f(x) - f(x^0) = \mathcal{D}f(x^0)(x - x^0) + \bar{o}(|x - x^0|) \quad \text{при } x \rightarrow x^0,$$

$$g(y) - g(y^0) = \mathcal{D}g(y^0)(y - y^0) + \bar{o}(|y - y^0|) \quad \text{при } y \rightarrow y^0.$$

Подставляя в последнюю формулу  $y = f(x)$ ,  $y^0 = f(x^0)$ , получаем

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x^0)) &= \\ &= \mathcal{D}g(y^0)(\mathcal{D}f(x^0)(x - x^0) + \bar{o}(|x - x^0|)) + \bar{o}(|f(x) - f(x^0)|) \end{aligned}$$

при  $x \rightarrow x^0$ . Поскольку

$$\mathcal{D}g(y^0)\bar{o}(|x - x^0|) = \bar{o}(|x - x^0|),$$

$$\bar{o}(|f(x) - f(x^0)|) = \bar{o}(|x - x^0|) \quad \text{при } x \rightarrow x^0,$$

и  $\varphi(x) = g(f(x))$ , то при  $x \rightarrow x^0$

$$\varphi(x) - \varphi(x^0) = \mathcal{D}g(y^0) \cdot \mathcal{D}f(x^0)(x - x^0) + o(|x - x^0|).$$

Отсюда по лемме 1 следует, что функция  $\varphi$  дифференцируема в точке  $x^0$  и  $\mathcal{D}\varphi(x^0) = \mathcal{D}g(y^0) \cdot \mathcal{D}f(x^0)$ .  $\square$

**Теорема 2.** (Инвариантность формы первого дифференциала.) Пусть вектор-функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , а вектор-функция  $z = g(y)$  дифференцируема в точке  $y^0 = f(x^0) \in \mathbb{R}^m$ . Тогда формула для дифференциала сложной функции  $z = \varphi(x) = g(f(x))$  и формула для дифференциала простой функции  $z = g(y)$  имеют один и тот же вид:

$$dz = \mathcal{D}g(y^0) dy, \quad (4)$$

где в случае простой функции  $dy$  – это приращение независимой векторной переменной  $y$ , а в случае сложной функции  $dy$  – это дифференциал функции  $y = f(x)$  в точке  $x^0$ .

**Доказательство.** Для простой функции формула (4) следует из леммы 2. Пользуясь этой же леммой для вектор-функций  $z = \varphi(x)$  и  $y = f(x)$ , получаем  $dz = d\varphi(x^0) = \mathcal{D}\varphi(x^0)dx$ ,  $dy = df(x^0) = \mathcal{D}f(x^0)dx$ .

В силу теоремы о дифференцировании сложной функции  $\mathcal{D}\varphi(x^0) = \mathcal{D}g(y^0) \cdot \mathcal{D}f(x^0)$ , следовательно,  $dz = \mathcal{D}g(y^0) \cdot \mathcal{D}f(x^0)dx = \mathcal{D}g(y^0)dy$ , т. е. справедлива формула (4) для сложной функции.  $\square$

## § 9. Частные производные и дифференциалы высших порядков

**Определение.** Пусть в окрестности точки  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  существует частная производная  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$  функции  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ . Частная производная функции  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$  по переменной  $x_j$  в точке  $x^0$  называется *частной производной второго порядка* функции  $f(x)$  и обозначается через  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0)$  или  $f''_{x_i x_j}(x^0)$ . Частная производная порядка  $k$  определяется индукцией по  $k$ :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left( \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} \right).$$

Например, для функции двух переменных  $f(x, y)$  можно рассматривать четыре производные второго порядка:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ . Производные  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  называются *смешанными*.

**Замечание.** Смешанные производные могут зависеть от порядка дифференцирования. Например, для функции

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

имеет место неравенство  $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$ .

**Теорема 1.** Пусть обе смешанные производные  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$  определены в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  и непрерывны в этой точке. Тогда  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ .

**Доказательство.** Поскольку смешанные производные определены в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ , то  $\exists \delta > 0$  такое, что смешанные производные определены в квадрате

$$\{(x, y) : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta\}.$$

При  $t \in (-\delta, \delta)$  определим функцию

$$w(t) = f(x_0 + t, y_0 + t) - f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0 + t) + f(x_0, y_0).$$

Зафиксируем произвольное  $t \in (-\delta, \delta)$  и применим теорему Лагранжа о среднем для функции  $\varphi(x) = f(x, y_0 + t) - f(x, y_0)$ . Получим, что существует число  $\theta_1 \in (0, 1)$ , зависящее от  $t$  и такое, что  $\varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \theta_1 t)t$ , т. е. поскольку  $w(t) = \varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0)$ ,  $\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0 + t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$ , получаем

$$w(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 t, y_0 + t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 t, y_0) \right) t.$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем для функции  $\psi(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 t, y)$ , получаем, что существует число  $\theta_2 \in (0, 1)$ , зависящее от  $t$  и такое, что  $\psi(y_0 + t) - \psi(y_0) = \psi'(y_0 + \theta_2 t)t$ , т. е.

$$w(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 t, y_0 + \theta_2 t) t^2. \quad (1)$$

В силу непрерывности частной производной  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$  и условий  $\theta_1 \in (0, 1)$ ,  $\theta_2 \in (0, 1)$ , получаем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 t, y_0 + \theta_2 t) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0),$$

откуда и из (1) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{w(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Поскольку при замене переменных  $x$  на  $y$ , а  $y$  на  $x$  и замене функции  $f(x, y)$  на функцию  $f(y, x)$ , функция  $w(t)$  не изменится, но поменяется порядок дифференцирования в смешанной производной  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ , то

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{w(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

Следовательно,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ . □

**Замечание.** По аналогии с теоремой 1 можно доказать, что если частные производные  $k$ -го порядка функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  определены в окрестности точки  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  и непрерывны в точке  $x^0$ , то в этой точке частные производные  $k$ -го порядка не зависят от порядка дифференцирования.

**Определение.** Функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  называется  $k$  раз дифференцируемой в точке  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , если все частные производные порядка  $(k - 1)$  функции  $f$  определены в окрестности точки  $x^0$  и дифференцируемы в точке  $x^0$ . Дифференциал  $k$ -го порядка определяется по индукции:

$$d^k f(x^0) = d(d^{k-1} f)(x^0).$$

При вычислении дифференциала выражения  $d^{k-1} f$  дифференциалы независимых переменных  $dx_i$ , входящие в  $d^{k-1} f$ , следует считать постоянными.

**Лемма 1.** Пусть функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  является  $k$  раз дифференцируемой в точке  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$d^k f(x^0) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(x^0) dx_{i_k} \cdots dx_{i_1}.$$

**Доказательство.** В силу теоремы 4 § 6 имеем

$$d^2 f(x^0) = d(df)(x^0) = d \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i \right) \Big|_{x=x_0} = \sum_{i=1}^n d \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x^0) dx_i.$$

Используя равенства

$$d \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x^0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x^0) dx_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (x^0) dx_j,$$

приходим к соотношениям

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (x^0) dx_j dx_i = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} (x^0) dx_{i_2} dx_{i_1}.$$

Рассуждая аналогично, индукцией по  $k$  получаем доказываемую формулу.  $\square$

## § 10. Операторы дифференцирования

Напомним, что в главе 5 было введено понятие линейного пространства как множества, на котором определены операция сложения элементов и операция умножения элемента на число, удовлетворяющие определенным аксиомам.

**Пример.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  – открытое множество. Обозначим через  $F_X^0$  множество функций  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , а через  $F_X^k$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , – множество функций  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , дифференцируемых  $k$  раз в каждой точке  $x \in X$ . Легко проверить, что множества  $F_X^k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) являются линейными пространствами с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число.

**Определение.** Пусть  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$  – линейные пространства. Отображение  $\hat{A} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  называется *линейным оператором*, действующим из  $\mathcal{F}$  в  $\mathcal{G}$ , если для любых элементов  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$  и любых чисел  $\lambda_1, \lambda_2$  выполняется  $\hat{A}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \hat{A}f_1 + \lambda_2 \hat{A}f_2$ .

**Пример.** Частная производная  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  является линейным оператором  $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ , действующим из линейного пространства  $F_X^k$  в линейное пространство  $F_X^{k-1}$ . Действительно, для любой  $k$  раз дифференцируемой функции  $f \in F_X^k$  функция  $(\hat{A}f)(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$  является  $k-1$  раз дифференцируемой, т.е.  $\hat{A}f \in F_X^{k-1}$ . Из свойств производной следует линейность оператора  $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ :  $\forall f_1, f_2 \in F_X^k, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x).$$

**Определение.** Пусть  $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n$  – линейные операторы, действующие из линейного пространства  $\mathcal{F}$  в линейное пространство  $\mathcal{G}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – числа. Через  $\lambda_1 \hat{A}_1 + \dots + \lambda_n \hat{A}_n$  будем обозначать линейный оператор, результат действия которого на элемент  $f \in \mathcal{F}$  определяется по формуле

$$(\lambda_1 \hat{A}_1 + \dots + \lambda_n \hat{A}_n) f = \lambda_1 \hat{A}_1 f + \dots + \lambda_n \hat{A}_n f.$$

**Пример.** Для заданных чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  и открытого множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  рассмотрим линейный оператор  $\hat{A} = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \lambda_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ , действующий из  $F_X^k$  в  $F_X^{k-1}$ . Поскольку результат применения оператора  $\hat{A}$  к функции  $f \in F_X^k$  равен  $\hat{A}f = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \lambda_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$ , т.е. равен скалярному произведению вектора  $\ell = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  на вектор-функцию  $\text{grad } f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$ :  $(\hat{A}f)(x) = (\text{grad } f(x), \ell)$ , то в силу формулы  $(\text{grad } f(x), \ell) = \frac{\partial f}{\partial \ell}(x)$  получаем  $(\hat{A}f)(x) = \frac{\partial f}{\partial \ell}(x)$ , т.е. оператор  $\hat{A}$  является оператором взятия производной по вектору  $\ell$ :  $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial \ell}$ .

**Определение.** Пусть  $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$  – линейные пространства;  $\hat{A} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ,  $\hat{B} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  – линейные операторы. *Произведением* или *суперпозицией* операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  называется линейный оператор  $\hat{B}\hat{A} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$ , определяемый по формуле

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad (\hat{B}\hat{A})f = \hat{B}(\hat{A}f).$$

**Пример.** Пусть  $\hat{A}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$  – операторы частных производных первого порядка. Произведениями операторов  $\hat{A}_i$  являются частные производные высших порядков. Например,  $\hat{A}_i \hat{A}_j = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $\hat{A}_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  – линейные операторы, действующие из  $F_X^k$  в  $F_X^{k-2}$ .

Заметим, что в общем случае произведение операторов некоммутативно:  $\hat{A} \hat{B} \neq \hat{B} \hat{A}$ . В § 9 был приведен пример функции  $f(x, y)$ , для которой  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f \neq \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f$ .

Из теоремы 1 § 9 следует, что на пространстве функций, имеющих непрерывные смешанные производные, операторы  $\frac{\partial}{\partial x}$  и  $\frac{\partial}{\partial y}$  коммутативны.

**Лемма 1.** Пусть функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  является  $k$  раз дифференцируемой в точке  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ . Тогда в этой точке

$$d^k f = \left( \left( dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f \right).$$

**Доказательство.** Индукцией по  $k$  получаем равенство

$$\begin{aligned} & \left( \left( dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f \right) = \\ &= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} dx_{i_k} \dots dx_{i_1}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу леммы 1 § 9 следует доказываемое утверждение.  $\square$

**Лемма 2.** Пусть все частные производные  $k$ -го порядка функции  $f(x, y)$  непрерывны в точке  $(x_0, y_0)$ . Тогда в этой точке

$$d^k f = \sum_{i=0}^k C_k^i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \partial y^i} dx^{k-i} dy^i, \quad \text{где} \quad C_k^i = \frac{k!}{(k-i)! i!}.$$

**Доказательство.** В силу теоремы 1 § 9 смешанные производные порядка  $k$  функции  $f$  в точке  $(x_0, y_0)$  не зависят от порядка дифференцирования. Поэтому в выражении  $\left( \left( dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f \right) (x_0, y_0)$  операторы  $\frac{\partial}{\partial x}$  и  $\frac{\partial}{\partial y}$  коммутируют, т. е. ведут себя как обычные числа.

Применяя формулу для бинома Ньютона, в точке  $(x_0, y_0)$  получаем

$$\left( \left( dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f \right) = \sum_{i=0}^k C_k^i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \partial y^i} dx^{k-i} dy^i.$$

Отсюда и из леммы 1 следует доказываемое равенство.  $\square$

## § 11. Формула Тейлора

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  является  $m + 1$  раз дифференцируемой в некоторой  $\delta$ -окрестности точки  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ . Тогда для любой точки  $x \in U_\delta(x^0)$  справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} d^k f(x^0) + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(x^0 + \theta \Delta x),$$

где  $\theta = \theta(x) \in (0, 1)$ ,  $\Delta x = dx = x - x^0$ .

**Доказательство.** Зафиксируем произвольную точку  $x \in U_\delta(x^0)$ . Определим функцию  $\varphi(t) = f(x^0 + t\Delta x)$  и оператор

$$\hat{A} = \Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad (1)$$

где  $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ . По теореме о дифференцировании сложной функции

$$\begin{aligned} \forall t \in (0, 1) \quad \exists \varphi'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0 + t\Delta x) \cdot \Delta x_1 + \dots + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0 + t\Delta x) \cdot \Delta x_n = (\hat{A}f)(x^0 + t\Delta x). \end{aligned}$$

Дифференцируя сложную функцию  $\varphi(t) = f(x^0 + t\Delta x)$   $k$  раз, получаем  $\varphi^{(k)}(t) = (\hat{A}^k f)(x^0 + t\Delta x)$ . Применяя формулу Тейлора для функции одной переменной  $\varphi(t)$ , получаем, что существует число  $\theta \in (0, 1)$  такое, что

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0) + \frac{1}{(m+1)!} \varphi^{(m+1)}(\theta),$$

то есть

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} (\hat{A}^k f)(x^0) + \frac{1}{(m+1)!} (\hat{A}^{m+1} f)(x^0 + \theta \Delta x).$$

Отсюда в силу леммы 1 § 10 и формулы (1) получаем доказываемое равенство.  $\square$

**Определение.** Многочлен

$$P_m(dx) = P_m(dx_1, \dots, dx_n) = f(x^0) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} d^k f(x^0)$$

называется *многочленом Тейлора* порядка  $m$  функции  $f$  в точке  $x^0$ .

Многочлен Тейлора  $P_m(dx_1, \dots, dx_n)$  является многочленом степени не выше  $m$  относительно переменных  $dx_1, \dots, dx_n$ .

**Теорема 2.** Пусть все частные производные функции  $f$  до порядка  $m$  включительно существуют и непрерывны в некоторой окрестности точки  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ . Тогда справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = P_m(\Delta x) + o(|\Delta x|^m) \quad \text{при} \quad \Delta x = x - x^0 \rightarrow 0. \quad (2)$$

**Доказательство.** Поскольку функция  $f$  является  $m$  раз дифференцируемой в некоторой окрестности точки  $x^0$ , то согласно теореме 1 в этой окрестности справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} d^k f(x^0) + \frac{1}{m!} d^m f(x^0 + \theta \Delta x), \quad (3)$$

где  $\theta = \theta(x) \in (0, 1)$ . Покажем, что при  $x \rightarrow x^0$

$$d^m f(x^0 + \theta \Delta x) - d^m f(x^0) = o(|\Delta x|^m). \quad (4)$$

Согласно лемме 1 § 9 в достаточно малой окрестности точки  $x^0$

$$d^m f = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \cdots \partial x_{i_1}} dx_{i_m} \cdots dx_{i_1}.$$

Так как  $|dx_i| = |\Delta x_i| \leq \sqrt{|\Delta x_1|^2 + \dots + |\Delta x_n|^2} = |\Delta x|$ , то

$$\begin{aligned} & \frac{|d^m f(x^0 + \theta \Delta x) - d^m f(x^0)|}{|\Delta x|^m} \leq \\ & \leq \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_m=1}^n \left| \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \cdots \partial x_{i_1}}(x^0 + \theta \Delta x) - \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \cdots \partial x_{i_1}}(x^0) \right|. \end{aligned}$$

Поскольку производные порядка  $m$  непрерывны и  $\theta \in (0, 1)$ , то для любых  $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$  при  $x \rightarrow x^0$

$$\left| \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \cdots \partial x_{i_1}}(x^0 + \theta \Delta x) - \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \cdots \partial x_{i_1}}(x^0) \right| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow x^0.$$

Следовательно,

$$\frac{|d^m f(x^0 + \theta \Delta x) - d^m f(x^0)|}{|\Delta x|^m} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow x^0.$$

Отсюда следует формула (4), которая вместе с формулой (3) дает (2).  $\square$

**Замечание.** Так же, как и для функции одной переменной, доказывается единственность разложения (2). А именно, если все частные производные функции  $f$  до порядка  $m$  включительно непрерывны в точке  $x^0$  и справедливо разложение (2), где  $P_m(\Delta x)$  – некоторый многочлен степени не выше  $m$  относительно переменных  $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ , то  $P_m(\Delta x)$  – многочлен Тейлора функции  $f$  в точке  $x^0$ .

## ИНТЕГРАЛ РИМАНА

## § 1. Мера Жордана

**Определение.** *Клеткой* в пространстве  $\mathbb{R}^n$  будем называть замкнутый прямоугольный параллелепипед

$$\Pi = \{x = (x_1, \dots, x_n) : a_k \leq x_k \leq b_k, k = 1, \dots, n\},$$

где числа  $a_k, b_k$  ( $a_k \leq b_k$ ),  $k = 1, \dots, n$ , задают клетку  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ . Мерой  $\mu(\Pi)$  клетки  $\Pi$  называется число  $\mu(\Pi) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$ .

**Определение.** Множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  называется *клеточным множеством*, если оно представимо в виде объединения конечного набора клеток  $\Pi_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, I$ , не имеющих общих внутренних точек:

$$A = \bigcup_{i=1}^I \Pi_i, \quad (\text{int } \Pi_i) \cap (\text{int } \Pi_s) = \emptyset \quad \text{при } i \neq s.$$

Мерой клеточного множества  $A$  называется сумма мер составляющих его клеток:  $\mu(A) = \sum_{i=1}^I \mu(\Pi_i)$ .

Пустое множество по определению будем считать клеточным, а меру пустого множества – равной нулю.

Примем без доказательства следующие очевидные свойства клеточных множеств. (Предлагается доказать эти свойства в качестве упражнения.)

**Свойство 1.** Мера клеточного множества не зависит от способа разбиения этого множества на клетки. (Из этого свойства следует корректность определения меры клеточного множества).

**Свойство 2.** Если  $A, B$  – клеточные множества, то множества  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus (\text{int } B)$  являются клеточными. (Множество  $A \setminus B$ , вообще говоря, незамкнуто, следовательно, не является клеточным.)

**Свойство 3.** (Аддитивность.) Если  $A, B$  – клеточные множества, не имеющие общих внутренних точек, то  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ . Если существует общая внутренняя точка клеточных множеств  $A$  и  $B$ , то  $\mu(A \cup B) < \mu(A) + \mu(B)$ .

**Свойство 4.** (Монотонность.) Если  $A, B$  – клеточные множества и  $A \subset B$ , то  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

**Определение.** Нижней мерой Жордана  $\mu_*(E)$  множества  $E \subset \mathbb{R}^n$  называется точная верхняя грань мер клеточных множеств  $A$ , содержащихся в  $E$ . Верхней мерой Жордана  $\mu^*(E)$  множества  $E \subset \mathbb{R}^n$  называется точная нижняя грань мер клеточных множеств  $B$ , содержащих  $E$ :

$$\mu_*(E) = \sup_{A - \text{клет.}, A \subset E} \mu(A),$$

$$\mu^*(E) = \inf_{B - \text{клет.}, B \supset E} \mu(B).$$

Множество  $E \subset \mathbb{R}^n$  называется *измеримым по Жордану*, если  $\mu_*(E) = \mu^*(E) \in \mathbb{R}$ . Число  $\mu(E) = \mu_*(E) = \mu^*(E)$  называется *мерой* множества  $E$ .

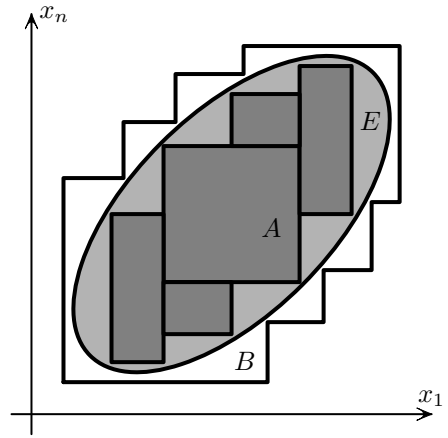
Заметим, что если множество  $E \subset \mathbb{R}^n$  неограниченно, то не существует клеточного множества  $B$  (т. е. множества, состоящего из конечного набора клеток), такого, что  $E \subset B$ . При этом верхняя мера  $\mu^*(E)$  равна  $+\infty$  и множество  $E$  неизмеримо.

Поскольку для клеточных множеств  $A, B$  таких, что  $A \subset E \subset B$ , справедливо неравенство  $\mu(A) \leq \mu(B)$ , то для любого ограниченного множества  $E$

$$\mu_*(E) \leq \mu^*(E).$$

Поэтому ограниченное множество  $E$  неизмеримо тогда и только тогда, когда  $\mu_*(E) < \mu^*(E)$ .

Например, множество



$$G = \{x \in [0, 1] : x - \text{рациональное число}\}$$

неизмеримо. Действительно, любое клеточное множество  $A \subset G$  не может содержать клетки ненулевой меры, поэтому  $\mu(A) = 0$  и, следовательно,  $\mu_*(G) = 0$ . С другой стороны, любое клеточное множество  $B \supset G$  содержит отрезок  $[0, 1]$ . Поэтому  $\mu(B) \geq 1$  и, следовательно,  $\mu^*(G) \geq 1$ . Итак,  $\mu_*(G) < \mu^*(G)$ , а значит, множество  $G$  неизмеримо по Жордану.

**Замечание.** Для любых множеств  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  таких, что  $A \subset B$ , справедливы неравенства  $\mu_*(A) \leq \mu_*(B)$ ,  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ . Это следует из свойства 4 меры клеточных множеств.

**Лемма 1.** Множество  $E \subset \mathbb{R}^n$  измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдутся клеточные множества  $A_\varepsilon$  и  $B_\varepsilon$  такие, что  $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$  и  $\mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ .

**Доказательство.** 1) Пусть  $E$  – измеримо, т.е.  $\mu_*(E) = \mu^*(E)$ . По определению точной верхней грани  $\mu_*(E) = \sup_{A - \text{клет.}, A \subset E} \mu(A)$ ,

для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется клеточное множество  $A_\varepsilon \subset E$  такое, что  $\mu_*(E) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon/2$ . Аналогично, по определению точной нижней грани, найдется клеточное множество  $B_\varepsilon \supset E$  такое, что  $\mu(B_\varepsilon) - \mu^*(E) < \varepsilon/2$ . Следовательно,  $\mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ .

2) Пусть для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдутся клеточные множества  $A_\varepsilon$  и  $B_\varepsilon$  такие, что  $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$  и  $\mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ . Поскольку  $\mu_*(E) = \sup_{A - \text{клет.}, A \subset E} \mu(A) \geq \mu(A_\varepsilon)$  и, аналогично,  $\mu^*(E) \leq \mu(B_\varepsilon)$ , то  $\mu^*(E) - \mu_*(E) \leq \mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ . Так как число  $\mu^*(E) - \mu_*(E)$  не зависит от выбора  $\varepsilon > 0$ , то  $\mu^*(E) - \mu_*(E) \leq 0$ , т.е.  $\mu^*(E) \leq \mu_*(E)$ . Поскольку неравенство  $\mu^*(E) \geq \mu_*(E)$  выполняется всегда, то  $\mu^*(E) = \mu_*(E)$ .  $\square$

Через  $U_\delta(E)$  обозначим  $\delta$  – окрестность множества  $E$ :

$$U_\delta(E) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varrho(x; E) < \delta\},$$

где  $\varrho(x; E) = \inf_{y \in E} |x - y|$  – расстояние от точки  $x$  до множества  $E$ .

**Лемма 2.** Пусть  $E \subset \mathbb{R}^n$  – измеримое множество. Тогда

$$\mu^*(U_\delta(E)) \rightarrow \mu(E) \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (1)$$

**Доказательство.** а) Покажем сначала, что условие (1) выполняется для любой клетки  $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$ :  $\mu^*(U_\delta(\Pi)) \rightarrow \mu(\Pi)$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Действительно, поскольку  $\Pi \subset U_\delta(\Pi) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : a_i - \delta \leq x_i \leq b_i + \delta, i = 1, \dots, n\}$ , то  $\mu(\Pi) \leq \mu^*(U_\delta(\Pi)) \leq (b_1 - a_1 + 2\delta) \cdots (b_n - a_n + 2\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) = \mu(\Pi)$ , то условие (1) для множества  $E = \Pi$  выполняется.

б) Покажем теперь, что условие (1) выполняется для любого клеточного множества  $A$ . Пусть  $A = \bigcup_{i=1}^I \Pi_i$ , где клетки  $\Pi_i$  не имеют общих внутренних точек. Тогда  $U_\delta(A) = \bigcup_{i=1}^I U_\delta(\Pi_i)$ , следовательно, используя пункт (а), получаем, что

$$\mu(A) \leq \mu^*(U_\delta(A)) \leq \sum_{i=1}^I \mu^*(U_\delta(\Pi_i)) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^I \mu(\Pi_i) = \mu(A).$$

Откуда следует условие (1) для множества  $E = A$ .

в) Докажем, наконец, условие (1) для произвольного измеримого множества  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Зафиксируем произвольное число  $\varepsilon > 0$ . По определению верхней меры  $\mu^*(E) = \mu(E)$ , существует клеточное множество  $A$  такое, что  $E \subset A$  и  $\mu(A) < \mu(E) + \varepsilon/2$ . Отсюда и из пункта (б) получаем, что  $\exists \delta_0 > 0 : \forall \delta \in (0, \delta_0) \quad \mu^*(U_\delta(A)) \leq \mu(A) + \varepsilon/2$ . Поскольку  $U_\delta(E) \subset U_\delta(A)$ , то

$$\mu(E) \leq \mu^*(U_\delta(E)) \leq \mu^*(U_\delta(A)) \leq \mu(A) + \varepsilon/2 \leq \mu(E) + \varepsilon.$$

Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_0 > 0 : \forall \delta \in (0, \delta_0) \hookrightarrow \mu(E) \leq \mu^*(U_\delta(E)) \leq \mu(E) + \varepsilon,$$

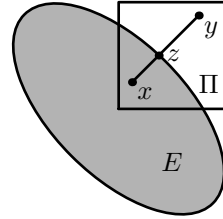
что доказывает условие (1). □

**Следствие.** Если  $E$  – множество меры нуль в  $\mathbb{R}^n$ , то для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует клеточное множество  $C_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$  такое, что  $\mu(C_\varepsilon) < \varepsilon$  и  $E \subset \text{int } C_\varepsilon$ .

**Доказательство.** В силу леммы 2 для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует число  $\delta > 0$  такое, что  $\mu^*(U_\delta(E)) < \varepsilon/2$ . Отсюда и из определения верхней меры Жордана следует существование клеточного множества  $C_\varepsilon$  такого, что  $U_\delta(E) \subset C_\varepsilon$  и  $\mu(C_\varepsilon) < \mu(U_\delta(E)) + \varepsilon/2 < \varepsilon$ . Из условия  $U_\delta(E) \subset C_\varepsilon$  следует, что  $E \subset \text{int } C_\varepsilon$ . □

**Лемма 3.** Пусть клетка  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  содержит как точку из множества  $E$ , так и точку, не лежащую во множестве  $E$ . Тогда клетка  $\Pi$  имеет общую точку с границей множества  $E$ .

**Доказательство.** Пусть  $x \in \Pi \cap E$ ,  $y \in \Pi \setminus E$ . Тогда отрезок  $[x, y] \subset \Pi$  обладает тем свойством, что один из его концов лежит в  $E$ , а другой – вне  $E$ . Применяя к этому отрезку процесс деления пополам и отбирая каждый раз ту половину, которая обладает указанным свойством, получим стягивающуюся систему вложенных отрезков.



По теореме Кантора эта система отрезков имеет общую точку  $z$ . Всякая окрестность точки  $z$  содержит как точки из  $E$ , так и не из  $E$ . Поэтому  $z \in \partial E$ .  $\square$

**Теорема 1.** (Критерий измеримости.) Множество  $E \subset \mathbb{R}^n$  измеримо тогда и только тогда, когда оно ограничено и его граница имеет меру нуль.

**Доказательство.** 1) Пусть множество  $E$  измеримо. Как было замечено ранее, всякое измеримое множество ограничено. Покажем, что  $\mu(\partial E) = 0$ .

В силу леммы 1 для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдутся клеточные множества  $A_\varepsilon$  и  $B_\varepsilon$  такие, что  $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$  и  $\mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ . Из свойства 2 следует, что множество  $C_\varepsilon = B_\varepsilon \setminus (\text{int } A_\varepsilon)$  является клеточным. Поскольку клеточные множества  $A_\varepsilon$  и  $C_\varepsilon$  не имеют общих внутренних точек, то в силу свойства аддитивности меры клеточных множеств  $\mu(A_\varepsilon) + \mu(C_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon \cup C_\varepsilon) = \mu(B_\varepsilon)$ . Следовательно,

$$\mu(C_\varepsilon) = \mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon. \quad (2)$$

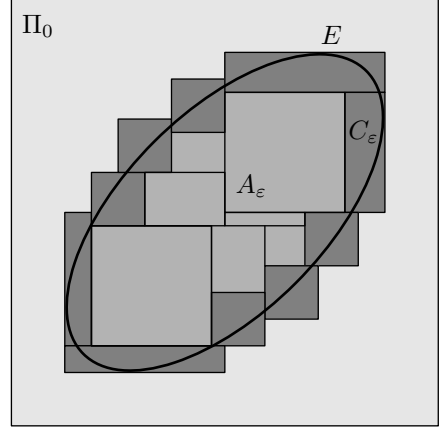
Поскольку  $E \subset B_\varepsilon$ , то  $\overline{E} \subset \overline{B_\varepsilon} = B_\varepsilon$ . Так как  $A_\varepsilon \subset E$ , то  $\text{int } A_\varepsilon \subset \text{int } E$ , поэтому  $\partial E = \overline{E} \setminus (\text{int } E) \subset B_\varepsilon \setminus (\text{int } A_\varepsilon) = C_\varepsilon$ . Отсюда и из неравенства (2) следует, что  $\mu^*(\partial E) \leq \mu(C_\varepsilon) < \varepsilon$ . Следовательно, в силу произвольности  $\varepsilon > 0$  получаем  $\mu^*(\partial E) = 0$ . Поскольку неравенства  $0 \leq \mu_*(\partial E) \leq \mu^*(\partial E)$  выполнены всегда, то  $\mu_*(\partial E) = \mu^*(\partial E) = 0$ , т. е.  $\mu(\partial E) = 0$ .

2) Пусть множество  $E$  ограничено и  $\mu(\partial E) = 0$ . Покажем, что множество  $E$  измеримо. Зафиксируем произвольное число  $\varepsilon > 0$ . В силу следствия из леммы 2 существует клеточное множество  $C_\varepsilon$  такое, что  $\partial E \subset \text{int } C_\varepsilon$  и  $\mu(C_\varepsilon) < \varepsilon$ . В силу ограниченности множеств

$E$  и  $C_\varepsilon$  существует клетка  $\Pi_0$ , содержащая множества  $E$  и  $C_\varepsilon$ . Из свойства 2 следует, что множество  $D_\varepsilon = \Pi_0 \setminus \text{int } C_\varepsilon$  является клеточным, т. е. может быть представлено как объединение клеток  $\Pi_i^\varepsilon$ ,  $i = 1, \dots, I$ , не имеющих общих внутренних точек.

Определим клеточное множество  $A_\varepsilon$  как объединение всех клеток  $\Pi_i^\varepsilon$ ,  $i = 1, \dots, I$ , которые целиком содержатся во множестве  $E$ :  $A_\varepsilon = \bigcup_{\Pi_i^\varepsilon \subset E} \Pi_i^\varepsilon$ .

Поскольку клетки  $\Pi_i^\varepsilon$  не имеют общих точек с границей множества  $E$ , то, как следует из леммы 3, либо клетка  $\Pi_i^\varepsilon$  целиком содержится в  $E$ , либо не имеет общих точек с множеством  $E$ . Поэтому  $E \subset A_\varepsilon \cup C_\varepsilon$ .



Определив клеточное множество  $B_\varepsilon = A_\varepsilon \cup C_\varepsilon$ , получим  $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$ . Поскольку множества  $C_\varepsilon$  и  $D_\varepsilon$  не имеют общих внутренних точек, то множества  $C_\varepsilon$  и  $A_\varepsilon \subset D_\varepsilon$  обладают тем же свойством. Отсюда по свойству аддитивности меры клеточных множеств следует, что  $\mu(B_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon \cup C_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon) + \mu(C_\varepsilon) < \mu(A_\varepsilon) + \varepsilon$ . Поэтому  $\mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ . Применяя лемму 1, получаем измеримость множества  $E$ .  $\square$

**Лемма 4.** Для любых множеств  $E, F \subset \mathbb{R}^n$  справедливы включения

- а)  $\partial(E \cup F) \subset \partial E \cup \partial F$ ,
- б)  $\partial(E \cap F) \subset \partial E \cup \partial F$ ,
- в)  $\partial(E \setminus F) \subset \partial E \cup \partial F$ .

**Доказательство.** Докажем включение (а). Включения (б), (в) доказываются аналогично. Пусть  $x \in \partial(E \cup F)$ . Тогда  $x \in \overline{E \cup F} = \overline{E} \cup \overline{F}$ . Следовательно,  $x \in \overline{E}$  или  $x \in \overline{F}$ . Так как  $\text{int } E \cup \text{int } F \subset \text{int } (E \cup F)$  и  $x \notin \text{int } (E \cup F)$ , то  $x \notin \text{int } E \cup \text{int } F$ . Поэтому  $x \in \overline{E} \setminus \text{int } E = \partial E$  или  $x \in \overline{F} \setminus \text{int } F = \partial F$ . В любом случае  $x \in \partial E \cup \partial F$ .  $\square$

**Следствие.** Если множества  $E$  и  $F$  измеримы, то множества  $\overline{E}$ ,  $\text{int } E$ ,  $E \cup F$ ,  $E \cap F$ ,  $E \setminus F$  измеримы.

**Доказательство.** Измеримость множеств  $\overline{E}$  и  $\text{int } E$  следует из критерия измеримости и включений  $\partial \overline{E} \subset \partial E$ ,  $\partial(\text{int } E) \subset \partial E$ .

Измеримость множеств  $E \cup F$ ,  $E \cap F$ ,  $E \setminus F$  следует из критерия измеримости и леммы 4.  $\square$

**Теорема 2.** (Свойство аддитивности меры Жордана.) Если множества  $E_1$  и  $E_2$  измеримы по Жордану и не имеют общих внутренних точек, то  $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$ .

**Доказательство.** По определению меры Жордана для любого числа  $\varepsilon > 0$  существуют клеточные множества  $A_i^\varepsilon$ ,  $B_i^\varepsilon$  ( $i = 1, 2$ ) такие, что  $A_i^\varepsilon \subset E_i \subset B_i^\varepsilon$  и  $\mu(A_i^\varepsilon) \geq \mu(E_i) - \varepsilon/2$ ,  $\mu(B_i^\varepsilon) \leq \mu(E_i) + \varepsilon/2$ , ( $i = 1, 2$ ). Следовательно,

$$\begin{aligned} \mu(A_1^\varepsilon) + \mu(A_2^\varepsilon) &\geq \mu(E_1) + \mu(E_2) - \varepsilon, \\ \mu(B_1^\varepsilon) + \mu(B_2^\varepsilon) &\leq \mu(E_1) + \mu(E_2) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку  $A_1^\varepsilon \cup A_2^\varepsilon \subset E_1 \cup E_2 \subset B_1^\varepsilon \cup B_2^\varepsilon$  и клеточные множества  $A_1^\varepsilon$  и  $A_2^\varepsilon$  не имеют общих внутренних точек, то

$$\begin{aligned} \mu(A_1^\varepsilon) + \mu(A_2^\varepsilon) &= \mu(A_1^\varepsilon \cup A_2^\varepsilon) \leq \\ &\leq \mu(E_1 \cup E_2) \leq \mu(B_1^\varepsilon \cup B_2^\varepsilon) \leq \mu(B_1^\varepsilon) + \mu(B_2^\varepsilon). \end{aligned}$$

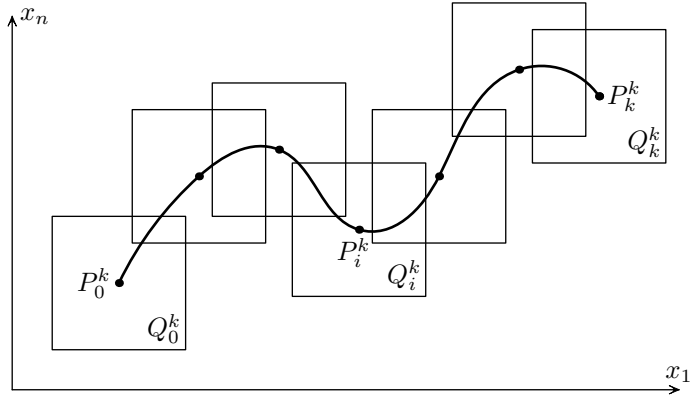
Отсюда и из неравенств (3) следуют неравенства

$$\mu(E_1) + \mu(E_2) - \varepsilon \leq \mu(E_1 \cup E_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2) + \varepsilon,$$

что в силу произвольности  $\varepsilon > 0$  дает равенство  $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$ .  $\square$

**Теорема 3.** Спрямолинейная кривая  $\Gamma = \{\vec{r}(t) : t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n$  при  $n \geq 2$  имеет меру нуль в  $\mathbb{R}^n$ .

**Доказательство.** Пусть для любого натурального числа  $k$  точки  $P_0^k, \dots, P_k^k$  лежат на кривой  $\Gamma$  и разбивают ее на  $k$  дуг длины  $|\Gamma|/k$  каждая. Построим клеточное множество  $B_k$ , являющееся объединением кубов  $Q_0^k, \dots, Q_k^k$  с центрами в точках  $P_0^k, \dots, P_k^k$  соответственно и ребрами длиной  $|\Gamma|/k$ , параллельными осям координат. Тогда  $\mu(Q_i^k) = (|\Gamma|/k)^n$ ,  $\Gamma \subset B_k$  и, следовательно,  $\mu(B_k) \leq (k + 1)(|\Gamma|/k)^n = |\Gamma|^n \frac{k+1}{k^n} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Поэтому  $\mu^*(\Gamma) = 0$ , а значит,  $\mu(\Gamma) = 0$ .  $\square$



Существует непрерывная кривая (кривая Пеано) в  $\mathbb{R}^2$ , которая проходит через все точки квадрата  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Следовательно, ее мера не равна нулю.

**Теорема 4.** Если множество  $E \subset \mathbb{R}^n$  измеримо, то цилиндр  $G = E \times [a, b] \subset \mathbb{R}^{n+1}$  является измеримым множеством и  $\mu(G) = (b - a)\mu(E)$ .

**Доказательство.** Так как  $E$  измеримо, то для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдутся клеточные множества  $A_\varepsilon, B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$  такие, что

$$A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon, \quad \mu(E) - \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon, \quad \mu(B_\varepsilon) - \mu(E) < \varepsilon.$$

Рассмотрим клеточные множества  $\tilde{A}_\varepsilon = A_\varepsilon \times [a, b]$ ,  $\tilde{B}_\varepsilon = B_\varepsilon \times [a, b]$ . Тогда  $\tilde{A}_\varepsilon \subset G \subset \tilde{B}_\varepsilon$ . Следовательно,  $\mu_*(G) \geq \mu(\tilde{A}_\varepsilon) = (b - a)\mu(A_\varepsilon) > (b - a)(\mu(E) - \varepsilon)$ . В силу произвольности числа  $\varepsilon > 0$  получаем неравенство  $\mu_*(G) \geq (b - a)\mu(E)$ . Аналогично,  $\mu^*(G) \leq \mu(\tilde{B}_\varepsilon) = (b - a)\mu(B_\varepsilon) < (b - a)(\mu(E) + \varepsilon)$ . Следовательно,  $\mu^*(G) \leq (b - a)\mu(E) \leq \mu_*(G)$ . Поэтому существует  $\mu(G) = (b - a)\mu(E)$ .  $\square$

## § 2. Суммы Дарбу

Определим некоторые операции с  $+\infty$  и  $-\infty$ :

$$+\infty + (+\infty) = +\infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty;$$

$$\text{если } \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{то } \pm\infty + \lambda = \pm\infty;$$

$$\text{если } \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0, \quad \text{то } \lambda \cdot (\pm\infty) = \pm\infty;$$

$$\text{если } \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda < 0, \quad \text{то } \lambda \cdot (\pm\infty) = \mp\infty.$$

Напомним, что разбиением отрезка  $[a, b]$  называется конечный набор точек  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$ , таких, что  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_I = b$ . Отрезки  $[x_{i-1}, x_i]$  называются отрезками разбиения  $T$ .

**Определение.** Пусть на  $[a, b]$  определена функция  $f(x)$  и задано разбиение  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$  отрезка  $[a, b]$ . Определим

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

$$s(f; T) = \sum_{i=1, \dots, I} (x_i - x_{i-1}) m_i,$$

$$S(f; T) = \sum_{i=1, \dots, I} (x_i - x_{i-1}) M_i.$$

Сумма  $s(f; T)$  называется *нижней суммой Дарбу*, а  $S(f; T)$  – *верхней суммой Дарбу* для функции  $f$  и разбиения  $T$ .

**Лемма 1.** 1) Если функция  $f$  ограничена снизу на  $[a, b]$ , то  $s(f; T) \in \mathbb{R}$  для любого разбиения  $T$ . Если функция  $f$  неограничена снизу на  $[a, b]$ , то  $s(f; T) = -\infty$  для любого разбиения  $T$ .

2) Если функция  $f$  ограничена сверху на  $[a, b]$ , то  $S(f; T) \in \mathbb{R}$  для любого разбиения  $T$ . Если функция  $f$  неограничена сверху на  $[a, b]$ , то  $S(f; T) = +\infty$  для любого разбиения  $T$ .

**Доказательство.** 1) Пусть  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$  – разбиение отрезка  $[a, b]$ . Если  $f$  ограничена снизу, то  $\forall i \in \{1, \dots, I\} \leftrightarrow m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \in \mathbb{R}$ , следовательно,  $s(f; T) \in \mathbb{R}$ . Если  $f$  неограничена снизу, то она неограничена снизу на некотором отрезке  $[x_{j-1}, x_j]$ , следовательно,  $m_j = -\infty$  и  $s(f; T) = -\infty$ .

Пункт (2) доказывается аналогично. □

**Определение.** Мелкостью разбиения  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$  называется число

$$\ell(T) = \max_{i=1, \dots, I} (x_i - x_{i-1}).$$

**Определение.** Число  $J$  называется (*определенным*) *интегралом Римана* функции  $f$  на  $[a, b]$  и обозначается  $J = \int_a^b f(x) dx$ , если

$$\lim_{\ell(T) \rightarrow 0} s(f; T) = \lim_{\ell(T) \rightarrow 0} S(f; T) = J, \text{ т. е.}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall T: \ell(T) \leq \delta \hookrightarrow |s(f; T) - J| \leq \varepsilon \text{ и } |S(f; T) - J| \leq \varepsilon.$$

Функция  $f$  называется *интегрируемой по Риману* на  $[a, b]$ , если существует интеграл Римана функции  $f$  на  $[a, b]$ .

Геометрический смысл интеграла состоит в том, что для неотрицательной функции  $f$  интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  существует тогда и только тогда, когда существует площадь криволинейной трапеции  $G$ , а в случае существования интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  равен площади множества  $G$ .

**Лемма 2.** (Необходимое условие интегрируемости.) Если функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то  $f$  ограничена на этом отрезке.

**Доказательство.** Если функция  $f$  неограничена снизу на  $[a, b]$ , то в силу леммы 1  $\lim_{\ell(T) \rightarrow 0} s(f; T) = -\infty$ , а значит, не существует конечного предела  $s(f; T)$  при  $\ell(T) \rightarrow 0$ , следовательно, функция  $f$  неинтегрируема на  $[a, b]$ . Аналогично, если функция  $f$  неограничена сверху, то она также неинтегрируема.  $\square$

**Замечание.** Условие ограниченности функции на  $[a, b]$  не является достаточным условием интегрируемости на  $[a, b]$ . Например, для функции Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррациональное,} \\ 1, & \text{если } x \text{ рациональное} \end{cases}$$

для любого разбиения  $T$  имеют место равенства  $s(f; T) = 0$ ,  $S(f; T) = b - a$ , следовательно, при измельчении разбиений нижняя и верхняя суммы Дарбу будут стремиться к различным пределам, а значит, функция Дирихле неинтегрируема по Риману.

**Определение.** Будем говорить, что разбиение  $T'$  отрезка  $[a, b]$  является *измельчением* разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$ , если разбиение  $T'$  содержит все точки разбиения  $T$ :  $T \subset T'$ .

**Лемма 3.** Если разбиение  $T'$  отрезка  $[a, b]$  является измельчением разбиения  $T$ , то для любой функции  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  имеют место неравенства

$$s(f; T') \geq s(f; T), \quad S(f; T') \leq S(f; T).$$

**Доказательство.** Рассмотрим случай, когда разбиение  $T'$  получается из разбиения  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$  добавлением одной точки  $x' \in (x_{j-1}, x_j)$ . Тогда

$$\begin{aligned} s(f; T') - s(f; T) &= (x_j - x') \inf_{x \in [x', x_j]} f(x) + \\ &+ (x' - x_{j-1}) \inf_{x \in [x_{j-1}, x']} f(x) - (x_j - x_{j-1}) \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) = \\ &= (x_j - x') \left( \inf_{x \in [x', x_j]} f(x) - \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) \right) + \\ &+ (x' - x_{j-1}) \left( \inf_{x \in [x_{j-1}, x']} f(x) - \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) \right) \geq 0, \end{aligned}$$

так как  $\inf_{x \in [x', x_j]} f(x) \geq \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$  и  $\inf_{x \in [x_{j-1}, x']} f(x) \geq \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$ .

Неравенство  $S(f; T') \leq S(f; T)$  доказывается аналогично. Если разбиение  $T'$  получается из разбиения  $T$  добавлением нескольких точек, то, добавляя на каждом шаге по одной точке, получаем требуемое утверждение.  $\square$

**Лемма 4.** Для любых двух разбиений  $T_1$  и  $T_2$  отрезка  $[a, b]$  и для любой функции  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  справедливо неравенство

$$s(f; T_1) \leq S(f; T_2).$$

**Доказательство.** Рассмотрим разбиение  $T = T_1 \cup T_2$ , состоящее из точек разбиения  $T_1$  и точек разбиения  $T_2$ . Поскольку разбиение  $T$  является измельчением каждого из разбиений  $T_1$  и  $T_2$ , то по лемме 3  $s(f; T_1) \leq s(f; T)$  и  $S(f; T) \leq S(f; T_2)$ .

Поскольку для разбиения  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$  справедливы соотношения

$$s(f; T) = \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = S(f; T),$$

то  $s(f; T_1) \leq s(f; T) \leq S(f; T) \leq S(f; T_2)$ .  $\square$

**Определение.** Пусть на  $[a, b]$  задана функция  $f$ . Определим

$$J_* = \sup_T s(f; T), \quad J^* = \inf_T S(f; T),$$

где супремум и инфимум берутся по всевозможным разбиениям  $T$  отрезка  $[a, b]$ . Величины  $J_*$  и  $J^*$  называются соответственно *нижним и верхним интегралами Дарбу*.

**Лемма 5.** Для любого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  и любой функции  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  справедливы неравенства

$$s(f; T) \leq J_* \leq J^* \leq S(f; T).$$

**Доказательство.** Из леммы 4 для любого разбиения  $T_2$  получаем  $J_* = \sup_{T_1} s(f; T_1) \leq S(f; T_2)$ , следовательно,  $J_* \leq \inf_{T_2} S(f; T_2) = J^*$ . Поэтому

$$s(f; T) \leq \sup_T s(f; T) = J_* \leq J^* = \inf_T S(f; T) \leq S(f; T). \quad \square$$

**Определение.** Пусть на  $[a, b]$  задана функция  $f$  и определено разбиение  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$  отрезка  $[a, b]$ . *Колебанием* функции  $f$  на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  называется

$$\omega_i(f) = \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x') - f(x'')|.$$

Разность верхней и нижней сумм Дарбу для функции  $f$  и разбиения  $T$  будем обозначать через  $\Delta(f; T)$ :

$$\Delta(f; T) = S(f; T) - s(f; T).$$

**Лемма 6.** Для любой функции  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  и для любого разбиения  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$  отрезка  $[a, b]$  справедливо равенство

$$\Delta(f; T) = \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) \omega_i(f).$$

**Доказательство.** Заметим, что

$$\begin{aligned} \omega_i(f) &= \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} (f(x') - f(x'')) = \\ &= \sup_{x' \in [x_{i-1}, x_i]} f(x') + \sup_{x'' \in [x_{i-1}, x_i]} (-f(x'')) = \\ &= \sup_{x' \in [x_{i-1}, x_i]} f(x') - \inf_{x'' \in [x_{i-1}, x_i]} f(x'') = M_i - m_i, \end{aligned}$$

где  $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ ,  $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta(f; T) &= S(f; T) - s(f; T) = \\ &= \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1})(M_i - m_i) = \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) \omega_i(f). \end{aligned} \quad \square$$

**Теорема 1.** (Критерий интегрируемости.) Функция  $f$  интегрируема на  $[a, b]$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{\ell(T) \rightarrow 0} \Delta(f; T) = 0$ , т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall T : \ell(T) \leq \delta \Leftrightarrow \Delta(f; T) \leq \varepsilon. \quad (1)$$

**Доказательство.** 1) Если функция  $f$  интегрируема на  $[a, b]$ , то по определению

$$\begin{aligned} \exists J \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall T : \ell(T) \leq \delta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( |s(f; T) - J| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |S(f; T) - J| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right). \end{aligned}$$

Поэтому при  $\ell(T) \leq \delta$

$$\Delta(f; T) = S(f; T) - s(f; T) \leq |S(f; T) - J| + |s(f; T) - J| \leq \varepsilon,$$

т. е. выполнены условия (1).

2) Пусть выполнено условие (1). Тогда из леммы 1 следует, что функция  $f$  ограничена, так как иначе либо  $S(f; T) = +\infty$ , либо

$s(f; T) = -\infty$  и в любом случае  $\Delta(f; T) = S(f; T) - s(f; T) = +\infty$ , что противоречит условию (1). Поскольку  $f$  ограничена, то для любого разбиения  $T$  суммы Дарбу  $s(f; T)$  и  $S(f; T)$  конечны. Отсюда и из неравенства  $s(f; T) \leq J_* \leq J^* \leq S(f; T)$  следует, что интегралы Дарбу  $J_*$  и  $J^*$  также являются конечными числами.

Из условия (1) следует, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists T : S(f; T) - s(f; T) = \Delta(f; T) \leq \varepsilon$ . Отсюда и из леммы 5 получаем  $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow J^* - J_* \leq S(f; T) - s(f; T) \leq \varepsilon$ , следовательно,  $J^* - J_* \leq 0$ . Поскольку  $J_* \leq J^*$ , то  $J_* = J^*$ .

Определим число  $J = J_* = J^*$ . Из неравенства  $s(f; T) \leq J \leq S(f; T)$  и условия (1) следует, что

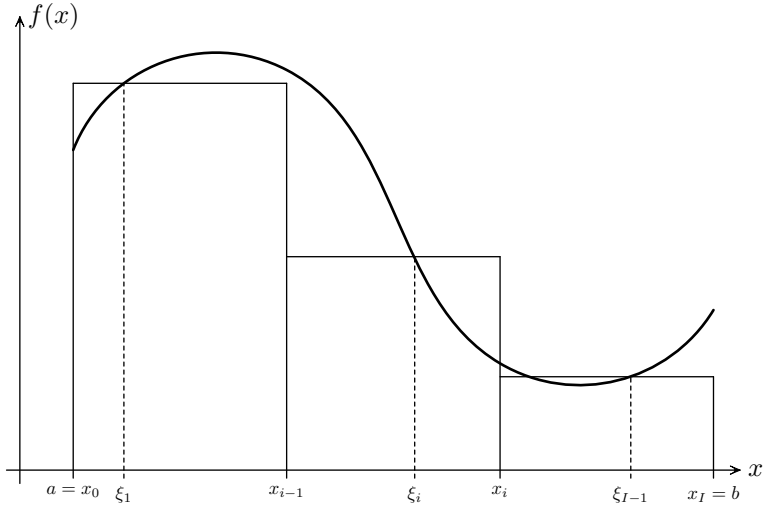
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall T : \ell(T) \leq \delta \hookrightarrow |s(f; T) - J| \leq \varepsilon \quad \text{и} \quad |S(f; T) - J| \leq \varepsilon,$$

$$\text{т. е.} \quad \exists \int_a^b f(x) dx = J. \quad \square$$

### § 3. Интегральные суммы Римана

**Определение.** Пусть задано разбиение  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$  отрезка  $[a, b]$ . *Выборкой*, соответствующей разбиению  $T$ , называется набор точек  $\xi_T = \{\xi_i\}_{i=1}^I$  таких, что  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . *Интегральной суммой (Римана)* для функции  $f$ , разбиения  $T$  и выборки  $\xi_T$  называется

$$\sigma(f; T; \xi_T) = \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i).$$



**Лемма 1.** Пусть на  $[a, b]$  определена функция  $f(x)$  и задано разбиение  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$  отрезка  $[a, b]$ . Тогда

$$s(f; T) = \inf_{\xi_T} \sigma(f; T; \xi_T), \quad S(f; T) = \sup_{\xi_T} \sigma(f; T; \xi_T),$$

где супремум и инфимум берутся по всем выборкам  $\xi_T$ , соответствующим разбиению  $T$ .

**Доказательство**

$$\begin{aligned} s(f; T) &= \sum_{i=1, \dots, I} (x_i - x_{i-1}) \inf_{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi_i) = \\ &= \inf_{\xi_1 \in [x_0, x_1]} \dots \inf_{\xi_I \in [x_{I-1}, x_I]} \sum_{i=1, \dots, I} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) = \inf_{\xi_T} \sigma(f; T; \xi_T). \end{aligned}$$

Аналогично,  $S(f; T) = \sup_{\xi_T} \sigma(f; T; \xi_T)$ . □

**Теорема 1.** (Определение интеграла через интегральные суммы Римана.) Число  $J$  равно  $\int_a^b f(x) dx$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{\ell(T) \rightarrow 0} \sigma(f; T; \xi_T) = J$ , т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall T : \ell(T) \leq \delta \forall \xi_T \hookrightarrow |\sigma(f; T; \xi_T) - J| \leq \varepsilon. \quad (1)$$

**Доказательство.** Рассмотрим отдельно условие:

$$\forall \xi_T \hookrightarrow |\sigma(f; T; \xi_T) - J| \leq \varepsilon.$$

Это условие можно переписать в виде

$$\forall \xi_T \hookrightarrow J - \varepsilon \leq \sigma(f; T; \xi_T) \leq J + \varepsilon. \quad (2)$$

Условие  $\forall \xi_T \hookrightarrow \sigma(f; T; \xi_T) \leq J + \varepsilon$  означает, что число  $J + \varepsilon$  является некоторой верхней гранью значений  $\sigma(f; T; \xi_T)$  по выборкам  $\xi_T$ . В силу свойств верхних граней это условие эквивалентно неравенству  $\sup_{\xi_T} \sigma(f; T; \xi_T) \leq J + \varepsilon$ . Из леммы 1 следует, что последнее

неравенство можно переписать в виде  $S(f; T) \leq J + \varepsilon$ . Аналогично, условие  $\forall \xi_T \hookrightarrow J - \varepsilon \leq \sigma(f; T; \xi_T)$  эквивалентно неравенству  $J - \varepsilon \leq s(f; T)$ .

Поскольку неравенство  $s(f; T) \leq S(f; T)$  выполняется всегда, то

$$\begin{aligned} (2) \quad & \iff J - \varepsilon \leq s(f; T) \leq S(f; T) \leq J + \varepsilon \iff \\ & \iff |s(f; T) - J| \leq \varepsilon \quad \text{и} \quad |S(f; T) - J| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, условие (1) эквивалентно условию

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall T : \ell(T) \leq \delta \hookrightarrow |s(f; T) - J| \leq \varepsilon \text{ и } |S(f; T) - J| \leq \varepsilon,$$

что по определению означает  $J = \int_a^b f(x) dx$ . □

## § 4. Свойства определенного интеграла

**Теорема 1.** (Линейность определенного интеграла.) Если функции  $f$  и  $g$  интегрируемы на  $[a, b]$ , а  $\alpha$  и  $\beta$  – некоторые числа, то функция  $\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$  интегрируема на  $[a, b]$  и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

**Доказательство.** Заметим, что интегральные суммы Римана обладают свойством линейности:

$$\forall T = \{x_i\}_{i=0}^I \quad \forall \xi_T = \{\xi_i\}_{i=1}^I \hookrightarrow \sigma(\alpha f + \beta g; T; \xi_T) =$$

$$= \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1})(\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) = \alpha \sigma(f; T; \xi_T) + \beta \sigma(g; T; \xi_T).$$

В силу определения интеграла через интегральные суммы (теорема 1 § 3) существуют пределы

$$\lim_{\ell(T) \rightarrow 0} \sigma(f; T; \xi_T) = \int_a^b f(x) dx, \quad \lim_{\ell(T) \rightarrow 0} \sigma(g; T; \xi_T) = \int_a^b g(x) dx,$$

следовательно, существует предел

$$\lim_{\ell(T) \rightarrow 0} \sigma(\alpha f + \beta g; T; \xi_T) = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Еще раз пользуясь теоремой 1 § 3, получаем требуемое утверждение.  $\square$

**Следствие.** Множество интегрируемых на отрезке  $[a, b]$  функций является линейным пространством, а определенный интеграл Римана является линейным оператором, действующим из этого пространства в пространство чисел  $\mathbb{R}$ .

**Теорема 2.** (Интегрирование неравенств.) Если функции  $f$  и  $g$  интегрируемы на  $[a, b]$  и  $\forall x \in [a, b] \hookrightarrow f(x) \leq g(x)$ , то  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

**Доказательство.** Поскольку для интегральных сумм имеет место неравенство

$$\sigma(f; T; \xi_T) \leq \sigma(g; T; \xi_T) \quad \forall T \quad \forall \xi_T,$$

то, переходя к пределу при  $\ell(T) \rightarrow 0$ , по определению интеграла через интегральные суммы (теорема 1 § 3) получаем

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\ell(T) \rightarrow 0} \sigma(f; T; \xi_T) \leq \lim_{\ell(T) \rightarrow 0} \sigma(g; T; \xi_T) = \int_a^b g(x) dx.$$

□

**Теорема 3.** (Интегрируемость модуля.) Если функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то функция  $|f(x)|$  также интегрируема на этом отрезке и справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (1)$$

**Доказательство.** В силу неравенства треугольника имеет место неравенство  $||f(x')| - |f(x'')|| \leq |f(x') - f(x'')|$ . Поэтому для любого разбиения  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$  отрезка  $[a, b]$  колебания функций  $f$  и  $|f|$  связаны неравенством

$$\begin{aligned} \omega_i(|f|) &= \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} ||f(x')| - |f(x'')|| \leq \\ &\leq \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x') - f(x'')| = \omega_i(f). \end{aligned}$$

Отсюда, используя критерий интегрируемости (теорема 1 § 2), получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq \Delta(|f|; T) &= \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) \omega_i(|f|) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) \omega_i(f) = \Delta(f; T) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \ell(T) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

следовательно,  $\Delta(|f|; T) \rightarrow 0$  при  $\ell(T) \rightarrow 0$ , что, опять по критерию интегрируемости, означает интегрируемость функции  $|f|$  на  $[a, b]$ .

Поскольку для интегральных сумм имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \sigma(f; T; \xi_T) &= \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) |f(\xi_i)| = \sigma(|f|; T; \xi_T), \end{aligned}$$

то, переходя к пределу при  $\ell(T) \rightarrow 0$ , получаем неравенство (1). □

**Теорема 4.** Если функция  $g$  интегрируема на  $[a, b]$ , а функция  $f$  совпадает с функцией  $g$ , за исключением конечного набора точек  $\{c_k\}_{k=1}^K \subset [a, b]$ , то функция  $f$  интегрируема на  $[a, b]$  и  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ .

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $h(x) = g(x) - f(x)$ . Определим число  $M = \max\{|h(c_1)|, \dots, |h(c_K)|\}$ . Так как  $h(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b] \setminus \{c_1, \dots, c_K\}$ , то  $|h(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$ .

Поскольку значение  $h(x)$  отлично от 0 лишь в  $K$  точках, то для любого разбиения  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$  и любой выборки  $\xi_T = \{\xi_i\}_{i=1}^I$  имеет место соотношение

$$|\sigma(h; T; \xi_T)| = \left| \sum_{i=1}^I h(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq 2KM \ell(T) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \ell(T) \rightarrow 0.$$

Следовательно, функция  $h$  интегрируема на  $[a, b]$  и  $\int_a^b h(x) dx = 0$ .

Отсюда и из свойства линейности интеграла получаем интегрируемость функции  $f(x) = g(x) - h(x)$  и равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b h(x) dx = \int_a^b g(x) dx. \quad \square$$

**Лемма 1.** Если функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то  $f$  интегрируема на любом отрезке  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ .

**Доказательство.** Пусть задан отрезок  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ . Для любого разбиения  $T$  отрезка  $[\alpha, \beta]$  существует разбиение  $T'$  отрезка  $[a, b]$ , которое на отрезке  $[\alpha, \beta]$  совпадает с разбиением  $T$  и имеет мелкость, равную мелкости разбиения  $T$ :  $\ell(T') = \ell(T)$ . Поскольку  $0 \leq \Delta(f; T) \leq \Delta(f; T')$  и в силу критерия интегрируемости  $\lim_{\ell(T') \rightarrow 0} \Delta(f; T') = 0$ , то  $\lim_{\ell(T) \rightarrow 0} \Delta(f; T) = 0$ , а значит, функция  $f$  интегрируема на  $[\alpha, \beta]$ .  $\square$

**Теорема 5.** (Аддитивность интеграла относительно отрезков интегрирования.) Пусть функция  $f$  интегрируема на отрезках  $[a, b]$

и  $[b, c]$ . Тогда  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, c]$  и

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

**Доказательство.** Поскольку функция  $f$  интегрируема на отрезках  $[a, b]$  и  $[b, c]$ , то  $f$  ограничена на этих отрезках, следовательно, функция  $f$  ограничена на отрезке  $[a, c]$ , т. е.

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, c] \hookrightarrow |f(x)| \leq M.$$

Пусть задано разбиение  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$  отрезка  $[a, c]$  и пусть  $b \in [x_{j-1}, x_j]$ . Рассмотрим разбиение  $T_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, b\}$  отрезка  $[a, b]$  и разбиение  $T_2 = \{b, x_j, \dots, x_I\}$  отрезка  $[b, c]$ .

Для верхних сумм Дарбу

$$S(f; T) = \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

$$S(f; T_1) = \sum_{i=1}^{j-1} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) + (b - x_{j-1}) \sup_{x \in [x_{j-1}, b]} f(x),$$

$$S(f; T_2) = (x_j - b) \sup_{x \in [b, x_j]} f(x) + \sum_{i=j}^I (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

имеют место соотношения

$$\begin{aligned} |S(f; T) - S(f; T_1) - S(f; T_2)| &= \left| (x_j - x_{j-1}) \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) - \right. \\ &\quad \left. - (b - x_{j-1}) \sup_{x \in [x_{j-1}, b]} f(x) - (x_j - b) \sup_{x \in [b, x_j]} f(x) \right| \leq \\ &\leq M((x_j - x_{j-1}) + (b - x_{j-1}) + (x_j - b)) = 2M(x_j - x_{j-1}) \leq \\ &\leq 2M \ell(T) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \ell(T) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поскольку  $\ell(T_1) \leq \ell(T)$  и  $\ell(T_2) \leq \ell(T)$ ,  $\lim_{\ell(T_1) \rightarrow 0} S(f; T_1) =$   
 $= J_1 = \int_a^b f(x) dx$  и  $\lim_{\ell(T_2) \rightarrow 0} S(f; T_2) = J_2 = \int_b^c f(x) dx$ , то

$\lim_{\ell(T) \rightarrow 0} S(f; T) = J_1 + J_2$ . Аналогично,  $\lim_{\ell(T) \rightarrow 0} s(f; T) = J_1 + J_2$ . По определению интеграла получаем требуемое утверждение.  $\square$

**Определение.** Для любой функции  $f$  положим по определению

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Если функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то определим

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

**Следствие.** Если функция  $f$  интегрируема на отрезке, содержащем точки  $a$ ,  $b$  и  $c$ , то при любом расположении этих точек справедливо равенство

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

**Доказательство.** Рассмотрим случай  $a < c < b$ . Из леммы 1 следует интегрируемость функции  $f$  на отрезках  $[a, c]$  и  $[c, b]$ . Поэтому в силу теоремы 5 получаем

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

$\square$

## § 5. Достаточные условия интегрируемости

**Теорема 1.** Если функция непрерывна на отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.

**Доказательство.** Пусть функция  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , тогда по теореме Кантора функция  $f$  равномерно непрерывна на  $[a, b]$ . Это означает, что модуль непрерывности  $\omega(\delta) = \sup_{\substack{x, x' \in [a, b] \\ |x - x'| < \delta}} |f(x) - f(x')|$

стремится к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ .

Пусть задано разбиение  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$  отрезка  $[a, b]$ . Поскольку  $|x_i - x_{i-1}| \leq \ell(T) < 2\ell(T)$ , то колебание функции  $f$  на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$

$$\omega_i(f) = \sup_{x, x' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - f(x')| \leq \omega(2\ell(T)).$$

Поэтому разность сумм Дарбу

$$\begin{aligned} \Delta(f; T) &= \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) \omega_i(f) \leq \omega(2\ell(T)) \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \omega(2\ell(T)) (b - a) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \ell(T) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из критерия интегрируемости следует интегрируемость функции  $f$ .  $\square$

**Определение.** Функция  $f$  называется *кусочно-непрерывной* на отрезке  $[a, b]$ , если существует разбиение отрезка  $[a, b]$  точками  $\{c_k\}_{k=1}^N$ :  $a = c_0 < c_1 < \dots < c_N = b$  такое, что  $\forall k \in \{1, \dots, N\}$  на интервалах  $(c_{k-1}, c_k)$  функция  $f$  непрерывна и существуют конечные односторонние пределы  $f(c_{k-1} + 0)$ ,  $f(c_k - 0)$ .

**Теорема 2.** Если функция кусочно-непрерывна на отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.

**Доказательство.** Пусть функция  $f$  кусочно-непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Тогда существует разбиение отрезка  $[a, b]$  точками  $\{c_k\}_{k=1}^N$  такое, что на интервалах  $(c_{k-1}, c_k)$  функция  $f$  непрерывна, а в концах интервалов  $(c_{k-1}, c_k)$  функция  $f$  имеет конечные односторонние пределы.

Зафиксируем произвольный отрезок  $[c_{k-1}, c_k]$  и рассмотрим непрерывную функцию

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in (c_{k-1}, c_k), \\ f(c_{k-1} + 0), & \text{если } x = c_{k-1}, \\ f(c_k - 0), & \text{если } x = c_k. \end{cases}$$

В силу теоремы 1 функция  $g$  интегрируема на отрезке  $[c_{k-1}, c_k]$ . Поскольку на отрезке  $[c_{k-1}, c_k]$  функция  $f$  может отличаться от функции  $g$  не более чем в двух точках, то по теореме 4 § 4 функция  $f$  интегрируема на произвольном отрезке  $[c_{k-1}, c_k]$ . Отсюда по теореме 5 § 4 следует интегрируемость функции  $f$  на всем отрезке  $[a, b]$ .  $\square$

**Теорема 3.** Если функция монотонна на отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.

**Доказательство.** Пусть функция  $f$  не убывает на отрезке  $[a, b]$  и пусть задано разбиение  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$  отрезка  $[a, b]$ . Тогда

$$\omega_i(f) = \sup_{x, x' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - f(x')| = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta(f; T) &= \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) \omega_i(f) \leq \\ &\leq \ell(T) \sum_{i=1}^I \omega_i(f) = \ell(T) \sum_{i=1}^I (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \\ &= \ell(T) (f(b) - f(a)) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \ell(T) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В силу критерия интегрируемости, функция  $f$  интегрируема на  $[a, b]$ .  $\square$

**Замечание.** Из непрерывности или монотонности функции на интервале  $(a, b)$  не следует интегрируемость этой функции на  $[a, b]$ . Например, функция  $f(x) = \frac{1}{x}$  непрерывна и убывает на  $(0, 1)$ , однако она неограничена и, следовательно, неинтегрируема на  $[0, 1]$ .

**Теорема 4.** Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на отрезке  $[a, b]$ , то их произведение  $f(x)g(x)$  является интегрируемой на отрезке  $[a, b]$  функцией.

**Доказательство.** Поскольку функции  $f$  и  $g$  интегрируемы на  $[a, b]$ , то они ограничены, т. е.

$$M_f = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \in \mathbb{R}, \quad M_g = \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &|f(x)g(x) - f(x')g(x')| = \\ &= |f(x)g(x) - f(x')g(x) + f(x')g(x) - f(x')g(x')| \leq \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x')g(x)| + |f(x')g(x) - f(x')g(x')| \leq \\ &\leq M_g |f(x) - f(x')| + M_f |g(x) - g(x')|. \end{aligned}$$

Пусть задано разбиение  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$  отрезка  $[a, b]$ . Тогда

$$\begin{aligned}\omega_i(fg) &= \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x)g(x) - f(x')g(x')| \leq \\ &\leq M_g \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - f(x')| + M_f \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |g(x) - g(x')| = \\ &= M_g \omega_i(f) + M_f \omega_i(g).\end{aligned}$$

Поэтому разность сумм Дарбу функции  $f(x)g(x)$

$$\Delta(fg; T) = \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) \omega_i(fg) \leq M_g \Delta(f; T) + M_f \Delta(g; T).$$

В силу критерия интегрируемости из интегрируемости функций  $f$  и  $g$  следует, что  $\Delta(f; T) \rightarrow 0$ ,  $\Delta(g; T) \rightarrow 0$  при  $\ell(T) \rightarrow 0$ . Следовательно,  $\Delta(fg; T) \rightarrow 0$  при  $\ell(T) \rightarrow 0$ , а значит, функция  $f(x)g(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ .  $\square$

## § 6. Определенный интеграл как функция верхнего предела

**Теорема 1.** (Непрерывность интеграла как функции верхнего предела.) Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана интегрируемая по Риману функция  $f(x)$ . Тогда функция  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  непрерывна на  $[a, b]$ .

**Доказательство.** В силу необходимого условия интегрируемости функция  $f(x)$  ограничена на  $[a, b]$ , т. е.

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, b] \hookrightarrow |f(x)| \leq C.$$

Пусть  $x_1, x_2 \in [a, b]$ . В силу свойства аддитивности интеграла относительно отрезков интегрирования  $F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$ . По теореме об интегрируемости модуля и теореме об интегрировании неравенств

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} C dt \right| = C |x_2 - x_1|.$$

Следовательно,

$$\forall x_0 \in [a, b] \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{C} \forall x \in [a, b] : |x - x_0| < \delta \hookrightarrow |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon,$$

т. е. функция  $F(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ .  $\square$

**Определение.** Функция  $F(x)$  называется *первообразной* функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ , если  $\forall x \in (a, b) \hookrightarrow F'(x) = f(x)$ , а на концах отрезка  $[a, b]$  значения функции  $f$  равны односторонним производным функции  $F$ :  $f(a) = F'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$ ,  $f(b) = F'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{F(x) - F(b)}{x - b}$ .

**Теорема 2.** Если функция  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , то функция  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  является первообразной функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ .

**Доказательство.** Пусть  $x, x_0 \in [a, b]$ ,  $x \neq x_0$ .

Тогда  $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt = (x - x_0) f(x_0) + \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \right|. \end{aligned}$$

В силу непрерывности функции  $f$  на  $[a, b]$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \in [a, b] : |t - x_0| \leq \delta \hookrightarrow |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon,$$

поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [a, b] : |x - x_0| \leq \delta \hookrightarrow \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \right| \leq |x - x_0| \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [a, b] : |x - x_0| \leq \delta \Leftrightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon,$$

то есть  $\forall x_0 \in [a, b] \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$ , где при  $x_0 = a$  имеется в виду предел справа, а при  $x_0 = b$  — предел слева. Это означает, что  $F'_+(a) = f(a)$ ,  $F'_-(b) = f(b)$ ,  $\forall x_0 \in (a, b) \Leftrightarrow F'(x_0) = f(x_0)$ . Таким образом, функция  $F$  является первообразной функции  $f$  на  $[a, b]$ .  $\square$

Из теоремы 2 и теоремы о структуре множества первообразных (теорема 1 § 1 главы 4) получаем

**Следствие 1.** Любая первообразная непрерывной на  $[a, b]$  функции  $f$  имеет вид

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + C,$$

где  $C \in \mathbb{R}$  — произвольная константа.

**Следствие 2.** (Формула Ньютона–Лейбница.) Если  $F$  — первообразная непрерывной на  $[a, b]$  функции  $f$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b \quad \text{по опред.} \quad F(b) - F(a).$$

**Доказательство.** Воспользуемся следствием 1 и заметим, что  $F(a) = \int_a^a f(t) dt + C = C$ ,  $F(b) = \int_a^b f(t) dt + C = \int_a^b f(t) dt + F(a)$ .

Следовательно,  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .  $\square$

**Теорема 3.** (Замена переменной.) Пусть функция  $x = \varphi(t)$  имеет непрерывную производную на отрезке  $[a, b]$ , а функция  $f$  непрерывна на отрезке  $\varphi([a, b])$ . Тогда

$$\int_a^b f(\varphi(t)) d\varphi(t) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

**Доказательство.** Поскольку функция  $f$  непрерывна на  $\varphi([a, b])$ , то по теореме 2 существует первообразная  $F$  для функции

$f: \forall x \in \varphi([a, b]) \hookrightarrow F'(x) = f(x)$ . По формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Поскольку  $\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ , то функция  $F(\varphi(t))$  является первообразной функции  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ . Следовательно, по формуле Ньютона–Лейбница

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(t)) d\varphi(t) &= \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \\ &= \int_a^b dF(\varphi(t)) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

**Теорема 4.** (Интегрирование по частям.) Если функции  $u(x)$  и  $v(x)$  непрерывно дифференцируемы на  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x).$$

**Доказательство.** Пользуясь линейностью интеграла и формулой Ньютона–Лейбница, получаем

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) dv(x) + \int_a^b v(x) du(x) &= \int_a^b (u(x)v'(x) + v(x)u'(x)) dx = \\ &= \int_a^b (u(x)v(x))' dx = u(x)v(x) \Big|_a^b. \quad \square \end{aligned}$$

**Теорема 5.** (Интегральная теорема о среднем.) Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на  $[a, b]$  и  $\forall x \in [a, b] \quad g(x) \neq 0$ , то существует точка  $\xi \in (a, b)$  такая, что

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

**Доказательство.** Поскольку функции  $f$  и  $g$  непрерывны, то по теореме 2 существуют дифференцируемые на  $[a, b]$  функции  $\Phi(x)$  и  $G(x)$ :  $\Phi'(x) = f(x)g(x)$ ,  $G'(x) = g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ .

По теореме Коши о среднем  $\exists \xi \in (a, b)$ :

$$\frac{\Phi(b) - \Phi(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{\Phi'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)} = f(\xi).$$

Так как по формуле Ньютона–Лейбница  $\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ ,  $G(b) - G(a) = \int_a^b g(x)dx$ , то  $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$ . □

## § 7. Формулы Валлиса и Стирлинга

**Теорема 1.** (Формула Валлиса.)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2,$$

где для любого  $k \in \mathbb{N}$  через  $k!!$  обозначается произведение натуральных чисел одинаковой с  $k$  четности и не превосходящих  $k$ ,  $0!! = 1$ .

**Доказательство.** Для любого  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  рассмотрим интеграл

$$I_k = \int_0^{\pi/2} \sin^k x dx. \text{ Заметим, что } I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = 1 \text{ и для любого } k \geq 2$$

$$\begin{aligned} I_k &= - \int_0^{\pi/2} \sin^{k-1} x d \cos x = \\ &= - \sin^{k-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (k-1) \sin^{k-2} x \cos^2 x dx = \\ &= (k-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{k-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (k-1)I_{k-2} - (k-1)I_k. \end{aligned}$$

Следовательно,  $I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2}$ . Поэтому

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n)(2n-2)} I_{2n-4} = \dots = \\
&= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \\
I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \dots = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} I_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.
\end{aligned}$$

Так как

$$\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

то

$$I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}.$$

Поэтому

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Следовательно,

$$\left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \leq \frac{\pi}{2} \leq \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n}.$$

Обозначая  $A_n = \frac{1}{2n+1} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$ , получаем  $A_n \leq \frac{\pi}{2} \leq A_n \frac{2n+1}{2n}$ , то есть

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2n}{2n+1} \leq A_n \leq \frac{\pi}{2}.$$

Так как  $\frac{2n}{2n+1} \rightarrow 1$ , то по теореме о трех последовательностях  $A_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .  $\square$

**Теорема 2.** (Формула Стирлинга.)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n, \quad n \rightarrow \infty,$$

то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}.$$

**Доказательство.** Обозначим  $x_n = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ . Так как

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{ne(n-1)^{n-\frac{1}{2}}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{2}-n} \cdot \frac{1}{e},$$

то

$$\begin{aligned} \ln \frac{x_{n-1}}{x_n} &= \left(\frac{1}{2} - n\right) \ln \frac{n-1}{n} - 1 = \\ &= -n \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) - 1 = \\ &= -n \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 = \\ &= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{12} + \varepsilon_n\right), \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . Поэтому найдется номер  $N$  такой, что  $|\varepsilon_n| < \frac{1}{12}$  для любого  $n \geq N$ . Итак, для любого  $n \geq N$

$$0 < \ln \frac{x_{n-1}}{x_n} < \frac{1}{6n^2}. \quad (1)$$

Первое из неравенств (1) показывает, что  $\frac{x_{n-1}}{x_n} > 1$  для любого  $n \geq N$ , т.е. начиная с номера  $N-1$  последовательность  $\{x_n\}$  убывает. Поскольку  $x_n > 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , то по теореме Вейерштрасса последовательность  $\{x_n\}$  сходится к некоторому числу  $a \geq 0$ .

Далее, используя второе из неравенств (1), получим, что  $a > 0$ . Затем с помощью формулы Валлиса покажем, что  $a = \sqrt{2\pi}$  и тем самым завершим доказательство.

Второе из неравенств (1) дает при  $k \geq N$

$$\ln x_{k-1} - \ln x_k = \ln \frac{x_{k-1}}{x_k} < \frac{1}{6k^2} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Суммируя эти неравенства по  $k$  от  $N$  до  $n$ , получим для любого  $n > N$

$$\ln x_{N-1} - \ln x_n < \frac{1}{N-1} - \frac{1}{n} < \frac{1}{N-1}.$$

Следовательно,  $x_n > C := x_{N-1}e^{-\frac{1}{N-1}} > 0$  при всех  $n > N$ . Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем  $a \geq C > 0$ . Таким образом,

$$x_n = \frac{n! \cdot e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a > 0. \quad (2)$$

Для вычисления значения  $a$  применим формулу Валлиса

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2. \quad (3)$$

Замечая, что  $(2n-1)!! \cdot (2n)!! = (2n)!$ , получаем

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{((2n)!!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}.$$

Из равенства (2) следует, что  $n! = \frac{x_n n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$ . Поэтому

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n} \cdot x_n^2 \cdot n^{2n+1} \cdot e^{2n}}{e^{2n} \cdot x_{2n} \cdot (2n)^{2n+\frac{1}{2}}} = \frac{x_n^2 \cdot n^{\frac{1}{2}}}{x_{2n} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}.$$

Отсюда и из формулы (3) вытекает

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{x_n^4 \cdot n}{x_{2n}^2 \cdot 2} = \frac{a^4}{4a^2} = \frac{a^2}{4}.$$

Поскольку  $a > 0$ , то  $a = \sqrt{2\pi}$ . □

## § 8. Геометрические приложения определенного интеграла

### Площадь криволинейной трапеции

**Теорема 1.** Пусть функция  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема и неотрицательна на  $[a, b]$ . Тогда *криволинейная трапеция*

$$E = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

является измеримым множеством и  $\mu E = \int_a^b f(x) dx$ .

**Доказательство.** Пусть задано произвольное разбиение  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$  отрезка  $[a, b]$ . Рассмотрим клетки

$$q_i = \{(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, 0 \leq y \leq m_i\},$$

$$Q_i = \{(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, 0 \leq y \leq M_i\},$$

где  $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ ,  $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ . Заметим, что клеточные множества  $A_T = \bigcup_{i=1}^I q_i$  и  $B_T = \bigcup_{i=1}^I Q_i$  удовлетворяют включениям  $A_T \subset E \subset B_T$ . Поскольку  $\text{int } q_i \cap \text{int } q_j = \emptyset$  и  $\text{int } Q_i \cap \text{int } Q_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ , то

$$\mu(A_T) = \sum_{i=1}^I \mu(q_i) = \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) m_i = s(f; T),$$

$$\mu(B_T) = \sum_{i=1}^I \mu(Q_i) = \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) M_i = S(f; T).$$

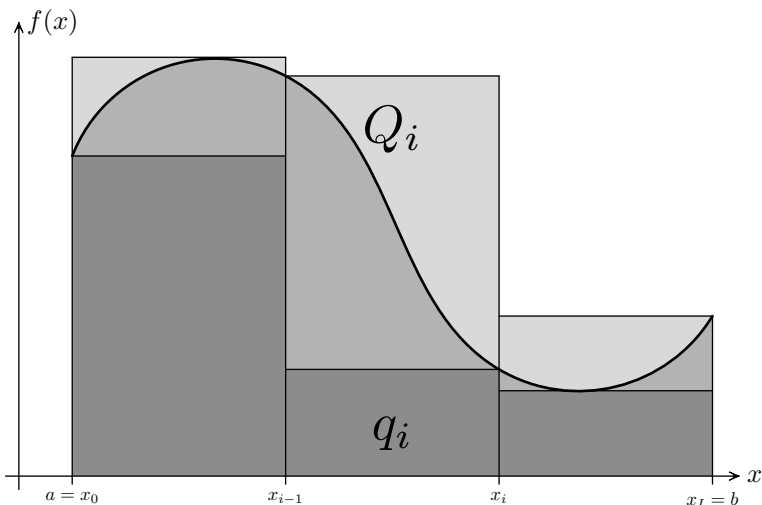
Поскольку  $A_T \subset E \subset B_T$ , то

$$\mu(A_T) = \mu_*(A_T) \leq \mu_*(E) \leq \mu^*(E) \leq \mu^*(B_T) = \mu(B_T).$$

Следовательно,

$$s(f; T) \leq \mu_*(E) \leq \mu^*(E) \leq S(f; T). \quad (1)$$

Обозначим  $J = \int_a^b f(x) dx$ . Так как  $\lim_{\ell(T) \rightarrow 0} s(f; T) = \lim_{\ell(T) \rightarrow 0} S(f; T) = J$ , то, переходя к пределу в неравенствах (1) при  $\ell(T) \rightarrow 0$ , получаем неравенства  $J \leq \mu_*(E) \leq \mu^*(E) \leq J$ . Следовательно,  $\mu_*(E) = \mu^*(E) = J$ .  $\square$



**Лемма 1.** Круг  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$  измерим и имеет меру (площадь)  $\pi r^2$ .

**Доказательство.** Заметим, что полукруг  $C_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0\}$  является криволинейной трапецией:  $C_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}$ . Поэтому согласно теореме 1 полукруг  $C_+$  измерим и  $\mu(C_+) = \int_{-1}^1 \sqrt{r^2 - x^2}$ . Производя замену  $x = r \sin \varphi$ , получаем  $\mu(C_+) = r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi r^2}{2}$ . В силу симметрии нижний полукруг  $C_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2, y \leq 0\}$  имеет ту же меру:  $\mu(C_-) = \frac{\pi r^2}{2}$ . Поскольку эти два полукруга не имеют общих внутренних точек, то  $\mu(C) = \mu(C_- \cup C_+) = \mu(C_-) + \mu(C_+) = \pi r^2$ .  $\square$

### Объем тела вращения

Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана неотрицательная функция  $f(x)$ . Множество

$$G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x) \right\} \quad (2)$$

называется *телом вращения* вокруг оси  $Ox$ .

**Теорема 2.** Пусть функция  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема и неотрицательна на  $[a, b]$ . Тогда тело вращения (2) измеримо и

$$\mu(G) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

**Доказательство.** Пусть задано произвольное разбиение  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$  отрезка  $[a, b]$ . Рассмотрим цилиндры:

$$q_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [x_{i-1}, x_i], \sqrt{y^2 + z^2} \leq m_i\},$$

$$Q_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [x_{i-1}, x_i], \sqrt{y^2 + z^2} \leq M_i\},$$

$$\text{где } m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

В силу теоремы 4 § 1 и леммы 1 § 7 эти цилиндры измеримы и

$$\mu(q_i) = (x_i - x_{i-1}) \pi m_i^2, \quad \mu(Q_i) = (x_i - x_{i-1}) \pi M_i^2.$$

Поскольку  $\text{int } q_i \cap \text{int } q_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ , то мера множества  $A_T = \bigcup_{i=1}^I q_i$  вычисляется по формуле  $\mu(A_T) = \sum_{i=1}^I \mu(q_i)$ . Обозначая  $\varphi(x) = \pi f^2(x)$ , получаем

$$\mu(A_T) = \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) \pi m_i^2 = \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \varphi(x) = s(\varphi; T).$$

Аналогично, для множества  $B_T = \bigcup_{i=1}^I Q_i$

$$\mu(B_T) = S(\varphi; T).$$

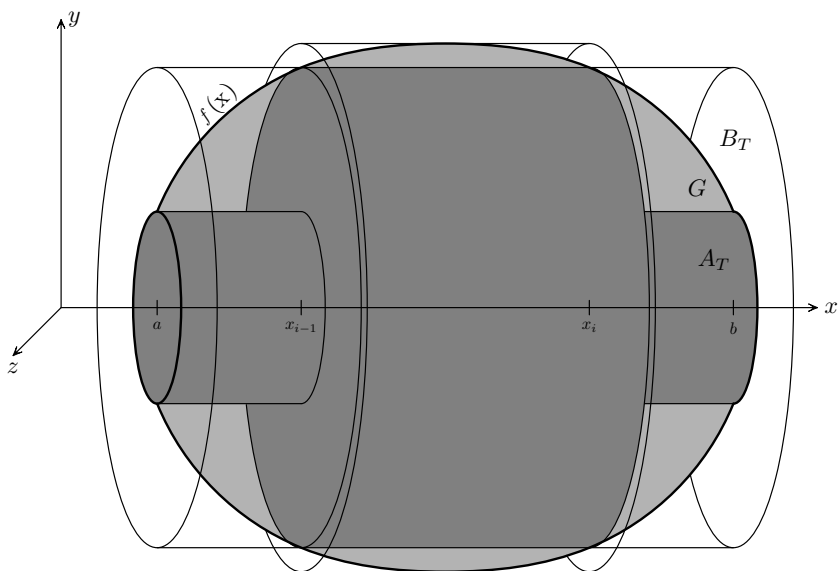
Поскольку  $A_T \subset G \subset B_T$ , то

$$\mu(A_T) = \mu_*(A_T) \leq \mu_*(G) \leq \mu^*(G) \leq \mu^*(B_T) = \mu(B_T).$$

Следовательно,

$$s(\varphi; T) \leq \mu_*(G) \leq \mu^*(G) \leq S(\varphi; T). \quad (3)$$

Обозначим  $J = \int_a^b \varphi(x) dx$ . Так как  $\lim_{\ell(T) \rightarrow 0} s(\varphi; T) = \lim_{\ell(T) \rightarrow 0} S(\varphi; T) = J$ , то, переходя к пределу в неравенствах (3) при  $\ell(T) \rightarrow 0$ , получаем неравенства  $J \leq \mu_*(E) \leq \mu^*(E) \leq J$ . Следовательно,  $\mu_*(E) = \mu^*(E) = J = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ .  $\square$

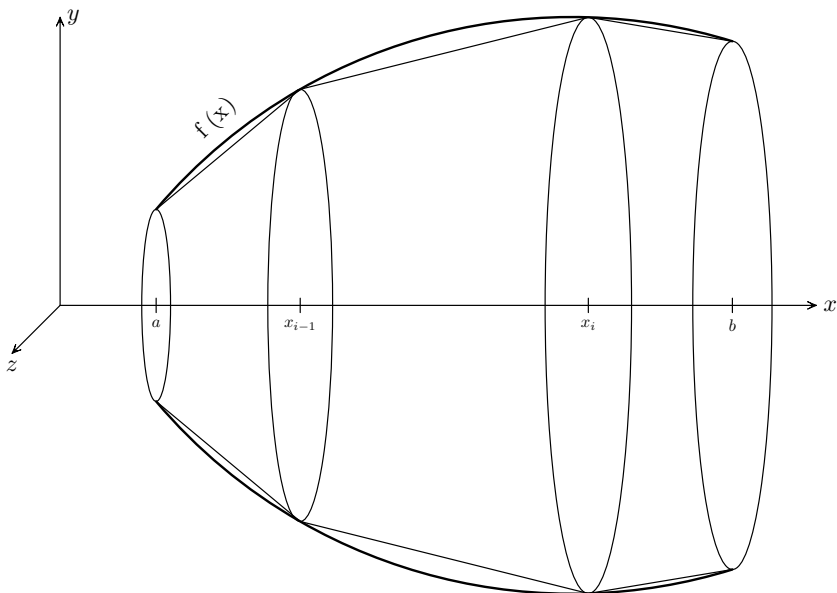


### Площадь поверхности вращения

Пусть на  $[a, b]$  задана неотрицательная функция  $f(x)$ . Множество

$$Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], \sqrt{y^2 + z^2} = f(x) \right\}$$

называется *поверхностью вращения* графика функции  $f$  вокруг оси  $Ox$ .



Обозначим через  $\Gamma$  кривую, совпадающую с графиком функции  $f$ :  $\Gamma = \{\bar{r}(x) : x \in [a, b]\}$ , где  $\bar{r}(x) = (x, f(x), 0)$ .

Пусть  $\mathcal{P}_T$  – ломаная, вписанная в кривую  $\Gamma$  и соответствующая разбиению  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$  отрезка  $[a, b]$ . Через  $Q_T$  обозначим поверхность, полученную вращением ломаной  $\mathcal{P}_T$  вокруг оси  $Ox$ . Поверхность  $Q_T$  состоит из  $I$  боковых поверхностей усеченных конусов  $q_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [x_{i-1}, x_i], \sqrt{y^2 + z^2} = f_i(x)\}$ , где функция  $f_i(x)$  задает  $i$ -й отрезок ломаной  $\mathcal{P}_T$ .

Как известно из элементарной геометрии, площадь боковой поверхности усеченного конуса  $q_i$  равна  $S(q_i) = \frac{b_i(\ell_{i-1} + \ell_i)}{2}$ , где  $b_i$  – длина  $i$ -го звена ломаной  $\mathcal{P}_T$ , являющегося образующей усеченного конуса  $q_i$ , а  $\ell_{i-1}, \ell_i$  – длины окружностей оснований усеченного конуса  $q_i$ . Поскольку  $\ell_i = 2\pi f(x_i)$ ,  $b_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$ , то площадь поверхности усеченного конуса  $q_i$  равна

$$S(q_i) = \pi \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} (f(x_{i-1}) + f(x_i)).$$

Следовательно, площадь поверхности  $Q_T$ , полученной вращением ломаной  $\mathcal{P}_T$  вокруг оси  $Ox$ , равна

$$S(Q_T) = \sum_{i=1}^I S(q_i) =$$

$$= \pi \sum_{i=1}^I \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} (f(x_{i-1}) + f(x_i)).$$

**Определение.** Число  $S$  называется *площадью* поверхности вращения  $Q$ , если  $S = \lim_{\ell(T) \rightarrow 0} S(Q_T)$ .

**Теорема 2.** Пусть на  $[a, b]$  задана неотрицательная, непрерывно дифференцируемая функция  $f(x)$ . Тогда площадь поверхности вращения  $Q$  существует и равна

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

**Доказательство.** Пусть задано разбиение  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$  отрезка  $[a, b]$ . По теореме Лагранжа о среднем  $\exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ :  $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ . Следовательно,

$$S(q_i) = \pi \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) =$$

$$= \pi (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} (f(x_{i-1}) + f(x_i)). \quad (4)$$

Поскольку производная  $f'(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то она ограничена на  $[a, b]$ :  $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, b] \quad |f'(x)| \leq C$ . Следовательно,  $\forall x', x'' \in [a, b] \quad |f(x') - f(x'')| \leq C |x' - x''|$ . В частности,

$$|f(x_i) - f(\xi_i)| \leq C |x_i - \xi_i| \leq C \ell(T),$$

$$|f(x_{i-1}) - f(\xi_i)| \leq C |x_{i-1} - \xi_i| \leq C \ell(T),$$

следовательно,

$$|f(x_{i-1}) + f(x_i) - 2f(\xi_i)| \leq$$

$$\leq |f(x_{i-1}) - f(\xi_i)| + |f(x_i) - f(\xi_i)| \leq 2C \ell(T). \quad (5)$$

Рассмотрим функцию  $\varphi(x) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ . Из формул (4), (5) следует, что

$$|S(q_i) - (x_i - x_{i-1}) \varphi(\xi_i)| = \left| \pi (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \times \right. \\ \left. \times (f(x_{i-1}) + f(x_i) - 2f(\xi_i)) \right| \leq \pi (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + C^2} \, 2C\ell(T).$$

Из точек  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  составим выборку  $\xi_T = \{\xi_i\}_{i=1}^I$ . Из предыдущего неравенства получаем следующую оценку близости площади поверхности  $Q_T$  и суммы Римана  $\sigma(\varphi; T; \xi_T) = \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) \varphi(\xi_i)$ :

$$|S(Q_T) - \sigma(\varphi; T; \xi_T)| = \sum_{i=1}^I |S(q_i) - (x_i - x_{i-1}) \varphi(\xi_i)| \leq \\ \leq 2\pi \sqrt{1 + C^2} \, C \ell(T) \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) = 2\pi \sqrt{1 + C^2} \, C \ell(T) (b - a),$$

следовательно,

$$S(Q_T) - \sigma(\varphi; T; \xi_T) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \ell(T) \rightarrow 0. \quad (6)$$

Поскольку функция  $\varphi(x)$  непрерывна, то она интегрируема на  $[a, b]$ , и, следовательно, существует  $\lim_{\ell(T) \rightarrow 0} \sigma(\varphi; T; \xi_T) = \int_a^b \varphi(x) dx$ .

Отсюда и из (6) получаем, что существует  $\lim_{\ell(T) \rightarrow 0} S(Q_T) = \int_a^b \varphi(x) dx$ , т. е. существует площадь поверхности  $Q$ :

$$S(Q) = \int_a^b \varphi(x) dx = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad \square$$

### Длина дуги

Пусть кривая  $\Gamma$  задана непрерывной вектор-функцией  $\bar{r}(t)$ :  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\}$ . Напомним, что ломаной  $\mathcal{P}_T$ , вписанной в кривую  $\Gamma$  и соответствующей разбиению  $T = \{t_i\}_{i=0}^I$ , называется упорядоченный набор отрезков

$$\mathcal{P}_T = \{[\bar{r}(t_0), \bar{r}(t_1)], \dots, [\bar{r}(t_{I-1}), \bar{r}(t_I)]\}.$$

Длина ломаной  $\mathcal{P}_T$  равна  $|\mathcal{P}_T| = \sum_{i=1}^I |\bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})|$ , а длиной кривой  $\Gamma$  называется  $|\Gamma| = \sup_T |\mathcal{P}_T|$  – супремум длин ломаных по всем разбиениям  $T$  отрезка  $[a, b]$ .

**Теорема 3.** Если кривая  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\}$  задана непрерывно дифференцируемой вектор-функцией  $\bar{r}(t)$  (т.е. производная  $\bar{r}'(t)$  непрерывна на  $[a, b]$ ), то

$$|\Gamma| = \int_a^b |\bar{r}'(t)| dt.$$

**Доказательство.** Рассмотрим переменную длину дуги  $s(t) = |\Gamma_t|$ , где  $\Gamma_t = \{\bar{r}(\xi) : \xi \in [a, t]\}$ . Как было показано в главе 5,  $s'(t) = |\bar{r}'(t)| \quad \forall t \in [a, b]$ . Следовательно, по формуле Ньютона–Лейбница  $|\Gamma| = s(b) = s(b) - s(a) = \int_a^b s'(t) dt = \int_a^b |\bar{r}'(t)| dt. \quad \square$

## § 9. Криволинейные интегралы

**Определение.** Будем говорить, что вектор-функция  $\bar{r}(t)$  имеет кусочно-непрерывную производную на отрезке  $[a, b]$ , если производная этой вектор-функции существует и непрерывна во всех точках отрезка  $[a, b]$  за исключением конечного числа точек, в которых  $\bar{r}'(t)$  имеет конечные односторонние пределы.

**Определение.** Пусть кривая  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n$  задана непрерывной вектор-функцией  $\bar{r}(t)$ , имеющей на  $[a, b]$  кусочно-непрерывную производную. Пусть на множестве  $\Gamma$  задана непрерывная скалярная функция  $f(\bar{r})$ . Криволинейным интегралом первого рода функции  $f(\bar{r})$  по кривой  $\Gamma$  называется определенный интеграл функции  $\varphi(t) = f(\bar{r}(t))|\bar{r}'(t)|$  по отрезку  $[a, b]$ :

$$\int_{\Gamma} f(\bar{r}) ds = \int_a^b f(\bar{r}(t)) |\bar{r}'(t)| dt. \quad (1)$$

**Замечание.** Так как функция  $\varphi(t) = f(\bar{r}(t))|\bar{r}'(t)|$  кусочно-непрерывна на  $[a, b]$ , то интеграл (1) существует.

**Замечание.** Если кривая  $\Gamma$  задана в натуральной параметризации  $\bar{r}(s)$ , то  $|\bar{r}'(s)| = 1$ , и формула (1) принимает более простой вид:

$$\int_{\Gamma} f(\bar{r}) ds = \int_0^{|\Gamma|} f(\bar{r}(s)) ds.$$

**Теорема 1.** Криволинейный интеграл первого рода не зависит от параметризации.

Точнее. Пусть вектор-функции  $\bar{r}(t)$  и  $\bar{\varrho}(\tau)$  непрерывны и имеют кусочно-непрерывные производные на отрезках  $[t_1, t_2]$  и  $[\tau_1, \tau_2]$  соответственно. Пусть эти вектор-функции задают одну и ту же кривую

$$\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [t_1, t_2]\} = \{\bar{\varrho}(\tau) : \tau \in [\tau_1, \tau_2]\},$$

т. е. существует функция  $\tau(t)$ , непрерывная и строго возрастающая на  $[t_1, t_2]$  и такая, что  $\tau(t_1) = \tau_1$ ,  $\tau(t_2) = \tau_2$  и  $\bar{r}(t) = \bar{\varrho}(\tau(t)) \quad \forall t \in [t_1, t_2]$ . Будем дополнительно предполагать, что функция  $\tau(t)$  непрерывно дифференцируема на  $[t_1, t_2]$ . Пусть на множестве  $\Gamma$  задана непрерывная функция  $f(\bar{r})$ . Тогда криволинейный интеграл  $\int_{\Gamma} f(\bar{r}) ds$ , вычисленный с помощью параметризации  $\bar{r}(t)$ , совпадает с криволинейным интегралом  $\int_{\Gamma} f(\bar{r}) ds$ , вычисленным с помощью параметризации  $\bar{\varrho}(\tau)$ , т. е.

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\bar{r}(t)) |\bar{r}'(t)| dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\bar{\varrho}(\tau)) |\bar{\varrho}'(\tau)| d\tau.$$

**Доказательство.** По теореме о производной сложной функции  $\bar{r}'(t) = \bar{\varrho}'(\tau(t)) \cdot \tau'(t)$ . Отсюда в силу неравенства  $\tau'(t) \geq 0$  получаем  $|\bar{r}'(t)| = |\bar{\varrho}'(\tau(t))| \cdot \tau'(t)$ . Поэтому, согласно теореме о замене переменных в определенном интеграле,

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\bar{\varrho}(\tau)) |\bar{\varrho}'(\tau)| d\tau =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} f(\bar{\varrho}(\tau(t))) |\bar{\varrho}'(\tau(t))| \tau'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} f(\bar{r}(t)) |\bar{r}'(t)| dt. \quad \square$$

**Лемма 1.** При изменении ориентации кривой криволинейный интеграл первого рода не изменяется.

**Доказательство.** Пусть кривая  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\}$  задана непрерывной вектор-функцией  $\bar{r}(t)$ , имеющей кусочно-непрерывную производную. Введем параметр  $\tau = -t$ . Тогда вектор-функция  $\bar{\varrho}(\tau) = \bar{r}(-\tau)$  задает кривую  $\Gamma^- = \{\bar{\varrho}(\tau) : \tau \in [-b, -a]\}$ , полученную из кривой  $\Gamma$  изменением ориентации. Действительно, если точка  $\bar{r}_1 \in \Gamma$  следует за точкой  $\bar{r}_2 \in \Gamma$  в смысле ориентации кривой  $\Gamma$ , то  $\bar{r}_1 = \bar{r}(t_1)$ ,  $\bar{r}_2 = \bar{r}(t_2)$ ,  $t_1 > t_2$ . Поэтому  $\bar{r}_1 = \bar{\varrho}(-t_1)$ ,  $\bar{r}_2 = \bar{\varrho}(-t_2)$ ,  $-t_1 < -t_2$ , т. е. точка  $\bar{r}_1$  предшествует точке  $\bar{r}_2$  в смысле ориентации кривой  $\Gamma^-$ .

Остается показать, что криволинейные интегралы первого рода непрерывной функции  $f(\bar{r})$  по кривым  $\Gamma$  и  $\Gamma^-$  совпадают. Производя замену переменной в определенном интеграле, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^-} f(\bar{r}) ds &= \int_{-b}^{-a} f(\bar{\varrho}(\tau)) |\bar{\varrho}'(\tau)| d\tau \stackrel{t=-\tau}{=} \\ &= \int_b^a f(\bar{\varrho}(-t)) |\bar{\varrho}'(-t)| (-dt) = \int_a^b f(\bar{r}(t)) |\bar{r}'(t)| dt = \int_{\Gamma} f(\bar{r}) ds. \quad \square \end{aligned}$$

**Замечание.** (Физическая интерпретация криволинейного интеграла первого рода.) Если  $f(\bar{r}) = 1 \quad \forall \bar{r} \in \Gamma$ , то криволинейный интеграл  $\int_{\Gamma} f(\bar{r}) ds$  равен длине кривой  $\Gamma$ . Если  $f(\bar{r}) \geq 0$ , то криволинейный интеграл первого рода можно интерпретировать как массу кривой  $\Gamma$  с линейной плотностью  $f(\bar{r})$ .

**Определение.** Пусть кривая  $\Gamma = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n$  задана непрерывной вектор-функцией  $\bar{r}(t)$ , имеющей на  $[a, b]$  кусочно-непрерывную производную. Пусть на множестве  $\Gamma$  задана непрерывная  $n$ -мерная вектор-функция  $\bar{F}(\bar{r})$ . Криволинейным интегралом второго рода вектор-функции  $\bar{F}$  по кривой  $\Gamma$  называется определенный интеграл функции  $\varphi(t) = (\bar{F}(\bar{r}(t)), \bar{r}'(t))$  по отрезку  $[a, b]$ :

$$\int_{\Gamma} \left( \overline{F}(\bar{r}), d\bar{r} \right) = \int_a^b \left( \overline{F}(\bar{r}(t)), \bar{r}'(t) \right) dt. \quad (2)$$

**Замечание.** Так как функция  $\varphi(t) = \left( \overline{F}(\bar{r}(t)), \bar{r}'(t) \right)$  кусочно-непрерывна на  $[a, b]$ , то интеграл (2) существует.

**Теорема 2.** Криволинейный интеграл второго рода не зависит от параметризации.

**Доказательство** аналогично доказательству теоремы 1, поэтому приведем его в сокращенном виде. Пусть кривая  $\Gamma$  задана в двух параметризациях:

$$\Gamma = \{ \bar{r}(t) : t \in [t_1, t_2] \} = \{ \bar{\varrho}(\tau) : \tau \in [\tau_1, \tau_2] \}.$$

Делая замену переменной в определенном интеграле, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( \overline{F}(\bar{\varrho}(\tau)), \bar{\varrho}'(\tau) \right) d\tau &= \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \overline{F}(\bar{\varrho}(\tau(t))), \bar{\varrho}'(\tau(t)) \right) \tau'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \overline{F}(\bar{r}(t)), \bar{r}'(t) \right) dt. \quad \square \end{aligned}$$

**Лемма 2.** При изменении ориентации кривой криволинейный интеграл второго рода меняет знак.

**Доказательство.** Пусть кривая  $\Gamma = \{ \bar{r}(t) : t \in [a, b] \}$  задана непрерывной вектор-функцией  $\bar{r}(t)$ , имеющей кусочно-непрерывную производную. Изменив ориентацию кривой  $\Gamma$ , получаем кривую  $\Gamma^- = \{ \bar{\varrho}(\tau) : \tau \in [-b, -a] \}$ , заданную вектор-функцией  $\bar{\varrho}(\tau) = \bar{r}(-\tau)$ . В силу теоремы о замене переменных в определенном интеграле имеем

$$\int_{\Gamma^-} \left( \overline{F}(\bar{r}), d\bar{r} \right) = \int_{-b}^{-a} \left( \overline{F}(\bar{\varrho}(\tau)), \bar{\varrho}'(\tau) \right) d\tau \stackrel{t=-\tau}{=} \int_{t=b}^a \left( \overline{F}(\bar{r}(t)), \bar{r}'(t) \right) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_b^a \left( \bar{F}(\bar{r}(t)), -\bar{r}'(t) \right) (-dt) = \int_b^a \left( \bar{F}(\bar{r}(t)), \bar{r}'(t) \right) dt = \\
&= - \int_a^b \left( \bar{F}(\bar{r}(t)), \bar{r}'(t) \right) dt = - \int_{\Gamma} \left( \bar{F}(\bar{r}), d\bar{r} \right). \quad \square
\end{aligned}$$

**Замечание.** В частности, если кривая  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  задана вектор-функцией  $\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , а подынтегральная вектор-функция имеет вид  $\bar{F}(\bar{r}) = \bar{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ , то криволинейный интеграл второго рода записывают в виде

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\
&= \int_a^b \left( P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + \right. \\
&\quad \left. + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \right) dt.
\end{aligned}$$

**Замечание.** (Физическая интерпретация интеграла второго рода.) Пусть заданы кусочно-гладкая кривая  $\Gamma = \{\bar{r}(t) \in \mathbb{R}^3 : t \in [a, b]\}$ , непрерывная вектор-функция  $\bar{F} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$  и разбиение  $T = \{t_i\}_{i=0}^I$  отрезка  $[a, b]$  с мелкостью  $\ell(T)$ . Заметим, что

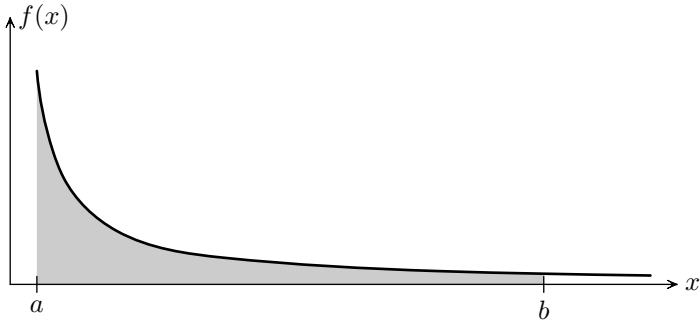
$$\begin{aligned}
&\lim_{\ell(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^I \left( \bar{F}(\bar{r}(t_i)), \bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1}) \right) = \\
&= \lim_{\ell(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^I \left( \bar{F}(\bar{r}(t_i)), \bar{r}'(t_i) \right) (t_i - t_{i-1}) = \\
&= \int_a^b \left( \bar{F}(\bar{r}(t)), \bar{r}'(t) \right) dt = \int_{\Gamma} \left( \bar{F}(\bar{r}), d\bar{r} \right).
\end{aligned}$$

Поскольку скалярное произведение  $\left(\overline{F}(\bar{r}(t_i)), \bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1})\right)$  равно работе силы  $\overline{F}(\bar{r}(t_i))$  вдоль отрезка  $[\bar{r}(t_{i-1}), \bar{r}(t_i)]$ , то криволинейный интеграл  $\int_{\Gamma} \left(\overline{F}(\bar{r}), d\bar{r}\right)$  можно интерпретировать как работу силы  $\overline{F}(\bar{r})$  вдоль кривой  $\Gamma$ .

# НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## § 1. Определение и некоторые свойства несобственного интеграла

**Определение.** Пусть функция  $f(x)$  определена на луче  $[a, +\infty)$  и для любого числа  $b > a$  функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ . Несобственным интегралом  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  называется  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ .



Если существует конечный  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ , то говорят, что несобственный интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  *сходится*, иначе – *расходится*.

Определенный интеграл Римана, который мы изучали до сих пор, будем называть *собственным* интегралом.

Аналогично определяется несобственный интеграл  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  для функции  $f(x)$ , интегрируемой в собственном смысле на любом отрезке из луча  $(-\infty, b]$ :

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

**Пример 1.** Найти все значения  $\alpha$ , при которых интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  сходится.

**Решение.** При  $\alpha \neq 1$  имеем  $\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1 \right)$ .  
Поэтому  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{при } \alpha < 1 \end{cases}$ .

При  $\alpha = 1$  получаем  $\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \ln b \rightarrow +\infty \quad (b \rightarrow +\infty)$ . Следовательно, при  $\alpha > 1$  интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  сходится, а при  $\alpha \leq 1$  – расходится.  $\square$

**Определение.** Пусть функция  $f(x)$  определена на полуинтервале  $[a, b)$  и интегрируема в собственном смысле на любом отрезке  $[a, b'] \subset [a, b)$ . Несобственным интегралом  $\int_a^b f(x) dx$  называется  $\lim_{b' \rightarrow b-0} \int_a^{b'} f(x) dx$ .

Аналогично определяется несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  для функции  $f(x)$ , интегрируемой в собственном смысле на любом отрезке  $[a', b] \subset (a, b]$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{a' \rightarrow a+0} \int_{a'}^b f(x) dx.$$

**Лемма 1.** Если существует собственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ , то несобственные интегралы  $\lim_{b' \rightarrow b-0} \int_a^{b'} f(x) dx$  и  $\lim_{a' \rightarrow a+0} \int_{a'}^b f(x) dx$  существуют и равны собственному интегралу.

**Доказательство.** Поскольку функция  $f$  интегрируема в собственном смысле на  $[a, b]$ , то она ограничена, т.е.  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, b] \hookrightarrow |f(x)| \leq M$ . Поэтому  $\left| \int_{b'}^b f(x) dx \right| \leq M |b - b'| \rightarrow 0$  при  $b' \rightarrow b - 0$ .

Следовательно,  $\lim_{b' \rightarrow b-0} \int_a^{b'} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \lim_{b' \rightarrow b-0} \int_{b'}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ . Аналогично,  $\lim_{a' \rightarrow a+0} \int_{a'}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ .  $\square$

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(x)$  определена и ограничена на отрезке  $[a, b]$ , а на любом отрезке  $[a, b'] \subset [a, b)$  функция  $f(x)$  интегрируема. Тогда существует собственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ .

**Доказательство.** Поскольку функция  $f$  ограничена на  $[a, b]$ , то  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, b] \hookrightarrow |f(x)| \leq M$ . Зафиксируем произвольное число  $\varepsilon > 0$  и определим  $b' \in [a, b)$  так, чтобы  $b - b' < \frac{\varepsilon}{8M}$ . Любому разбиению  $T = \{x_i\}_{i=0}^I$  отрезка  $[a, b]$  сопоставим разбиение  $T'$  отрезка  $[a, b']$ , составленное из точек разбиения  $T$ , попавших на отрезок  $[a, b']$  и точки  $b'$ :  $T' = \{x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, b'\}$ , где  $j$  определено из условия  $x_{j-1} < b' \leq x_j$ .

Разобьем разность сумм Дарбу  $\Delta(f; T)$  на два слагаемых:

$$\Delta(f; T) = \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) \omega_i(f) = \Delta_{[a, x_{j-1}]} + \Delta_{[x_{j-1}, b]},$$

где

$$\Delta_{[a, x_{j-1}]} = \sum_{i=1}^{j-1} (x_i - x_{i-1}) \omega_i(f), \quad \Delta_{[x_{j-1}, b]} = \sum_{i=j}^I (x_i - x_{i-1}) \omega_i(f).$$

Заметим, что  $\Delta_{[a, x_{j-1}]} \leq \Delta(f; T')$ . Кроме того, поскольку  $\omega_i(f) \leq 2M$ , то  $\Delta_{[x_{j-1}, b]} \leq 2M(b - x_{j-1}) = 2M(b - b' + b' - x_{j-1}) \leq 2M(b - b' + \ell(T)) < 2M(\frac{\varepsilon}{8M} + \ell(T)) = \frac{\varepsilon}{4} + 2M\ell(T)$ . Следовательно,

$$\Delta(f; T) \leq \Delta(f; T') + \frac{\varepsilon}{4} + 2M\ell(T).$$

Поскольку функция  $f$  интегрируема на  $[a, b']$ , то в силу критерия интегрируемости

$$\exists \delta_0 > 0 \forall T' : \ell(T') \leq \delta_0 \hookrightarrow \Delta(f; T') \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Определив  $\delta = \min\{\delta_0, \frac{\varepsilon}{8M}\}$ , получаем, что для любого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  такого, что  $\ell(T) \leq \delta$ , выполняется  $\ell(T') \leq \ell(T) \leq \delta \leq \delta_0$ , следовательно,  $\Delta(f; T') \leq \frac{\varepsilon}{4}$ . Поэтому

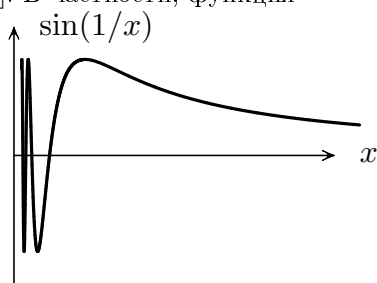
$$\Delta(f; T) \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 2M \ell(T) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \frac{\varepsilon}{8M} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Итак,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall T : \ell(T) \leq \delta \hookrightarrow \Delta(f; T) \leq \varepsilon$ . Отсюда по критерию интегрируемости получаем существование  $\int_a^b f(x) dx$  в собственном смысле.  $\square$

**Замечание.** Аналогично можно доказать, что если ограниченная на  $(a, b]$  функция интегрируема на любом отрезке  $[a', b] \subset (a, b]$ , то эта функция интегрируема на  $[a, b]$ . В частности, функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

интегрируема (в собственном смысле) на  $[0, 1]$ .



**Следствие.** Если функция  $f$  ограничена на отрезке  $[a, b]$  и непрерывна на этом отрезке за исключением конечного числа точек, то функция  $f$  интегрируема на  $[a, b]$ . Это следует из свойства аддитивности интеграла по отрезкам интегрирования, а также из теоремы 1 и интегрируемости непрерывной на отрезке функции. Заметим, что при этом функция  $f$  в некоторых точках разрыва может не иметь предела, а значит, не быть кусочно-непрерывной.

**Определение.** Точка  $a$  называется *особой точкой* несобственного интеграла  $\int_b^c f(x) dx$ , если  $b \leq a \leq c$  и функция  $f$  неограничена в любой окрестности точки  $a$ . Для несобственных интегралов  $\int_{-\infty}^c f(x) dx$ ,  $\int_b^{+\infty} f(x) dx$  символы  $\pm\infty$  всегда считаются особыми точками.

**Следствие.** Из леммы 1 и теоремы 1 следует, что несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  без особых точек всегда сходится. Более того, в этом случае существует собственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ , равный несобственному. Поэтому не имеет смысла рассматривать несобственные интегралы без особых точек.

**Пример 2.** Найти все значения  $\alpha$ , при которых интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$  сходится.

**Решение.** При  $\alpha \leq 0$  функция  $\frac{1}{x^\alpha}$  ограничена на  $(0, 1)$ , и, следовательно, данный интеграл не имеет особенностей. При  $\alpha > 0$  данный интеграл имеет особенность в точке  $x = 0$ , поэтому  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +0} \int_b^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ .

При  $\alpha \neq 1$ ,  $b \in (0, 1)$  имеем  $\int_b^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \Big|_b^1 = \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \frac{1}{b^{\alpha-1}}\right)$ .

Поэтому  $\lim_{b \rightarrow +0} \int_b^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{при } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{при } \alpha < 1 \end{cases}$ .

При  $\alpha = 1$   $\int_b^1 \frac{dx}{x^\alpha} = -\ln b \rightarrow +\infty$  ( $b \rightarrow +0$ ). Следовательно, при  $\alpha < 1$  интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$  сходится, а при  $\alpha \geq 1$  — расходится.  $\square$

**Лемма 2.** (Принцип локализации.) Пусть заданы  $a, a_1 \in \mathbb{R}$  и  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,  $a < a_1 < b$ . Пусть на промежутке  $[a, b)$  определена функция  $f(x)$ , интегрируемая в собственном смысле на любом отрезке  $[a, b'] \subset [a, b)$ . Тогда несобственные интегралы  $\int_a^b f(x) dx$  и  $\int_{a_1}^b f(x) dx$  сходятся или расходятся одновременно, а в случае их сходимости справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^b f(x) dx. \quad (1)$$

**Доказательство.** Поскольку при  $b' \in [a, b)$  имеет место  $\int_a^{b'} f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{b'} f(x) dx$ , то конечные пределы  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{b' \rightarrow b-0} \int_a^{b'} f(x) dx$  и  $\int_{a_1}^b f(x) dx = \lim_{b' \rightarrow b-0} \int_{a_1}^{b'} f(x) dx$  существуют или не существуют одновременно, и в случае их существования справедлива формула (1).  $\square$

**Замечание.** Принцип локализации состоит в том, что сходимость несобственного интеграла определяется поведением подынтегральной функции лишь в окрестности особой точки. В лемме 2 сформулирован принцип локализации для несобственного интеграла с особенностью на правом конце промежутка интегрирования. Аналогичное утверждение справедливо и для несобственного интеграла с особенностью на левом конце промежутка интегрирования.

До сих пор мы рассматривали несобственные интегралы с одной особенностью. Дадим теперь определение несобственного интеграла с конечным числом особенностей.

**Определение.** Пусть на конечном или бесконечном промежутке  $(a, b)$  задана функция  $f(x)$ , за исключением точек  $x_i$  ( $i = 0, \dots, I$ ):  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_I = b$ . Пусть функция  $f$  интегрируема в собственном смысле на любом отрезке  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ , не содержащем точек  $x_i$ . Выберем произвольным образом точки  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$  ( $i = 1, \dots, I$ ). Будем говорить, что несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  *сходится*, если все несобственные интегралы с одной особенностью  $\int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x) dx$  и  $\int_{\xi_i}^{x_i} f(x) dx$  сходятся. В противном случае будем говорить, что интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  *расходится*. Если интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится, то его значение определим как сумму несобственных интегралов с одной особенностью:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^I \left( \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x) dx + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x) dx \right).$$

Из леммы 2 следует, что сходимость и значение интеграла  $\int_a^b f(x) dx$  не зависит от выбора точек  $\xi_i$ .

В дальнейшем мы будем рассматривать интегралы с особенностью на правом конце промежутка интегрирования. Интегралы с особенностью на левом конце промежутка интегрирования рассматриваются аналогично. Интегралы с конечным числом особенностей сводятся к конечному числу интегралов с одной особенностью.

**Теорема 2.** (Линейность несобственного интеграла.) Если функции  $f$  и  $g$  интегрируемы в собственном смысле на любом отрезке из промежутка  $[a, b)$  и несобственные интегралы  $\int_a^b f(x) dx$ ,  $\int_a^b g(x) dx$  сходятся, то для любых чисел  $\alpha, \beta$  несобственный интеграл  $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx$  сходится и равен  $\alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$ .

**Доказательство.** В силу линейности собственного интеграла для любого  $b' \in [a, b)$  справедлива формула

$$\int_a^{b'} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^{b'} f(x) dx + \beta \int_a^{b'} g(x) dx.$$

Поскольку при  $b' \rightarrow b - 0$  существует конечный предел выражения, стоящего в правой части равенства, то, переходя к пределу при  $b' \rightarrow b - 0$ , получаем требуемое утверждение.  $\square$

**Следствие.** Если интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  расходится, а интеграл  $\int_a^b g(x) dx$  сходится, то интеграл  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx$  расходится.

**Доказательство.** Если бы интеграл  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx$  сходил, то

то поскольку  $f(x) = (f(x) + g(x)) - g(x)$  по теореме 2 мы бы получили сходимость интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ , что не выполняется по условию. Следовательно, интеграл  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx$  расходится.  $\square$

**Замечание.** Если интегралы  $\int_a^b f(x) dx$  и  $\int_a^b g(x) dx$  расходятся, то интеграл  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx$  может быть как сходящимся, так и расходящимся.

**Теорема 3.** (Замена переменной.) Пусть непрерывно дифференцируемая, строго возрастающая функция  $x(t)$  переводит промежуток  $[t_0, \beta)$  в промежуток  $[x_0, b)$ . Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на промежутке  $[x_0, b)$ . Тогда справедлива формула

$$\int_{x_0}^b f(x) dx = \int_{t_0}^{\beta} f(x(t)) x'(t) dt, \quad (2)$$

означающая, что если хотя бы один из указанных интегралов сходится, то другой интеграл сходится и их значения равны.

**Доказательство.** По теореме об одностороннем пределе возрастающей функции

$$\lim_{t \rightarrow \beta-0} x(t) = \sup_{t \in (t_0, \beta)} x(t) = \sup [x_0, b) = b.$$

Поскольку функция  $x(t)$  непрерывна и строго возрастает, то существует обратная к ней непрерывная строго возрастающая функция  $t(x)$ , причем

$$\lim_{x \rightarrow b-0} t(x) = \sup_{x \in (x_0, b)} t(x) = \sup [t_0, \beta) = \beta.$$

В силу теоремы о замене переменной в собственном интеграле

$$\int_{x_0}^{b'} f(x) dx = \int_{t_0}^{\beta'} f(x(t)) x'(t) dt,$$

где  $b' = x(\beta') \in (x_0, b)$ ,  $\beta' = t(b') \in (t_0, \beta)$ .

Если интеграл  $\int_{x_0}^b f(x) dx$  сходится, то

$$\begin{aligned} \lim_{\beta' \rightarrow \beta - 0} \int_{t_0}^{\beta'} f(x(t)) x'(t) dt &= \lim_{\beta' \rightarrow \beta - 0} \int_{x_0}^{x(\beta')} f(x) dx = \\ &= \lim_{b' \rightarrow b - 0} \int_{x_0}^{b'} f(x) dx = \int_{x_0}^b f(x) dx, \end{aligned}$$

т. е. несобственный интеграл  $\int_{t_0}^{\beta} f(x(t)) x'(t) dt$  сходится и выполняется формула (2). Аналогично, если несобственный интеграл  $\int_{t_0}^{\beta} f(x(t)) x'(t) dt$  сходится, то сходится несобственный интеграл  $\int_{x_0}^b f(x) dx$  и справедлива формула (2).  $\square$

**Пример 3.** Найти все значения  $\alpha$ , при которых интеграл  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x}$  сходится.

**Решение.** Выполнив замену переменной  $x = e^t$ , получаем  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ . Пользуясь результатами примера 1, получаем, что исходный интеграл сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .  $\square$

## § 2. Несобственные интегралы от знакопостоянных функций

В этом параграфе будем рассматривать интегралы от функций, принимающих лишь неотрицательные значения. Если функция  $f(x)$  принимает лишь неположительные значения, то для исследования сходимости интеграла от функции  $f(x)$  достаточно исследовать сходимость интеграла от функции  $-f(x)$ , которая принимает лишь неотрицательные значения.

**Теорема 1.** (Критерий сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции.) Пусть функция  $f$  интегрируема в собственном смысле на любом отрезке из промежутка  $[a, b)$  и  $f(x) \geq 0$   $\forall x \in [a, b)$ . Тогда сходимость интеграла  $\int_a^b f(x) dx$  эквивалентна условию  $\sup_{b' \in [a, b)} \int_a^{b'} f(x) dx < +\infty$ .

**Доказательство.** Поскольку  $f(x) \geq 0$ , то функция  $F(b') = \int_a^{b'} f(x) dx$  нестрого возрастает на  $[a, b)$ . По теореме об одностороннем пределе монотонной функции существует конечный или бесконечный предел  $\lim_{b' \rightarrow b-0} F(b') = \sup_{b' \in [a, b)} F(b')$ . Несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится, тогда и только тогда, когда существует конечный предел  $\lim_{b' \rightarrow b-0} F(b')$ , т. е. когда  $\sup_{b' \in [a, b)} F(b') < +\infty$ .  $\square$

**Теорема 2.** (Первый признак сравнения.) Пусть функции  $f$  и  $g$  интегрируемы в собственном смысле на любом отрезке из промежутка  $[a, b)$  и для любого  $x \in [a, b)$  выполняются неравенства  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ . Тогда

а) из сходимости несобственного интеграла  $\int_a^b g(x) dx$  следует сходимость несобственного интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ ;

б) из расходимости несобственного интеграла  $\int_a^b f(x) dx$  следует расходимость несобственного интеграла  $\int_a^b g(x) dx$ .

**Доказательство.** Из неравенства  $f(x) \leq g(x)$  следует, что  $\sup_{b' \in [a, b)} \int_a^{b'} f(x) dx \leq \sup_{b' \in [a, b)} \int_a^{b'} g(x) dx$ . Если  $\int_a^b g(x) dx$  сходится, то  $\sup_{b' \in [a, b)} \int_a^{b'} g(x) dx < +\infty$ , следовательно,  $\sup_{b' \in [a, b)} \int_a^{b'} f(x) dx < +\infty$  и по

теореме 1 интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится. Пункт (а) доказан. Пункт (б) следует из пункта (а).  $\square$

**Определение.** Будем говорить, что неотрицательные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  эквивалентны в смысле сходимости интегралов при  $x \rightarrow b-0$  и писать  $f(x) \overset{\text{сх.}}{\sim} g(x)$  при  $x \rightarrow b-0$ , если существуют числа  $m > 0$ ,  $M > 0$ ,  $b_1 < b$  такие, что для любого  $x \in [b_1, b)$  выполняются неравенства

$$m g(x) \leq f(x) \leq M g(x).$$

Заметим, что неотрицательные функции  $f$  и  $g$  эквивалентны в смысле сходимости интегралов тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия  $f(x) = O(g(x))$  и  $g(x) = O(f(x))$ . В частности, если существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$ , то  $f(x) \overset{\text{сх.}}{\sim} g(x)$  при  $x \rightarrow b-0$ .

**Лемма 1.** Пусть на промежутке  $[a, b)$  заданы неотрицательные функции  $f_i(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , причем  $\forall x \in [a, b) \hookrightarrow f_3(x) > 0, g_3(x) > 0$ . Тогда из условия

$$f_i(x) \overset{\text{сх.}}{\sim} g_i(x) \quad \text{при} \quad x \rightarrow b-0, \quad i = 1, 2, 3$$

следует условие

$$\frac{f_1(x) f_2(x)}{f_3(x)} \overset{\text{сх.}}{\sim} \frac{g_1(x) g_2(x)}{g_3(x)} \quad \text{при} \quad x \rightarrow b-0.$$

**Доказательство.** По определению эквивалентных функций в смысле сходимости интегралов для любого  $i = 1, 2, 3$

$$\exists b_i \in [a, b), m_i > 0, M_i > 0 : \forall x \in [b_i, b) \hookrightarrow m_i f_i(x) \leq g_i(x) \leq M_i f_i(x).$$

Следовательно, существует  $b' = \max\{b_1, b_2, b_3\}$  такое, что для любого  $x \in [b', b)$  выполняются неравенства

$$\frac{m_1 m_2}{M_3} \frac{f_1(x) f_2(x)}{f_3(x)} \leq \frac{g_1(x) g_2(x)}{g_3(x)} \leq \frac{M_1 M_2}{m_3} \frac{f_1(x) f_2(x)}{f_3(x)}.$$

$\square$

**Теорема 3.** (Второй признак сравнения.) Пусть неотрицательные функции  $f$  и  $g$  интегрируемы в собственном смысле на любом отрезке из промежутка  $[a, b)$  и эквивалентны в смысле сходимости интегралов при  $x \rightarrow b - 0$ . Тогда несобственные интегралы  $\int_a^b f(x) dx$  и  $\int_a^b g(x) dx$  сходятся или расходятся одновременно.

**Доказательство.** Поскольку  $f(x) \overset{\text{сх.}}{\sim} g(x)$  при  $x \rightarrow b - 0$ , то

$$\exists m, M > 0, \exists b_1 \in [a, b) : \forall x \in [b_1, b) \hookrightarrow m g(x) \leq f(x) \leq M g(x).$$

В силу принципа локализации (лемма 2 § 1) сходимость или расходимость интегралов  $\int_a^b f(x) dx$  и  $\int_a^b g(x) dx$  не изменится, если промежуток интегрирования  $[a, b)$  заменить на промежуток  $[b_1, b)$ . Пусть интеграл  $\int_a^b g(x) dx$  сходится, тогда сходится интеграл  $\int_{b_1}^b g(x) dx$ , и, следовательно, сходится интеграл  $\int_{b_1}^b M g(x) dx$ . Отсюда в силу признака сравнения получаем сходимость интеграла  $\int_{b_1}^b f(x) dx$ , а значит, и интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ . Аналогично, из сходимости интеграла  $\int_a^b f(x) dx$  следует сходимость интеграла  $\int_a^b g(x) dx$ .  $\square$

**Замечание.** Условие неотрицательности функций  $f(x)$  и  $g(x)$  в теореме 3 существенно. В следующем параграфе будет показано, что интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$  сходится, а интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) dx$  расходится, хотя  $1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \overset{\text{сх.}}{\sim} 1$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

**Пример.** Исследовать на сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \sin\left(\frac{2+\cos x}{x^2}\right)}{(e^x + 1)^\alpha} dx.$$

**Решение.** Заметим, что при  $x \rightarrow +\infty$  имеют место следующие эквивалентности в смысле сходимости интегралов:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \operatorname{arctg} x \underset{\text{сх.}}{\sim} 1; \\ \sin t \underset{\text{сх.}}{\sim} t \text{ при } t = \frac{2+\cos x}{x^2} \rightarrow 0 &\Rightarrow \sin\left(\frac{2+\cos x}{x^2}\right) \underset{\text{сх.}}{\sim} \frac{2+\cos x}{x^2}; \\ 1 \leq 2+\cos x \leq 3 &\Rightarrow \sin\left(\frac{2+\cos x}{x^2}\right) \underset{\text{сх.}}{\sim} \frac{2+\cos x}{x^2} \underset{\text{сх.}}{\sim} \frac{1}{x^2}; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x+1)^\alpha}{e^{\alpha x}} = 1 &\Rightarrow (e^x+1)^\alpha \underset{\text{сх.}}{\sim} e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 1 получаем

$$\frac{\operatorname{arctg} x \sin \frac{1}{x^2}}{(e^x+1)^\alpha} \underset{\text{сх.}}{\sim} \frac{1}{x^2 e^{\alpha x}} \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

При  $\alpha \geq 0$  выполняется  $\frac{1}{x^2 e^{\alpha x}} \leq \frac{1}{x^2} \forall x \geq 1$ . Поскольку  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  сходится, то при  $\alpha \geq 0$  исходный интеграл сходится в силу признака сравнения.

При  $\alpha < 0$  выполняется  $\frac{1}{x^2 e^{\alpha x}} \rightarrow +\infty (x \rightarrow +\infty)$ , следовательно,  $\exists x_0 \geq 1 : \forall x \geq x_0 \hookrightarrow \frac{1}{x^2 e^{\alpha x}} \geq 1$ . Поскольку интеграл  $\int_1^{+\infty} dx$  расходится, то в силу признака сравнения при  $\alpha < 0$  исходный интеграл расходится.  $\square$

**Задача 1.** Пусть функция  $f : [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  нестрого убывает. Как связано условие сходимости интеграла  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  с условием  $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , т. е.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$ ?

### § 3. Несобственные интегралы от знакопеременных функций

**Теорема 1.** (Критерий Коши.) Пусть функция  $f$  интегрируема в собственном смысле на любом отрезке из промежутка  $[a, b)$ . Несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \xi \in (a, b) : \forall b_1, b_2 \in (\xi, b) \hookrightarrow \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

**Доказательство.** Определим функцию  $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ .

По определению несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится, если существует конечный предел  $\lim_{t \rightarrow b-0} F(t)$ . Из критерия Коши существования предела функции следует, что существование конечного предела  $\lim_{t \rightarrow b-0} F(t)$  эквивалентно тому, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует левая полуокрестность  $(\xi, b)$  точки  $b$  такая, что  $\forall b_1, b_2 \in (\xi, b) \hookrightarrow |F(b_2) - F(b_1)| < \varepsilon$ . Используя равенство  $F(b_2) - F(b_1) = \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx$ , получаем требуемое утверждение.  $\square$

**Замечание.** Критерий Коши чаще всего используется для доказательства расходимости несобственных интегралов от знакопеременных функций. Согласно критерию Коши, для доказательства расходимости интеграла  $\int_a^b f(x) dx$  с особенностью в точке  $b$  достаточно доказать, что выполняется отрицание к условию Коши сходимости этого интеграла, т. е.

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \xi \in (a, b) \exists b_1, b_2 \in (\xi, b) : \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| \geq \varepsilon.$$

**Определение.** Говорят, что несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  *сходится абсолютно*, если сходится несобственный интеграл  $\int_a^b |f(x)| dx$ .

**Теорема 2.** Пусть функция  $f$  интегрируема в собственном смысле на любом отрезке из промежутка  $[a, b)$ . Если несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится абсолютно, то этот несобственный интеграл сходится.

**Доказательство.** Так как интеграл  $\int_a^b |f(x)| dx$  сходится, то выполняется условие Коши его сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \xi \in (a, b) : \forall b_1, b_2 \in (\xi, b) \hookrightarrow \left| \int_{b_1}^{b_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon.$$

Поскольку  $\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{b_1}^{b_2} |f(x)| dx \right|$ , то выполняется условие Коши сходимости интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ . Отсюда по критерию Коши получаем сходимость этого интеграла.  $\square$

Заметим, что для собственных интегралов из интегрируемости модуля функции не следует интегрируемость самой функции.

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ иррациональное,} \\ -1, & \text{если } x \text{ рациональное} \end{cases}$$

неинтегрируема, а ее модуль  $|f(x)| = 1$  является функцией, интегрируемой в собственном смысле на любом отрезке.

**Определение.** Если несобственный интеграл сходится, но не является абсолютно сходящимся, то говорят, что этот несобственный интеграл *сходится условно*.

**Теорема 3.** (Признак Дирихле.) Пусть функция  $f(x)$  непрерывна, а функция  $g(x)$  непрерывно дифференцируема на промежутке  $[a, b)$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Пусть выполнены условия

- 1) первообразная функции  $f$  ограничена на  $[a, b)$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0$ ;
- 3) функция  $g$  нестрого убывает на  $[a, b)$ , т. е.  $g'(x) \leq 0 \forall x \in [a, b)$ .

Тогда несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) g(x) dx$  сходится.

**Доказательство.** По условию первообразная  $F(x)$  функции  $f(x)$  ограничена, т. е.

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, b) \hookrightarrow |F(x)| \leq C. \quad (1)$$

Для произвольного  $b' \in (a, b)$  воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int_a^{b'} f(x) g(x) dx = \int_a^{b'} g(x) dF(x) = g(x) F(x) \Big|_a^{b'} - \int_a^{b'} F(x) g'(x) dx. \quad (2)$$

Заметим, что в силу формулы Ньютона–Лейбница

$$\lim_{b' \rightarrow b-0} \int_a^{b'} g'(x) dx = \lim_{b' \rightarrow b-0} g(b') - g(a) = -g(a), \text{ следовательно,}$$

несобственный интеграл  $\int_a^b g'(x) dx$  сходится. Отсюда и из равенства

$|g'(x)| = -g'(x)$  следует сходимость интеграла  $\int_a^b |g'(x)| dx$ , а значит, и интеграла  $\int_a^b C |g'(x)| dx$ . Учитывая условие (1), в силу признака

сравнения получаем сходимость интеграла  $\int_a^b |F(x) g'(x)| dx$ . Отсюда

по теореме 2 получаем сходимость интеграла  $\int_a^b F(x) g'(x) dx$ . Иными словами,

$$\exists \lim_{b' \rightarrow b-0} \int_a^{b'} F(x) g'(x) dx \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Поскольку функция  $F(x)$  ограничена и  $\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) F(x) = 0$ , поэтому существует конечный предел

$$\lim_{b' \rightarrow b-0} g(x) F(x) \Big|_a^{b'} = -g(a) F(a). \text{ Отсюда и из условий (2), (3) по-}$$

лучаем существование конечного предела  $\lim_{b' \rightarrow b-0} \int_a^{b'} f(x) g(x) dx$ , т. е.

сходимость интеграла  $\int_a^b f(x) g(x) dx$ . □

Исследование на сходимость и абсолютную сходимость несобственных интегралов состоит из четырех этапов (обоснование сходимости, расходимости, абсолютной сходимости и отсутствия абсолютной сходимости при различных значениях параметра).

**Пример.** Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \, dx}{x^\alpha}$ .

**Решение.** 1) Покажем, что при  $\alpha > 0$  данный интеграл сходится по признаку Дирихле. Действительно, функция  $\sin x$  имеет ограниченную первообразную  $-\cos x$ , а функция  $\frac{1}{x^\alpha}$  при  $\alpha > 0$  убывает на  $[1, +\infty)$  и стремится к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ . Кроме того, функции  $\sin x$  и  $\frac{1}{x^\alpha}$  непрерывно дифференцируемы на  $[1, +\infty)$ . Следовательно, при  $\alpha > 0$  все условия признака Дирихле выполнены и данный интеграл сходится.

2) Покажем, что при  $\alpha \leq 0$  данный интеграл расходится в силу критерия Коши. Действительно, при  $\alpha \leq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  имеем

$$\int_{2\pi n}^{2\pi n + \pi} \frac{\sin x \, dx}{x^\alpha} \geq \int_{2\pi n}^{2\pi n + \pi} \frac{\sin x \, dx}{(2\pi n)^\alpha} = \frac{1}{(2\pi n)^\alpha} \int_{2\pi n}^{2\pi n + \pi} \sin x \, dx = \frac{2}{(2\pi n)^\alpha} \geq 2.$$

Следовательно,

$$\exists \varepsilon_0 = 1 : \forall \xi \exists b_1 = 2\pi n > \xi, \quad b_2 = 2\pi n + \pi > \xi : \left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x \, dx}{x^\alpha} \right| > \varepsilon_0,$$

т. е. выполняется отрицание условия Коши сходимости исходного интеграла.

3) Покажем, что при  $\alpha > 1$  данный интеграл сходится абсолютно. Поскольку  $\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha}$ , а интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  сходится при  $\alpha > 1$ , то при этих  $\alpha$  интеграл  $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx$  сходится по признаку сравнения.

4) Покажем, что при  $\alpha \in (0, 1]$  данный интеграл не является абсолютно сходящимся. Поскольку  $0 \leq |\sin x| \leq 1$ , то  $|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ . При  $\alpha \in (0, 1]$  интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  расходится, а интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x \, dx}{x^\alpha}$  сходится по признаку Дирихле (так как функция  $\cos 2x$  имеет ограниченную первообразную, а функция  $\frac{1}{x^\alpha}$  монотонно стремится к нулю). Отсюда в силу следствия из свойства линейности несобственного интеграла получаем расходимость интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x^\alpha} dx$ , т. е. интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx$ .

Отсюда и из признака сравнения следует расходимость интеграла  $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx$  при  $\alpha \in (0, 1]$ . Поскольку, как показано на первом этапе, при  $\alpha > 0$  исходный интеграл сходится, то при  $\alpha \in (0, 1]$  этот интеграл сходится условно.

**Ответ:** при  $\alpha > 1$  данный интеграл сходится абсолютно, при  $\alpha \in (0, 1]$  сходится условно, при  $\alpha \leq 0$  – расходится.  $\square$

**Пример.** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left( 1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right) dx$ .

**Решение.** Преобразуем подынтегральное выражение:  $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left( 1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$ . Поскольку интегралы  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ ,  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$  сходятся по признаку Дирихле, а интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  расходится, то исходный интеграл расходится.  $\square$

Последний пример показывает, что для знакопеременных функций при замене функции на эквивалентную сходимость интеграла может измениться. Действительно,  $1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \overset{\text{сх.}}{\sim} 1$  при  $x \rightarrow +\infty$ , однако интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$  сходится, а интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left( 1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right) dx$  расходится.

**Теорема 3.** (Признак Абеля.) Пусть функция  $f(x)$  непрерывна, а функция  $g(x)$  непрерывно дифференцируема на промежутке  $[a, b)$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Пусть выполнены условия

- 1) интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится;
- 2) функция  $g$  ограничена на  $[a, b)$ ;
- 3) функция  $g$  нестрого убывает на  $[a, b)$ , т. е.  $g'(x) \leq 0 \ \forall x \in [a, b)$ .

Тогда несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) g(x) dx$  сходится.

**Доказательство.** Так как функция  $g$  нестрого убывает и ограничена на  $[a, b)$ , то существует  $\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = g_0 \in \mathbb{R}$ . Заметим, что функция  $\tilde{g}(x) = g(x) - g_0$  нестрого убывает на  $[a, b)$  и  $\lim_{x \rightarrow b-0} \tilde{g}(x) = 0$ .

Поэтому в силу признака Дирихле интеграл  $\int_a^b f(x) \tilde{g}(x) dx$  сходится.

Поскольку  $f(x)g(x) = f(x)\tilde{g}(x) + f(x)g_0$ , причем интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится по условию теоремы, то по свойству линейности интеграл  $\int_a^b f(x)g(x) dx$  сходится.  $\square$

**Следствие.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна, а функция  $g(x)$  непрерывно дифференцируема на промежутке  $[a, b)$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Пусть функция  $g$  монотонна на  $[a, b)$  и  $\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = g_0 \in \mathbb{R}$ ,  $g_0 \neq$

$\neq 0$ . Тогда интеграл  $\int_a^b f(x)g(x) dx$  имеет тот же тип сходимости и абсолютной сходимости, что и интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ .

**Доказательство.** Интегралы  $\int_a^b |f(x)g(x)| dx$  и  $\int_a^b |f(x)| dx$  сходятся или расходятся одновременно, так как  $|f(x)g(x)| \overset{\text{сх.}}{\sim} |f(x)|$  при  $x \rightarrow b-0$ . Докажем теперь, что интегралы  $\int_a^b f(x)g(x) dx$  и  $\int_a^b f(x) dx$

сходятся или расходятся одновременно. Если интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится, то интеграл  $\int_a^b f(x)g(x) dx$  сходится по признаку Абеля. Пока-

жем, что из сходимости интеграла  $\int_a^b f(x)g(x) dx$  следует сходимость

интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ . Так как  $\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = g_0 \neq 0$ , то существует число  $a_1 \in [a, b)$  такое, что на промежутке  $[a_1, b)$  функция  $g(x)$  не обращается в нуль. Поэтому функция  $g_1(x) = \frac{1}{g(x)}$  непрерывно дифференцируема и монотонна на  $[a_1, b)$ . Поскольку  $f(x) = f(x)g(x)g_1(x)$ ,

то в силу признака Абеля из сходимости интеграла  $\int_{a_1}^b f(x)g(x) dx$

следует сходимость интеграла  $\int_{a_1}^b f(x) dx$ . Применяя принцип локализации, получаем требуемое утверждение.  $\square$

**Пример.** Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл  $\int_1^{+\infty} x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sin x^2 dx$ .

**Решение.** Заметим, что  $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Следовательно, для функции  $g(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  справедливо равенство  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \\ &= \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2x^2}(1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Поэтому существует число  $x_0 > 1$  такое, что  $g'(x) > 0$  для любого  $x > x_0$ . Поэтому согласно следствию из признака Абеля и принципу локализации исходный интеграл имеет тот же тип сходимости и абсолютной сходимости, что и интеграл

$$\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} \sin x^2 dx = \left/ \begin{array}{l} t = x^2, \\ x = \sqrt{t}, \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{array} \right/ = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1-\alpha/2}} \sin t dt.$$

Используя пример, рассмотренный ранее, получаем, что исходный интеграл сходится абсолютно при  $1 - \frac{\alpha}{2} > 1$ , т. е. при  $\alpha < 0$ ; сходится условно при  $1 - \frac{\alpha}{2} \in (0, 1]$ , т. е. при  $\alpha \in [0; 2)$  и расходится при  $1 - \frac{\alpha}{2} \leq 0$  т. е. при  $\alpha \geq 2$ .

**Задача 1.** Пусть функции  $f$  и  $g$  непрерывны на луче  $[1, +\infty)$ , интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  сходится абсолютно, а интеграл  $\int_1^{+\infty} g(x) dx$  сходятся условно. Может ли интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) g(x) dx$

- а) сходиться условно,
- б) расходиться ?

# ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

## § 1. Определение и некоторые свойства рядов

**Определение.** Пусть задана числовая последовательность  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Число  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  называется *n-й частичной суммой ряда*  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Элементы последовательности  $\{a_k\}$  называются *членами* этого ряда. Суммой ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  называется предел частичных сумм:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  называется *сходящимся*, если существует конечный предел частичных сумм этого ряда, в противном случае ряд называется *расходящимся*.

**Теорема 1.** (Необходимое условие сходимости ряда.) Если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится, то  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

**Доказательство.** Поскольку ряд сходится, то существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$ . Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$ . Поскольку  $a_n = S_n - S_{n-1}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .  $\square$

**Пример.** При каких  $q$  сходится ряд из геометрической прогрессии  $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ ?

**Решение.** При  $|q| \geq 1$  имеем  $q^k \not\rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ), т. е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда, и, следовательно, ряд расходится.

Пусть  $|q| < 1$ . Воспользовавшись формулой для суммы геометрической прогрессии (которую легко доказать по индукции), получаем

$S_n = \sum_{k=1}^n q^k = q \frac{1-q^n}{1-q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{q}{1-q}$ . Следовательно, при  $|q| < 1$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$  сходится.  $\square$

**Лемма 1.** (Принцип локализации.) Для любого  $k_0 \in \mathbb{N}$  ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  сходятся или расходятся одновременно.

**Доказательство.** Для любого натурального  $n > k_0$  справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^n a_k.$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем требуемое утверждение.  $\square$

**Лемма 2.** (Свойство линейности.) Если ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  сходятся, то для любых чисел  $\alpha$  и  $\beta$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$  сходится.

Доказать самостоятельно.

**Следствие.** Если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится, а ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  расходится, то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$  расходится.

## § 2. Ряды с неотрицательными членами

**Теорема 1.** (Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами.) Если  $a_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}$ , то сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  эквивалентна ограниченности его частичных сумм:  $\sup_{n \in \mathbb{N}} S_n < +\infty$ .

**Доказательство.** Поскольку последовательность частичных сумм нестрого возрастает, то существует конечный или бесконечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ . Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел его частичных сумм, т. е. когда  $\sup_{n \in \mathbb{N}} S_n < +\infty$ .  $\square$

**Теорема 2.** (Первый признак сравнения.) Если  $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ , то

- а) из сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  следует сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ;  
 б) из расходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  следует расходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ .

**Доказательство.** а) Из неравенства  $a_k \leq b_k$  следует неравенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n a_k \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n b_k.$$

Если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  сходится, то  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n b_k < +\infty$ , поэтому  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n a_k < +\infty$  и в силу теоремы 1 ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится.

б) Если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  расходится, то согласно пункту (а) ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  не может сходиться.  $\square$

**Определение.** Будем говорить, что последовательности с неотрицательными элементами  $\{a_k\}$  и  $\{b_k\}$  эквивалентны в смысле сходимости рядов и писать  $a_k \overset{\text{сх.}}{\sim} b_k$ , если существуют числа  $m > 0$ ,  $M > 0$  и  $k_0 \in \mathbb{N}$  такие, что

$$m b_k \leq a_k \leq M b_k \quad \forall k \geq k_0.$$

**Теорема 3.** (Второй признак сравнения.) Пусть  $\exists k_0 : \forall k \geq k_0 \hookrightarrow \hookrightarrow a_k \geq 0, b_k \geq 0$  и  $a_k \overset{\text{сх.}}{\sim} b_k$ . Тогда ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  сходятся или расходятся одновременно.

**Доказательство** состоит в применении первого признака сравнения и принципа локализации.  $\square$

**Теорема 4.** (Интегральный признак.) Пусть на луче  $[1, +\infty)$  задана монотонная функция  $f(x)$ . Тогда ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  и интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  сходятся или расходятся одновременно.

**Доказательство.** Из монотонности  $f$  следует существование предела  $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Если  $A \neq 0$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  расходится в силу необходимого условия сходимости ряда, а интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  расходится в силу второго признака сравнения. Поэтому в случае  $A \neq 0$  утверждение теоремы справедливо.

Пусть теперь  $A = 0$ . Для определенности будем предполагать, что функция  $f$  нестрого убывает. Тогда  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 1$ . Проинтегрировав неравенства  $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \quad \forall x \in [k, k+1]$  по отрезку  $[k, k+1]$ , получаем неравенства  $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$ . Просуммировав полученные неравенства по  $k$  от 1 до  $n$ , получаем

$$S_{n+1} - f(1) \leq F(n+1) \leq S_n, \quad (1)$$

где  $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ ,  $F(t) = \int_1^t f(x) dx$ .

Поскольку  $f(x) \geq 0$ , то функция  $F(t)$  нестрого возрастает, следовательно,  $F(n) \leq F(x) \leq F(n+1) \quad \forall x \in [n, n+1]$ , что вместе с неравенствами (1) дает неравенства

$$S_n - f(1) \leq F(n) \leq F(x) \leq F(n+1) \leq S_n \quad \forall x \in [n, n+1],$$

следовательно,  $\sup_{n \in \mathbb{N}} S_n - f(1) \leq \sup_{x \in [1, +\infty)} F(x) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ , а значит, условия  $\sup_{n \in \mathbb{N}} S_n < +\infty$  и  $\sup_{x \in [1, +\infty)} F(x) < +\infty$  эквивалентны.

В силу критерия сходимости ряда с неотрицательными членами условие  $\sup_{n \in \mathbb{N}} S_n < +\infty$  эквивалентно сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ , а в силу критерия сходимости интегралов от знакопостоянных функций, условие  $\sup_{x \in [1, +\infty)} F(x) < +\infty$  эквивалентно сходимости интеграла  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ .

Поэтому ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  и интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  сходятся или расходятся одновременно.  $\square$

**Пример.** При каких  $\alpha$  сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ ?

**Решение.** Функция  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  монотонна. Поскольку интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .  $\square$

**Задача 1.** Пусть на луче  $[1, +\infty)$  задана непрерывная функция  $f(x)$ . Верно ли, что из сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  следует сходимость интеграла  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ ? Верно ли обратное?

**Теорема 5.** (Признак Даламбера.) Пусть  $a_k > 0 \forall k \in \mathbb{N}$ . Тогда  
а) если существуют  $k_0 \in \mathbb{N}$  и  $q \in (0, 1)$  такие, что  $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q \quad \forall k \geq k_0$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится;

б) если  $\exists k_0 : \forall k \geq k_0 \hookrightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  расходится.

**Доказательство.** а) По индукции легко показать, что  $a_k \leq a_{k_0} q^{k-k_0} \quad \forall k \geq k_0$ . Поскольку, как показано в примере из § 1, ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$  сходится при  $q \in (0, 1)$ , то ряд  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_{k_0} q^{k-k_0}$  также сходится и по признаку сравнения сходится ряд  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ . А значит, в силу принципа локализации сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

б) Если  $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$  при  $k \geq k_0$ , то  $a_k \geq a_{k_0}$  при  $k \geq k_0$ . Следовательно,  $a_k \not\rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ , т. е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда, и, следовательно, ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  расходится.  $\square$

**Следствие.** (Признак Даламбера в предельной форме.) Пусть  $a_k > 0 \forall k \in \mathbb{N}$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q$ , тогда

а) при  $q < 1$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится;

б) при  $q > 1$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  расходится;

в) при  $q = 1$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  может сходиться, а может и расходиться.

**Доказательство.** а) Определим  $q' = \frac{q+1}{2}$ . Поскольку  $q < 1$ , то  $q < q' < 1$ . По определению предела  $\exists k_0 : \forall k > k_0 \hookrightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q'$ .

Следовательно, в силу теоремы 5(а) ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится.

б) По определению предела  $\exists k_0 : \forall k > k_0 \hookrightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ . В силу теоремы 5(б) ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  расходится.

в) Пусть  $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$ . Тогда  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{k}{k+1} \right)^\alpha = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ . Однако, как показано ранее, при  $\alpha > 1$  данный ряд сходится, а при  $\alpha \leq 1$  – расходится.  $\square$

**Теорема 6.** (Признак Коши.) Пусть  $a_k > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ . Тогда

а) если существуют  $k_0 \in \mathbb{N}$  и  $q \in (0, 1)$  такие, что  $\sqrt[k]{a_k} \leq q \quad \forall k \geq k_0$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится;

б) если  $\exists k_0 : \forall k \geq k_0 \hookrightarrow \sqrt[k]{a_k} \geq 1$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  расходится.

**Доказательство.** а) Если  $\sqrt[k]{a_k} \leq q \quad \forall k \geq k_0$ , то  $a_k \leq q^k \quad \forall k \geq k_0$ . В силу признака сравнения и принципа локализации из сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$  следует сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

б) Если  $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$  при  $k \geq k_0$ , то  $a_k \geq 1$  при  $k \geq k_0$ , а значит, не выполняется необходимое условие сходимости ряда, и, следовательно, ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  расходится.  $\square$

**Следствие.** (Признак Коши в предельной форме.) Пусть  $a_k > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = q$ , тогда

а) при  $q < 1$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится;

б) при  $q > 1$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  расходится.

в) при  $q = 1$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  может сходиться, а может и расходиться.

Доказательство аналогично доказательству признака Даламбера в предельной форме.

### § 3. Ряды со знакопеременными членами

**Теорема 1.** (Критерий Коши.) Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \varepsilon.$$

**Доказательство.** По определению ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится, если сходится последовательность частичных сумм  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ . В силу критерия Коши для последовательностей сходимость последовательности  $\{S_n\}$  эквивалентна ее фундаментальности:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow |S_{n+p} - S_n| \leq \varepsilon$ . Отсюда и из равенства  $S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$  следует требуемое утверждение.  $\square$

**Определение.** Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ . Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  называется *условно сходящимся*, если этот ряд сходится, но не является абсолютно сходящимся.

**Теорема 2.** Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.

**Доказательство.** Пусть ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится абсолютно. Тогда выполняется условие Коши сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \right| \leq \varepsilon,$$

следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \varepsilon,$$

т. е. выполняется условие Коши сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , а значит, этот ряд сходится.  $\square$

**Лемма 1.** Если ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  абсолютно сходятся, то для любых чисел  $\alpha$  и  $\beta$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$  абсолютно сходится.

**Доказательство.** В силу свойства линейности из сходимости рядов  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$  следует сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha| |a_k| + |\beta| |b_k|)$ . Поскольку  $|\alpha a_k + \beta b_k| \leq |\alpha| |a_k| + |\beta| |b_k|$ , то в силу признака сравнения ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha a_k + \beta b_k|$  сходится.  $\square$

**Теорема 3.** (Признак Дирихле.) Пусть последовательность частичных сумм ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ограничена:

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq C,$$

а последовательность  $\{b_k\}$  монотонно стремится к нулю. Тогда ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$  сходится.

**Доказательство.** Для определенности будем предполагать, что последовательность  $\{b_k\}$  нестрого убывает:  $b_{k+1} \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ . Обозначим  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $A_0 = 0$ . Выполним преобразование Абеля:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_{k-1} b_k = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} \quad \text{т.к. } A_0 = 0 \quad \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}). \quad (1)$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b_1,$$

т. е. ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$  сходится, следовательно, сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} C (b_k - b_{k+1})$ . Поскольку  $b_k - b_{k+1} \geq 0$  и  $|A_k| \leq C$ , то  $|A_k (b_k - b_{k+1})| \leq C |b_k - b_{k+1}| = C (b_k - b_{k+1})$ . Отсюда в силу признака сравнения получаем абсолютную сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ .

Поэтому в силу теоремы 2 ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$  сходится.

Поскольку  $\{A_n\}$  — ограниченная последовательность, а  $\{b_n\}$  — бесконечно малая последовательность, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n b_n = 0$ . Отсюда из сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$  и из формулы (1) следует существование конечного предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1}),$$

т. е. сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ . □

**Теорема 4.** (Признак Лейбница.) Если последовательность  $\{b_k\}$  монотонно стремится к нулю, то ряд Лейбница  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$  сходится.

**Доказательство.** Заметим, что последовательность частичных сумм ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$  ограничена:  $\sum_{k=1}^{2m} (-1)^k = 0$ ,  $\sum_{k=1}^{2m+1} (-1)^k = -1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$ , следовательно,  $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . В силу признака Дирихле ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$  сходится. □

**Теорема 5.** (Признак Абеля.) Пусть ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится, последовательность  $\{b_k\}$  монотонна и ограничена. Тогда ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$  сходится.

**Доказательство.** Так как последовательность  $\{b_k\}$  монотонна и ограничена, то существует  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b_0 \in \mathbb{R}$ . Поэтому последовательность  $\{b_k - b_0\}$  монотонно стремится к нулю. Из сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  следует ограниченность последовательности частичных сумм этого ряда. Поэтому согласно признаку Дирихле ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(b_k - b_0)$  сходится. Отсюда и из сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  вытекает сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ .  $\square$

## § 4. Перестановки слагаемых в рядах и перемножение рядов

**Определение.** Будем говорить, что последовательность натуральных чисел  $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$  задает взаимно однозначное преобразование множества натуральных чисел, если для любого  $k \in \mathbb{N}$  существует единственный номер  $j \in \mathbb{N}$  такой, что  $k = k_j$ .

**Лемма 1.** Пусть последовательность  $\{k_j\}$  задает взаимно однозначное преобразование множества  $\mathbb{N}$  и пусть

$$M_n = \max_{j \leq n} k_j, \quad m_n = \min_{j > n} k_j.$$

Тогда  $\lim_{j \rightarrow \infty} k_j = +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = +\infty$ .

**Доказательство.** Поскольку последовательность  $\{k_j\}$  задает взаимно однозначное преобразование  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , то существует последовательность  $\{j_k\}_{k=1}^{\infty}$ , задающая обратное преобразование  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , т. е.

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall j \in \mathbb{N} \hookrightarrow k_j = k \iff j_k = j.$$

Для любого  $m \in \mathbb{N}$  определим  $J_m = \max\{j_1, \dots, j_m\}$ . Тогда при  $j > J_m$  получаем, что  $j \neq j_k \forall k \in \{1, \dots, m\}$ , следовательно,

$k_j \notin \{1, \dots, m\}$ , т. е.  $k_j > m$ . Итак,

$$\forall m \in \mathbb{N} \exists J_m \in \mathbb{N} : \forall j > J_m \hookrightarrow k_j > m. \quad (1)$$

Это означает, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} k_j = +\infty$ . Кроме того, из (1) следует, что

$$\forall m \in \mathbb{N} \exists J_m \in \mathbb{N} : \forall n > J_m \hookrightarrow m_n = \min_{j > n} k_j > m.$$

Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = +\infty$ . Поскольку  $M_n \geq k_n \rightarrow +\infty$ , то  $M_n \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Определение.** Будем говорить, что ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$  *получен перестановкой членов* ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , если существует последовательность натуральных чисел  $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ , задающая взаимно однозначное преобразование множества  $\mathbb{N}$ , и такая, что  $\forall j \in \mathbb{N} \hookrightarrow \tilde{a}_j = a_{k_j}$ .

**Теорема 1.** Если ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$  получен перестановкой членов абсолютно сходящегося ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , то ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$  абсолютно сходится и его сумма равна сумме ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

**Доказательство.** а) Пусть последовательность  $\{k_j\}$  задает перестановку  $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$  ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , т. е.

$$\forall j \in \mathbb{N} \hookrightarrow \tilde{a}_j = a_{k_j} \quad \text{и}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \text{существует единственный } j \in \mathbb{N} : k_j = k.$$

Поскольку  $\sum_{j=1}^n |\tilde{a}_j| = \sum_{j=1}^n |a_{k_j}| \leq \sum_{k=1}^{M_n} |a_k|$ , где  $M_n = \max_{j \leq n} k_j$ , то из сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  следует, что  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^n |\tilde{a}_j| \leq \sup_{M \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^M |a_k| < +\infty$ .

Следовательно, в силу критерия сходимости ряда с неотрицательными членами ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{a}_j|$  сходится, т. е. ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$  сходится абсолютно.

б) Обозначим  $\tilde{S}_n = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j$ ,  $S_m = \sum_{k=1}^m a_k$ ,  $\sigma_m = \sum_{k=1}^m |a_k|$ ,  $\tilde{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n$ ,  $S = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m$ ,  $\sigma = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m$  (из условий теоремы и доказанной сходимости ряда  $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$  следует, что данные пределы существуют и конечны). Требуется доказать, что  $\tilde{S} = S$ .

$$\text{Заметим, что } S_{M_n} - \tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{M_n} a_k - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j = \sum_{k=1}^{M_n} a_k - \sum_{j=1}^n a_{k_j}.$$

По определению числа  $M_n = \max_{j \leq n} k_j$  в сумме  $\sum_{k=1}^{M_n} a_k$  содержатся все слагаемые суммы  $\sum_{j=1}^n a_{k_j}$ , поэтому

$$|S_{M_n} - \tilde{S}_n| = \left| \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, M_n\} \\ k \notin \{k_1, \dots, k_n\}}} a_k \right| \leq \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, M_n\} \\ k \notin \{k_1, \dots, k_n\}}} |a_k|.$$

Из условия  $k \notin \{k_1, \dots, k_n\}$  следует, что  $k = k_j$ , где  $j > n$ , а значит,  $k \geq \min_{j > n} k_j = m_n$ . Поэтому

$$|S_{M_n} - \tilde{S}_n| \leq \sum_{k=m_n}^{M_n} |a_k| = \sigma_{M_n} - \sigma_{m_n-1}.$$

Согласно лемме 1,  $m_n \rightarrow +\infty$ ,  $M_n \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_{M_n} - \sigma_{m_n-1}) = \sigma - \sigma = 0$ , а значит,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_{M_n} - \tilde{S}_n| = 0$ . Отсюда и из условия  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{M_n} = S$  получаем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{M_n} = S$ , т. е. сумма ряда  $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$  совпадает с суммой ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . □

Заметим, что при перестановке членов условно сходящегося ряда сумма ряда, вообще говоря, меняется. Более того, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** (Теорема Римана.) Если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится условно, то для любого числа  $x$  можно так переставить члены ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , что полученный ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$  будет иметь сумму, равную  $x$ .

**Доказательство. Шаг 1.** Составим ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ , членами которого являются все неотрицательные члены ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , взятые с сохранением порядка (если неотрицательных членов ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  конечное число, то вместо ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  получится конечная сумма). Составим ряд (или конечную сумму)  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ , членами которого являются все отрицательные члены ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , взятые с сохранением порядка.

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^{n_1} b_k + \sum_{k=1}^{n_2} (-c_k); \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{n_1} b_k + \sum_{k=1}^{n_2} c_k. \quad (3)$$

Покажем, что ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  расходятся и, следовательно, не могут являться конечными суммами. Это доказательство проведем методом от противного. Предположим, что один из этих рядов сходится.

*Случай (а).* Ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  сходятся. Тогда их частичные суммы ограничены, и из формулы (2) следует, что частичные суммы ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  ограничены, а значит, в силу критерия сходимости ряда с неотрицательными членами этот ряд сходится. Следовательно, ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится абсолютно, что противоречит условию теоремы.

*Случай (б).* Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  расходится, а ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  сходится. Тогда частичные суммы ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  стремятся к  $+\infty$ , а частичные суммы ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  ограничены. Отсюда и из формулы (3) следует, что  $\sum_{k=1}^n a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ , что противоречит сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

Аналогично, *случай (в)*, когда ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  сходится, а ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  расходится, также противоречит сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

Таким образом, ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  расходятся, так как другие случаи противоречат условиям теоремы.

**Шаг 2.** Определим ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$ .

Определим  $\tilde{a}_1 = \begin{cases} b_1, & \text{если } x \geq 0, \\ c_1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Пусть определены первые  $n$  членов ряда  $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$ :  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$ , которые состоят из первых  $p = p(n)$  членов ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  и первых  $n - p(n)$  членов ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ . Пусть  $\tilde{S}_n = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j$ .

Определим  $\tilde{a}_{n+1} = \begin{cases} b_{p(n)+1}, & \text{если } x \geq \tilde{S}_n, \\ c_{n-p(n)+1}, & \text{если } x < \tilde{S}_n. \end{cases}$

**Шаг 3.** Покажем, что  $p(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ .

Предположим противное:  $p(n) \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда поскольку последовательность  $\{p(n)\}_{n=1}^{\infty}$  нестрого возрастает, то она ограничена сверху, т. е.  $\exists p_0 : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow p(n) \leq p_0$ . Следовательно, в ряде  $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$  присутствует лишь конечное число членов ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ , т. е. существует  $j_1$  такое, что

$$\forall j > j_1 \hookrightarrow \tilde{a}_j \in \{c_k\}_{k=1}^{\infty}. \quad (4)$$

Поскольку частичные суммы ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  стремятся к  $-\infty$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n = -\infty$ , и, следовательно,  $\exists j_2 \geq j_1 : \forall j > j_2 \hookrightarrow \tilde{S}_j < x$ .

Согласно построению ряда  $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$  получаем  $\tilde{a}_{j_2+1} \in \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ , что противоречит условию (4). Полученное противоречие доказывает, что  $p(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ . Аналогично,  $n - p(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ .

Следовательно, любой член ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  и ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  будет присутствовать в ряде  $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$ . Поэтому ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$  является перестановкой членов ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

**Шаг 4.** Покажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j = x$ .

Из алгоритма построения ряда  $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$  следует, что при достаточно больших  $n$ , а именно, при таких, что  $p(n) > 0$  и  $n - p(n) > 0$ , справедлива формула

$$|\tilde{S}_n - x| \leq \max\{b_{p(n)}, -c_{n-p(n)}\}.$$

Поскольку ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится, то  $a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ , следовательно,  $b_{p(n)} \rightarrow 0$ ,  $c_{n-p(n)} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , а значит,  $|\tilde{S}_n - x| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j = x$ . Таким образом,  $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j = x$ .  $\square$

**Определение.** Через  $\mathbb{N}^2$  будем обозначать множество всевозможных пар натуральных чисел. Будем говорить, что последовательность пар натуральных чисел  $\{(m_j, n_j)\}_{j=1}^{\infty}$  *задает взаимно однозначное отображение*  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ , если для любой пары натуральных чисел  $(m, n)$  существует единственный номер  $j \in \mathbb{N}$  такой, что  $(m_j, n_j) = (m, n)$ .

**Теорема 3.** (О перемножении рядов.) Пусть ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

абсолютно сходятся, а последовательность  $\{(m_j, n_j)\}_{j=1}^{\infty}$  задает взаимно однозначное отображение  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ . Тогда ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{m_j} b_{n_j}$  абсолютно сходится, а его сумма равна произведению сумм рядов  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ .

**Доказательство.** а) Для произвольного натурального числа  $J$  определим  $M_J = \max\{m_1, \dots, m_J\}$ ,  $N_J = \max\{n_1, \dots, n_J\}$ . Тогда

$$\sum_{j=1}^J |a_{m_j} b_{n_j}| \leq \left( \sum_{m=1}^{M_J} |a_m| \right) \left( \sum_{n=1}^{N_J} |b_n| \right).$$

Отсюда в силу абсолютной сходимости рядов  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  получаем

$$\sup_{J \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^J |a_{m_j} b_{n_j}| \leq \left( \sup_{M \in \mathbb{N}} \sum_{m=1}^M |a_m| \right) \left( \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^N |b_n| \right) < +\infty.$$

Следовательно, в силу критерия сходимости ряда с неотрицательными членами ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{m_j} b_{n_j}|$  сходится, т. е. ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{m_j} b_{n_j}$  сходится абсолютно.

б) Покажем теперь, что  $S = AB$ , где

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} a_{m_j} b_{n_j}, \quad A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

В силу теоремы 1 сумма абсолютно сходящегося ряда  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{m_j} b_{n_j}$  не изменится при перестановке членов ряда. Поэтому вместо последовательности  $\{(m_j, n_j)\}$  можно взять специально выбранную последовательность  $\{(m_j^*, n_j^*)\}$ , задающую взаимно однозначное отображение  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ .

Занумеруем все пары натуральных чисел  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  по "методу квадратов" т. е. в соответствии со следующей таблицей:

| $n_j^* \backslash m_j^*$ | 1                                                       | 2                                                       | 3                                                       | 4                                                       | ...      |
|--------------------------|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|----------|
| 1                        | $\begin{smallmatrix} j=1 \\ a_1 b_1 \end{smallmatrix}$  | $\begin{smallmatrix} j=2 \\ a_2 b_1 \end{smallmatrix}$  | $\begin{smallmatrix} j=5 \\ a_3 b_1 \end{smallmatrix}$  | $\begin{smallmatrix} j=10 \\ a_4 b_1 \end{smallmatrix}$ | ...      |
| 2                        | $\begin{smallmatrix} j=4 \\ a_1 b_2 \end{smallmatrix}$  | $\begin{smallmatrix} j=3 \\ a_2 b_2 \end{smallmatrix}$  | $\begin{smallmatrix} j=6 \\ a_3 b_2 \end{smallmatrix}$  | $\begin{smallmatrix} j=11 \\ a_4 b_2 \end{smallmatrix}$ | ...      |
| 3                        | $\begin{smallmatrix} j=9 \\ a_1 b_3 \end{smallmatrix}$  | $\begin{smallmatrix} j=8 \\ a_2 b_3 \end{smallmatrix}$  | $\begin{smallmatrix} j=7 \\ a_3 b_3 \end{smallmatrix}$  | $\begin{smallmatrix} j=12 \\ a_4 b_3 \end{smallmatrix}$ | ...      |
| 4                        | $\begin{smallmatrix} j=16 \\ a_1 b_4 \end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix} j=15 \\ a_2 b_4 \end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix} j=14 \\ a_3 b_4 \end{smallmatrix}$ | $\begin{smallmatrix} j=13 \\ a_4 b_4 \end{smallmatrix}$ | ...      |
| $\vdots$                 | $\vdots$                                                | $\vdots$                                                | $\vdots$                                                | $\vdots$                                                | $\vdots$ |

Данная таблица задает алгоритм, по которому каждому номеру  $j$  ставится в соответствие пара натуральных чисел  $(m, n) = (m_j^*, n_j^*)$ , причем последовательность  $\{(m_j^*, n_j^*)\}_{j=1}^\infty$  задает взаимно однозначное отображение  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ . В результате получаем ряд

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^\infty a_{m_j^*} b_{n_j^*} &= a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2) + \\ &+ (a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3 + a_2 b_3 + a_1 b_3) + \dots \end{aligned}$$

Поскольку ряд  $\sum_{j=1}^\infty a_{m_j^*} b_{n_j^*}$  получен перестановкой членов ряда  $\sum_{j=1}^\infty a_{m_j} b_{n_j}$ , то по теореме 1:  $\sum_{j=1}^\infty a_{m_j^*} b_{n_j^*} = \sum_{j=1}^\infty a_{m_j} b_{n_j} = S$ .

Пусть  $S_n = \sum_{j=1}^n a_{m_j^*} b_{n_j^*}$ ,  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ,  $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ . Тогда частичная сумма элементов ряда  $\sum_{j=1}^\infty a_{m_j^*} b_{n_j^*}$ , соответствующая квадрату со стороной  $N$ , лежащему в левом верхнем углу таблицы, равна

$$S_{N^2} = \sum_{\substack{m=1, \dots, N \\ n=1, \dots, N}} a_m b_n = \left( \sum_{m=1}^N a_m \right) \left( \sum_{n=1}^N b_n \right) = A_N B_N.$$

Так как  $A_N \rightarrow A$ ,  $B_N \rightarrow B$  при  $N \rightarrow \infty$ , то  $S_{N^2} \rightarrow AB$  при  $N \rightarrow \infty$ . С другой стороны, поскольку  $\{S_{N^2}\}$  – подпоследовательность последовательности  $\{S_n\}$ , имеющей предел  $S$ , то  $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_{N^2} = AB$ .  $\square$

## ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

### § 1. Равномерная сходимость функциональных последовательностей

**Определение.** Пусть на множестве  $X$  заданы функции  $f_n(x)$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ). Будем говорить, что функциональная последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  *поточечно сходится* к функции  $f(x)$  на множестве  $X$  и писать  $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ , если  $\forall x \in X \hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , т. е.

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \quad (1)$$

**Определение.** Будем говорить, что последовательность функций  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  *равномерно сходится* к функции  $f(x)$  на множестве  $X$  и писать  $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad \forall x \in X \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \quad (2)$$

Отличие условий (1) и (2) состоит в том, что в условии (1) число  $N$  свое для каждого  $x$ , а в условии (2) число  $N$  не зависит от  $x$ . Поэтому из равномерной сходимости следует поточечная сходимость.

Заметим, что если  $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ , то последовательность  $\{f_n(x)\}$  не может сходиться равномерно и ни к какой другой функции  $g(x)$ , так как из условия  $f_n(x) \xrightarrow{X} g(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  следовало бы, что  $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ . В этом случае говорят, что последовательность  $\{f_n(x)\}$  *сходится к функции  $f(x)$  неравномерно* на множестве  $X$ .

**Теорема 1.** (Критерий равномерной сходимости.)

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

**Доказательство.** Поскольку условие  $\forall x \in X \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$  эквивалентно условию  $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ , то условие (2) эквивалентно условию

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

т. е.  $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . □

**Следствие 1.** Последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится к функции  $f(x)$  равномерно на множестве  $X$  тогда и только тогда, когда существует числовая последовательность  $\{a_n\}$ :

$$\forall x \in X \quad \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq a_n \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (3)$$

**Доказательство.** 1) Пусть выполнено условие (3). Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow 0 \leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ . Отсюда и из условия  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  по теореме о трех последовательностях получаем  $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , что в силу критерия равномерной сходимости означает  $f_n(x) \xrightarrow[X]{} f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

2) Пусть  $f_n(x) \xrightarrow[X]{} f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Определив  $a_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$ , из критерия равномерной сходимости получаем условие (3). □

**Следствие 2.**  $f_n(x) \not\xrightarrow[X]{} f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  тогда и только тогда, когда

$$\exists \{x_n\} \subset X : \quad f_n(x_n) - f(x_n) \not\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

**Доказательство.** 1) Пусть выполняется условие (4). Тогда  $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \not\rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , следовательно,  $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \not\rightarrow 0$  и по критерию равномерной сходимости  $f_n(x) \not\xrightarrow[X]{} f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

2) Пусть  $f_n(x) \not\Rightarrow_X f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  обозначим  $M_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$ . По определению супремума  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in X$ :

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| > \begin{cases} M_n - \frac{1}{n}, & M_n \in \mathbb{R}, \\ 1, & M_n = +\infty. \end{cases} \quad (5)$$

Предположим, что  $f_n(x_n) - f(x_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда найдется номер  $N$  такой, что  $\forall n \geq N \hookrightarrow |f_n(x_n) - f(x_n)| < 1$ . Следовательно, согласно неравенству (5) имеем  $\forall n \geq N \hookrightarrow M_n \in \mathbb{R}$ . Отсюда и из неравенства (5) получаем, что  $M_n \stackrel{n \geq N}{\leq} |f_n(x_n) - f(x_n)| + \frac{1}{n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Последнее соотношение в силу критерия равномерной сходимости противоречит условию  $f_n(x) \not\Rightarrow_X f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому предположение  $f_n(x_n) - f(x_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  неверно, а значит, выполнено условие (4).  $\square$

Следствие 1 удобно для доказательства равномерной сходимости, а следствие 2 – для доказательства отсутствия равномерной сходимости конкретных функциональных последовательностей.

**Определение.** Функциональная последовательность  $\{f_n(x)\}$  называется *равномерно ограниченной* на множестве  $X$ , если

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in X \hookrightarrow |f_n(x)| \leq C.$$

**Лемма 1.** Если последовательность  $\{f_n(x)\}$  равномерно ограничена на множестве  $X$  и  $g_n(x) \Rightarrow_X 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $f_n(x)g_n(x) \Rightarrow_X 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Так как последовательность  $\{f_n(x)\}$  равномерно ограничена, то

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x)| \leq C.$$

Поскольку  $g_n(x) \Rightarrow_X 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\sup_{x \in X} |g_n(x)| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно,

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) g_n(x)| \leq C \cdot \sup_{x \in X} |g_n(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

т. е.  $f_n(x) g_n(x) \xrightarrow{X} 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . □

**Замечание.** В условии леммы 1 равномерную ограниченность последовательности  $\{f_n(x)\}$  нельзя заменить на ограниченность этой последовательности при любом фиксированном  $x$ .

Пусть, например,  $X = (0, 1)$ ,  $f_n(x) = f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ . Поскольку  $|g_n(x)| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то в силу следствия 1 имеем  $g_n(x) \xrightarrow{(0,1)} 0$ . Однако  $f(x) g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx} \not\xrightarrow{(0,1)} 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , что следует из следствия 2, поскольку для последовательности точек  $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\} \subset (0, 1)$  имеет место соотношение  $f(x_n) g_n(x_n) = \sin 1 \not\rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Заметим, что  $\forall x \in (0, 1) \hookrightarrow \left| \frac{\sin(nx)}{nx} \right| \leq \frac{1}{nx} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , поэтому последовательность  $\{f(x) g_n(x)\} = \{\frac{\sin(nx)}{nx}\}$  сходится к 0 на интервале  $(0, 1)$ , но неравномерно.

**Замечание.** Из условий  $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n(x)}{f_n(x)} = 1 \quad \forall x \in X$  не следует, что  $g_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Пусть, например,  $X = (0, 1)$ ,  $f_n(x) = \frac{1}{n}$ ,  $g_n(x) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2 x}$ . Тогда  $\forall x \in (0, 1) \hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n(x)}{f_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{nx}\right) = 1$ ,  $f_n(x) \xrightarrow{(0,1)} 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , но  $g_n(x) \not\xrightarrow{(0,1)} 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , так как  $g_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} + 1 \not\rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Теорема 2.** (Критерий Коши.) Последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится к функции  $f(x)$  равномерно на множестве  $X$  тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши равномерной сходимости последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X \hookrightarrow |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq \varepsilon. \quad (6)$$

**Доказательство.** 1) Пусть  $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ , тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \forall x \in X \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Поскольку

$\forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow n + p > n \geq N$ , то  $\forall x \in X \hookrightarrow |f_{n+p}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Следовательно,  $\forall x \in X \hookrightarrow |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_{n+p}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$ , т. е. выполняется условие (6).

2) Пусть выполняется условие (6). Следовательно,

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq \varepsilon,$$

т. е. для любого фиксированного  $x \in X$  выполняется условие Коши сходимости числовой последовательности  $\{f_n(x)\}$ . В силу критерия Коши для числовых последовательностей  $\forall x \in X$  последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится. Обозначим  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

Перепишем условие (6) в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad \forall x \in X \quad \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq \varepsilon$$

и рассмотрим отдельно условие  $\forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq \varepsilon$ . Поскольку  $\lim_{p \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_{n+p}(x)| = |f_n(x) - f(x)|$ , то по теореме о предельном переходе в неравенствах  $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ . Итак, из условия (6) следует, что  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad \forall x \in X \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ , т. е.  $f_n(x) \xrightarrow[X]{} f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

## § 2. Равномерная сходимость функциональных рядов

**Определение.** Пусть на множестве  $X$  задана функциональная последовательность  $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ . Функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  называется *равномерно сходящимся* на множестве  $X$ , если последовательность его частичных сумм  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$  сходится равномерно на множестве  $X$  к сумме  $S(x)$  этого ряда. Аналогично определяется *поточечная сходимость* ряда.

Поскольку из равномерной сходимости последовательности следует поточечная сходимость последовательности, то из равномерной сходимости ряда следует поточечная сходимость этого ряда.

**Определение.** *Остатком* поточечно сходящегося ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  называется

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

Непосредственно из определения равномерной сходимости ряда и критерия равномерной сходимости функциональной последовательности следует

**Теорема 1.** (Критерий равномерной сходимости ряда.) Поточечно сходящийся функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  сходится равномерно на множестве  $X$  тогда и только тогда, когда

$$r_n(x) \xrightarrow[X]{} 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\text{т. е.} \quad \sup_{x \in X} |r_n(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

**Теорема 2.** (Критерий Коши.) Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  сходится равномерно на множестве  $X$  тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши равномерной сходимости ряда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X \hookrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \varepsilon. \quad (1)$$

**Доказательство** состоит в применении критерия Коши равномерной сходимости последовательности к последовательности частичных сумм ряда.  $\square$

**Следствие.** (Необходимое условие равномерной сходимости ряда.) Если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  сходится равномерно на множестве  $X$ , то  $u_n(x) \xrightarrow[X]{} 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** В силу критерия Коши из равномерной сходимости ряда следует условие Коши равномерной сходимости ряда (1). Полагая в условии (1)  $p = 1$ , получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \forall x \in X \hookrightarrow |u_{n+1}(x)| \leq \varepsilon,$$

т. е.  $u_n(x) \xrightarrow[X]{} 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . □

**Замечание.** Из необходимого условия равномерной сходимости ряда и следствия 2 § 1 вытекает, что если  $\exists \{x_k\} \subset X : u_k(x_k) \not\rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  не является равномерно сходящимся на множестве  $X$ .

**Замечание.** Существование последовательности  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$  такой, что числовой ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_k)$  расходится, не доказывает отсутствие равномерной сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  на множестве  $X$ .

Действительно, пусть, например,

$$u_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & x \in \left[\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}\right), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Остаток ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  имеет вид

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & x \in \left[\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}\right), k \geq n+1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поскольку  $|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , то  $r_n(x) \xrightarrow[(0,1)]{} 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , и

ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  сходится равномерно на интервале  $(0, 1)$ . Тем не менее

числовой ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k\left(\frac{1}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  расходится.

**Теорема 3.** (Обобщенный признак сравнения.) Пусть  $\forall k \in \mathbb{N} \forall x \in X \hookrightarrow |u_k(x)| \leq v_k(x)$  и ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$  сходится равномерно на множестве  $X$ . Тогда ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  сходится равномерно на множестве  $X$ .

**Доказательство.** В силу критерия Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X \hookrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Используя неравенство  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) \right|$ , имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X \hookrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Еще раз применяя критерий Коши, получаем доказываемое утверждение.  $\square$

**Следствие.** Если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$  сходится равномерно на множестве  $X$ , то  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  сходится равномерно на множестве  $X$ .

**Теорема 4.** (Признак Вейерштрасса.) Если  $\forall k \in \mathbb{N} \forall x \in X \quad |u_k(x)| \leq a_k$  и числовой ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится, то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  сходится равномерно на множестве  $X$ .

**Доказательство** состоит в применении обобщенного признака сравнения для  $v_k(x) = a_k$ .  $\square$

**Теорема 5.** (Признак Дирихле.) Пусть на множестве  $X$  заданы две функциональные последовательности  $\{a_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  и  $\{b_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ , удовлетворяющие условиям:

- 1) последовательность частичных сумм  $A_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x)$  ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$  равномерно ограничена, т.е. существует число  $C$ , не зависящее от  $x$  и от  $n$ :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \hookrightarrow |A_n(x)| \leq C;$$

$$2) \quad b_k(x) \xrightarrow[X]{} 0 \text{ при } k \rightarrow \infty;$$

$$3) \quad \forall x \in X \quad \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow b_{k+1}(x) \leq b_k(x).$$

Тогда ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$  равномерно сходится на множестве  $X$ .

**Доказательство.** Выполним преобразование Абеля:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(x) &= \sum_{k=1}^n (A_k(x) - A_{k-1}(x)) b_k(x) = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k(x) b_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x) b_{k+1}(x) \quad A_0(x) \stackrel{=}{=} 0 \\ &= A_n(x) b_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x) (b_k(x) - b_{k+1}(x)). \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что  $\sum_{k=1}^n (b_k(x) - b_{k+1}(x)) = b_1(x) - b_{n+1}(x) \xrightarrow[X]{} b_1(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k(x) - b_{k+1}(x))$  равномерно сходится, следовательно, равномерно сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} C (b_k(x) - b_{k+1}(x))$ . Поскольку  $|A_k(x)| \leq C$ ,  $b_k(x) - b_{k+1}(x) \geq 0$ , то  $|A_k(x) (b_k(x) - b_{k+1}(x))| \leq C (b_k(x) - b_{k+1}(x))$ , и в силу обобщенного признака сравнения получаем равномерную сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(x) (b_k(x) - b_{k+1}(x))$ , т. е. существует функция  $S(x)$ :

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k(x) (b_k(x) - b_{k+1}(x)) \xrightarrow[X]{} S(x) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

В силу леммы 1 § 1 из равномерной сходимости последовательности  $\{b_n(x)\}$  к 0 и равномерной ограниченности последовательности  $\{A_n(x)\}$  следует, что  $A_n(x) b_n(x) \xrightarrow[X]{} 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда и из соотношений (2), (3) следует, что

$$\sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(x) \xrightarrow[X]{} S(x) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

т. е. ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$  равномерно сходится на множестве  $X$ .  $\square$

**Задача 1.** Останется ли справедливым признак Дирихле, если в нем условие 3) заменить

- а) условием  $\forall x \in X \exists N : \forall k \geq N \hookrightarrow b_{k+1}(x) \leq b_k(x)$ ;
- б) условием  $\exists N : \forall x \in X \forall k \geq N \hookrightarrow b_{k+1}(x) \leq b_k(x)$  ?

**Теорема 6.** (Признак Лейбница.) Пусть  $\forall k \in \mathbb{N} \forall x \in X \hookrightarrow b_{k+1}(x) \leq b_k(x)$  и  $b_k(x) \xrightarrow[X]{} 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда ряд Лейбни-

ца  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k(x)$  равномерно сходится.

**Доказательство.** Обозначим  $a_k(x) = (-1)^k$ . Тогда  $\left| \sum_{k=1}^n a_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1$ . В силу признака Дирихле ряд Лейбница сходится.  $\square$

**Теорема 7.** (Признак Абеля.) Пусть на множестве  $X$  заданы две функциональные последовательности  $\{a_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  и  $\{b_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ , удовлетворяющие условиям:

- 1) ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$  равномерно сходится на множестве  $X$ ;
- 2) последовательность  $\{b_k(x)\}$  равномерно ограничена, т. е.

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall k \in \mathbb{N} \forall x \in X \hookrightarrow |b_k(x)| \leq C; \quad (4)$$

$$3) \forall x \in X \quad \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow b_{k+1}(x) \leq b_k(x).$$

Тогда ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$  равномерно сходится на множестве  $X$ .

**Доказательство.**

Для любых  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in X$  определим  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)$ . Так как  $R_{n-1}(x) - R_n(x) = a_n(x)$ , то

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) &= \sum_{k=n+1}^{n+p} (R_{k-1}(x) - R_k(x)) b_k(x) = \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} R_{k-1}(x) b_k(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p} R_k(x) b_k(x) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=n}^{n+p-1} R_k(x) b_{k+1}(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p} R_k(x) b_k(x) = \\
&= R_n(x) b_{n+1}(x) - R_{n+p}(x) b_{n+p+1}(x) + \\
&\quad + \sum_{k=n+1}^{n+p} R_k(x) (b_{k+1}(x) - b_k(x)). \tag{6}
\end{aligned}$$

Для любого  $n \in \mathbb{N}$  обозначим  $M_n = \sup_{k \geq n} \sup_{x \in X} |R_k(x)|$ . Так как ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$  равномерно сходится на множестве  $X$ , то  $\sup_{x \in X} |R_k(x)| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $M_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Поскольку для любого  $p \in \mathbb{N}$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} R_k(x) (b_k(x) - b_{k+1}(x)) \right| \leq M_n \sum_{k=n+1}^{n+p} |b_k(x) - b_{k+1}(x)| = \\
&= M_n \sum_{k=n+1}^{n+p} (b_k(x) - b_{k+1}(x)) = M_n (b_{n+1}(x) - b_{n+p+1}(x)) \stackrel{(4)}{\leq} 2CM_n,
\end{aligned}$$

то из равенства (6) для любых  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in X$  имеем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) \right| \leq 4CM_n.$$

Так как  $M_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow 4CM_n \leq \varepsilon$ . Поэтому

$$\forall \varepsilon \exists N : \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X \hookrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Применяя критерий Коши (теорему 2), получаем равномерную сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$  на множестве  $X$ .  $\square$

Непосредственно из признака Абеля вытекает следующее утверждение, позволяющее в некоторых случаях упрощать функциональный ряд при исследовании его равномерной сходимости.

**Следствие.** Пусть на множестве  $X$  заданы две функциональные последовательности  $\{a_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  и  $\{b_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ , причем

$$\exists m > 0 \exists M > 0 : \forall k \in \mathbb{N} \forall x \in X \hookrightarrow m \leq b_k(x) \leq M$$

и  $\forall x \in X \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow b_{k+1}(x) \leq b_k(x)$ . Тогда на множестве  $X$  равномерная сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$  эквивалентна равномерной сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ .

Исследование ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  на равномерную сходимость на множестве  $X$  можно проводить по следующему плану:

- 1) Если существует такое  $x_0 \in X$ , что числовой ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$  расходится, то функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  не является поточечно (а значит, и равномерно) сходящимся на  $X$ .
- 2) Если существует последовательность точек  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$  такая, что  $u_k(x_k) \not\rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то не выполняется необходимое условие равномерной сходимости ряда, и, следовательно, ряд не сходится равномерно.
- 3) Если выполняются условия признака Вейерштрасса, то ряд сходится равномерно.
- 4) Если выполняются условия признака Лейбница, то ряд сходится равномерно.
- 5) Если с помощью следствия из признака Абеля возможно свести исследование исходного ряда к исследованию более простого ряда, сделать это.
- 6) Если выполняются условия признака Дирихле, то ряд сходится равномерно.
- 7) Если выполняется отрицание к условию Коши равномерной сходимости ряда

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N \exists p \in \mathbb{N} \exists x \in X : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| > \varepsilon,$$

то ряд не сходится равномерно. (Важно, что в отрицании условия Коши равномерной сходимости ряда точка  $x$  может зависеть от  $N$ , но не должна зависеть от индекса суммирования  $k$ .)

При решении конкретной задачи нужно найти тот из пунктов 1)–7), условия которого выполняются, затем это нужно обосновать и тем самым завершить исследование равномерной сходимости ряда.

**Пример.** Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$  на отрезках  $[0, \pi]$  и  $[\delta, \pi]$ , где  $\delta \in (0, \pi)$ .

**Решение.** 1) При  $\alpha \leq 0$  члены ряда  $\frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$  не стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$  (т.к., например, при  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $k = 1 + 4n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  имеем  $\frac{\sin(kx)}{k^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha} \not\rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ ). Следовательно, при  $\alpha \leq 0$  данный ряд не является поточечно сходящимся на отрезках  $[0, \pi]$  и  $[\delta, \pi]$ .

2) При  $\alpha > 1$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$  сходится равномерно на отрезке  $[0, \pi]$  (а значит, и на отрезке  $[\delta, \pi]$ ). Это следует из признака Вейерштрасса, поскольку  $\left| \frac{\sin(kx)}{k^\alpha} \right| \leq \frac{1}{k^\alpha}$ , и числовой ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  сходится при  $\alpha > 1$ .

3) Покажем, что при  $\alpha > 0$  данный ряд сходится поточечно на отрезке  $[0, \pi]$ .

Пусть  $x \in (0, \pi]$ . Покажем, что частичные суммы ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)$  ограничены. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sin(kx) &= \frac{1}{\sin(x/2)} \sum_{k=1}^n \sin(kx) \sin(x/2) = \\ &= -\frac{1}{2\sin(x/2)} \sum_{k=1}^n \left( \cos\left((k + \frac{1}{2})x\right) - \cos\left((k - \frac{1}{2})x\right) \right) = \\ &= -\frac{1}{2\sin(x/2)} \left( \cos\left((n + \frac{1}{2})x\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin(kx) \right| \leq \frac{1}{\sin(x/2)} \quad \forall x \in (0, \pi] \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Так как при  $\alpha > 0$  последовательность  $\left\{ \frac{1}{k^\alpha} \right\}$  монотонно стремится к нулю, то в силу признака Дирихле для числовых рядов  $\forall x \in (0, \pi]$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$  сходится. Поскольку в точке  $x = 0$ :  $\frac{\sin(kx)}{k^\alpha} = 0$ , данный ряд сходится и в точке  $x = 0$ . Таким образом, при  $\alpha > 0$

ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$  сходится поточечно на отрезке  $[0, \pi]$  (следовательно, и на отрезке  $[\delta, \pi]$ ).

4) Покажем, что при  $\alpha > 0$  данный ряд сходится равномерно на  $[\delta, \pi]$ . Из (5) следует, что

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin(kx) \right| \leq \frac{1}{\sin(\delta/2)} \quad \forall x \in [\delta, \pi] \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, частичные суммы ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)$  равномерно ограничены на  $[\delta, \pi]$ . Так как при  $\alpha > 0$  последовательность  $\left\{ \frac{1}{k^\alpha} \right\}$  монотонно стремится к нулю, то в силу признака Дирихле для функциональных рядов данный ряд сходится равномерно на  $[\delta, \pi]$  при  $\alpha > 0$ .

5) Покажем, что при  $\alpha \leq 1$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$  не является равномерно сходящимся на  $[0, \pi]$ , так как выполняется отрицание условия Коши равномерной сходимости этого ряда:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N \exists p \in \mathbb{N} \exists x \in [0, \pi] : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha} \right| \geq \varepsilon.$$

Положим  $p = n = N$ ,  $x = \frac{\pi}{4N}$ , тогда для любого  $k \in \{n+1, n+2, \dots, n+p\} = \{N+1, \dots, 2N\}$  выполняется  $kx \in \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$  и, следовательно,  $\sin(kx) \geq \sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha} &= \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k^\alpha} \geq \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2N} N = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}} : \forall N \in \mathbb{N} \exists n = N \exists p = N \exists x = \frac{\pi}{4N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha} \right| \geq \varepsilon.$$

Следовательно, в силу критерия Коши ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$  не является равномерно сходящимся на  $[0, \pi]$  при  $\alpha \leq 1$ . Отсюда и из пункта (3) следует, что при  $\alpha \in (0, 1]$  данный ряд сходится неравномерно на  $[0, \pi]$ .

**Ответ.** Данный ряд на отрезке  $[0, \pi]$ : расходится при  $\alpha \leq 0$ , сходится неравномерно при  $\alpha \in (0, 1]$ , сходится равномерно при  $\alpha > 1$ ; на отрезке  $[\delta, \pi]$ : расходится при  $\alpha \leq 0$ , сходится равномерно при  $\alpha > 0$ .  $\square$

### § 3. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

**Теорема 1.** (О непрерывности предельной функции.) Если последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  непрерывных на множестве  $X$  функций сходится к функции  $f(x)$  равномерно на множестве  $X$ , то функция  $f(x)$  непрерывна на множестве  $X$ .

**Доказательство.** Зафиксируем произвольные  $x_0 \in X$  и  $\varepsilon > 0$ . Требуется доказать существование числа  $\delta > 0$  такого, что

$$\forall x \in X \cap U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (1)$$

По определению равномерной сходимости существует число  $N \in \mathbb{N}$ , удовлетворяющее условию  $\forall n \geq N \forall x \in X \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ . В частности:

$$\forall x \in X \hookrightarrow |f_N(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (2)$$

Поскольку функция  $f_N(x)$  непрерывна на множестве  $X$ , то существует число  $\delta > 0$  такое, что

$$\forall x \in X \cap U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

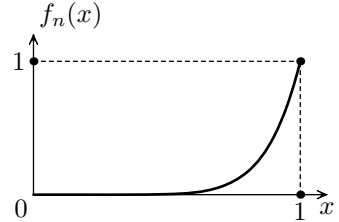
Из соотношений (2) и (3) получаем

$$\begin{aligned} \forall x \in X \cap U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + \\ &+ |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо соотношение (1).  $\square$

**Замечание.** Из поточечной сходимости последовательности непрерывных функций  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  к функции  $f(x)$  не следует непрерывность функции  $f(x)$ .

Например, последовательность непрерывных функций  $f_n(x) = x^n$  сходится на отрезке  $[0, 1]$  к разрывной функции  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [0, 1), \\ 1, & \text{если } x = 1. \end{cases}$



**Теорема 2.** (О непрерывности суммы ряда.) Если функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  сходится равномерно на множестве  $X$  и все функции  $u_k(x)$  непрерывны на множестве  $X$ , то сумма ряда является непрерывной функцией.

**Доказательство** состоит в применении теоремы 1 к последовательности частичных сумм ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ .

**Теорема 3.** (Об интегрировании предельной функции.) Пусть последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций сходится равномерно на  $[a, b]$  к функции  $f(x)$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right) = \int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx.$$

**Доказательство.** Из теоремы 1 следует, что функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , а значит, интегрируема по Риману на этом отрезке. По теореме об интегрировании неравенств

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|.$$

Так как  $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $\int_a^b f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ .  $\square$

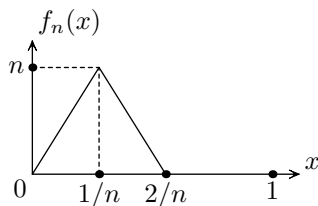
**Замечание.** Из поточечной сходимости  $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  не следует, что  $\int_a^b f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ .

Пусть, например,  

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 2n - n^2 x, & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0, & x \in [\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

Тогда  $f_n(x) \xrightarrow{[0,1]} 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , но

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \not\rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$



**Теорема 4.** (О почленном интегрировании ряда.) Если функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  сходится равномерно на отрезке  $[a, b]$  и все функции  $u_k(x)$  непрерывны на  $[a, b]$ , то числовой ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_a^b u_k(x) dx \right)$  сходится к интегралу от суммы ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ , т. е. справедлива формула почленного интегрирования ряда:

$$\int_a^b \left( \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_a^b u_k(x) dx \right).$$

**Доказательство.** Применяя теорему 3 к последовательности частичных сумм  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ , получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_a^b u_k(x) dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \int_a^b u_k(x) dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b S_n(x) dx \right) \stackrel{\text{Т. 3}}{=} \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx.$$

$$\stackrel{\text{T.3}}{=} \int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \right) dx = \int_a^b \left( \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) dx. \quad \square$$

**Теорема 5.** (О дифференцировании предельной функции.) Пусть последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  непрерывно дифференцируемых на отрезке  $[a, b]$  функций сходится хотя бы в одной точке  $x_0 \in [a, b]$ , а последовательность производных  $\{f'_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится равномерно на  $[a, b]$ . Тогда последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится равномерно на  $[a, b]$  к некоторой непрерывно дифференцируемой функции  $f(x)$ , причем

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad \forall x \in [a, b]. \quad (4)$$

**Доказательство.** По условию существует функция  $\varphi(x)$ :  $f'_n(x) \xrightarrow{[a,b]} \varphi(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поскольку функции  $f'_n(x)$  непрерывны, то в силу теоремы 1 функция  $\varphi(x)$  непрерывна. Из условия теоремы следует также, что существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = A \in \mathbb{R}$ . Определим функцию  $f(x) = A + \int_{x_0}^x \varphi(t) dt$ . Заметим, что  $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$ , следовательно,  $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x_0) - A| + \int_{x_0}^x |f'_n(t) - \varphi(t)| dt$ . Поэтому

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x_0) - A| + (b - a) \sup_{t \in [a,b]} |f'_n(t) - \varphi(t)|.$$

Поскольку  $f'_n(x) \xrightarrow{[a,b]} \varphi(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\sup_{t \in [a,b]} |f'_n(t) - \varphi(t)| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \\ & \leq |f_n(x_0) - A| + (b - a) \sup_{t \in [a,b]} |f'_n(t) - \varphi(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

т. е.  $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Из определения функции  $f(x)$  следует, что  $f'(x) = \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ .  $\square$

**Замечание.** Из того, что последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  непрерывно дифференцируемых на отрезке  $[a, b]$  функций равномерно сходится к функции  $f(x)$  не следует соотношение (4).

Например, последовательность функций  $f_n(x) = \frac{\arctg nx}{n}$  сходится к функции  $f(x) = 0$  равномерно на отрезке  $[0, 1]$ , однако в точке  $x = 0$  имеем  $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\right)' = f'(x) = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ .

**Теорема 6.** (О почленном дифференцировании ряда.) Пусть функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  сходится хотя бы в одной точке  $x_0 \in [a, b]$ , все функции  $u_k(x)$  непрерывно дифференцируемы на  $[a, b]$ , и ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$  сходится равномерно на  $[a, b]$ . Тогда ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  сходится равномерно на  $[a, b]$  и справедлива формула почленного дифференцирования ряда

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

**Доказательство.** Применяя теорему 5 к последовательности частичных сумм  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ , получаем, что эта последовательность равномерно сходится на  $[a, b]$  и для любого  $x \in [a, b]$  справедливо равенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)\right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x). \quad \square$$

## СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

§ 1. Обобщенный признак Коши сходимости  
числового ряда

Напомним, что верхним пределом числовой последовательности  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  называется точная верхняя грань множества всех (конечных и бесконечных) частичных пределов последовательности  $\{x_k\}$ :

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_k = \\ = \sup \left\{ A \in \overline{\mathbb{R}} : \exists \text{ подпослед. } \{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} : A = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} \right\}. \end{aligned}$$

**Лемма 1.** Если  $A > \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_k$ , то

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 \hookrightarrow x_k \leq A.$$

**Доказательство.** Предположим противное:  $\forall k_0 \in \mathbb{N} \exists k \geq k_0 : x_k > A$ . Тогда существует подпоследовательность  $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$  последовательности  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  такая, что

$$\forall j \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{k_j} > A. \quad (1)$$

В силу теоремы Больцано–Вейерштрасса любая числовая последовательность имеет конечный или бесконечный частичный предел. Пусть  $B \in \overline{\mathbb{R}}$  – некоторый частичный предел последовательности  $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ . Из условия (1) в силу теоремы о предельном переходе в неравенствах следует, что  $B \geq A$ . Поскольку  $B$  является частичным пределом последовательности  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ , то по определению супремума  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \geq B \geq A$ , что противоречит условию леммы.  $\square$

**Теорема 1.** (Обобщенный признак Коши сходимости числового ряда.) Пусть все члены числового ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  неотрицательны и пусть  $q = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}$ . Тогда

- а) если  $q < 1$ , то ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  сходится;
- б) если  $q > 1$ , то  $a_k \not\rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , и ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  расходится;
- в) если  $q = 1$ , то ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  может сходиться, а может и расходиться.

**Доказательство.** а) Пусть  $q < 1$ . Определим некоторое  $q'$  из условия  $q < q' < 1$ . Поскольку  $q' > q = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} \sqrt[k]{a_k}$ , то в силу леммы 1 имеем  $\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 \hookrightarrow \sqrt[k]{a_k} \leq q'$ . Отсюда в силу признака Коши в допределной форме (теорема 5 § 2 главы 9) следует сходимость ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .

б) Пусть  $q > 1$ . Поскольку  $q = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} \sqrt[k]{a_k}$  является супремумом множества частичных пределов последовательности  $\{\sqrt[k]{a_k}\}$ , то в силу определения супремума из неравенства  $q > 1$  следует, что существует  $q' > 1$  – частичный предел последовательности  $\{\sqrt[k]{a_k}\}$ . Это означает существование подпоследовательности  $\{\sqrt[k_j]{a_{k_j}}\}$  такой, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt[k_j]{a_{k_j}} = q' > 1$ . Отсюда по определению предела получаем  $\exists j_0 \in \mathbb{N} : \forall j > j_0 \hookrightarrow \sqrt[k_j]{a_{k_j}} \geq 1$  и, следовательно,  $\forall j > j_0 \hookrightarrow a_{k_j} \geq 1$ . Поэтому  $a_{k_j} \not\rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ , а значит,  $a_k \not\rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  и ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  расходится.

в) Для ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  имеем  $q = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \right)^\alpha = 1$ , а как показано ранее, при  $\alpha > 1$  этот ряд сходится, а при  $\alpha \leq 1$  – расходится.  $\square$

## § 2. Комплексные ряды

Напомним, что модулем комплексного числа  $z = x + iy$  (где  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ ) называется вещественное число  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Определение.** Комплексное число  $S$  называется *пределом* последовательности комплексных чисел  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  ( $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ), если  $\lim_{n \rightarrow \infty} |S - S_n| = 0$ .

Заметим, что

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad \Leftrightarrow \quad \left( \operatorname{Re} S = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} S_n \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} S = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} S_n \right). \quad (1)$$

**Определение.** Пусть задана последовательность комплексных чисел  $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ . Ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности частичных сумм этого ряда. Комплексный ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  называется *абсолютно сходящимся*, если сходится вещественный ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$ .

Из условия (1) следует, что сходимость комплексного ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  эквивалентна сходимости двух вещественных рядов  $\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} c_k$  и  $\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im} c_k$ .

**Лемма 1.** Если комплексный ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  сходится абсолютно, то он сходится.

**Доказательство.** Обозначим  $a_k = \operatorname{Re} c_k$ ,  $b_k = \operatorname{Im} c_k$ . Поскольку  $|a_k| \leq \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = |c_k|$ , то в силу признака сравнения из сходимости ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$  следует абсолютная сходимость вещественного числового ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ , а значит, и его сходимость. Аналогично получаем сходимость вещественного числового ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ . Следовательно, комплексный ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + ib_k)$  сходится.  $\square$

**Определение.** Пусть на некотором множестве комплексных чисел  $Z \subset \mathbb{C}$  задана последовательность комплекснозначных функций  $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ . Будем говорить, что последовательность комплекснозначных функций  $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$  *сходится* к функции  $S(z)$  *равномерно* на множестве  $Z$ , если последовательность вещественнозначных функций  $\{|S_n(z) - S(z)|\}_{n=1}^{\infty}$  сходится к 0 равномерно на множестве  $Z$ .

**Определение.** Будем говорить, что комплексный функциональный ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$  *сходится равномерно* на множестве  $Z$ , если последовательность частичных сумм  $S_n(z) = \sum_{k=0}^n u_k(z)$  этого ряда сходится равномерно к сумме  $S(z)$  этого ряда, т. е.  $|S_n(z) - S(z)| \xrightarrow[Z]{\rightarrow} 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Теорема 1.** (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости комплексного ряда.) Пусть на множестве  $Z \subset \mathbb{C}$  задан комплексный функциональный ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ . Пусть  $\forall k \in \mathbb{N} \forall z \in Z \hookrightarrow |u_k(z)| \leq a_k$  и пусть вещественный числовой ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  сходится. Тогда ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$  сходится равномерно на множестве  $Z$ .

**Доказательство.** В силу признака сравнения вещественный числовой ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k(z)|$  сходится для любого  $z \in Z$ . Отсюда в силу леммы 1 получаем поточечную сходимость функционального ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$  на множестве  $Z$ , т. е.  $\forall z \in Z \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = S(z) \in \mathbb{C}$ , где  $S_n(z) = \sum_{k=0}^n u_k(z)$ . Заметим, что

$$|S_n(z) - S(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rightarrow} 0,$$

следовательно,  $\sup_{z \in Z} |S_n(z) - S(z)| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е.  $|S_n(z) - S(z)| \xrightarrow[Z]{\rightarrow} 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

### § 3. Степенные ряды

**Определение.** Пусть задана последовательность комплексных чисел  $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$  и комплексное число  $w_0$ . Комплексный функциональный ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(w - w_0)^k$  с комплексной переменной  $w$  называется *степенным рядом*.

Введение комплексной переменной  $z = w - w_0$  сводит ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(w - w_0)^k$  к ряду  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ . Имея в виду эту замену переменной, в дальнейшем будем рассматривать степенные ряды вида  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ .

**Определение.** *Радиусом сходимости* степенного ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  называется  $R_{\text{сх}} \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ , определяемое по *формуле Коши–Адамара*:

$$\frac{1}{R_{\text{сх}}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} \quad (1)$$

(при этом будем полагать, что  $\frac{1}{0} = +\infty$ ,  $\frac{1}{+\infty} = 0$ ).

Круг на комплексной плоскости с центром в нуле и радиусом  $R_{\text{сх}}$  называется *кругом сходимости* степенного ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ . Если  $R_{\text{сх}} = +\infty$ , то кругом сходимости считается вся комплексная плоскость  $\mathbb{C}$ .

**Теорема 1.** (О круге сходимости степенного ряда.)

Степенной ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

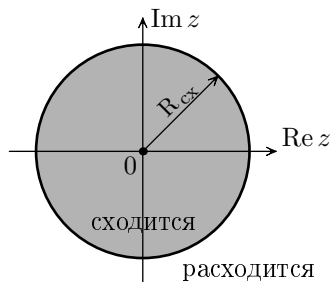
1) абсолютно сходится внутри круга сходимости

(т.е. на множестве  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R_{\text{сх}}\}$ ),

2) расходится вне круга сходимости (т.е. на множестве  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R_{\text{сх}}\}$ ),

3) на границе круга сходимости (т.е. на множестве  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R_{\text{сх}}\}$ ) может сходиться, а может и расходиться.

(Здесь  $R_{\text{сх}}$  – радиус сходимости степенного ряда.)



**Доказательство.** Зафиксируем произвольное комплексное число  $z \neq 0$  и исследуем сходимость ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$  с помощью обобщенного признака Коши. Определим

$$q = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k z^k|} = |z| \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{|z|}{R_{\text{сх}}}$$

(где при  $R_{\text{сх}} = 0$ ,  $|z| > 0$  следует положить  $q = +\infty$ ).

1) При  $z = 0$  ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$  состоит из нулей, а значит, сходится. Если  $0 < |z| < R_{\text{сх}}$ , то  $q < 1$  и в силу обобщенного признака Коши ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$  сходится, т. е. ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  сходится абсолютно.

2) Если  $|z| > R_{\text{сх}}$ , то  $q > 1$  и в силу обобщенного признака Коши члены ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$  не стремятся к нулю, следовательно, не стремятся к нулю и члены ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ , а значит, ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  расходится. (Заметим, что из расходимости ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$  не следует расходимость ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ , и поэтому важно, что ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$  не только расходится, но и его члены не стремятся к нулю.)

3) Рассмотрим, например, ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+1}$ . По формуле Коши–Адамара для радиуса сходимости  $R_{\text{сх}}$  имеем  $\frac{1}{R_{\text{сх}}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-\ln(k+1)/k} = e^0 = 1$ .

При  $z = 1$  исходный ряд имеет вид  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  и, как показано в § 2 главы 9, расходится. При  $z = -1$  исходный ряд имеет вид  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ . Этот ряд сходится в силу признака Лейбница (теорема 4 § 3 главы 9).  $\square$

**Теорема 2.** (Первая теорема Абеля.) Пусть степенной ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  сходится в точке  $z = z_0$ . Тогда в любой точке  $z = z_1$  такой, что  $|z_1| < |z_0|$  этот ряд сходится абсолютно.

**Доказательство.** Так как степенной ряд сходится в точке  $z = z_0$ , то в силу пункта 2) теоремы о круге сходимости радиус сходимости этого ряда удовлетворяет неравенству  $R_{\text{сх}} \geq |z_0|$ . Следовательно,  $|z_1| < |z_0| \leq R_{\text{сх}}$ , и согласно пункту 1) теоремы о круге сходимости в точке  $z = z_1$  степенной ряд сходится абсолютно.  $\square$

Следующая лемма дает альтернативный по отношению к формуле Коши–Адамара способ определения радиуса сходимости степенного ряда. Этот способ удобен в тех случаях, когда коэффициенты степенного ряда выражаются через факториал.

**Лемма 1.** Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$  и для последовательности  $\{c_k\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  существует конечный или бесконечный  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}$ . Тогда для радиуса сходимости  $R_{\text{сх}}$  степенного ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{mk+n}$  справедлива формула

$$\frac{1}{R_{\text{сх}}} = \sqrt[m]{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}}.$$

**Доказательство.** Определим  $R_1 \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$  из условия  $\frac{1}{R_1} = \sqrt[m]{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}}$  и исследуем сходимость числового ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^{mk+n}|$  с помощью признака Даламбера в предельной форме (следствие из теоремы 4 § 2 главы 9). Определим

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_{k+1} z^{m(k+1)+n}|}{|c_k z^{mk+n}|} = \frac{|z|^m}{R_1^m}.$$

Согласно признаку Даламбера ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^{mk+n}|$  сходится при  $q < 1$ , т. е. при  $|z| < R_1$ , и расходится при  $q > 1$ , т. е. при  $|z| > R_1$ .

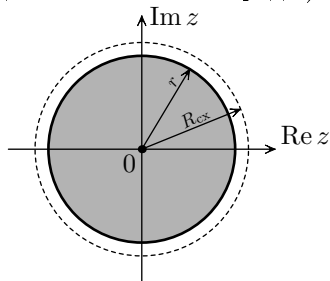
Пусть  $R_{\text{сх}}$  – радиус сходимости степенного ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{mk+n}$ . В силу теоремы 1 ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^{mk+n}|$  сходится при  $|z| < R_{\text{сх}}$  и расходится при  $|z| > R_{\text{сх}}$ .

Следовательно,  $R_1 = R_{\text{сх}}$  и  $\frac{1}{R_{\text{сх}}} = \frac{1}{R_1} = \sqrt[m]{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}}$ . □

**Замечание.** Из леммы 1 следует, что если существует конечный или бесконечный  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}$ , то радиусы сходимости рядов  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{2k}$  и  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{2k+1}$  могут быть определены формулой  $\frac{1}{R_{\text{сх}}} = \sqrt{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}}$ .

**Теорема 3.** (О равномерной сходимости степенного ряда.)

Пусть  $R_{\text{сх}} > 0$  – радиус сходимости степенного ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ . Тогда для любого числа  $r \in (0, R_{\text{сх}})$  ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  сходится равномерно в круге  $Z = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ .



**Доказательство.** Заметим, что  $\forall z \in Z \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow |c_k z^k| \leq |c_k| r^k$ . Поскольку  $|r| = r < R_{\text{сх}}$ , то в силу теоремы 1 числовой ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k r^k|$  сходится. Отсюда и из признака Вейерштрасса равномерной сходимости комплексного ряда (теорема 1 § 2) следует равномерная сходимость ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  на множестве  $Z$ .  $\square$

**Замечание.** В самом круге сходимости, т. е. на множестве  $Z = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R_{\text{сх}}\}$  степенной ряд может сходиться неравномерно. Например, ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$  имеет радиус сходимости  $R_{\text{сх}} = 1$ , но на множестве  $Z = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  этот ряд сходится неравномерно, так как не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Действительно,  $\sup_{z \in Z} |z^k| = 1 \not\rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , следовательно,  $z^k \not\rightarrow_Z 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**Теорема 4.** (Вторая теорема Абеля.) Пусть степенной ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  сходится в точке  $z_1 \in \mathbb{C}$ . Тогда этот ряд сходится равномерно на отрезке  $[0, z_1] = \{tz_1 : t \in [0, 1]\}$ .

**Доказательство.** При  $z = tz_1$  имеем  $c_k z^k = c_k z_1^k t^k = a_k(t) b_k(t)$ , где  $a_k(t) = c_k z_1^k$ ,  $b_k(t) = t^k$ . По условию числовой ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k$  сходится, а значит, функциональный ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)$  сходится равномерно на любом множестве. Функциональная последовательность  $\{b_k(t)\}$  равномерно ограничена на отрезке  $[0, 1]$  и монотонна по  $k$  ( $0 \leq b_{k+1}(t) \leq b_k(t) \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1]$ ). В силу

признака Абеля ряды  $\sum_{k=0}^{\infty} (\operatorname{Re} a_k(t)) b_k(t)$  и  $\sum_{k=0}^{\infty} (\operatorname{Im} a_k(t)) b_k(t)$  сходятся равномерно на  $[0, 1]$ . Поэтому ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) b_k(t)$  сходится равномерно на  $[0, 1]$ , а значит, ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  сходится равномерно на отрезке  $[0, z_1]$ .  $\square$

**Теорема 5.** Радиусы сходимости степенных рядов  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k k z^{k-1}$  и  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1}$ , полученных формальным почленным дифференцированием и интегрированием степенного ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ , совпадают с радиусом сходимости исходного ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ .

**Доказательство.** Покажем сначала, что радиус сходимости  $R_1$  ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k k z^k$  равен радиусу сходимости  $R$  исходного ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ . В силу формулы Коши–Адамара имеем

$$\frac{1}{R_1} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k| k} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{R}.$$

(Здесь мы воспользовались тем, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{\ln k/k} = e^0 = 1$ .)

Следовательно,  $R_1 = R$ .

Покажем теперь, что ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k z^k$  и ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k k z^{k-1}$  сходятся или расходятся одновременно. При  $z = 0$  эти ряды, очевидно, сходятся. Пусть  $z \neq 0$ . Обозначим  $S_n = \sum_{k=1}^n c_k k z^k$ ,  $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n c_k k z^{k-1}$ . Если существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{C}$ , то существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{z} = \frac{S}{z} \in \mathbb{C}$ . Обратно, если существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n = \tilde{S} \in \mathbb{C}$ , то существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = z \tilde{S}$ .

Следовательно, радиус сходимости  $R_1$  ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k k z^k$  равен радиусу сходимости  $R_2$  ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k k z^{k-1}$ . Итак,  $R_2 = R_1 = R$ , т. е. при почленном дифференцировании степенного ряда его радиус сходимости не изменяется.

Поскольку ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  получается при почленном дифференцировании ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1}$ , то радиусы сходимости этих рядов также совпадают.  $\square$

Далее мы будем рассматривать вещественные степенные ряды вида  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ , где  $a_k, x, x_0 \in \mathbb{R}$ . Поскольку вещественный степенной ряд можно рассматривать как комплексный степенной ряд, то радиус сходимости  $R_{\text{сх}}$  ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  можно определять из формулы Коши–Адамара или из леммы 1, в которых следует положить  $c_k = a_k$ . Интервал  $(x_0 - R_{\text{сх}}, x_0 + R_{\text{сх}})$  называется интервалом сходимости ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ .

**Теорема 6.** Пусть вещественный степенной ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = f(x)$  имеет радиус сходимости  $R_{\text{сх}} > 0$ . Тогда

1) для любого  $x \in (x_0 - R_{\text{сх}}, x_0 + R_{\text{сх}})$  справедлива формула почленного интегрирования степенного ряда:

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1};$$

2) в интервале сходимости  $(x_0 - R_{\text{сх}}, x_0 + R_{\text{сх}})$  функция  $f$  имеет производные любого порядка, получаемые почленным дифференцированием ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k ((x - x_0)^k)^{(n)} \quad \forall x \in (x_0 - R_{\text{сх}}, x_0 + R_{\text{сх}}); \quad (2)$$

3) коэффициенты степенного ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = f(x)$  однозначно определяются по функции  $f(x)$  с помощью формулы  $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ .

**Доказательство.** 1) Для любого  $x \in (x_0 - R_{\text{сх}}, x_0 + R_{\text{сх}})$  определим число  $r \in (0, R_{\text{сх}})$  из условия  $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ . В силу теоремы о равномерной сходимости степенного ряда ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - x_0)^k$  равномерно сходится на отрезке  $[x_0 - r, x_0 + r]$ . Отсюда по теореме о почленном интегрировании равномерно сходящегося функционального ряда (теорема 4 § 3 главы 10) следует, что

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{x_0}^x (t - x_0)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}.$$

2) Покажем, что для любого  $x \in (x_0 - R_{\text{сх}}, x_0 + R_{\text{сх}})$  существует конечная производная  $f'(x)$ , причем  $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (x - x_0)^{k-1}$ . Зафиксируем произвольное  $x \in (x_0 - R_{\text{сх}}, x_0 + R_{\text{сх}})$  и определим число  $r \in (0, R_{\text{сх}})$  из условия  $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ .

В силу теоремы 5 радиус сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k k (t - x_0)^{k-1}$ , полученного почленным дифференцированием ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - x_0)^k$ , равен  $R_{\text{сх}}$ . Следовательно, в силу неравенства  $r < R_{\text{сх}}$  и теоремы о равномерной сходимости степенного ряда этот ряд сходится равномерно на отрезке  $[x_0 - r, x_0 + r]$ . Поэтому согласно теореме о почленном дифференцировании функционального ряда (теорема 6 § 3 главы 10) ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - x_0)^k$  можно дифференцировать почленно на отрезке  $[x_0 - r, x_0 + r]$ . В частности, существует  $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (x - x_0)^{k-1}$ . Следовательно, при  $n = 1$  справедлива формула (2).

Проводя те же рассуждения для ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k k (x - x_0)^{k-1} = f'(x)$ , получаем формулу (2) при  $n = 2$  и так далее. По индукции формула (2) справедлива для любого  $n \in \mathbb{N}$ , что доказывает второе утверждение теоремы.

3) Заметим, что

$$((x - x_0)^k)^{(n)} = \begin{cases} k(k-1) \cdots (k-n+1) (x - x_0)^{k-n}, & k \geq n, \\ 0, & k < n, \end{cases}$$

$$\text{следовательно, } ((x - x_0)^k)^{(n)}|_{x=x_0} = \begin{cases} n!, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Отсюда и из формулы (2) следует, что  $f^{(n)}(x_0) = a_n n!$ , что доказывает утверждение третьего пункта теоремы.  $\square$

## § 4. Ряд Тейлора

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется *бесконечно дифференцируемой* в точке  $x_0$ , если в этой точке существуют производные любого порядка функции  $f$ .

**Определение.** Пусть функция  $f(x)$  бесконечно дифференцируема в точке  $x_0$ . Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

называется *рядом Тейлора* функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется *регулярной* в точке  $x_0$ , если она бесконечно дифференцируема в этой точке и ряд Тейлора функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  сходится к функции  $f(x)$  в некоторой окрестности точки  $x_0$ :

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_{\delta}(x_0) \hookrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

**Замечание.** Из пункта (3) теоремы 6 § 3 следует, что если функция  $f(x)$  может быть представлена как сумма степенного ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  с радиусом сходимости  $R_{\text{сх}} > 0$ , то этот ряд является рядом Тейлора функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ . В этом случае функция  $f$  является регулярной в точке  $x_0$ .

**Замечание.** Ряд Тейлора в точке  $x_0$  бесконечно дифференцируемой функции  $f(x)$  может сходиться не к функции  $f(x)$ , а к некоторой другой функции, не совпадающей с  $f(x)$  в сколь угодно малой

окрестности точки  $x_0$ . В этом случае функция  $f(x)$  не является регулярной в точке  $x_0$ .

Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Заметим, что  $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^k} e^{-1/x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{k/2} e^{-t} = 0$ .

Отсюда следует, что

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \left( \frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4} \right) e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

По индукции легко показать, что

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_{3n}(1/x) e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

где  $P_{3n}(t)$  — многочлен степени  $3n$  от  $t$ .

Следовательно, все коэффициенты ряда Тейлора функции  $f(x)$  в точке  $x_0 = 0$  равны нулю. Поэтому сумма ряда Тейлора функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  равна нулю и не совпадает с функцией  $f(x)$  в сколь угодно малой окрестности точки  $x_0$ . Таким образом, хотя функция (1) бесконечно дифференцируема, она не является регулярной в точке  $x_0 = 0$ .

Напомним, что остаточным членом формулы Тейлора  $n$  раз дифференцируемой функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется

$$r_n(x) = f(x) - S_n(x), \quad \text{где } S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

**Замечание.** Остаточный член формулы Тейлора не всегда совпадает с остатком ряда Тейлора. Например, для функции (1)  $S_n(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , поэтому остаток ряда Тейлора тождественно равен нулю, а остаточный член формулы Тейлора  $r_n(x) = f(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$ .

Непосредственно из определений следует, что функция  $f(x)$  является регулярной в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0. \quad (2)$$

Как показывает пример функции (1), для доказательства регулярности функции недостаточно показать, что радиус сходимости ряда Тейлора этой функции  $R_{\text{сх}} > 0$ . Нужно проверить условие (2).

**Теорема 1.** (Достаточное условие регулярности.) Пусть существует число  $\delta > 0$  такое, что функция  $f$  бесконечно дифференцируема в  $U_\delta(x_0)$  и

$$\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Тогда функция  $f$  регулярна в точке  $x_0$  и

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (3)$$

**Доказательство.** В силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для любого  $x \in U_\delta(x_0)$  существует число  $\xi$ , лежащее между  $x$  и  $x_0$  (а значит,  $\xi \in U_\delta(x_0)$ ), такое, что  $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ . Следовательно,

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow |r_n(x)| \leq M \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (4)$$

Покажем, что  $\forall a > 0 \hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ .

Определим  $n_0 \in \mathbb{N}$  из условия  $n_0 > 2a$ , тогда при  $n > n_0$  имеем

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n_0}}{n_0!} \frac{a^{n-n_0}}{n(n-1) \cdots (n_0+1)} < \frac{a^{n_0}}{n_0!} \frac{a^{n-n_0}}{n_0^{n-n_0}} < \frac{a^{n_0}}{n_0!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Отсюда и из соотношения (4) получаем

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0.$$

Поэтому функция  $f$  регулярна в точке  $x_0$  и выполнено соотношение (3).  $\square$

## § 5. Ряды Тейлора для показательной, гиперболических и тригонометрических функций

**Определение.** Ряд Тейлора функции  $f(x)$  в точке  $x_0 = 0$  называется *рядом Маклорена* этой функции.

**Теорема 1.** Ряды Маклорена функций  $e^x$ ,  $\operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{sh} x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$  сходятся к этим функциям на всей числовой прямой: для любого  $x \in \mathbb{R}$  справедливы равенства

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad (1)$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (2)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}. \quad (3)$$

**Доказательство.** Так как для любого числа  $\delta > 0$  при  $x \in U_\delta(0) = (-\delta, \delta)$  справедливы соотношения  $|(e^x)^{(n)}| = e^x < e^\delta$ , то выполнено достаточное условие регулярности функции  $f(x) = e^x$  в точке  $x_0 = 0$  и по теореме 1 § 4 для любого числа  $\delta > 0$  справедливо соотношение (3) из § 4. Поэтому для любого  $x \in \mathbb{R}$  справедливо равенство (1). Аналогично, используя ограниченность последовательности всех производных функций  $\operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{sh} x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$  на любом интервале  $(-\delta, \delta)$  и применяя теорему 1 § 4, получаем равенства (2), (3).  $\square$

**Теорема 2.** Для любого  $z \in \mathbb{C}$  справедливо равенство

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

**Доказательство.** В силу теоремы 1 радиус сходимости степенного ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  равен  $+\infty$ . Поэтому согласно теореме о круге сходимости, этот ряд сходится абсолютно для любого  $z \in \mathbb{C}$ . Обозначим

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Зафиксируем произвольное комплексное число  $z = x + iy$ , где  $x, y \in \mathbb{R}$ . Требуется доказать равенство  $f(z) = e^z$ . Согласно определению экспоненты комплексного числа, данному в § 2 главы 4 требуется доказать равенство

$$f(z) = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (5)$$

Покажем сначала, что

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

По теореме о перемножении абсолютно сходящихся рядов (теорема 3 § 4 главы 9), которая для комплексных рядов доказывается точно так же, как и для вещественных, согласно равенству (4) имеем

$$f(z_1)f(z_2) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_1^{k_j}}{k_j!} \frac{z_2^{n_j}}{n_j!},$$

где  $\{(k_j, n_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$  – произвольная последовательность пар элементов множества  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ , задающая взаимно однозначное отображение  $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0^2$ . Выберем эту последовательность методом "диагоналей" т. е. так, что ее первый член – это пара  $(0, 0)$ , сумма элементов которой равна 0, следующие два элемента последовательности  $\{(k_j, n_j)\}$  – это пары с суммой элементов 1, затем 2 и т.д. Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_1^{k_j}}{k_j!} \frac{z_2^{n_j}}{n_j!} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{m-k}}{(m-k)!}.$$

Следовательно,

$$f(z_1)f(z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k! (m-k)!} z_1^k z_2^{m-k}.$$

Используя формулу бинома Ньютона и равенство (4), получаем

$$f(z_1)f(z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (z_1 + z_2)^m = f(z_1 + z_2).$$

Тем самым доказано соотношение (6).

Из равенства (4) следует, что

$$\begin{aligned} f(iy) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = \sum_{k-\text{четн.}} \frac{(iy)^k}{k!} + \sum_{k-\text{неч.}} \frac{(iy)^k}{k!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Поэтому согласно теореме 1 имеем  $f(iy) = \cos y + i \sin y$ . Из той же теоремы 1 и формулы (4) следует, что  $f(x) = e^x$  при  $x \in \mathbb{R}$ . Поэтому, используя равенство (6), получаем равенство (5).  $\square$

Определим гиперболические и тригонометрические функции комплексного переменного по формулам

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, & \operatorname{sh} z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \cos z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, & \sin z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}. \end{aligned}$$

Из теоремы 1 следует, что данные ряды сходятся при любом вещественном  $z$ . Отсюда и из теоремы о круге сходимости степенного ряда следует, что радиусы сходимости этих степенных рядов равны  $+\infty$ , т. е. эти ряды сходятся при любом  $z \in \mathbb{C}$ . Из теоремы 1 следует также, что при вещественном  $z$  определенные здесь функции совпадают с известными ранее гиперболическими и тригонометрическими функциями.

**Лемма 1.** Для любого комплексного числа  $z$  справедливы формулы Эйлера:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z, \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, & \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \end{aligned}$$

**Доказательство**

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos z + i \sin z.
\end{aligned}$$

Остальные формулы Эйлера следуют из первой.  $\square$

## § 6. Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме. Ряды Тейлора для степенной, логарифмической и других функций

Для того чтобы доказать регулярность степенной и некоторых других функций, нам потребуется представление остаточного члена формулы Тейлора в интегральной форме.

**Теорема 1.** (Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.) Если функция  $f(x)$  в окрестности  $U_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}$  имеет непрерывные производные до  $(n+1)$ -го порядка включительно, то для остаточного члена формулы Тейлора  $r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$  справедливо представление в интегральной форме:

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad \forall x \in U_\delta(x_0).$$

**Доказательство.** Поскольку  $r_0(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt = \frac{1}{0!} \int_{x_0}^x (x-t)^0 f'(t) dt$ , то при  $n=0$  теорема справедлива.

Предположим, что теорема справедлива для  $n = s-1$ , т. е.

$$r_{s-1}(x) = \frac{1}{(s-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{s-1} f^{(s)}(t) dt.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}
r_{s-1}(x) &= \frac{1}{(s-1)!} \int_{x_0}^x f^{(s)}(t) \left(-\frac{1}{s}\right) d((x-t)^s) = \\
&= -\frac{1}{s!} f^{(s)}(t) (x-t)^s \Big|_{x_0}^x + \frac{1}{s!} \int_{x_0}^x (x-t)^s f^{(s+1)}(t) dt = \\
&= \frac{1}{s!} f^{(s)}(x_0) (x-x_0)^s + \frac{1}{s!} \int_{x_0}^x (x-t)^s f^{(s+1)}(t) dt.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем формулу для остаточного члена порядка  $s$ :

$$\begin{aligned}
r_s(x) &= f(x) - \sum_{k=0}^s \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = \\
&= r_{s-1}(x) - \frac{1}{s!} f^{(s)}(x_0) (x-x_0)^s = \frac{1}{s!} \int_{x_0}^x (x-t)^s f^{(s+1)}(t) dt.
\end{aligned}$$

Следовательно, теорема справедлива для  $n = s$ . По индукции получаем справедливость теоремы для любого натурального  $n$ .  $\square$

**Теорема 2.** Ряд Маклорена степенной функции  $f(x) = (1+x)^\alpha$  сходится к этой функции при  $x \in (-1, 1)$ :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k \quad \forall x \in (-1, 1),$$

где  $C_\alpha^0 = 1$ ,  $C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Зафиксируем  $x \in (-1, 1)$ . Записывая остаточный член формулы Маклорена функции  $f(x) = (1+x)^\alpha$  в интегральной форме и учитывая, что  $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ , получаем

$$\begin{aligned}
r_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1} dt \quad \stackrel{t=\tau x}{=}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t \equiv \tau x \quad \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} \int_0^1 x^n (1-\tau)^n (1+\tau x)^{\alpha-n-1} x d\tau = \\
= \lambda_n \int_0^1 \left( \frac{1-\tau}{1+\tau x} \right)^n (1+\tau x)^{\alpha-1} d\tau,
\end{aligned}$$

где введено обозначение

$$\lambda_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^{n+1}. \quad (1)$$

Поскольку  $\forall x \in (-1, 1) \quad \forall \tau \in [0, 1] \hookrightarrow 1+\tau x \geq 1-\tau$ , то  $\left( \frac{1-\tau}{1+\tau x} \right)^n \leq 1$ . Следовательно,

$$|r_n(x)| \leq |\lambda_n| \int_0^1 (1+\tau x)^{\alpha-1} d\tau = |\lambda_n| C, \quad (2)$$

где величина  $C = \int_0^1 (1+\tau x)^{\alpha-1} d\tau$  не зависит от  $n$ . Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0. \quad (3)$$

Если  $x = 0$ , то согласно равенству (1) имеем  $\lambda_n = 0$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Если  $\alpha = m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , то из (1) следует равенство  $\lambda_n = 0$  при  $n > m$ . Поэтому в случаях  $x = 0$  и  $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  соотношение (3) справедливо. Пусть  $x \neq 0$  и  $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n-1) x^{n+2}}{(n+1)!} \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n) x^{n+1}} = \\
&= \frac{\alpha-n-1}{n+1} x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -x \in (-1, 1).
\end{aligned}$$

Выберем число  $q \in (|x|, 1)$ . Тогда по определению предела существует номер  $n_0$  такой, что  $\frac{|\lambda_{n+1}|}{|\lambda_n|} < q$  для любого  $n \geq n_0$ . Поэтому при  $n \geq n_0$  имеем  $|\lambda_n| \leq |\lambda_{n_0}| q^{n-n_0} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда вытекает соотношение (3), которое вместе с неравенством (2) дает равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$  при любом  $x \in (-1, 1)$ .  $\square$

Заметим, что при  $\alpha = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  для любого  $k \geq n + 1$  имеет место  $C_\alpha^k = 0$ , и, следовательно, ряд Маклорена функции  $(1+x)^\alpha$  совпадает с конечной суммой:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k.$$

В случае  $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ , используя лемму 1 § 3, вычислим радиус сходимости ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k$ :

$$\frac{1}{R_{\text{сх}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|C_\alpha^{k+1}|}{|C_\alpha^k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - k|}{k+1} = 1.$$

Следовательно,  $R_{\text{сх}} = 1$ .

Полагая в теореме 2  $\alpha = -1$  и замечая, что  $C_{-1}^k = \frac{(-1)(-2)\cdots(-k)}{k!} = (-1)^k$ , получаем разложение

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \quad \forall x \in (-1, 1). \quad (4)$$

Заметим, что последнее разложение можно получить предельным переходом в формуле суммы геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Из формулы (4) и теоремы о почленном интегрировании степенного ряда (пункт 1 теоремы 5 § 3) при  $|x| < 1$  получаем

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Производя замену индекса суммирования  $n = k + 1$ , получаем

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \forall x \in (-1, 1). \quad (5)$$

Покажем, что равенство (5) справедливо и при  $x = 1$ . Действительно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$  сходится при  $x = 1$  по признаку Лейбница (теорема 4 § 3 главы 9). Следовательно, в силу второй теоремы Абеля (теорема 4 § 3 главы 11) этот ряд сходится равномерно на отрезке  $[0, 1]$ . Согласно теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда (теорема 2 § 3 главы 10) функция  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$  непрерывна на отрезке  $[0, 1]$ . Поскольку согласно равенству (5) имеем  $S(x) = \ln(1+x)$  для любого  $x \in (-1, 1)$ , то  $S(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln(1+x) = \ln 2$ . Таким образом, равенство (5) справедливо и при  $x = 1$ .

Применяя разложение (4) для  $x = t^2$ , имеем

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} \quad \forall t \in (-1, 1).$$

Интегрируя этот ряд внутри круга сходимости, получаем

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Для любого нечетного числа  $n$  обозначим  $n!! = n \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 1$ . Кроме того, будем полагать  $(-1)!! = 1$ . Тогда для любого  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$C_{-1/2}^k = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - k + 1\right)}{k!} = \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k k!}.$$

Применяя теорему 2 для  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , получаем разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k k!} x^k \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Подставляя  $x = -t^2$  и интегрируя степенной ряд, получаем

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} \left( \int_0^x t^{2k} dt \right).$$

Итак,

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \forall x \in (-1, 1).$$

## ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

### § 1. Теорема о неявной функции для одного уравнения

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^1$  и в окрестности точки  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  задана скалярная функция  $F(x, y)$ . Нас будет интересовать решение  $y = y(x)$  уравнения  $F(x, y) = 0$ . При этом в явном виде найти функцию  $y(x)$  зачастую не удастся. В связи с этим функция  $y(x)$  называется *неявной*.

**Теорема 1.** Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^1$  и пусть скалярная функция  $F(x, y)$  удовлетворяет условиям:

- (1)  $F(x_0, y_0) = 0$ ,
- (2) функция  $F$  непрерывна в  $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ ,
- (3) частная производная  $F'_y(x, y)$  существует в  $U_\varepsilon(x_0, y_0)$  и непрерывна в точке  $(x_0, y_0)$ ,
- (4)  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

Тогда существуют числа  $\gamma > 0$ ,  $\delta > 0$  и непрерывная в точке  $x_0$  функция  $\varphi : U_\gamma(x_0) \rightarrow U_\delta(y_0)$  такая, что для любого  $x^* \in U_\gamma(x_0)$  уравнение  $F(x^*, y) = 0$  на множестве  $U_\delta(y_0)$  имеет единственное решение  $y^* = \varphi(x^*)$ .

**Доказательство.** Для определенности будем предполагать, что  $F'_y(x_0, y_0) > 0$ . Тогда в силу непрерывности функции  $F'_y(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$  существует число  $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$  такое, что

$$F'_y(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in U_{\varepsilon_1}(x_0, y_0). \quad (1)$$

Зафиксируем произвольное число  $\delta \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_1\right]$ . Тогда для любых  $x \in U_\delta(x_0)$ ,  $y \in U_\delta(y_0)$  выполняются соотношения

$$|(x, y) - (x_0, y_0)| = \sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2} < \sqrt{\delta^2 + \delta^2} \leq \varepsilon_1,$$

т. е.  $(x, y) \in U_{\varepsilon_1}(x_0, y_0)$ . Поэтому согласно соотношению (1) для любого  $x \in U_\delta(x_0)$  функция  $F(x, y)$  строго возрастает по  $y$  на отрезке  $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ .

Отсюда и из равенства  $F(x_0, y_0) = 0$  следуют неравенства

$$F(x_0, y_0 - \delta) < 0,$$

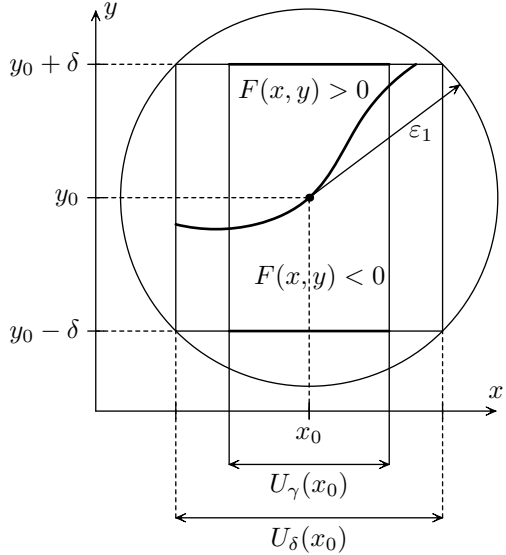
$$F(x_0, y_0 + \delta) > 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции  $F$  в  $U_\varepsilon(x_0, y_0)$  существует число  $\gamma \in (0, \delta]$  такое, что

$$\forall x \in U_\gamma(x_0) \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow F(x, y_0 - \delta) < 0,$$

$$F(x, y_0 + \delta) > 0.$$



Применяя теорему о промежуточном значении для функции  $f(y) = F(x, y)$ , непрерывной на отрезке  $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ , получаем, что для любого  $x \in U_\gamma(x_0)$  существует число  $\varphi(x) \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$  такое, что  $F(x, \varphi(x)) = 0$ . Тем самым определена функция  $\varphi : U_\gamma(x_0) \rightarrow U_\delta(y_0)$ . Из строго возрастания функции  $F(x, y)$  по  $y$  в  $U_\delta(y_0)$  следует, что для любого  $x \in U_\gamma(x_0)$  число  $y = \varphi(x)$  является единственным в  $U_\delta(y_0)$  решением уравнения  $F(x, y) = 0$ .

Поскольку число  $\delta$  было выбрано как произвольное число из интервала  $(0, \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_1)$ , то эти же рассуждения можно провести для произвольного числа  $\delta_1 \in (0, \delta]$ . В результате получим, что

$$\forall \delta_1 \in (0, \delta] \exists \gamma_1 \in (0, \gamma] : \forall x \in U_{\gamma_1}(x_0) \hookrightarrow \varphi(x) \in U_{\delta_1}(y_0).$$

Тем самым доказана непрерывность функции  $\varphi$  в точке  $x_0$ .  $\square$

## § 2. Операторная норма матрицы. Теорема Лагранжа о среднем

**Определение.** Пусть  $A$  – матрица размера  $m \times n$ . *Операторной нормой матрицы  $A$  называется число*

$$\|A\| = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |x|=1}} |Ax|,$$

где  $|Ax|$  – длина вектора  $Ax \in \mathbb{R}^m$ .

Поскольку функция  $f(x) = Ax$  непрерывна, а множество  $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$  является компактом, то в определении нормы максимум существует.

Заметим, что введенная норма матрицы удовлетворяет аксиомам нормы:

- (1)  $\|A\| \geq 0$ ;
- (2) если  $\|A\| = 0$ , то  $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$  – нулевая матрица;
- (3) для любого числа  $\lambda$  справедливо равенство  $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ ;
- (4)  $\|A_1 + A_2\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|$  (неравенство треугольника).

Свойства (1) – (3) очевидны. Докажем неравенство треугольника.

$$\begin{aligned} \|A_1 + A_2\| &= \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |x|=1}} |A_1x + A_2x| \leq \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |x|=1}} (|A_1x| + |A_2x|) \leq \\ &\leq \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |x|=1}} |A_1x| + \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |x|=1}} |A_2x| = \|A_1\| + \|A_2\|. \end{aligned}$$

**Задача 1.** Доказать, что операторная норма матрицы  $A$  совпадает с корнем квадратным из максимального собственного числа матрицы  $A^T A$  (число  $\lambda$  называется собственным числом матрицы  $B$  размера  $n \times n$ , если  $\exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\} : Bx = \lambda x$ ).

**Лемма 1.** а) Если  $A$  –  $(m \times n)$ -матрица и  $x \in \mathbb{R}^n$ , то  $|Ax| \leq \|A\| |x|$ .

б) Если  $A$  –  $(m \times n)$ -матрица, а  $B$  –  $(n \times k)$ -матрица, то  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

**Доказательство.** а) Если  $x = \bar{0}$ , то  $Ax = \bar{0}$  и неравенство  $|Ax| \leq \|A\| |x|$  выполнено. Пусть  $x \neq \bar{0}$ . Обозначим  $x_1 = \frac{x}{|x|}$ . Поскольку  $|x_1| = 1$ , то  $\|A\| \geq |Ax_1| = \frac{1}{|x|} |Ax|$ , следовательно,  $|Ax| \leq \|A\| |x|$ .

б) Поскольку в силу пункта (а)

$$|ABx| \leq \|A\| |Bx| \leq \|A\| \|B\| |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^k,$$

$$\text{то } \|AB\| = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^k \\ |x|=1}} |ABx| \leq \|A\| \|B\|. \quad \square$$

**Теорема 1.** (Теорема Лагранжа о среднем.) Пусть в  $\delta$ -окрестности точки  $y_0 \in \mathbb{R}^k$  задана дифференцируемая вектор-функция  $g : U_\delta(y_0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Тогда для любых  $y, y' \in U_\delta(y_0)$  существует число  $\theta \in (0; 1)$  такое, что

$$|g(y') - g(y)| \leq \|\mathcal{D}g(y + \theta(y' - y))\| |y' - y|. \quad (1)$$

**Доказательство.** Зафиксируем произвольные  $y, y' \in U_\delta(y_0)$  и рассмотрим вектор-функцию скалярного переменного  $f(t) = g(y + t(y' - y))$ . Поскольку для любого  $t \in [0, 1]$  имеем  $y + t(y' - y) \in [y, y'] \subset U_\delta(y_0)$ , то по теореме о дифференцировании сложной функции для любого  $t \in [0, 1]$  существует  $f'(t) = \mathcal{D}g(y + t(y' - y)) (y' - y)$ . Следовательно, согласно теореме Лагранжа о среднем для вектор-функции скалярного переменного существует число  $\theta \in (0, 1)$  такое, что  $|f(1) - f(0)| \leq |f'(\theta)|$ . Поэтому

$$\begin{aligned} |g(y') - g(y)| &= |f(1) - f(0)| \leq |f'(\theta)| = |\mathcal{D}g(y + \theta(y' - y)) (y' - y)| \leq \\ &\stackrel{\text{Л. 1(а)}}{\leq} \|\mathcal{D}g(y + \theta(y' - y))\| |y' - y|. \quad \square \end{aligned}$$

### § 3. Принцип Банаха сжимающих отображений

**Определение.** Пусть задано множество  $Y \subset \mathbb{R}^m$ . Вектор-функция  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется *сжимающим отображением*, если существует число  $\mu \in (0, 1)$  такое, что

$$|g(y) - g(y')| \leq \mu |y - y'| \quad \forall y, y' \in Y.$$

**Теорема 1.** Пусть в  $\delta$ -окрестности точки  $y_0 \in \mathbb{R}^m$  задана вектор-функция  $g : U_\delta(y_0) \rightarrow \mathbb{R}^m$  такая, что

(а) отображение  $g : U_\delta(y_0) \rightarrow \mathbb{R}^m$  является сжимающим с коэффициентом  $\mu < 1$  и

(б)  $|g(y_0) - y_0| < (1 - \mu)\delta$ .

Тогда в  $U_\delta(y_0)$  система уравнений  $y = g(y)$  имеет единственное решение  $y^*$ , которое может быть найдено как предел последовательности  $\{y_k\}_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^m$ , определяемой рекуррентной формулой

$$y_{k+1} = g(y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

**Доказательство.** Покажем, что для любого  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  справедливо неравенство

$$|y_{k+1} - y_k| \leq \mu^k |y_1 - y_0|. \quad (2)$$

При  $k = 0$  неравенство (2) выполнено. Пусть неравенство (2) выполнено  $\forall k \in \{0, \dots, s-1\}$ , тогда

$$\begin{aligned} |y_s - y_0| &\leq |y_s - y_{s-1}| + \dots + |y_1 - y_0| \leq \\ &\leq (\mu^{s-1} + \dots + 1) |y_1 - y_0| \stackrel{(6),(1)}{<} (\mu^{s-1} + \dots + 1)(1 - \mu)\delta = (1 - \mu^s)\delta < \delta. \end{aligned}$$

Следовательно,  $y_s \in U_\delta(y_0)$ ,  $y_{s-1} \in U_\delta(y_0)$  и в силу условия (а) доказываемой теоремы

$$|y_{s+1} - y_s| \stackrel{(1)}{=} |g(y_s) - g(y_{s-1})| \stackrel{(a)}{\leq} \mu |y_s - y_{s-1}| \leq \mu^s |y_1 - y_0|,$$

т. е. неравенство (2) выполнено при  $k = s$ . По индукции получаем, что это неравенство выполнено для любого  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Из неравенства (2) следует, что для любых  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $n > k$

$$\begin{aligned} |y_n - y_k| &\leq |y_n - y_{n-1}| + \dots + |y_{k+1} - y_k| \leq \\ &\leq (\mu^{n-1} + \dots + \mu^k) |y_1 - y_0| = \frac{(\mu^k - \mu^n) |y_1 - y_0|}{1 - \mu} \leq \frac{\mu^k |y_1 - y_0|}{1 - \mu}. \end{aligned}$$

Поэтому для любого  $\varepsilon > 0$  существует натуральное число  $N$ , определяемое из условия  $\frac{\mu^N |y_1 - y_0|}{1 - \mu} < \varepsilon$ , такое, что для любых  $k \geq N$ ,  $n > k$  справедливо неравенство  $|y_n - y_k| < \varepsilon$ . Это означает фундаментальность последовательности  $\{y_k\}_{k=0}^\infty$ , следовательно, в силу критерия Коши последовательность  $\{y_k\}_{k=0}^\infty$  сходится к некоторой точке  $y^* \in \mathbb{R}^m$ . Используя неравенство  $|y_n - y_k| \leq \frac{\mu^k |y_1 - y_0|}{1 - \mu}$  при  $k = 0$ , для любого  $n \in \mathbb{N}$  получаем неравенство  $|y_n - y_0| \leq \frac{|y_1 - y_0|}{1 - \mu}$ . Переходя в последнем неравенстве к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , имеем  $|y^* - y_0| \leq \frac{|y_1 - y_0|}{1 - \mu} \stackrel{(6),(1)}{<} \delta$ . Следовательно,  $y^* \in U_\delta(y_0)$ . Из условия (а) следует непрерывность функции  $g(y)$ . Переходя к пределу в формуле  $y_{k+1} = g(y_k)$  при  $k \rightarrow \infty$ , получаем  $y^* = g(y^*)$ , т. е. вектор  $y^*$  является решением системы уравнений  $y = g(y)$ .

Покажем единственность решения системы уравнений  $y = g(y)$  в  $U_\delta(y_0)$ . Предположим противное: существует  $y' \in U_\delta(y_0)$  – решения этой системы,  $y' \neq y^*$ . Тогда в силу условия (а) имеем  $|y^* - y'| = |g(y^*) - g(y')| \leq \mu|y^* - y'| < |y^* - y'|$ . Противоречие.  $\square$

## § 4. Теорема о неявной функции для системы уравнений

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^m$  и в окрестности точки  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$  задана  $m$ -мерная вектор-функция

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ \dots \\ F_m(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \\ \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \end{pmatrix}.$$

Нас будет интересовать решение  $y = y(x)$  системы  $F(x, y) = \bar{0}$  из  $m$  скалярных уравнений. Компоненты вектора  $y$  называются *неизвестными* в том смысле, что их нужно выразить через вектор параметров  $x$ , исходя из системы уравнений  $F(x, y) = \bar{0}$ . Предполагается, что число уравнений системы и число неизвестных совпадают и равны  $m$ .

Рассмотрим сначала частный случай, в котором вектор-функция  $F$  линейна по вектору неизвестных:  $F(x, y) = A(x)y - b(x)$ . В этом случае, применяя правило Крамера, известное из линейной алгебры, получаем, что система  $F(x, y) = \bar{0}$  имеет единственное решение тогда и только тогда, когда  $\det A(x) \neq 0$ . Следующая теорема формулирует достаточные условия существования и единственности решения нелинейного уравнения. Предполагается известным некоторое решение  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$  векторного уравнения  $F(x, y) = \bar{0}$ . Поскольку дифференцируемая вектор-функция  $F(x, y)$  в малой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  "близка" к линейной по  $y$  функции  $F(x, y_0) + \mathcal{D}_y F(x, y_0)(y - y_0)$ , то вполне естественно, что для существования и единственности решения уравнения  $F(x, y) = \bar{0}$  следует потребовать выполнение условия  $\det \mathcal{D}_y F(x_0, y_0) \neq 0$ .

Здесь  $\mathcal{D}_y F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(x_0, y_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$  – матрица Якоби функции  $F(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$  по переменным  $y = (y_1, \dots, y_m)$ . В отличие от линейного уравнения, существование

и единственность решения нелинейного уравнения гарантируются лишь в малой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^m$  и пусть  $m$ -мерная вектор-функция  $F(x, y)$  удовлетворяет условиям:

- (1)  $F(x_0, y_0) = \bar{0}$ ,
- (2) функция  $F$  непрерывно дифференцируема в  $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ ,
- (3)  $\det \mathcal{D}_y F(x_0, y_0) \neq 0$ .

Тогда существуют числа  $\gamma > 0$ ,  $\delta > 0$  и непрерывно дифференцируемая вектор-функция  $\varphi : U_\gamma(x_0) \rightarrow U_\delta(y_0)$  такая, что для любого  $x^* \in U_\gamma(x_0)$  система уравнений  $F(x^*, y) = \bar{0}$  на множестве  $U_\delta(y_0)$  имеет единственное решение  $y^* = \varphi(x^*)$ .

### Доказательство

**Шаг 1.** Доказательство существования и единственности решения.

Поскольку матрица Якоби  $\mathcal{D}_y F(x, y)$  непрерывна в точке  $(x_0, y_0)$ , то ее определитель является скалярной функцией, непрерывной в этой точке. Отсюда и из условия  $\det \mathcal{D}_y F(x_0, y_0) \neq 0$  следует существование числа  $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon]$  такого, что

$$\forall (x, y) \in U_{\varepsilon_1}(x_0, y_0) \hookrightarrow \det \mathcal{D}_y F(x, y) \neq 0. \quad (1)$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$h(x, y) = y - (\mathcal{D}_y F(x_0, y_0))^{-1} F(x, y).$$

По теореме о дифференцировании сложной функции

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_y h(x, y) &= E - (\mathcal{D}_y F(x_0, y_0))^{-1} \mathcal{D}_y F(x, y) = \\ &= (\mathcal{D}_y F(x_0, y_0))^{-1} (\mathcal{D}_y F(x_0, y_0) - \mathcal{D}_y F(x, y)), \end{aligned}$$

где  $E$  – единичная матрица размера  $m \times m$ . Из непрерывности матрицы Якоби  $\mathcal{D}_y F(x, y)$  следует, что  $\mathcal{D}_y F(x, y) \rightarrow \mathcal{D}_y F(x_0, y_0)$  при  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ . Поэтому  $\|\mathcal{D}_y h(x, y)\| \rightarrow 0$  при  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ . Следовательно, существует  $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$  :

$$\forall (x, y) \in U_{\varepsilon_2}(x_0, y_0) \hookrightarrow \|\mathcal{D}_y h(x, y)\| \leq \frac{1}{2}.$$

Зафиксируем произвольное число  $\delta \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_2\right]$ . Тогда для любых  $x \in U_\delta(x_0)$ ,  $y \in U_\delta(y_0)$  выполняются соотношения

$$|(x, y) - (x_0, y_0)| = \sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2} < \sqrt{\delta^2 + \delta^2} \leq \varepsilon_2,$$

т. е.  $(x, y) \in U_{\varepsilon_2}(x_0, y_0)$ . Поэтому

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \quad \forall y \in U_\delta(y_0) \hookrightarrow \|\mathcal{D}_y h(x, y)\| \leq \frac{1}{2}.$$

Фиксируя произвольный  $x \in U_\delta(x_0)$  и применяя теорему Лагранжа о среднем к вектор-функции  $g(y) = h(x, y)$ , получаем, что для любых  $y, y' \in U_\delta(y_0)$  существует число  $\theta \in (0, 1)$ :

$$|h(x, y') - h(x, y)| \leq \|\mathcal{D}_y h(x, y + \theta(y' - y))\| |y' - y| \leq \frac{1}{2} |y' - y|.$$

Итак,

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \quad \forall y, y' \in U_\delta(y_0) \hookrightarrow |h(x, y') - h(x, y)| \leq \frac{1}{2} |y' - y|. \quad (2)$$

Это означает, что для любого фиксированного  $x^* \in U_\delta(x_0)$  отображение  $g(y) = h(x^*, y)$  в  $U_\delta(y_0)$  является сжимающим с коэффициентом  $\mu = \frac{1}{2}$ .

Заметим, что  $h(x, y_0) - y_0 = -(\mathcal{D}_y F(x_0, y_0))^{-1} F(x, y_0)$ . В силу непрерывности функции  $F(x, y_0)$  в точке  $x_0$  имеем  $h(x, y_0) - y_0 \rightarrow -(\mathcal{D}_y F(x_0, y_0))^{-1} F(x_0, y_0) = \bar{0}$  при  $x \rightarrow x_0$ . Поэтому существует число  $\gamma \in (0, \delta]$  такое, что

$$\forall x \in U_\gamma(x_0) \hookrightarrow |h(x, y_0) - y_0| < \frac{\delta}{2} = (1 - \mu)\delta. \quad (3)$$

Зафиксируем произвольную точку  $x^* \in U_\gamma(x_0)$ . Из условий (2) и (3) следует выполнение условий (а) и (б) принципа сжимающих отображений для функции  $g(y) = h(x^*, y)$ . Применяя эту теорему получаем, что для любого  $x^* \in U_\gamma(x_0)$  система уравнений  $y = g(y)$  на множестве  $U_\delta(y_0)$  имеет единственное решение  $y^*$ . Обозначим это решение через  $\varphi(x^*)$ . Поскольку  $g(y) = h(x^*, y) = y - (\mathcal{D}_y F(x_0, y_0))^{-1} F(x^*, y)$ , то система уравнений  $y = g(y)$  эквивалентна системе  $F(x^*, y) = \bar{0}$ . Таким образом, мы получили, что для любого  $x^* \in U_\gamma(x_0)$  система уравнений  $F(x^*, y) = \bar{0}$  на множестве  $U_\delta(y_0)$  имеет единственное решение  $y^* = \varphi(x^*)$ .

**Шаг 2.** Доказательство непрерывности решения в точке  $x_0$ .

Заметим, что число  $\delta$  было выбрано как произвольное число из полуинтервала  $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_2\right]$ . Поэтому, повторяя те же рассуждения для произвольного числа  $\delta_1 \in (0, \delta]$ , найдем число  $\gamma_1 \in (0, \gamma]$  и функцию  $\varphi_1 : U_{\gamma_1}(x_0) \rightarrow U_{\delta_1}(y_0)$  такую, что для любого  $x^* \in U_{\gamma_1}(x_0)$  уравнение  $F(x^*, y) = \bar{0}$  имеет единственное решение  $y = \varphi_1(x^*)$ . Следовательно,  $\forall x \in U_{\gamma_1}(x_0) \hookrightarrow \varphi_1(x) = \varphi(x)$  и

$$\forall \delta_1 \in (0, \delta] \exists \gamma_1 \in (0, \gamma] : \forall x \in U_{\gamma_1}(x_0) \hookrightarrow \varphi(x) \in U_{\delta_1}(y_0).$$

Тем самым доказана непрерывность функции  $\varphi$  в точке  $x_0$ .  $\square$

**Шаг 3.** Доказательство дифференцируемости решения в точке  $x_0$ .

В силу дифференцируемости функции  $F$  в точке  $(x_0, y_0)$  из леммы 1 § 8 главы 6 следует, что

$$\begin{aligned} F(x, y) - F(x_0, y_0) &= \mathcal{D}F(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \bar{o}(|(x, y) - (x_0, y_0)|) = \\ &= \mathcal{D}_x F(x_0, y_0)(x - x_0) + \mathcal{D}_y F(x_0, y_0)(y - y_0) + \bar{o}(\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2}) \end{aligned}$$

при  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ . Подставим в полученную формулу  $y = \varphi(x)$ ,  $y_0 = \varphi(x_0)$ . Воспользуемся равенствами  $F(x, \varphi(x)) = \bar{0}$ ,  $F(x_0, \varphi(x_0)) = \bar{0}$ . В силу непрерывности неявной функции  $\varphi$  в точке  $x_0$  получаем, что  $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x_0)$  при  $x \rightarrow x_0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \bar{0} &= \mathcal{D}_x F(x_0, y_0)(x - x_0) + \mathcal{D}_y F(x_0, y_0)(\varphi(x) - \varphi(x_0)) + \\ &+ \bar{o}(\sqrt{|x - x_0|^2 + |\varphi(x) - \varphi(x_0)|^2}) \quad \text{при } x \rightarrow x_0. \end{aligned}$$

Из условия  $\det \mathcal{D}_y F(x_0, y_0) \neq 0$  следует существование обратной матрицы к матрице  $\mathcal{D}_y F(x_0, y_0)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(x_0) &= -(\mathcal{D}_y F(x_0, y_0))^{-1} \left( \mathcal{D}_x F(x_0, y_0)(x - x_0) + \right. \\ &\left. + \bar{o}(\sqrt{|x - x_0|^2 + |\varphi(x) - \varphi(x_0)|^2}) \right) \quad \text{при } x \rightarrow x_0. \end{aligned}$$

Определив матрицу  $M = -(\mathcal{D}_y F(x_0, y_0))^{-1} \mathcal{D}_x F(x_0, y_0)$ , получаем

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = M(x - x_0) + \bar{o}(\sqrt{|x - x_0|^2 + |\varphi(x) - \varphi(x_0)|^2}), \quad x \rightarrow x_0. \quad (4)$$

Покажем, что в формуле (4) слагаемое  $\bar{o}(\sqrt{|x - x_0|^2 + |\varphi(x) - \varphi(x_0)|^2})$  можно заменить на  $\bar{o}(|x - x_0|)$ . Это и будет означать дифференцируемость функции  $\varphi$  в точке  $x_0$ .

Согласно определению  $o$ -малого из формулы (4) получаем

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = M(x - x_0) + \varepsilon(x) \sqrt{|x - x_0|^2 + |\varphi(x) - \varphi(x_0)|^2}, \quad (5)$$

где  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = \bar{0}$ . Поэтому существует число  $\beta > 0$  такое, что  $|\varepsilon(x)| < \frac{1}{2} \quad \forall x \in U_\beta(x_0)$ .

Обозначим  $\Delta\varphi = |\varphi(x) - \varphi(x_0)|$ . Так как  $\sqrt{|x - x_0|^2 + |\Delta\varphi|^2} \leq |x - x_0| + |\Delta\varphi|$ , то из (5) следует, что для любого  $x \in U_\beta(x_0)$

$$\Delta\varphi \leq \|M\| |x - x_0| + |\varepsilon(x)| (|x - x_0| + \Delta\varphi) \leq \|M\| |x - x_0| + \frac{|x - x_0| + \Delta\varphi}{2},$$

а значит,

$$\Delta\varphi \leq (2\|M\| + 1) |x - x_0| \quad \forall x \in U_\beta(x_0).$$

Следовательно, при  $x \in U_\beta(x_0)$  справедливо неравенство

$$\sqrt{|x - x_0|^2 + |\Delta\varphi|^2} \leq \sqrt{1 + (2\|M\| + 1)^2} |x - x_0|.$$

Отсюда и из равенства (4) следует, что

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = M(x - x_0) + \bar{o}(|x - x_0|), \quad x \rightarrow x_0.$$

В силу леммы 1 § 8 главы 6 это означает, что функция  $\varphi$  дифференцируема в точке  $x_0$  и ее матрица Якоби равна

$$\mathcal{D}\varphi(x_0) = M = -\left(\mathcal{D}_y F(x_0, y_0)\right)^{-1} \mathcal{D}_x F(x_0, y_0).$$

**Шаг 4.** Доказательство непрерывной дифференцируемости решения в окрестности точки  $x_0$ .

Так как для любого  $x \in U_\gamma(x_0)$  имеем  $\varphi(x) \in U_\delta(y_0)$ ,  $\gamma \leq \delta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_1$ , то в силу соотношения (1) имеем

$$\det \mathcal{D}_y F(x, \varphi(x)) \neq 0 \quad \forall x \in U_\gamma(x_0). \quad (6)$$

Кроме того, для любого  $x \in U_\gamma(x_0)$  справедливо равенство  $F(x, \varphi(x)) = \bar{0}$ , и найдется окрестность точки  $(x, \varphi(x))$ , лежащая

в  $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ , поэтому функция  $F$  непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки  $(x, \varphi(x))$ . Следовательно, доказанное на предыдущем шаге утверждение останется справедливым, если в нем точку  $(x_0, y_0)$  заменить точкой  $(x, \varphi(x))$ , где  $x \in U_\gamma(x_0)$ . А именно, функция  $\varphi$  дифференцируема в любой точке  $x \in U_\gamma(x_0)$  и

$$\mathcal{D}\varphi(x) = -\left(\mathcal{D}_y F(x, \varphi(x))\right)^{-1} \mathcal{D}_x F(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in U_\gamma(x_0). \quad (7)$$

Следовательно, функция  $\varphi$  непрерывна в  $U_\gamma(x_0)$  и, используя непрерывную дифференцируемость функции  $F$  в  $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ , получаем непрерывность в  $U_\gamma(x_0)$  правой части равенства (7). Поэтому матрица Якоби  $\mathcal{D}\varphi(x)$  непрерывна в  $U_\gamma(x_0)$ , т. е. функция  $\varphi$  непрерывно дифференцируема в  $U_\gamma(x_0)$ .  $\square$

## § 5. Теорема об обратном отображении

**Лемма 1.** Пусть функция  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^m$  непрерывна на открытом множестве  $Y \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда для любого открытого множества  $G \subset \mathbb{R}^m$  его прообраз  $Y_0 = \{y \in Y : g(y) \in G\}$  является открытым множеством.

**Доказательство.** Пусть  $y_0$  — произвольная точка множества  $Y_0$ . Требуется доказать, что существует число  $\delta > 0$  такое, что  $U_\delta(y_0) \subset Y_0$ . Из определения множества  $Y_0$  следует, что  $g(y_0) \in G$ . Поскольку множество  $G$  открыто, то  $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(g(y_0)) \subset G$ . Из непрерывности функции  $g(y)$  в точке  $y_0$  открытого множества  $Y$  следует, что существует число  $\delta > 0$  такое, что  $U_\delta(y_0) \subset Y$  и для любого вектора  $y \in U_\delta(y_0)$  выполняется включение  $g(y) \in U_\varepsilon(g(y_0))$ . Следовательно,  $\forall y \in U_\delta(y_0) \hookrightarrow g(y) \in G$ , что по определению множества  $Y_0$  означает  $U_\delta(y_0) \subset Y_0$ .  $\square$

**Определение.** Пусть для вектор-функции  $g(y)$  размерности векторов  $y$  и  $g(y)$  совпадают. Определитель матрицы Якоби  $\mathcal{D}g(y)$  называется *якобианом* отображения  $g$  и обозначается через  $\mathcal{J}_g(y)$ :

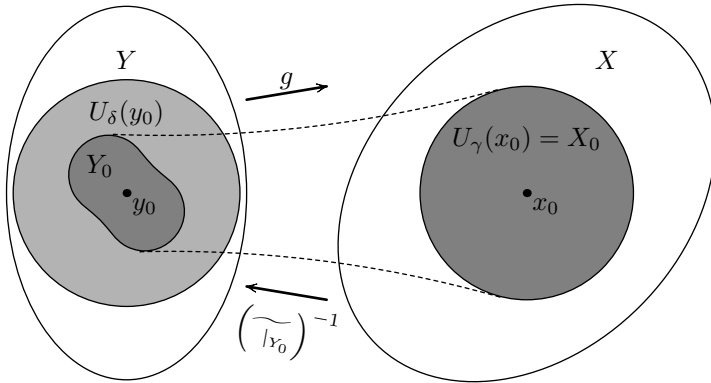
$$\mathcal{J}_g(y) = \det \mathcal{D}g(y).$$

**Определение.** Пусть заданы множества  $X, Y$ . Сужением функции  $f : X \rightarrow Y$  на множество  $X_0 \subset X$  называется функция  $f|_{X_0} : X_0 \rightarrow Y$ , определяемая формулой  $\forall x \in X_0 \hookrightarrow f|_{X_0}(x) = f(x)$ .

**Теорема 1.** (Об обратном отображении.) Пусть заданы открытое множество  $Y \subset \mathbb{R}^n$  и непрерывно дифференцируемое отображение  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  с неравным нулю якобианом:

$$\forall y \in Y \hookrightarrow \mathcal{J}_g(y) \neq 0.$$

Тогда отображение  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  локально обратимо, т.е. для любой точки  $y_0 \in Y$  существуют открытые множества  $X_0$  и  $Y_0$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  такие, что  $y_0 \in Y_0 \subset Y$  и сужение отображения  $g|_{Y_0} : Y_0 \rightarrow X_0$  является взаимно однозначным отображением множества  $Y_0$  на множество  $X_0$ . Причем обратное отображение  $\left(g|_{Y_0}\right)^{-1} : X_0 \rightarrow Y_0$  является непрерывно дифференцируемым отображением с неравным нулю якобианом.



**Доказательство.** Обозначим  $x_0 = g(y_0)$  и применим теорему о неявной функции к функции  $F(x, y) = g(y) - x$ . Из непрерывной дифференцируемости функции  $g(y)$  следует непрерывная дифференцируемость функции  $F(x, y)$ . Кроме того,  $F(x_0, y_0) = g(y_0) - x_0 = \bar{0}$  и  $\det \mathcal{D}_y F(x_0, y_0) = \det \mathcal{D} g(y_0) = \mathcal{J}_g(y_0) \neq 0$ . Таким образом, все условия теоремы о неявной функции выполнены, и, согласно этой теореме, существуют числа  $\gamma > 0$ ,  $\delta > 0$  и непрерывно дифференцируемая функция  $\varphi : U_\gamma(x_0) \rightarrow U_\delta(y_0)$  такая, что для любого вектора  $x \in U_\gamma(x_0)$  система уравнений  $F(x, y) = \bar{0}$  (эквивалентная системе уравнений  $g(y) = x$ ) на множестве  $U_\delta(y_0)$  имеет единственное решение  $y = \varphi(x)$ .

Определим множества  $X_0 = U_\gamma(x_0)$  и  $Y_0 = \{y \in U_\delta(y_0) : g(y) \in X_0\}$ . Поскольку  $\forall y \in Y_0 \hookrightarrow g(y) \in X_0$ , то отображение  $g$  переводит элементы множества  $Y_0$  в элементы множества  $X_0$ . Отображение  $g|_{Y_0} : Y_0 \rightarrow X_0$  является взаимно однозначным, поскольку для любого вектора  $x \in X_0$  существует единственный вектор  $y \in Y_0$  такой, что  $g(y) = x$ . Этот вектор  $y = \varphi(x)$  является единственным решением системы уравнений  $F(x, y) = 0$  относительно  $y$ . Отсюда следует также, что отображение  $\varphi : X_0 \rightarrow Y_0$  является обратным к отображению  $g|_{Y_0} : Y_0 \rightarrow X_0$ , т. е.  $\varphi = \left(g|_{Y_0}\right)^{-1}$ .

Поскольку множество  $Y_0$  является прообразом открытого множества  $X_0 = U_\gamma(x_0)$  при непрерывном отображении  $g$ , то в силу леммы 1 множество  $Y_0$  открыто.

В силу теоремы о неявной функции функция  $\left(g|_{Y_0}\right)^{-1}(x) = \varphi(x)$  непрерывно дифференцируема. Дифференцируя левую и правую части системы уравнений  $g(\varphi(x)) = x$ , по теореме о дифференцировании сложной функции получаем  $\forall x \in X_0 \hookrightarrow \mathcal{D}g(\varphi(x)) \mathcal{D}\varphi(x) = E$  – единичная матрица. Следовательно,  $\det \mathcal{D}g(\varphi(x)) \cdot \det \mathcal{D}\varphi(x) = \det E = 1$ . Поэтому  $\forall x \in X_0 \hookrightarrow \det \mathcal{D}\varphi(x) \neq 0$ .  $\square$

**Замечание.** В условиях теоремы 1 отображение  $g$  может не быть глобально обратимым, т. е. оно может переводить различные точки множества  $Y$  в одну и ту же точку. Пусть, например,

$$Y = \{(r, \varphi) : r \in (1, 3), \varphi \in (-\pi, 3\pi)\}, \quad g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Отображение  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^2$  непрерывно дифференцируемо; матрица Якоби этого отображения равна  $\mathcal{D}g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$ , а якобиан:  $\mathcal{J}_g(r, \varphi) = r \neq 0 \quad \forall (r, \varphi) \in Y$ . Однако отображение  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^2$  не является обратимым, так как  $g(2, 0) = g(2, 2\pi) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Теорема 2.** Образ открытого множества  $Y \subset \mathbb{R}^n$  при непрерывно дифференцируемом отображении  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  с неравным нулю якобианом является открытым множеством.

**Доказательство.** Через  $G$  обозначим образ множества  $Y$  при отображении  $g$ :

$$G = g(Y) = \{g(y) : y \in Y\}.$$

Покажем, что множество  $G$  открыто. Пусть  $g_0 \in G$ . Требуется доказать, что

$$\exists \delta > 0 : U_\delta(g_0) \subset G.$$

По определению множества  $G$  из условия  $g_0 \in G$  следует, что существует вектор  $y_0 \in Y$  такой, что  $g(y_0) = g_0$ . В силу теоремы 1 существуют открытые множества  $X_0$  и  $Y_0$  такие, что  $g(Y_0) = X_0$  и  $y_0 \in Y_0 \subset Y$ . Следовательно,  $g_0 = g(y_0) \in X_0$  и в силу открытости множества  $X_0$  существует число  $\delta > 0$  такое, что  $U_\delta(g_0) \subset X_0$ . Поскольку  $Y_0 \subset Y$ , то  $X_0 = g(Y_0) \subset g(Y) = G$ , и, следовательно,  $U_\delta(g_0) \subset G$ .  $\square$

**Замечание.** Условие отличия от нуля якобиана отображения в теореме 2 существенно. Например, непрерывно дифференцируемое отображение  $g(y) = \bar{0}$  переводит любое открытое множество  $G$  в множество, состоящее из одной точки  $\bar{0}$ , которое не является открытым.

Напомним, что множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется *линейно-связным*, если для любых двух точек  $x_1, x_2 \in X$  существует непрерывная на некотором отрезке  $[t_1, t_2]$  вектор-функция  $x(t)$  со значениями в  $X$  и такая, что  $x(t_1) = x_1$ ,  $x(t_2) = x_2$ .

**Теорема 3.** Пусть вектор-функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  непрерывна на линейно-связном множестве  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда множество значений  $f(X)$  является линейно-связным.

**Доказательство.** Рассмотрим произвольные точки  $f_1, f_2 \in f(X)$ . По определению множества значений  $\exists x_1, x_2 \in X$ :  $f(x_1) = f_1$ ,  $f(x_2) = f_2$ . Поскольку множество  $X$  линейно-связно, то существует непрерывная вектор-функция  $x : [t_1, t_2] \rightarrow X$  такая, что  $x(t_1) = x_1$ ,  $x(t_2) = x_2$ . По теореме о непрерывности сложной функции вектор-функция одной переменной  $\varphi(t) = f(x(t))$  непрерывна на отрезке  $[t_1, t_2]$ . Следовательно, произвольные две точки  $f_1, f_2 \in f(X)$  можно соединить кривой  $\Gamma = \{\varphi(t) : t \in [t_1, t_2]\} \subset f(X)$ , т. е. множество  $f(X)$  линейно-связно.  $\square$

Поскольку открытое линейно-связное множество называется областью, то из теорем 2, 3 получаем

**Следствие.** (Принцип сохранения области.) Образ области  $Y \subset \mathbb{R}^n$  при непрерывно дифференцируемом отображении  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  с неравным нулю якобианом является областью.

# Предметный указатель

- Асимптота 112
- Бином Ньютона 85
- Бинормаль 156
- Вектор-функция 139, 173
- Векторное произведение 140
- Взаимно однозначное соответствие 9
- Внутренность множества 35, 158
- Годограф 144
- Градиент 181
- Граница множества 160
- Грань множества
  - верняя, нижняя 13
  - точная
    - верхняя 15
    - нижняя 16
- График функции  $??$ , 181
- Дифференциал
  - первого порядка 77, 143, 181
  - высших порядков 86, 193
- Длина кривой 147
  - переменная 149
- Замыкание множества 36, 159
- Интеграл
  - Дарбу 211
  - криволинейный
    - первого рода 238
    - второго рода 240
  - неопределенный 114
  - несобственный 244
  - определенный 208
  - Римана 208
- Инфимум
  - функции 50
  - числового множества 16
- Касательная
  - плоскость 182
  - прямая
    - вертикальная  $??$
    - к кривой 151
    - невертикальная 76
- Колебание функции 211
- Компакт 38, 163
- Кривая 144
  - гладкая 150
  - замкнутая 144
  - ориентированная 145
  - простая 145
  - спрямляемая 147
- Кривизна 152
- Критерий
  - интегрируемости 212
  - компактности 38, 163
- Коши
  - для функционального ряда 286

- для функциональной последовательности 284
- для числовой последовательности 34
- существования предела функции 46
- сходимости несобственного интеграла 256
- сходимости ряда 270
- равномерной сходимости функционального ряда 286
- равномерной сходимости функциональной последовательности 281
- сходимости интеграла от неотрицательной функции 253
- сходимости ряда с неотрицательными членами 265
- точки прикосновения 37, 162
- частичного предела 29
- Круг сходимости 304
- Максимум
  - функции 50
  - числового множества 14
- Матрица Якоби 188
- Мелкость разбиения 208
- Минимум
  - функции 50
  - числового множества 14
- Множество
  - замкнутое 37, 159
  - значений функции 9
  - линейно-связное 176
  - несчетное 39
  - ограниченное 13, 162
  - определения функции 9
  - открытое 35, 158
  - равномошное 39
  - счетное 39
  - $\mathbb{C}$  118
  - $\mathbb{Q}$  12
  - $\mathbb{N}$  12
  - $\mathbb{R}$  10
  - $\mathbb{Z}$  12
- Непрерывность функции
  - в точке 52, 56, 141, 174
  - на множестве 56, 175
  - равномерная 178
- Неравенство
  - Бернулли 27
  - Коши–Буняковского 134
  - треугольника 21, 135
- Нормаль к кривой 153
- Область 177
- Ограниченность
  - множества 13, 162
  - последовательности 20, 162
  - равномерная 283
  - функции 58
- Окрестность
  - бесконечности 18
  - проколота 42
  - числа 17
- Параметризация кривой 146
  - натуральная 150
- Первообразная 114
- Плоскость
  - нормальная 156
  - соприкасающаяся 153
  - спрямляющая 156
- Подпоследовательность 29, 162

- Последовательность
- бесконечно большая 21
  - бесконечно малая 21
  - вложенных отрезков 27
    - стягивающаяся 28
  - возрастающая 25
  - Гейне 43
  - максимизирующая, минимизирующая 57
  - монотонная 26
  - невозрастающая 26
  - неубывающая 25
  - ограниченная 20, 162
  - расходящаяся 20
  - сходящаяся 20, 161
  - убывающая 26
  - фундаментальная 33, 164
  - функциональная 281
  - числовая 17
  - эквивалентная в смысле сходимости рядов 266
- Правило Лопиталя 101, 103
- Предел
- последовательности вещественных чисел 17, 19
    - верхний, нижний 33
    - частичный 29
  - последовательности комплексных чисел 301
  - функции
    - односторонний 49
    - повторный 172
    - по Гейне 43, 167
    - по Коши 42, 167
    - по множеству 48, 173
    - по направлению 168
    - слева 49
    - справа 50
- Признак
- Абея 261, 290
  - Вейерштрасса 288, 303
  - Даламбера 268
  - Дирихле 258, 288
  - интегральный 266
  - Коши 269
    - обобщенный 300
  - Лейбница 290
  - сравнения
    - для несобственных интегралов 253, 255
    - для числовых рядов 266
    - обобщенный для функциональных рядов 287
- Принцип
- Архимеда 17
  - Банаха сжимающих отображений 325
  - вложенных отрезков 28
  - локализации 248, 265
  - сохранения области 335
- Производная 75
- вектор-функции 141
  - односторонняя 78
  - по вектору 183
  - по направлению 183
  - смешанная 192
  - частная 185, 191
- Пространство
- евклидово 134
  - линейное 132
  - метрическое 137
  - нормированное 135
  - $\mathbb{R}^n$  133
- Радиус
- кривизны 152
  - сходимости 304
- Равномерная

- непрерывность 178
- сходимость 281, 285
- Разбиение 145
- Ряд
  - Маклорена 314
  - степенной 303
  - Тейлора 311
  - функциональный 285
  - числовой 264
- Соприкасающаяся окруж-  
ность 153
- Соответствие 9
- Сумма
  - Дарбу 208
  - Римана 213
  - ряда 264
- Суперпозиция
  - операторов 195
  - функций 54
- Супремум
  - функции 50
  - числового множества 15
- Сходимость
  - вещественного числового  
ряда 264
  - абсолютная 270
  - условная 270
  - комплексного ряда 302
  - несобственного интеграла  
244
  - абсолютная 257
  - условная 258
  - последовательности век-  
торов в  $\mathbb{R}^n$  161
  - последовательности веще-  
ственных чисел 20
  - последовательности ком-  
плексных чисел 301
- функционального ряда  
285
- функциональной последо-  
вательности
  - неравномерная 281
  - поточечная 281
  - равномерная 281
- Теорема
  - Абея первая 305
  - Абея вторая 307
  - Больцано–Вейерштрасса  
о частичном пределе  
30, 162
  - Больцано–Коши о проме-  
жуточном значении  
59
  - Вейерштрасса
    - о монотонной последо-  
вательности 26
    - о существовании мини-  
мума и максимума  
непрерывной функ-  
ции 58
- Кантора
  - о вложенных отрезках  
28
  - о равномерной непре-  
рывности 179
- Коши о среднем 89
- Лагранжа о среднем 90  
для вектор-функции  
143, 325
- Ролля 89
- Римана 276
- Ферма 88
- Чебышева 130
- Точка
  - внутренняя 35, 158
  - границная 160

- изолированная 48, 173
- максимума 87
- минимума 87
- особая на кривой 150
- особая для интеграла 247
- перегиба 110
- предельная 48, 172
- прикосновения 36, 158
- разрыва
  - второго рода 53
  - первого рода 52
- самопересечения кривой 144
- устранимого 52
- экстремума 87
- Трехгранник Френе 156
- Факториал 84
- Формула
  - конечных приращений Лагранжа 90
  - Коши–Адамара 304
  - Лейбница 84
  - Маклорена 97
  - Ньютона–Лейбница 225
  - Тейлора 92
    - с остаточным членом в интегральной форме 317
    - с остаточным членом в форме Лагранжа 95, 197
    - с остаточным членом в форме Пеано 93, 144, 198
  - Эйлера 119
- Функция
  - бесконечно малая относительно 73
  - бесконечно дифференцируемая 311
  - возрастающая 51
  - выпуклая 108
  - гиперболическая 71
  - Дирихле 49
  - дифференцируемая 76, 180, 188
    - $n$  раз 86, 193
  - интегрируемая 209
  - кусочно-непрерывная 221
  - монотонная 51
  - непрерывная
    - в точке 52, 56, 141, 174
    - на множестве 56, 175
  - непрерывно дифференцируемая 148
  - неявная 82, 322
  - обратимая 9
  - ограниченная 58
    - относительно 73
  - регулярная 311
  - сложная 54
  - убывающая 51
  - эквивалентная 71
    - в смысле сходимости интегралов 254
- Целая часть числа 17
- Центр кривизны 153
- Число
  - $e$  27
  - вещественное 10
  - действительное 10
  - комплексное 118
  - натуральное 12
  - рациональное 12
  - целое 12
- Экстремум функции 87