**В. В. Горяйнов, Е. С. Половинкин**

# Лекции по теории функций комплексного переменного

## Содержание

## § 1. Комплексные числа

Возникновение комплексного анализа первоначально было связано с решением алгебраических уравнений. В дальнейшем выяснилось, что анализ над полем комплексных чисел обладает рядом преимуществ и является основой многих методов исследований в различных областях математики.

**1.1. Алгебра комплексных чисел.** С точки зрения разрешимости алгебраического уравнения $x^2 + 1 = 0$ появляется необходимость расширения поля вещественных чисел. Пусть $i$ — новое число (*мнимая единица*), которое удовлетворяет условию $i^2 = i \cdot i = -1$. Если производить операции сложения и умножения над вещественными числами и мнимой единицей, то мы естественным образом приходим к записи *комплексных чисел* $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$. В этой записи $x$ называют вещественной частью комплексного числа $z$ и обозначают $x = \operatorname{Re} z$, а $y$ — мнимой частью с обозначением $y = \operatorname{Im} z$. Если $x = 0$, то комплексное число $z$ называют чисто мнимым, а в случае $y = 0$ говорят, что $z$ вещественно. Нуль является единственным комплексным числом, которое одновременно и вещественное и чисто мнимое. Под *равенством* двух комплексных чисел понимается одновременное равенство вещественных и мнимых частей.

Арифметические операции сложения и умножения не выводят за рамки комплексных чисел, если предполагать, что для них выполняются те же арифметические законы, как и для вещественных чисел, а также выполняется правило $i^2 = -1$. Действительно,

$$(\alpha+i\beta)+(\gamma+i\delta) = (\alpha+\gamma)+i(\beta+\delta), \quad (\alpha+i\beta)(\gamma+i\delta) = (\alpha\gamma-\beta\delta)+i(\alpha\delta+\beta\gamma).$$

Менее очевидно, что в рамках комплексных чисел возможно деление. Пусть $\gamma + i\delta \neq 0$, т. е. $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$. Тогда частное $(\alpha + i\beta)/(\gamma + i\delta) = x + iy$ должно определяться из равенства $\alpha+i\beta = (\gamma+i\delta)(x+iy)$. С учетом условия равенства комплексных чисел $x$ и $y$ должны являться решением системы двух линейных уравнений

$$\begin{cases} \gamma x - \delta y = \alpha, \\ \delta x + \gamma y = \beta. \end{cases}$$

Поскольку $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, то эта система имеет единственное решение

$$x = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2}, \quad y = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}.$$

В частности, обратное к числу $\alpha + i\beta \neq 0$ определяется равенством

$$\frac{1}{\alpha+i\beta} = \frac{\alpha-i\beta}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} - i\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Можно также получить явный вид квадратного корня из комплексного числа $\alpha+i\beta$. Действительно, нам нужно найти число $x+iy$, которое удовлетворяет равенству

$$(x+iy)^2 = \alpha + i\beta.$$

Снова равенство комплексных чисел приводит к системе двух вещественных уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha, \\ 2xy = \beta. \end{cases} \tag{1.1}$$

Ее решение также должно удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha, \\ (x^2+y^2)^2 = \alpha^2+\beta^2, \end{cases}$$

из которой следуют равенства

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha\right), \quad y^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha\right).$$

Таким образом, возможны лишь по два значения для $x$ и для $y$:

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}.$$

Выбор знаков можно осуществить с учетом равенства $2xy = \beta$. Если $\beta = 0$, то решениями системы (1.1) являются

$$x = \pm\sqrt{\alpha}, \qquad y = 0$$

при $\alpha \geqslant 0$ и

$$x = 0, \qquad y = \pm\sqrt{-\alpha}$$

при $\alpha < 0$. В случае $\beta \neq 0$ значения $x$ и $y$ должны быть одного знака при $\beta > 0$ и иметь разные знаки при $\beta < 0$. Следовательно, для любого комплексного числа $\alpha + i\beta \neq 0$ существует ровно два квадратных корня:

$$\sqrt{\alpha+i\beta} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}} + i\frac{\beta}{|\beta|}\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}\right)$$

если $\beta \neq 0$, а при $\beta = 0$ этими корнями являются $\pm\sqrt{\alpha}$, если $\alpha > 0$, и $\pm i\sqrt{-\alpha}$, если $\alpha < 0$. Оба эти корня, как и в случае извлечения квадратного корня из положительного числа, отличаются друг от друга только знаком.

Отметим также, что введенное выше равенство комплексных чисел можно подкрепить следующими рассуждениями. Пусть $\alpha + i\beta = \gamma + i\delta$, т. е. мы имеем две записи одного комплексного числа. Тогда $\alpha - \gamma = i(\delta - \beta)$ и после возведения в квадрат обеих частей равенства приходим к равенству вещественных чисел $(\alpha - \gamma)^2 = -(\delta - \beta)^2$, которое возможно лишь в случае $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$ одновременно. Совокупность всех комплексных чисел обозначают символом $\mathbb{C}$. Из проведенных выше рассуждений следует, что $\mathbb{C}$ является числовым полем.

Под *комплексным сопряжением* понимается операция, которая каждому комплексному числу $a = \alpha + i\beta$ ставит в соответствие *сопряженное* число $\overline{a} = \alpha - i\beta$. Комплексное сопряжение является инволюцией, что выражается равенством $\overline{\overline{a}} = a$. Вещественная и мнимая части комплексного числа $a$ алгебраически выражаются через $a$ и $\overline{a}$:

$$\operatorname{Re} a = \frac{1}{2}(a + \overline{a}), \qquad \operatorname{Im} a = \frac{1}{2i}(a - \overline{a}).$$

Фундаментальным свойством сопряжения является то, что

$$\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}, \qquad \overline{ab} = \overline{a}\overline{b}.$$

Эти равенства легко проверяются непосредственным сравнением левых и правых частей. Далее, поскольку частное $z = a/b$ определяется как решение уравнения $a = bz$, то в силу предыдущих свойств $\overline{a} = \overline{b}\overline{z}$, откуда получаем

$$\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}.$$

Заметим теперь, что для любого комплексного числа $a = \alpha + i\beta$ произведение $a\overline{a} = \alpha^2 + \beta^2$ всегда принимает неотрицательное значение и равняется нулю лишь в случае $a = 0$. Неотрицательный корень $\sqrt{a\overline{a}}$ называется *модулем* комплексного числа $a$ и обозначается $|a|$. Отметим основные свойства модуля. Непосредственно из определения следует, что $a\overline{a} = |a|^2$ и $|\overline{a}| = |a|$. Для произведения двух комплексных чисел $a$ и $b$ получаем

$$|ab|^2 = ab\overline{ab} = ab\overline{a}\overline{b} = a\overline{a}b\overline{b} = |a|^2|b|^2,$$

т. е. $|ab| = |a||b|$. Если $b \neq 0$, то для частного $a/b$ будет выполняться равенство $b(a/b) = a$. Используя свойство модуля для произведения чисел, получаем $|b||a/b| = |a|$, откуда следует равенство

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

В отличие от вещественных чисел комплексные числа не связаны отношением порядка. Поэтому все неравенства записываются только для вещественных чисел. Из определения модуля сразу же следуют неравенства

$$-|a| \leqslant \operatorname{Re} a \leqslant |a|, \qquad -|a| \leqslant \operatorname{Im} a \leqslant |a|.$$

Равенство $\operatorname{Re} a = |a|$ имеет место в том и только том случае, если $a$ вещественно и неотрицательно. Далее, для любых двух комплексных чисел $a$ и $b$ имеем

$$|a+b|^2 = (a+b)\overline{(a+b)} = |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}\{a\overline{b}\} \leqslant |a^2| + |b|^2 + 2|a||b| = (|a| + |b|)^2.$$

Отсюда следует неравенство треугольника для комплексных чисел

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

Заметим, что в этом неравенстве знак равенства достигается лишь в случае, если $a\overline{b} \geqslant 0$.

Применяя неравенство треугольника, получаем

$$|a| = |(a-b)+b| \leqslant |a-b|+|b|,$$

откуда следует, что $|a|-|b| \leqslant |a-b|$. Аналогично получаем

$$|b| = |(b-a)+a| \leqslant |b-a|+|a|$$

и $|b|-|a| \leqslant |a-b|$. Полученные неравенства приводят к следующему

$$||a|-|b|| \leqslant |a-b|.$$

**1.2. Геометрическое представление комплексных чисел.** На координатной плоскости комплексное число $a=\alpha+i\beta$ можно интерпретировать либо как точку с координатами $(\alpha,\beta)$, либо как вектор, выходящий из начала координат в эту точку. Саму плоскость при этом будем называть *комплексной плоскостью.*

Сложение комплексных чисел вполне согласуется с векторным сложением. Кроме того, простое геометрическое содержание получают в рамках векторной интерпретации комплексных чисел модуль $|a|$ (длина вектора), неравенство треугольника $|a+b| \leqslant |a|+|b|$ и тождество параллелограмма

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2+|b|^2).$$

Комплексное число $a$ и его комплексное сопряжение $\overline{a}$ представляют на комплексной плоскости точки, симметричные относительно вещественной оси. Точка, симметричная к $a$ относительно мнимой оси, выражается в комплексной записи как $-\overline{a}$.

Для геометрической интерпретации произведения комплексных чисел введем в комплексной плоскости полярные координаты. Если $(r,\varphi)$ — полярные координаты точки $(\alpha,\beta)$, которую мы ассоциируем с комплексным числом $a=\alpha+i\beta$, то

$$\alpha = r\cos\varphi, \qquad \beta = r\sin\varphi.$$

Это приводит нас к *тригонометрической форме* записи комплексного числа $a$:

$$a = r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

При этом $r=|a|$, а полярный угол $\varphi$ (угол, который образует вектор $a$ с положительным направлением вещественной оси) называется *аргументом* комплексного числа $a \neq 0$. Нулю аргумент не приписывается. В остальных случаях аргумент определяется неоднозначно. Действительно, замена $\varphi$ на $\varphi+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, в тригонометрической форме записи дает то же самое комплексное число. В связи с этим условимся через $\arg a$ обозначать некоторое выделенное значение аргумента, например из промежутка $(-\pi, \pi]$, а множество всех значений аргумента обозначать

$$\operatorname{Arg}\{a\} = \{\arg a + 2k\pi\colon\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Рассмотрим теперь два комплексных числа $a_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $a_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Их произведение записывается в виде

$$a_1 a_2 = r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)].$$

Используя теоремы косинусов и синусов суммы углов, получаем

$$a_1 a_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

То, что модули перемножаются при умножении комплексных чисел, мы видели из алгебраического определения модуля. Полученное выше равенство дает также правило сложения аргументов:

$$\operatorname{Arg}\{a_1 a_2\} = \operatorname{Arg}\{a_1\} + \operatorname{Arg}\{a_2\},$$

или в другой записи

$$\arg(a_1 a_2) = \arg a_1 + \arg a_2 \pmod{2\pi}.$$

Другими словами, при произведении комплексных чисел их аргументы складываются.

Пусть теперь $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$. Тогда

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r}\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

Отсюда и из доказанного свойства аргумента для произведения получаем

$$\operatorname{Arg}\left\{\frac{a}{b}\right\} = \operatorname{Arg}\{a\} - \operatorname{Arg}\{b\},$$

т. е. при делении комплексных чисел аргументы вычитаются.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа позволяет дать полный анализ решений *биномиального уравнения*

$$z^n = a,$$

$a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Решение $z$ будем искать в виде $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Из правила умножения комплексных чисел сразу же получаем

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

В случае $\rho = 1$ это равенство принимает вид

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

и носит имя *Муавра.* Таким образом, уравнение $z^n = a$ эквивалентно системе

$$\rho^n = r, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

из которой следует, что все решения уравнения $z^n = a$ можно представить формулой

$$z = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right),$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$. Это — все корни $n$-ой степени из числа $a \neq 0$. Они расположены на окружности с центром в начале координат и радиуса $\sqrt[n]{r}$. В случае $a = 1$ получаем корни $n$-ой степени из единицы: $1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}$, где

$$\omega_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

**1.3. Последовательности и ряды. Расширенная комплексная плоскость.** Аналогично вещественному случаю в комплексном анализе вводятся понятия окрестности и предела числовой последовательности на основе модуля комплексного числа. Для $a \in \mathbb{C}$ и $r > 0$ под окрестностью точки $a$ радиуса $r$ будем понимать множество

$$\mathcal{O}_r(a) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z-a| < r\}.$$

Очевидно, что в плоскости $\mathbb{C}$, которую можно отождествить с $\mathbb{R}^2$, окрестность $\mathcal{O}_r(a)$ представляет собой открытый круг с центром в точке $a$ и радиусом $r$. Через $\overline{\mathcal{O}}_r(a)$ будем обозначать замкнутый круг, т. е.

$$\overline{\mathcal{O}}_r(a) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z-a| \leqslant r\},$$

а через $\dot{\mathcal{O}}_r(a) = \{z \in \mathbb{C}\colon 0 < |z-a| < r\}$ — проколотую окрестность точки $a$.

Пусть $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ — последовательность комплексных чисел. Будем говорить, что комплексное число $a = \alpha + i\beta$ является *пределом* последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что $|a_n - a| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N(\varepsilon)$. Другими словами, при $n \geqslant N(\varepsilon)$ точки $a_n$ будут попадать в $\varepsilon$-окрестность $\mathcal{O}_\varepsilon(a)$ точки $a$. В случае существования предела $a$ последовательности $\{a_n\}$ эту последовательность называют *сходящейся* и пишут

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Заметим, что в силу неравенств

$$|\alpha_n - \alpha| \leqslant |a_n - a|,\ |\beta_n - \beta| \leqslant |a_n - a|,\ |a_n - a| \leqslant |\alpha_n - \alpha| + |\beta_n - \beta|$$

условие $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ эквивалентно следующим двум:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta.$$

Таким образом, последовательность $\{a_n\}$ комплексных чисел $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ сходится в том и только том случае, если сходятся последовательности вещественных частей $\{\alpha_n\}$ и мнимых частей $\{\beta_n\}$ одновременно. Кроме того, применение критерия Коши для последовательностей вещественных и мнимых частей приводит к следующему результату. Последовательность $\{a_n\}$ комплексных чисел является сходящейся в том и только том случае, если она *фундаментальна*, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при всех $n, m \geqslant N(\varepsilon)$. Аналогично переносятся все свойства сходящихся последовательностей из вещественного анализа на комплексные последовательности.

Среди *расходящихся* последовательностей $\{a_n\}$ в комплексном анализе выделяют те, для которых $|a_n| \to +\infty$ при $n \to \infty$. Более точно, будем говорить, что последовательность $\{a_n\}$ стремится к бесконечности и писать $a_n \to \infty$ (или $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$), если для любого $R > 0$ найдется номер $N(R)$ такой, что $|a_n| > R$ при всех $n \geqslant N(R)$. В связи с этим, а также по другим причинам, комплексная плоскость $\mathbb{C}$ *пополняется* бесконечно удаленной точкой $z = \infty$. Под окрестностью бесконечно удаленной точки понимается внешность круга с центром в начале координат, т. е. множество точек $z \in \mathbb{C}$, для которых $|z| > R$, где $R > 0$. Пополненная (или *расширенная*) комплексная плоскость обозначается через $\overline{\mathbb{C}}$. В расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ принцип Больцано—Вейерштрасса уточняется следующим образом. Из любой последовательности $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ можно выделить сходящуюся (в собственном или расширенном смысле) подпоследовательность. Действительно, если последовательность $\{a_n\}$ ограничена, то к ней (как к последовательности точек в $\mathbb{R}^2$) можно применить классический принцип Больцано—Вейерштрасса. (Либо применить его к последовательностям вещественных и мнимых частей.) В случае неограниченной последовательности $\{a_n\}$ можно выделить подпоследовательность $a_{n_k}$, удовлетворяющую условию $|a_{n_k}| > k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Наглядное представление топологических свойств расширенной комплексной плоскости дает *стереографическая проекция*. Рассмотрим сферу $\mathbb{S}$, которая в трехмерном пространстве задается уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. С каждой точкой $(x_1, x_2, x_3)$ на сфере $\mathbb{S}$, исключая точку $(0, 0, 1)$, можно ассоциировать комплексное число $z \in \mathbb{C}$ по формуле

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Это равенство определяет взаимно-однозначное соответствие между $\mathbb{S} \setminus \{(0,0,1)\}$ и $\mathbb{C}$. Действительно, используя очевидное соотношение

$$|z|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3},$$

легко находится обратное отображение

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad x_1 = \frac{z + \overline{z}}{1 + |z|^2}, \quad x_2 = \frac{1}{i}\frac{z - \overline{z}}{1 + |z|^2}.$$

Заметим также, что при $|z| \to \infty$ соответствующая точка на сфере $\mathbb{S}$ стремится к точке $(0, 0, 1)$. Продолжая отображение соответствием $(0, 0, 1) \mapsto \infty$, приходим к взаимно-однозначному соответствию $\mathbb{S}$ и $\overline{\mathbb{C}}$. Это отображение называется стереографической проекцией и обладает рядом замечательных свойств.

Как и в вещественном анализе под числовым рядом понимается формальная сумма $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. С рядом ассоциируется последовательность его частичных сумм $S_n = a_1 + \ldots + a_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Говорят, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если

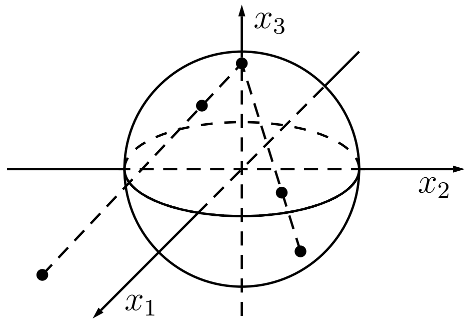


Рис. 1. Сфера Римана

сходится последовательность его частичных сумм. При этом $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ называется суммой ряда и пишут $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пусть $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ будут иметь вид

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + i \sum_{k=1}^{n} \beta_k.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в том и только том случае, если сходятся два вещественных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$. Критерий Коши, примененный к последовательности частичных сумм, показывает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что

$$\left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right| < \varepsilon$$

при всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ и натуральных $m$. Из критерия Коши и неравенства треугольника сразу же следует, что абсолютная сходимость ряда влечет его сходимость. Как и в вещественном случае из критерия Коши следует также необходимое условие сходимости ряда: $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

## § 2. Комплексная дифференцируемость

Теория функций комплексного переменного расширяет исчисление на комплексную область. При этом и дифференцирование и интегрирование приобретают некоторое новое значение. Их область применения существенно сужается и естественным образом возникает класс голоморфных или аналитических функций.

Под функцией комплексного переменного $w = f(z)$ будем понимать отображение множества $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ в комплексной $z$-плоскости в множество $f(D) = G \subset \overline{\mathbb{C}}$ комплексной $w$-плоскости. Если представить $z = x + iy$, $w = u + iv$, то задание функции $f$ эквивалентно определению двух вещественных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ вещественных переменных $x$ и $y$, т. е. $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Другими словами, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дают запись отображения $f$ в вещественных терминах. Как правило, мы будем рассматривать случай, когда функция $f$ определена на открытом множестве.

Определение 2.1. Будем говорить, что функция $f(z)$ имеет предел $A$ при $z \to a$ и писать

$$\lim_{z\to a} f(z) = A, \tag{2.1}$$

если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(z) - A| < \varepsilon$ при всех $z \in \dot{\mathcal{O}}_\delta(a)$, т. е. при $0 < |z - a| < \delta$.

Формулировка определения легко видоизменяется в случаях, когда $a = \infty$ или $A = \infty$ (или оба вместе). Например, при $a = \infty$ нужно фразу „при всех $z \in \dot{\mathcal{O}}_\delta(a)$“ заменить на фразу „при $|z| > \delta$“. Хорошо известные из вещественного анализа результаты, касающиеся пределов суммы, произведения и частного, остаются верными и в комплексном случае, поскольку при их доказательстве используются лишь свойства модуля. Заметим также, что условие (2.1) эквивалентно следующему

$$\lim_{z\to a} \overline{f(z)} = \overline{A}. \tag{2.2}$$

Из (2.1) и (2.2) сразу же следуют соотношения

$$\lim_{z\to a} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} A, \qquad \lim_{z\to a} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} A.$$

Обратно, если выполнены последние два соотношения, то выполняются (2.1) и (2.2). Функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке* $a$, если

$$\lim_{z\to a} f(z) = f(a).$$

Термин *непрерывная функция* будем употреблять в случае, когда $f$ непрерывна во всех точках, где она определена. Из свойств предела следует, что сумма и произведение двух непрерывных функций являются непрерывными функциями. Частное двух непрерывных функций $f$ и $g$ также непрерывно в некоторой окрестности точки $a$, если в этой точке не обращается в нуль знаменатель. Кроме того, из неравенств

$$\left.\begin{array}{l} |\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z_0)| \\ |\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} f(z_0)| \\ ||f(z)| - |f(z_0)|| \end{array}\right\} \leqslant |f(z) - f(z_0)|$$

следует, что если $f$ непрерывна, то таковыми являются $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ и $|f|$.

Производная функции определяется как предел отношения приращений независимой и зависимой переменных, т. е. по форме комплексное дифференцирование вполне аналогично вещественному:

$$f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Это определение производной и идентичность арифметических законов для комплексных и вещественных чисел показывают, что обычные правила дифференцирования суммы, произведения и частного выполняются и в комплексном случае. Однако, в отличие от понятия непрерывности, которое просто сводится к непрерывности вещественной и мнимой частей, условие дифференцируемости влечет совершенно неожиданные свойства функции.

Теорема 2.1. *Для дифференцируемости функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ в точке $z = x + iy$ в комплексном смысле необходимо и достаточно, чтобы она была дифференцируема в вещественном смысле (т. е. дифференцируемы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$) и выполнялись равенства*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Вещественная дифференцируемость функции $f$ в точке $z = x + iy$ означает представление приращений функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в виде

$$u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y) = u'_x \cdot \xi + u'_y \cdot \eta + o(|\zeta|),$$
$$v(x+\xi, y+\eta) - v(x,y) = v'_x \cdot \xi + v'_y \cdot \eta + o(|\zeta|),$$

где частные производные вычислены в точке $(x,y)$ и $\zeta = \xi + i\eta$. С другой стороны, комплексная дифференцируемость функции $f$ в точке $z$ эквивалентна представлению ее приращения в виде

$$f(z+\zeta) - f(z) = f'(z)\zeta + \zeta\sigma(\zeta),$$

где $\sigma(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to 0$. Пусть $f'(z) = \alpha + i\beta$. Тогда, отделяя в последнем равенстве вещественную и мнимую части, получаем

$$u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y) = \alpha \cdot \xi - \beta \cdot \eta + o(|\zeta|),$$
$$v(x+\xi, y+\eta) - v(x,y) = \beta \cdot \xi + \alpha \cdot \eta + o(|\zeta|).$$

Другими словами, $du = \alpha dx - \beta dy$, $dv = \beta dx + \alpha dy$. В силу единственности дифференциала получаем равенства

$$u'_x = \alpha, \quad u'_y = -\beta, \quad v'_x = \beta, \quad v'_y = \alpha,$$

из которых следуют соотношения (2.3). Таким образом, из комплексной дифференцируемости следует вещественная дифференцируемость и выполнение соотношений (2.3). При этом

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.4}$$

Обратно, допустим, что $f$ дифференцируема в вещественном смысле и выполняются соотношения (2.3). Тогда, умножая приращение функции $v$ на $i$ и складывая его с приращением функции $u$, получаем приращение функции $f$ из которого следует ее комплексная дифференцируемость. □

Определение 2.2. Функцию $f$, определенную на открытом множестве $D \subset \mathbb{C}$ будем называть *голоморфной (аналитической, регулярной)* в $D$, если она дифференцируема в комплексном смысле в каждой точке $D$. Будем говорить, что $f$ голоморфна на произвольном множестве $E \subset \mathbb{C}$, если она голоморфна на некотором открытом множестве $D$, содержащем $E$.

Соотношения (2.3), которым удовлетворяют вещественная и мнимая части голоморфной функции, называются *условиями (или системой уравнений) Коши—Римана.* С учетом равенств (2.3) можно записать четыре различных выражения для $f'(z)$ в терминах частных производных. В ходе доказательства теоремы были получены следующие два

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = -i\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Сами условия Коши—Римана можно записать одним комплексным равенством

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Если воспользоваться инвариантностью формы первого дифференциала и формальной заменой $dx$ и $dy$ на $dz$ и $d\overline{z}$, то очевидные преобразования

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(dz + d\overline{z}) + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}(dz - d\overline{z}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\overline{z} \end{aligned}$$

естественным образом приводят к дифференциальным операторам

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

В этих терминах условия Коши—Римана принимают вид

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Система уравнений Коши—Римана (2.3) обладает рядом интересных свойств. В частности, если предположить, что функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми, то из (2.3) получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Отсюда и из равенства смешанных производных следует, что функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Дифференциальный оператор

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

называется оператором Лапласа, а дифференциальное уравнение $\triangle u = 0$ — уравнением Лапласа. Аналогично предыдущему получаем, что функция $v(x,y)$ также удовлетворяет уравнению Лапласа.

Определение 2.3. Функция $u(x, y)$ действительных переменных $x, y$, принимающая вещественные значения и дважды непрерывно дифференцируемая, называется *гармонической* в области определения (на открытом множестве $D$), если $\triangle u = 0$ всюду в $D$. Две гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, связанные соотношениями Коши—Римана (2.3), называются *сопряженными* гармоническими функциями.

Как уже отмечалось выше, правила дифференцирования суммы, произведения и частного голоморфных функций совпадают с аналогичными правилами дифференцирования из вещественного анализа. Допустим теперь, что $w = f(z)$ — голоморфная в окрестности $\mathcal{O}_r(z_0)$ функция, которая принимает значения в окрестности $\mathcal{O}_\varrho(w_0)$ и $f(z_0) = w_0$. Пусть также функция $\zeta = g(w)$ голоморфна в окрестности $\mathcal{O}_\varrho(w_0)$. Тогда композиция $\zeta = h(z) = g(f(z))$ является голоморфной в $\mathcal{O}_r(z_0)$ функцией и имеет место равенство

$$h'(z_0) \;=\; g'(w_0)f'(z_0) \;=\; g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Действительно, пусть $\Delta z = z - z_0$ и $\Delta w = f(z) - f(z_0)$. В силу комплексной дифференцируемости функций $f$ и $g$ имеем

$$\Delta w \;=\; f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|), \quad g(w) - g(w_0) \;=\; g'(w_0) \cdot \Delta w + \Delta w \cdot \eta(\Delta w),$$

где $\eta(\Delta w) \to 0$ при $\Delta w \to 0$. Но тогда

$$\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} \;=\; \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} \;=\; g'(w_0)\frac{\Delta w}{\Delta z} + \frac{\Delta w}{\Delta z}\eta(\Delta w) \;\to\; g'(w_0)f'(z_0)$$

при $\Delta z \to 0$.

Определение 2.4. Множество $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется связным, если не существует двух открытых множеств $G_1$ и $G_2$, удовлетворяющих условиям:

(i) $E \subset G_1 \cup G_2$;
(ii) $E \cap G_1 \cap G_2 \;=\; \varnothing$;
(iii) $G_1 \cap E \;\neq\; \varnothing, \quad G_2 \cap E \;\neq\; \varnothing$.

Интуитивно связность означает, что множество $E$ состоит из одного „куска“. В случае, когда $E$ является открытым множеством, условие $(ii)$ можно сформулировать в виде $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, поскольку в этом случае множества $G_1$ и $G_2$, удовлетворяющие условиям $(i)$ — $(iii)$ можно заменить на $E \cap G_1$ и $E \cap G_2$.

Теорема 2.2. *Отрезок прямой — связное множество. При этом допускается, чтобы один из концов отрезка был бесконечно удаленной точкой, а сам отрезок был открытым, замкнутым или полуоткрытым.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. найдутся два открытых множества $G_1$ и $G_2$, для которых выполнены условия $(i)$ — $(iii)$, где $E$ — наш отрезок. Тогда на $E$ найдутся две конечные точки $a \in G_1$ и $b \in G_2$. Очевидно, что условия $(i)$ — $(iii)$ также выполняются при замене $E$ на отрезок $E_1 = [a, b]$. Разобьем $E_1$ пополам и выберем ту его часть $E_2$, которая представляет собой отрезок с концами в разных множествах $G_1$ и $G_2$. Продолжая этот процесс, получим последовательность замкнутых вложенных отрезков $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, длины которых стремятся к нулю. По теореме Кантора, существует единственная точка $\xi$, принадлежащая всем отрезкам последовательности $\{E_n\}$. Из условий $(i)$, $(ii)$ следует, что $\xi$ принадлежит одному из множеств $G_1$ или $G_2$. Пусть это для определенности будет $G_1$. В силу открытости $G_1$ и стремления длин $E_n$ к нулю следует, что $E_n \subset G_1$ при достаточно больших номерах $n$. Однако это противоречит условиям выбора $E_n$. □

Определение 2.5. Непустое открытое связное множество называется *областью.*

Следующий результат дает характеристическое свойство области.

Теорема 2.3. *Непустое открытое множество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ является связным в том и только том случае, если любые две его точки можно соединить ломаной, расположенной в $D$. При этом ломаную можно выбрать так, чтобы ее звенья были параллельны координатным осям.*

Доказательство. Пусть $D$ связно и $a \in D$. Обозначим через $G_1$ множество точек в $D$, которые можно соединить с $a$ ломаной, расположенной в $D$ и имеющей звенья, параллельные координатным осям. Через $G_2$ обозначим те точки из $D$, которые не удовлетворяют этому условию. Если некоторую точку $b \in D$ можно соединить с $a$ указанной ломаной, то и точки круговой окрестности $\mathcal{O}_r(b) \subset D$ также можно соединить такой ломаной. Это означает, что $G_1$ — открытое множество. Аналогично убеждаемся, что $G_2$ — открытое множество. В силу того, что $D$ связно, одно из открытых множеств $G_1$ или $G_2$ должно быть пусто. Поскольку точка $a$ содержится в $D$ с некоторой окрестностью, то $G_1 \neq \varnothing$. Следовательно, $G_2 = \varnothing$ и все точки из $D$ можно соединить с $a$ ломаной со звеньями, параллельными координатным осям.

Обратно, пусть $D$ — открытое множество и любые две точки этого множества можно соединить ломаной, расположенной в $D$. Тогда связность $D$ легко устанавливается рассуждениями от противного. Действительно, допустим, что $G_1$ и $G_2$ — открытые множества, удовлетворяющие условиям: $G_1 \cup G_2 = D$, $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ и $G_1 \neq \varnothing$, $G_2 \neq \varnothing$. Выберем две точки $a \in G_1$ и $b \in G_2$. По условию их можно соединить в $D$ ломаной. На этой ломаной найдется отрезок $E$, концы которого расположены в разных множествах $G_1$ и $G_2$. Но тогда для $E$ и $G_1, G_2$ будут выполнены условия $(i)$ — $(iii)$, что противоречит связности отрезка. □

Определение 2.6. Область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *односвязной*, если ее дополнение $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ является связным множеством в $\overline{\mathbb{C}}$.

Заметим, что в этом определении дополнение рассматривается в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. В связи с этим определением полоса является односвязной областью.

Теорема 2.4. *Пусть $f$ — голоморфная в области $D \subset \mathbb{C}$ функция и $f'(z) = 0$ для всех $z \in D$. Тогда $f(z) \equiv \mathrm{const}$ в $D$.*

Доказательство. Если $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то из условия теоремы следует, что $u'_x \equiv 0$, $u'_y \equiv 0$, $v'_x \equiv 0$ и $v'_y \equiv 0$ в $D$. Допустим, что отрезок $E = \{z = x + iy_0 \colon x_1 \leqslant x \leqslant x_2\}$ содержится в $D$. Поскольку $u'_x(x, y_0) = 0$ при $x \in [x_1, x_2]$, то по теореме из вещественного анализа $u(x, y_0) \equiv \mathrm{const}$ на $[x_1, x_2]$.

Другими словами, функция $u(x,y)$ является постоянной на горизонтальных отрезках, расположенных в $D$. Условие $u'_y \equiv 0$ дает постоянство функции $u(x,y)$ на вертикальных отрезках. Аналогичным свойством обладает функция $v(x,y)$. Следовательно, функция $f(z)$ является постоянной на горизонтальных и вертикальных отрезках, расположенных в области $D$.

Пусть теперь $z_1$ и $z_2$ — произвольные точки области $D$. По предыдущей теореме их можно соединить в $D$ ломаной со звеньями, параллельными координатным осям. В силу доказанного свойства функции $f$ получаем $f(z_1) = f(z_2)$. □

Теорема 2.5 (Об обратной функции). *Пусть в области $D$ функция $w = f(z)$ голоморфна и имеет непрерывную производную. Допустим, что точке $z_0 \in D$ при отображении $f$ соответствует точка $w_0 = f(z_0)$ и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда найдутся такие окрестность $U$ точки $z_0$ (открытое множество, содержащее $z_0$) и окрестность $V$ точки $w_0$, что $f$ взаимно однозначно отображает $U$ на $V$ и обратное отображение $g = f^{-1}$ является голоморфной функцией в $V$. При этом*

$$g'(w_0) \;=\; \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что поскольку производная $f'(z)$ непрерывна, то ее модуль $|f'(z)|$ также будет непрерывной функцией. По условию $|f'(z_0)| > 0$ и, следовательно, найдется круговая окрестность $\mathcal{O}_r(z_0)$, в которой выполняется неравенство $|f'(z)| > 0$.

Далее, выделяя в переменных $z = x+iy$ и $w = u+iv$ вещественные и мнимые части, функцию $w = f(z)$ можно представить как отображение $f\colon (x,y) \mapsto (u,v)$, действующее в $\mathbb{R}^2$. Используя условия Коши — Римана, якобиан этого отображения преобразуется следующим образом

$$\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = u'_x \cdot v'_y - u'_y \cdot v'_x \;=\; (u'_x)^2 + (v'_x)^2 \;=\; |f'(z)|^2,$$

откуда видно, что в $\mathcal{O}_r(z_0)$ выполнены условия теоремы об обратном отображении из вещественного анализа. Согласно этой теоремы найдутся такие окрестности $U$ точки $z_0$ и $V$ точки $w_0$, что $f$ взаимно однозначно отображает $U$ на $V$ и обратное отображение $g = f^{-1}$ является непрерывно дифференцируемым (в вещественном смысле). Для нас сейчас важно то, что $f\colon U \mapsto V$ является *топологическим* отображением, т. е. взаимно однозначным и непрерывным в обе стороны. Поскольку $V$ является открытым множеством, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\mathcal{O}_\varepsilon(w_0) \subset V$. Пусть теперь $w \in \dot{\mathcal{O}}_\varepsilon(w_0)$ и $\Delta w = w - w_0$, $\Delta z = g(w) - g(w_0) = z - z_0$. Тогда $\Delta z \neq 0$ и $\Delta z \to 0$ в том и только том случае, когда $\Delta w \to 0$. Замечая, что $\Delta w = f(z) - f(z_0)$, получаем

$$\lim_{\Delta w \to 0} \frac{g(w_0 + \Delta w) - g(w_0)}{\Delta w} \;=\; \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} \;=\; \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta w / \Delta z} \;=\; \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Таким образом, функция $g$ дифференцируема в комплексном смысле в точке $w_0$. Однако, для любой пары точек $z \in U$ и $w \in V$, связанных равенством $w = f(z)$, выполнены все условия, что и для пары $z_0, w_0$. Следовательно,

$z = g(w)$ является дифференцируемой в комплексном смысле на всем открытом множестве $V$ и

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}. \qquad \square$$

Определение 2.7. Голоморфную в области $D$ функцию $f$ называют *однолистной* в $D$, если $f(z_1) = f(z_2)$ лишь в случае $z_1 = z_2$ для любой пары точек $z_1, z_2$ из $D$.

Другими словами, функция $f$ однолистна в $D$, если она отображает $D$ взаимно однозначно. Теорема об обратной функции утверждает, что если $f$ голоморфна и ее производная не обращается в нуль, то она *локально* однолистна, т. е. в некоторой окрестности. Пример функции $w = z^2$ показывает, что функция может быть локально однолистной, но не быть однолистной в области. В качестве области $D$ можно рассмотреть кольцо $\{z \in \mathbb{C} \colon 1 < |z| < 2\}$.

## § 3. Степенные ряды и элементарные функции

Простейшим примером голоморфной функции является тождественно постоянная функция с производной, тождественно равной нулю. Другим примером голоморфной функции является $f(z) \equiv z$ с производной $f'(z) \equiv 1$. Поскольку сумма и произведение голоморфных функций также являются голоморфными функциями, то любой полином $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ представляет собой голоморфную в $\mathbb{C}$ функцию. Для расширения класса голоморфных функций естественно перейти к бесконечным суммам, т. е. к рядам.

Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций, определенных на множестве $E \subset \mathbb{C}$. Будем говорить, что эта последовательность сходится в точке $z_0 \in E$ к функции $f$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon, z_0)$, что при всех $n \geqslant N(\varepsilon, z_0)$ выполняется неравенство $|f(z_0) - f_n(z_0)| < \varepsilon$. Последовательность $f_n$ сходится к функции $f$ на множестве $E$, если она сходится в каждой точке множества $E$. В случае, если для любого $\varepsilon > 0$ номер $N = N(\varepsilon)$ можно выбрать выбрать так, чтобы неравенство $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ выполнялось для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ и $z \in E$, то последовательность $f_n$ называется равномерно сходящейся на множестве $E$. Важнейшим свойством равномерной сходимости является то, что пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций является непрерывная функция. Совершенно аналогично вещественному случаю устанавливается критерий Коши для равномерной сходимости: „Последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на $E \subset \mathbb{C}$ в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$ для всех $z \in E$ и $n, m \geqslant N(\varepsilon)$“.

Критерий Коши, примененный к частичным суммам функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, дает признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ с неотрицательными $\alpha_n$ мажорирует на множестве $E$ функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, т. е. $|f_n(z)| \leqslant \alpha_n$ для всех $z \in E$ и всех $n$, за исключением, быть может, конечного числа, и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится на $E$ равномерно.

Под *степенным рядом* понимается функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;=\; a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \tag{3.1}$$

где $a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ — комплексные числа, называемые коэффициентами ряда, а $z$ — комплексная переменная. Можно рассмотреть более общий вид степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, но его изучение сводится к (3.1) путем замены переменной $\zeta = z - z_0$.

Рассмотрим один простой, но важный, пример так называемого геометрического ряда $1 + z + z^2 + \ldots$. Его частичные суммы при $z \neq 1$ можно записать в в виде

$$S_n(z) \;=\; 1 + z + \ldots + z^n \;=\; \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Заметим, что в случае $|z| < 1$ предел частичных сумм существует и

$$S(z) \;=\; \lim_{n\to\infty} S_n(z) \;=\; \frac{1}{1 - z}.$$

В случае $|z| \geqslant 1$ не выполняется необходимое условие сходимости ряда и геометрический ряд расходится. Оказывается, что такая ситуация в определенном смысле типична для степенных рядов.

Теорема 3.1. *Для каждого степенного ряда* (3.1) *число*

$$R \;=\; 1/\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \qquad 0 \leqslant R \leqslant +\infty, \tag{3.2}$$

*называемое радиусом сходимости, удовлетворяет следующим условиям:*

*(i) В каждом круге $|z| \leqslant r < R$ ряд* (3.1) *сходится абсолютно и равномерно;*

*(ii) Если $|z| > R$, то ряд* (3.1) *расходится;*

*(iii) Сумма ряда $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ является голоморфной в круге $|z| < R$ функцией, а ее производная $S'(z)$ представляет собой сумму почленно продифференцированного ряда* (3.1)*, т. е. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.*

Доказательство. $(i)$ Пусть $R > 0$ и $0 < r < R$. Выберем $\varrho$ из интервала $(r, R)$, т. е. $r < \varrho < R$. Поскольку

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \;=\; \frac{1}{R} \;<\; \frac{1}{\varrho},$$

то найдется такой номер $N$, что $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/\varrho$ при всех $n \geqslant N$. Но тогда для $n \geqslant N$ и $z$ из круга $|z| \leqslant r$ будут выполняться неравенства

$$|a_n z^n| \;=\; |a_n| \cdot |z|^n \;\leqslant\; \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n.$$

Это означает, что в круге $|z| \leqslant r$ члены ряда (3.1) мажорируются геометрической прогрессией $(r/\varrho)^n$, $n \geqslant N$. Поскольку $r/\varrho < 1$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (r/\varrho)^n$ сходится и по признаку Вейерштрасса степенной ряд (3.1) сходится абсолютно и равномерно в круге $|z| \leqslant r$. Таким образом, утверждение $(i)$ доказано.

Для доказательства $(ii)$ заметим, что если $|z| > R$, то в силу определения верхнего предела найдется подпоследовательность номеров $n_k$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $|a_{n_k} z^{n_k}| > 1$, поскольку

$$\frac{1}{|z|} < \frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Это означает, что для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ не выполняется необходимое условие сходимости и утверждение $(ii)$ доказано.

Приступая к доказательству $(iii)$, заметим прежде всего, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

полученный почленным дифференцированием ряда (3.1), имеет тот же радиус сходимости, что и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n$. Однако, поскольку $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R},$$

и радиус сходимости этих рядов также равен $R$. Пусть $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Для каждого натурального $n$ обозначим через $S_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}$ частичную сумму ряда (3.1), а через $Q_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$ обозначим остаток этого ряда. Поскольку $S_n$ представляет собой полином, то является голоморфной функцией, а его производная $S_n'(z)$ является частичной суммой продифференцированного ряда (3.1). Следовательно, $S_n'(z) \to g(z)$ при $n \to \infty$ для любого $z$ из круга $|z| < R$.

Фиксируем произвольно $z_0$, $|z_0| < R$, и пусть $r$ удовлетворяет неравенству $|z_0| < r < R$. Для $z \neq z_0$ из круга $|z| < r$ и натурального $n$ имеет место равенство

$$\frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) = \left[\frac{S_n(z) - S_n(z_0)}{z - z_0} - S_n'(z_0)\right] + (S_n'(z_0) - g(z_0)) + \frac{Q_n(z) - Q_n(z_0)}{z - z_0}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Поскольку $|z|, |z_0| < r$, то

$$\left|\frac{Q_n(z) - Q_n(z_0)}{z - z_0}\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{z^k - z_0^k}{z - z_0}\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k (z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + \ldots + z_0^{k-1})\right| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} k|a_k| r^{k-1}.$$

Правая часть последнего неравенства представляет собой остаток сходящегося ряда. Поэтому найдется такой номер $N_1$, что

$$\left|\frac{Q_n(z) - Q_n(z_0)}{z - z_0}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

при $n \geqslant N_1$, $|z| \leqslant r$. Далее, найдется такой номер $N_2$, что

$$|S_n'(z_0) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

при $n \geqslant N_2$. Пусть теперь $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$. Из определения производной $S_n'(z_0)$ следует, что найдется такое $\delta > 0$, что при $0 < |z - z_0| < \delta$ будет выполняться неравенство

$$\left| \frac{S_n(z) - S_n(z_0)}{z - z_0} - S_n'(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, если $|z| < r$ и $0 < |z - z_0| < \delta$, то

$$\left| \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Это доказывает дифференцируемость функции $S(z)$ и равенство $S'(z) = g(z)$ для всех $z$ из круга $|z| < R$. □

Замечание 3.1. Равенство (3.2) известно в литературе как формула Коши — Адамара.

Замечание 3.2. Под теоремой Абеля (или первой теоремой Абеля) часто подразумевается утверждение: „Если ряд (3.1) сходится в точке $z_0$, то он сходится абсолютно и равномерно в любом круге $|z| \leqslant r < |z_0|$.“ Это утверждение очевидным образом следует из доказанного выше.

Замечание 3.3. Применяя доказанную теорему к производной суммы степенного ряда, получаем голоморфность $S'(z)$ и разложение для ее производной

$$S''(z) = 2a_2 + 6a_3 z + \dots .$$

Повторяя этот процесс, приходим к бесконечной дифференцируемости суммы степенного ряда (3.1) в круге сходимости и равенствам

$$S^{(n)}(z) = n! a_n + \frac{(n+1)!}{1!} a_{n+1} z + \frac{(n+2)!}{2!} a_{n+2} z^2 + \dots ,$$

$n = 1, 2, \dots$. В частности, имеют место формулы

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}, \qquad S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Другими словами, $S(z)$ имеет разложение в ряд Тейлора — Маклорена.

**Экспонента.** Важнейшими свойствами функции $e^x$ в вещественном анализе являются инвариантность относительно дифференцирования и условие $e^x|_{x=0} = 1$. Пусть функция $f$ определена как сумма степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Попробуем подобрать коэффициенты $a_n$ так, чтобы выполнялись условия: $f'(z) = f(z)$ и $f(0) = 1$. Второе условие эквивалентно равенству $a_0 = 1$. Замечая также, что в круге сходимости степенного ряда выполняется равенство $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, приходим к соотношениям: $a_{n-1} = n a_n$,

$n = 1, 2, \ldots$. Это вместе с условием $a_0 = 1$ приводит к равенствам $a_n = 1/n!$, $n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, естественно показательную функцию определить как сумму степенного ряда

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{3.3}$$

Поскольку $\sqrt[n]{n!} \to \infty$ при $n \to \infty$, то ряд (3.3), как следует из теоремы 3.1 сходится во всей комплексной плоскости. Следовательно, равенство (3.3) определяет $e^z$ как голоморфную в $\mathbb{C}$ функцию. В случае, когда $z = x$ вещественно, мы получаем ряд Тейлора функции $e^x$ из вещественного анализа. Другими словами, определенная равенством (3.3) функция $e^z$ является продолжением вещественной функции $e^x$ в комплексную плоскость. Вещественность коэффициентов степенного ряда (3.3) приводит к равенству $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ Отметим еще одно важное свойство функции $e^z$.

**Теорема сложения.** Для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ выполняется равенство

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Доказательство. Фиксируем произвольно $a \in \mathbb{C}$ и рассмотрим функцию $g(z) = e^z e^{a-z}$. Поскольку

$$g'(z) = e^z e^{a-z} - e^z e^{a-z} = 0$$

для всех $z \in \mathbb{C}$, то $g(z) \equiv \mathrm{const}$. Заметим также, что $g(0) = e^a$. Следовательно, $e^z e^{a-z} \equiv e^a$. Полагая в этом тождестве $a = z_1 + z_2$ и $z = z_1$, приходим к теореме сложения. □

Из теоремы сложения, в частности, следует тождество $e^z e^{-z} \equiv 1$. Это означает, что $e^z \neq 0$ ни при каком $z \in \mathbb{C}$ и $e^{-z} = 1/e^z$. Далее, применение теоремы сложения и представление $z = x + iy$ дает $e^z = e^x e^{iy}$. С другой стороны, $\overline{e^{iy}} = e^{-iy}$ и $|e^{iy}|^2 = e^{iy} e^{-iy} = 1$. Следовательно, $|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$.

**Тригонометрические функции.** Одним из преимуществ комплексного анализа является то, что в нем наиболее полно раскрываются связи между элементарными функциями. Мы уже отметили, что степенной ряд (3.3) является продолжением ряда Тейлора для $e^x$ в комплексную плоскость. В связи с этим оправдано также введение тригонометрических функций посредством равенств

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

При этом

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots, \qquad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots.$$

Для вещественных $z = x$ мы получаем ряды Тейлора соответствующих функций вещественного переменного. Непосредственно из определения косинуса и синуса следует *формула Эйлера*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

а также основное тригонометрическое тождество $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$. Используя теорему сложения для экспоненты, легко выводятся формулы

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

Из разложения в степенной ряд (или непосредственно из определения) следуют формулы для производных

$$(\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z.$$

Как и в вещественном анализе, через синус и косинус вводятся другие тригонометрические функции: $\operatorname{tg} z, \operatorname{ctg} z, \ldots$. Аналогично через экспоненту вводятся гиперболические функции

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \qquad \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

**Периодичность.** Будем говорить, что функция $f$ имеет период $\zeta \in \mathbb{C}$, если $f(z+\zeta) = f(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Условие на $\zeta$ быть периодом экспоненты выражается равенством $e^{z+\zeta} = e^z$ или $e^\zeta = 1$. Полагая $\zeta = \xi + i\eta$, получаем условия $\xi = 0$ и $\cos\eta + i\sin\eta = 1$, откуда находим $\eta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, периоды функции $e^z$ определяются равенством $\zeta = i2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**Логарифм.** В вещественном анализе функция $e^x$ является строго монотонно возрастающей и принимает положительные значения. Поэтому $\ln x$ определяется однозначно для положительных $x$ и является монотонной функцией на положительной полуоси. Естественно и в комплексном анализе под $\ln z$ понимать корень уравнения $e^\zeta = z$. Поскольку $e^\zeta \neq 0$ ни при каком $\zeta \in \mathbb{C}$, то логарифм нуля не определен. Пусть теперь $\zeta = \xi + i\eta$. Тогда равенство $e^\zeta = z$ эквивалентно системе

$$e^\xi = |z|, \qquad e^{i\eta} = \frac{z}{|z|}.$$

Первое уравнение имеет единственное решение $\xi = \ln|z|$, где понимается вещественный логарифм от положительного числа $|z|$. Второе уравнение выражает равенство двух комплексных чисел с единичным модулем. Поскольку по формулам Эйлера $e^{i\eta} = \cos\eta + i\sin\eta$, то с учетом тригонометрической формы записи комплексного числа $z$ имеем

$$\eta = \arg z + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

где под $\arg z$ понимается некоторое значение из $\operatorname{Arg}\{z\}$ (например, значение из промежутка $(-\pi, \pi]$ или $[0, 2\pi)$). Таким образом, для любого $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, уравнение $e^\zeta = z$ имеет бесконечно много решений. Их совокупность можно представить формулой

$$\operatorname{Ln}\{z\} = \ln|z| + i\operatorname{Arg}\{z\}.$$

Все значения $\operatorname{Ln}\{z\}$ имеют одну и ту же вещественную часть $\ln|z|$, а мнимые части двух различных значений логарифма отличаются на $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Из свойств аргумента комплексного числа и вещественного логарифма следует, что

$$\operatorname{Ln}\{z_1 z_2\} = \operatorname{Ln}\{z_1\} + \operatorname{Ln}\{z_2\}$$

для любых ненулевых комплексных чисел $z_1$ и $z_2$. Это равенство также непосредственно следует из теоремы сложения. Действительно, пусть $\zeta_1 \in \operatorname{Ln}\{z_1\}$, $\zeta_2 \in \operatorname{Ln}\{z_2\}$. Тогда

$$e^{\zeta_1+\zeta_2} = e^{\zeta_1}e^{\zeta_2} = z_1z_2,$$

т. е. $(\zeta_1+\zeta_2) \in \operatorname{Ln}\{z_1z_2\}$.

Допустим теперь, что в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ определена непрерывная функция $\zeta = f(z)$, принимающая в каждой точке $z \in D$ значение $f(z) \in \operatorname{Ln}\{z\}$. Тогда $e^{f(z)} = z$ и мы будем называть $f$ *непрерывной ветвью* (или просто *ветвью*) *логарифма в области* $D$. Будем писать $f(z) = \ln z$, если ясно, о какой ветви идет речь. Рассмотрим случай области $D = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}\colon x \leqslant 0\}$. В этой области можно выделить ветвь $\arg z$, которая принимает значения из интервала $(-\pi,\pi)$. Функция $\zeta = \ln z = \ln|z| + i\arg z$ будет непрерывной в $D$ и обратной к функции $z = e^{\zeta}$, определенной в полосе $|\operatorname{Im}\zeta| < \pi$. По теореме об обратной функции выделенная ветвь $\ln z$ будет голоморфной функцией в $D$ и

$$\frac{d}{dz}\ln z = \frac{1}{e^{\zeta}} = \frac{1}{z}.$$

Замечая, что $1+z$ расположено в $D = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ при $|z|<1$, можно рассмотреть непрерывную ветвь $\ln(1+z)$ в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z|<1\}$. Далее,

$$\frac{d}{dz}\ln(1+z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

где степенной ряд сходится в единичном круге $\mathbb{D}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ также сходится в $\mathbb{D}$, а его сумма $S(z)$ является голоморфной функцией в $\mathbb{D}$ и $S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$. Таким образом,

$$(\ln(1+z) - S(z))' = 0$$

для всех $z \in \mathbb{D}$ и по теореме 2.4 имеем $\ln(1+z) - S(z) \equiv \mathrm{const}$ в $\mathbb{D}$. Однако,

$$\ln(1+z)|_{z=0} = 0 = S(0)$$

и мы приходим к равенству

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}.$$

**Комплексные степени.** Если $a$ и $b$ — комплексные числа и $a \neq 0$, то под $a^b$ будем понимать значения из множества

$$\{a^b\} = e^{b\operatorname{Ln}\{a\}}.$$

Для $b = n, n \in \mathbb{Z}$, все значения $n\operatorname{Ln}\{a\}$ отличаются друг от друга на $2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$, и в силу периодичности экспоненты $\{a^n\}$ состоит из единственного комплексного числа. В случае $b = m/n$ где $m$ и $n$ взаимно простые натуральные числа, $\{a^{m/n}\} = \{\sqrt[n]{a^m}\}$ имеет ровно $n$ различных значений. В области $D = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ можно рассмотреть ветвь

$$z^b = e^{b\ln z},$$

где в качестве $\ln z$ выбрана ветвь, описанная выше.

## § 4. Комплексное интегрирование

**4.1. Интеграл и его свойства.** Комплексное интегрирование является важным инструментом в изучении свойств голоморфных функций. При этом, как и в вещественном анализе, возникает два направления в интегрировании. Одно связано с понятием сумм Римана и играет роль определенного интеграла. Второе связано с понятием первообразной и может рассматриваться как операция, обратная дифференцированию.

Начнем этот параграф с краткого обзора понятия кривой. Как образно выразился Феликс Клейн: „Всякий знает, что такое кривая, пока не выучится математике настолько, что вконец запутается в бесчисленных исключениях“.

Уравнение кривой $\gamma$ в плоскости удобно задать в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, где параметр $t$ пробегает некоторый промежуток $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, а $x(t)$ и $y(t)$ являются непрерывными функциями. В комплексной записи $z(t) = x(t) + iy(t)$. Образ кривой как точечное множество $\{z = z(t) \colon \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ является компактным и связным. Однако не следует отождествлять кривую с этим множеством. Очень существенно, что ее точки упорядочены возрастанием параметра $t$. Если возрастающая непрерывная функция $t = \varphi(\tau)$ отображает промежуток $\alpha_1 \leqslant \tau \leqslant \beta_1$ на $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то $z = z(\varphi(\tau))$ определяет тот же порядок точек, что $z = z(t)$. В связи с этим отображение $z = z(t)$ называют *путем* или *параметризацией* кривой $\gamma$, а под самой кривой понимают класс эквивалентных путей. Два пути $z = z(t)$, $\alpha_1 \leqslant t \leqslant \beta_1$, и $\zeta = \zeta(\tau)$, $\alpha_2 \leqslant \tau \leqslant \beta_2$, считаются *эквивалентными*, если существует непрерывная строго возрастающая функция $\tau = \tau(t) \colon [\alpha_1, \beta_1] \mapsto [\alpha_2, \beta_2]$ такая, что $z(t) = \zeta(\tau(t))$ для всех $t \in [\alpha_1, \beta_1]$.

Таким образом, чтобы определить кривую $\gamma$, достаточно выбрать путь $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, из класса эквивалентности. Точка $z(\alpha)$ называется *началом* кривой, а точка $z(\beta)$ — *концом* кривой. Это определение не зависит от выбора пути из класса эквивалентности. Путь $z = z(-t)$, $-\beta \leqslant t \leqslant -\alpha$, имеет тот же образ, что и путь $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, но не является эквивалентным ему. Соответствующую кривую будем обозначать $-\gamma$ (иногда используют обозначение $\gamma^-$) и говорить, что эта кривая получается из $\gamma$ сменой *ориентации*. Будем также говорить, что $\gamma$ и $-\gamma$ являются *противоположно ориентированными* кривыми. Кривая $\gamma$ называется *жордановой*, если ее параметризация $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, удовлетворяет условию $z(t_1) \neq z(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$. Кривая $\gamma$ называется *замкнутой*, если $z(\alpha) = z(\beta)$. Замкнутая жорданова кривая: $z(\alpha) = z(\beta)$, но $z(t_1) \neq z(t_2)$ при $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta)$ и $t_1 \neq t_2$. Замкнутую жорданову кривую можно рассматривать как топологическое отображение окружности в плоскость и по теореме Жордана она разбивает плоскость на две области. Кривую $\gamma$ будем называть *гладкой*, если найдется ее параметризация $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, которая удовлетворяет условиям: $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$ и $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$ при всех $t \in [\alpha, \beta]$. Производные $z'(\alpha)$ и $z'(\beta)$ в концевых точках понимаются как односторонние. Заметим, что $z'(t)$ является касательным вектором к кривой $\gamma$ в точке $z(t)$. Направление вектора $z'(t)$ согласовано с ориентацией кривой. Если существует параметризация $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, кривой $\gamma$ и разбиение $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$ такие, что кривые $\gamma_k$, $k = 1, \ldots, n$, с параметризацией $z = z(t)$,

$t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k$, являются гладкими, то $\gamma$ называется *кусочно-гладкой* кривой и писать $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$. В основном, мы будем иметь дело с кусочно-гладкими кривыми.

Пусть $\gamma\colon z = z(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$, — некоторая кривая в $\mathbb{C}$. Под ее длиной понимается величина

$$\mathrm{Lenght}(\gamma) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |z(t_k) - z(t_{k-1})|\right\},$$

где супремум берется по всем разбиениям $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$. Этот супремум не зависит от выбора параметризации и в случае, когда он конечен, кривая $\gamma$ называется *спрямляемой*. Допустим теперь, что спрямляемая кривая $\gamma$ расположена в области $D \subset \mathbb{C}$, в которой также определена непрерывная комплекснозначная функция $f$. Для каждого разбиения $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ рассмотрим два вида интегральных сумм

$$\sum_{k=1}^{n} f(z(\tau_k))(z(t_k) - z(t_{k-1})), \qquad \sum_{k=1}^{n} f(z(\tau_k))|z(t_k) - z(t_{k-1})|,$$

где $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k], k = 1, \ldots, n$. Обозначая $z(t) = x(t) + iy(t)$, $\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1})$, $\Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1})$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$, $k = 1, \ldots, n$, а также $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, интегральные суммы можно записать в виде

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(z(\tau_k))\Delta z_k &= \sum_{k=1}^{n}(u(x(\tau_k), y(\tau_k))\Delta x_k - v(x(\tau_k), y(\tau_k))\Delta y_k) \\ &\quad + i\sum_{k=1}^{n}(u(x(\tau_k), y(\tau_k))\Delta y_k + v(x(\tau_k), y(\tau_k))\Delta x_k), \\ \sum_{k=1}^{n} f(z(\tau_k))|\Delta z_k| &= \sum_{k=1}^{n}(u(x(\tau_k), y(\tau_k))|\Delta z_k| + i\sum_{k=1}^{n}(v(x(\tau_k), y(\tau_k))|\Delta z_k|.\end{aligned}$$

Из теории криволинейных интегралов первого и второго рода следует существование пределов интегральных сумм при стремлении к нулю максимальной длины интервалов разбиения $[t_{k-1}, t_k]$. При этом

$$\sum_{k=1}^{n} f(z(\tau_k))(z(t_k) - z(t_{k-1})) \to \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma udy + vdx,$$
$$\sum_{k=1}^{n} f(z(\tau_k))|z(t_k) - z(t_{k-1})| \to \int_\gamma uds + i\int_\gamma vds.$$

Эти пределы мы будем обозначать соответственно

$$\int_\gamma f(z)dz \qquad \text{и} \qquad \int_\gamma f(z)|dz|.$$

В случае, когда $\gamma$ является кусочно-гладкой кривой, вычисление этих интегралов можно свести к линейным интегралам по параметризующему промежутку

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt, \quad \int\limits_{\gamma} f(z)|dz| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))|z'(t)|dt.$$

Важнейшим свойством этих интегралов является то, что их значение не зависит от выбора параметризации кривой $\gamma$. Действительно, если $\zeta = \zeta(\tau)$, $\alpha_1 \leqslant \tau \leqslant \beta_1$, — эквивалентная параметризация кривой $\gamma$, т. е. $\zeta(\tau) = z(t(\tau))$, где $t = t(\tau)$, $\alpha_1 \leqslant \tau \leqslant \beta_1$, является непрерывно дифференцируемой функцией, то

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} f(z(t(\tau)))z'(t(\tau))t'(\tau)d\tau = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\zeta(\tau))\zeta'(\tau)d\tau.$$

Отметим также некоторые свойства этих интегралов, которые непосредственно следуют из свойств криволинейных интегралов.

**Линейность**. Если $f$ и $g$ — две непрерывные функции и $a, b \in \mathbb{C}$, то

$$\int\limits_{\gamma} (af(z) + bg(z))dz \;=\; a\int\limits_{\gamma} f(z)dz + b\int\limits_{\gamma} g(z)dz.$$

**Аддитивность**. Если $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz \;=\; \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Заметим, что в равенствах, выражающих свойства линейности и аддитивности, можно $dz$ заменить на $|dz|$. Однако,

$$\int\limits_{-\gamma} f(z)dz = -\int\limits_{\gamma} f(z)dz, \quad \int\limits_{-\gamma} f(z)|dz| = \int\limits_{\gamma} f(z)|dz|.$$

Применяя неравенство треугольника к интегральным суммам и переходя к пределу, получаем также неравенство

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \leqslant \int\limits_{\gamma} |f(z)||dz|. \tag{4.1}$$

Следует обратить внимание на то, что в левой и правой частях неравенства (4.1) стоят интегралы разные по структуре. Кроме того, поскольку

$$\int\limits_{\gamma} |dz| \;=\; \mathrm{Length}(\gamma),$$

то

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \leqslant \int\limits_{\gamma} |f(z)||dz| \;\leqslant\; \max_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot \mathrm{Length}(\gamma).$$

Другой аспект интегрального исчисления связан с рассмотрением интегрирования как операции, обратной дифференцированию. В связи с этим голоморфную в области $D$ функцию $F$ будем называть *первообразной* функции $f$, если $F'(z) = f(z)$ для всех $z \in D$. Другими словами, существование первообразной в $D$ для функции $f$ означает, что $f(z)dz$ является *полным дифференциалом* в области $D$. Это условие оказывается эквивалентным независимости интеграла от формы пути в области $D$, что можно также сформулировать как равенство нулю интеграла по любой замкнутой кривой в области $D$.

Теорема 4.1. *Пусть $f$ — непрерывная в области $D$ функция. Тогда имеют место следующие утверждения:*

*(i) Если $f(z)dz$ является полным дифференциалом в области $D$, то для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset D$ выполняется равенство*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0; \tag{4.2}$$

*(ii) Если равенство (4.2) выполняется для любой замкнутой ломаной $\gamma$, расположенной в $D$, то $f(z)dz$ является полным дифференциалом в области $D$.*

Доказательство. $(i)$ Допустим, что $f(z)dz$ является полным дифференциалом в области $D$, т.е. существует голоморфная в $D$ функция $F$ такая, что $F'(z) = f(z)$ для всех $z \in D$. Если $\gamma\colon z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, — кусочно-гладкая кривая в области $D$, то

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F(z(t))dt = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)).$$

В частности, если $\gamma$ — замкнутая кривая, то $z(\beta) = z(\alpha)$ и выполняется равенство (4.2).

$(ii)$ Допустим теперь, что равенство (4.2) выполняется для любой замкнутой ломаной $\gamma$, расположенной в $D$. Это означает, что интеграл $\int_\lambda f(z)dz$ не зависит от вида ломаной $\lambda \subset D$, а определяется лишь началом и концом этой ломаной. Фиксируем точку $a \in D$ и определим функцию

$$F(z) = \int_{\lambda_z} f(\zeta)d\zeta,$$

где $\lambda_z$ — ломаная, соединяющая в области $D$ точку $a$ с точкой $z$ (т.е. $a$ — начало этой ломаной, а $z$ — ее конец). Из теоремы 2.3 и сделанных предположений следует корректность определения функции $F$. Покажем, что она голоморфна в $D$ и выполняется равенство $F'(z) = f(z)$ для всех $z \in D$.

Пусть $z_0 \in D$ и $\varepsilon > 0$. Поскольку $D$ — открытое множество и $f$ — непрерывная функция, то найдется такое $\delta > 0$, что $\mathcal{O}_\delta(z_0) \subset D$ и $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ при $z \in \mathcal{O}_\delta(z_0)$. Тогда для $z \in \dot{\mathcal{O}}_\delta(z_0)$ в силу свойства аддитивности интеграла будем иметь

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)d\zeta,$$

где $[z_0, z]$ — отрезок, соединяющий точки $z_0$ и $z$. Далее, с учетом равенства

$$\int\limits_{[z_0,z]} f(z_0)d\zeta \;=\; (z-z_0)f(z_0)$$

получаем

$$\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0)\right| = \frac{1}{|z-z_0|}\left|\int\limits_{[z_0,z]} (f(\zeta)-f(z_0))d\zeta\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|z-z_0|}\int\limits_{[z_0,z]} |d\zeta| = \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{z\to z_0} \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} \;=\; f(z_0),$$

и теорема доказана. □

**Пример**. Рассмотрим важный пример, к которому в дальнейшем мы будем неоднократно обращаться. Пусть $f(z) = (z-a)^n$. Если $n$ является целым и неотрицательным, то функция $F(z) = (z-a)^{n+1}/(n+1)$ будет первообразной для $f(z)$ во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Поэтому

$$\int\limits_{\gamma} (z-a)^n dz \;=\; 0 \tag{4.3}$$

для любой замкнутой кривой $\gamma \subset \mathbb{C}$, если $n = 0, 1, 2, \ldots$. В случае $n \neq -1$ целого отрицательного функция $f(z) = (z-a)^n$ будет голоморфной в $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ и $F(z) = (z-a)^{n+1}/(n+1)$ будет ее первообразной в этой же области. Следовательно, и в этом случае равенство (4.3) будет выполняться для любой замкнутой кривой $\gamma$, не проходящей через точку $a$. Отдельно разберем случай $n = -1$. Допустим вначале, что замкнутая кривая $\gamma$ расположена в $\mathbb{C}\setminus L$, где $L$ — луч, выходящий из точки $a$ на бесконечность. Поскольку в $\mathbb{C}\setminus L$ можно выделить непрерывную ветвь $\arg(z-a)$ и, следовательно, ветвь $F(z) = \ln(z-a)$, то $dz/(z-a)$ является полным дифференциалом в $\mathbb{C}\setminus L$. Таким образом, для такой кривой и $n = -1$ снова выполнено равенство (4.3).

Наконец, рассмотрим в качестве $\gamma$ окружность с центром в точке $a$. Будем считать, что окружность $\gamma$ *положительно ориентирована*, т.е. при движении точки вдоль нее круг, ограниченный $\gamma$, остается слева. В дальнейшем в случае таких простых областей, как круг, треугольник, прямоугольник, под положительно ориентированной границей будем понимать такой обход граничной кривой, когда ограниченная ею область остается слева. Часто такое определение положительно ориентированной границы распространяют вплоть до жордановых областей, хотя это не вполне строго. Положительной ориентации окружности $\gamma$ соответствует параметризация $z = z(t) = a + re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, где $r$ — радиус окружности $\gamma$. При этом $z'(t) = ire^{it}$ и

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-a} \;=\; i\int\limits_0^{2\pi} dt \;=\; 2\pi i.$$

**4.2. Теорема Коши для выпуклой области.** Существует несколько вариантов теоремы Коши, которые отличаются больше в топологическом плане, а не в аналитическом контексте. Поэтому естественно начать с более простой топологической ситуации.

Теорема 4.2 (Лемма Гурса). *Пусть $f$ — голоморфная в области $D$ функция и треугольник $\Delta$ содержится в $D$ вместе со своим замыканием. Тогда*

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz = 0, \tag{4.4}$$

*где $\partial\Delta$ — положительно ориентированная граница треугольника $\Delta$.*

Доказательство. Введем для удобства обозначение $I(\Delta) = \int_{\partial\Delta} f(z)dz$. Соединяя середины сторон треугольника $\Delta$, разобьем его на четыре конгруэнтных треугольника $\Delta^{(1)}, \ldots, \Delta^{(4)}$. Очевидно, что

$$I(\Delta) = I(\Delta^{(1)}) + \ldots + I(\Delta^{(4)}),$$

поскольку интегрирование вдоль каждой общей стороны двух смежных треугольников проводится в обоих направлениях, а потому сокращается. Из последнего равенства следует, что среди $\Delta^{(1)}, \ldots, \Delta^{(4)}$ найдется треугольник, обозначим его $\Delta_1$, для которого

$$|I(\Delta_1)| \geqslant \frac{1}{4}\,|I(\Delta)|\,.$$

Теперь разобьем $\Delta_1$ на четыре конгруэнтных треугольника $\Delta_1^{(1)}, \ldots, \Delta_1^{(4)}$ и выберем из них $\Delta_2$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$|I(\Delta_2)| \geqslant \frac{1}{4}\,|I(\Delta_1)| \geqslant \frac{1}{4^2}\,|I(\Delta)|\,.$$

Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных треугольников $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$, удовлетворяющих условию

$$|I(\Delta_n)| \geqslant \frac{1}{4^n}|I(\Delta)|.$$

Легко видеть, что центры треугольников $\Delta_n$, $n = 1, 2, \ldots$, образуют фундаментальную последовательность, а ее предел $z^*$ принадлежит всем треугольникам $\Delta_n$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы окрестность $\mathcal{O}_\delta(z^*)$ содержалась в области $D$ и при $z \in \dot{\mathcal{O}}_\delta(z^*)$ выполнялось неравенство

$$\left|\frac{f(z) - f(z^*)}{z - z^*} - f'(z^*)\right| < \varepsilon$$

или, что эквивалентно,

$$|f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*)| < \varepsilon|z - z^*|.$$

Пусть $l$ — периметр треугольника $\Delta$. Тогда периметр треугольника $\Delta_n$ будет равен $l \cdot 2^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$, и найдется такой номер $N$, что $\Delta_n \subset \mathcal{O}_\delta(z^*)$ при $n \geqslant N$. Выберем теперь $n \geqslant N$ и, используя соотношения

$$\int\limits_{\partial\Delta_n} dz \,=\, 0, \qquad \int\limits_{\partial\Delta_n} (z - z^*)dz \,=\, 0,$$

которые являются следствием того, что $dz$ и $(z - z^*)dz$ представляют собой полные дифференциалы в $\mathbb{C}$, получаем

$$|I(\Delta_n)| = \left|\int\limits_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| = \left|\int\limits_{\partial\Delta_n} (f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*))dz\right| \leqslant \varepsilon \int\limits_{\partial\Delta_n} |z - z^*||dz|.$$

Поскольку $z^*$ расположена внутри $\Delta_n$, то для $z \in \partial\Delta_n$ величина $|z - z^*|$ не превышает периметра треугольника $\Delta_n$, т.е. величины $l \cdot 2^{-n}$. Но тогда из способа построения треугольников $\Delta_n$ и полученного выше неравенства имеем

$$\frac{1}{4^n}|I(\Delta)| \leqslant |I(\Delta_n)| \leqslant \varepsilon \int\limits_{\partial\Delta_n} |z - z^*||dz| \leqslant \frac{\varepsilon l}{2^n} \int\limits_{\partial\Delta_n} |dz| = \frac{\varepsilon l^2}{4^n}.$$

Отсюда следует неравенство $|I(\Delta)| \leqslant \varepsilon l^2$, которое в силу произвольности $\varepsilon > 0$ влечет равенство $I(\Delta) = 0$. Теорема доказана. □

Теорема 4.3 (Усиление леммы Гурса). *Пусть $D$ — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $a \in D$. Допустим также, что функция $f$ голоморфна в $D \setminus \{a\}$ и непрерывна в $D$. Тогда для любого треугольника $\Delta$, расположенного вместе со своим замыканием в $D$, имеет место равенство* (4.4).

Доказательство. В случае, когда точка $a$ лежит вне треугольника $\Delta$, утверждение следует из теоремы 4.2. Если $a$ является вершиной треугольника $\Delta$, то проведем следующие рассуждения. Пусть $z_1, z_2, z_3$ — вершины треугольника $\Delta$ и $a = z_1$. Тогда для $\lambda \in (0, 1)$ рассмотрим разбиение $\Delta$ на треугольники: $\Delta_1$ с вершинами $z_1, z_2', z_3'$, где

$$z_2' \,=\, (1 - \lambda)z_1 + \lambda z_2, \qquad z_3' \,=\, (1 - \lambda)z_1 + \lambda z_3,$$

$\Delta_2$ с вершинами $z_2, z_2', z_3'$ и $\Delta_3$ с вершинами $z_2, z_3', z_3$. Поскольку

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz \,=\, \int\limits_{\partial\Delta_1} f(z)dz + \int\limits_{\partial\Delta_2} f(z)dz + \int\limits_{\partial\Delta_3} f(z)dz$$

и по доказанному последние два интеграла равны нулю, то

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz \,=\, \int\limits_{\partial\Delta_1} f(z)dz.$$

Однако

$$\left|\int\limits_{\partial\Delta_1} f(z)dz\right| \leqslant \max_{z\in\Delta}|f(z)| \cdot \mathrm{Length}(\partial\Delta_1) \,=\, \lambda \cdot \max_{z\in\Delta}|f(z)| \cdot \mathrm{Length}(\partial\Delta) \,\to\, 0$$

при $\lambda \to 0$.

В случае, когда точка $a$ лежит на одной из сторон треугольника $\Delta$ или внутри его, доказательство утверждения сводится к предыдущему случаю посредством разбиения исходного треугольника, соединяя $a$ с вершинами $z_1, z_2, z_3$. Теорема доказана. □

Теорема 4.4. *Пусть $D$ — выпуклая область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $a \in D$. Допустим также, что функция $f$ голоморфна в $D \setminus \{a\}$ и непрерывна в $D$. Тогда $f(z)dz$ — полный дифференциал в области $D$ и для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma$, расположенной в области $D$, выполняется равенство*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Доказательство. Поскольку $D$ является выпуклым множеством, то для любого $z \in D$ отрезок $[a, z]$ содержится в $D$ и мы можем определить функцию

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta.$$

Покажем, что $F$ является первообразной для $f$ в области $D$. Действительно, если $z_0 \in D$, то найдется окрестность $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$ и для любого $z \in \dot{\mathcal{O}}_r(z_0)$ треугольник $\Delta$ с вершинами в точках $a, z_0, z$ будет расположен в $D$. По теореме 4.3

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = 0.$$

С другой стороны, в силу свойства аддитивности интеграла

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = \int_{[a,z_0]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z_0,z]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z,a]} f(\zeta)d\zeta = F(z_0) - F(z) + \int_{[z_0,z]} f(\zeta)d\zeta$$

и, следовательно, как и при доказательстве теоремы 4.1 имеем равенство

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)d\zeta.$$

Поэтому, повторяя соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 4.1, получаем дифференцируемость функции $F$ и равенство $F'(z_0) = f(z_0)$. Теорема доказана. □

Замечание 4.1. Доказанная теорема означает, что если $f$ голоморфна в области $D$, то локально $f(z)dz$ является полным дифференциалом, поскольку любая точка $z_0$ из $D$ принадлежит области вместе с некоторой окрестностью $\mathcal{O}_r(z_0)$, которая является выпуклой. По доказанной теореме в этой окрестности можно определить первообразную $F$ для $f$. С другой стороны, пример функции $f(z) = 1/(z - a)$, голоморфной в $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, показывает, что не для всех замкнутых кривых $\gamma$ в этой области интеграл $\int_\gamma dz/(z - a)$ равен нулю, т. е. в этом случае нельзя определить первообразную сразу во всей области.

Замечание 4.2. При доказательстве теоремы использовалось лишь то, что область $D$ выпукла, функция $f$ непрерывна в $D$ и интеграл по границе любого треугольника $\Delta$, расположенного в $D$, равен нулю.

## § 5. Интеграл Коши

Как было показано в параграфе 3, сумма степенного ряда представляет собой голоморфную функцию в круге сходимости ряда. Другой способ получения голоморфных функций дает следующая конструкция.

Пусть $\gamma$ — кусочно-гладкая кривая и $\varphi$ — заданная на ней непрерывная функция. Тогда выражение

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

называют *интегралом Коши* с плотностью $\varphi$.

Теорема 5.1 (Свойства интеграла Коши). *Пусть $\gamma$ — кусочно-гладкая кривая и $\varphi$ — непрерывная функция, определенная на $\gamma$. Тогда для каждого $n = 1, 2, \ldots$ функция*

$$F_n(z;\varphi) = \int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^n}d\zeta$$

*является голоморфной в $\mathbb{C}\setminus\gamma$, и выполняются равенства*

$$F_n'(z;\varphi) = nF_{n+1}(z;\varphi).$$

Доказательство. Докажем вначале непрерывность функции $F_1$. Пусть $z_0$ — произвольная точка из $\mathbb{C}\setminus\gamma$ и $\delta > 0$ выбрано меньше половины расстояния от $z_0$ до $\gamma$. Тогда для $z \in \mathcal{O}_\delta(z_0)$ будем иметь

$$|F_1(z;\varphi) - F_1(z_0;\varphi)| = |z - z_0|\left|\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}\right| \leqslant |z - z_0|\frac{1}{2\delta^2}\int\limits_{\gamma}|\varphi(\zeta)||d\zeta|.$$

Отсюда следует непрерывность $F_1$ в точке $z_0$.

Заметим теперь, что отношение приращений

$$\frac{F_1(z;\varphi) - F_1(z_0;\varphi)}{z - z_0} = \int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} = F_1\left(z;\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}\right)$$

имеет ту же структуру, что и $F_1$, но с плотностью $\varphi(\zeta)/(\zeta - z_0)$. Следовательно, она непрерывна в точке $z_0$ и

$$\lim_{z\to z_0}\frac{F_1(z;\varphi) - F_1(z_0;\varphi)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0}F_1\left(z;\frac{\varphi}{\zeta - z_0}\right) = F_1\left(z_0;\frac{\varphi}{\zeta - z_0}\right) = F_2(z_0;\varphi).$$

Таким образом, голоморфность функции $F_1(z;\varphi)$ и равенство $F_1'(z;\varphi) = F_2(z;\varphi)$ доказаны.

Воспользуемся теперь методом математической индукции и допустим, что голоморфность функции $F_{n-1}(z;\varphi)$ и равенство

$$F'_{n-1}(z;\varphi) \;=\; (n-1)F_n(z;\varphi)$$

доказаны. Тогда из представления

$$\begin{aligned}
F_n(z;\varphi) - F_n(z_0;\varphi) \;&=\; \int\limits_{\gamma} \left( \frac{1}{(\zeta - z)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^{n-1}(\zeta - z_0)} \right) \varphi(\zeta) d\zeta \\
&+ \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n-1}(\zeta - z_0)} - \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^n} \\
&= \; (z - z_0) \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^n (\zeta - z_0)} \\
&+ F_{n-1}\left( z; \frac{\varphi}{\zeta - z_0} \right) - F_{n-1}\left( z_0; \frac{\varphi}{\zeta - z_0} \right)
\end{aligned}$$

следует непрерывность функции $F_n(z;\varphi)$. Действительно, ограниченность интеграла, который стоит множителем при $(z - z_0)$, устанавливается в окрестности точки $z_0$ как и при доказательстве непрерывности $F_1$, а непрерывность $F_{n-1}$ имеем по предположению индукции. Далее, из равенства

$$\frac{F_n(z;\varphi) - F_n(z_0;\varphi)}{z - z_0} \;=\; F_n\left( z; \frac{\varphi}{\zeta - z_0} \right) + \frac{F_{n-1}\left( z; \frac{\varphi}{\zeta - z_0} \right) - F_{n-1}\left( z_0; \frac{\varphi}{\zeta - z_0} \right)}{z - z_0},$$

доказанной непрерывности $F_n$ и предположений индукции получаем голоморфность функции $F_n(z;\varphi)$ и выполнение соотношения

$$F'_n(z_0;\varphi) \;=\; F_n\left( z_0; \frac{\varphi}{\zeta - z_0} \right) + (n-1)F_n\left( z_0; \frac{\varphi}{\zeta - z_0} \right) \;=\; nF_{n+1}(z_0;\varphi).$$

Теорема доказана. □

Следствие 5.1. *Интеграл Коши*

$$F(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

*представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию в* $\mathbb{C} \setminus \gamma$. *При этом для всех* $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ *и* $n = 1, 2, \ldots$ *выполняются равенства*

$$F^{(n)}(z) \;=\; \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \tag{5.1}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$F(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} F_1(z;\varphi).$$

Поэтому функция $F$ является голоморфной в $\mathbb{C} \setminus \gamma$ и

$$F'(z) \,=\, \frac{1}{2\pi i} F_2(z;\varphi).$$

Функция $F_2(z;\varphi)$, а следовательно и $F'(z)$, также является голоморфной и

$$F''(z) \,=\, \frac{2!}{2\pi i} F_3(z;\varphi).$$

По индукции получаем бесконечную дифференцируемость функции $F$ и равенства

$$F^{(n)}(z) \,=\, \frac{n!}{2\pi i} F_{n+1}(z;\varphi),$$

$n = 1, 2, \ldots$, которые эквивалентны (5.1). □

Теорема 5.2 (Интегральная формула Коши для круга). *Пусть $f$ — голоморфная в области $D$ функция и круг $\mathcal{O}_r(a)$ вместе со своим замыканием содержится в $D$. Тогда для всех $z \in \mathcal{O}_r(a)$ выполняется равенство*

$$f(z) \,=\, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

*где $\gamma_r$ — положительно ориентированная граница круга $\mathcal{O}_r(a)$.*

Доказательство. Пусть $z \in \mathcal{O}_r(a)$ фиксировано и $R > 0$ такое, что $r < R$ и $\mathcal{O}_R(a) \subset D$. Тогда функция

$$g(\zeta) \,=\, \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$

будет голоморфной в $\mathcal{O}_R(a) \setminus \{z\}$ и $g(\zeta) \to f'(z)$ при $\zeta \to z$. Следовательно, по теореме Коши для выпуклой области 4.4 имеет место равенство

$$\int\limits_{\gamma_r} g(\zeta) d\zeta \,=\, 0,$$

которое можно записать в виде

$$\int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \,=\, f(z) \int\limits_{\gamma_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

В силу свойств интеграла Коши функция

$$\varphi(z) \,=\, \int\limits_{\gamma_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

является голоморфной в круге $\mathcal{O}_r(a)$ и

$$\varphi'(z) \,=\, \int\limits_{\gamma_r} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2} \,=\, 0,$$

поскольку $d\zeta/(\zeta-z)^2$ — полный дифференциал в $\mathbb{C}\backslash\{z\}$. Следовательно, $\varphi(z) \equiv$ const. в круге $\mathcal{O}_r(a)$. С другой стороны,

$$\varphi(a) = \int\limits_{\gamma_r} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = 2\pi i,$$

как было показано ранее. Таким образом, $\varphi(z) \equiv 2\pi i$ в $\mathcal{O}_r(a)$ и теорема доказана. □

Теорема 5.3. *Голоморфная в области $D$ функция $f$ является бесконечно дифференцируемой в этой области. При этом в круге $\mathcal{O}_r(a)$, который содержится в области $D$ вместе со своим замыканием, имеют место равенства*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \qquad n = 1, 2\ldots, \tag{5.2}$$

*где $\gamma_r$ — положительно ориентированная граница круга $\mathcal{O}_r(a)$.*

Доказательство. Пусть $a \in D$ и $\mathcal{O}_r(a)$ содержится в области $D$ вместе со своей положительно ориентированной границей $\gamma_r = \partial\mathcal{O}_r(a)$. Тогда интегральная формула Коши для функции $f$ в $\mathcal{O}_r(a)$ принимает вид

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Это означает, что $f(z)$ является интегралом Коши в круге $\mathcal{O}_r(a)$ с плотностью $\varphi(\zeta) = f(\zeta)$. По следствию 5.1 функция $f(z)$ является бесконечно дифференцируемой в $\mathcal{O}_r(a)$, а формула (5.1) для производных принимает вид (5.2) и утверждение доказано. □

Замечание 5.1. Равенство (5.2) называется *интегральной формулой Коши для производных.* Оно показывает, что не только сама голоморфная функция, но и ее производные, восстанавливаются внутри круга лишь по граничным значениям функции.

Следующий результат по формулировке в некотором смысле является обратным к теореме Коши.

Теорема 5.4 (Морера). *Пусть $f$ — непрерывная в области $D$ функция и такая, что для любого треугольника $\Delta$, расположенного в $D$ вместе со своим замыканием, выполняется равенство*

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

*Тогда $f$ является голоморфной функцией в области $D$.*

Доказательство. Поскольку свойство голоморфности является локальным, то достаточно доказать, что при сделанных предположениях функция $f$ голоморфна в некоторой окрестности каждой точки области $D$. Фиксируем произвольно $a \in D$ и пусть $\mathcal{O}_r(a) \subset D$. Как и при доказательстве теоремы 4.4 Коши для выпуклой области (см. также замечание 4.2) с использованием предположения о равенстве нулю интеграла по границе любого треугольника, расположенного в $\mathcal{O}_r(a)$, получаем утверждение о том, что $f(z)dz$ является полным дифференциалом в $\mathcal{O}_r(a)$. Следовательно, $f$ является голоморфной в $\mathcal{O}_r(a)$, поскольку представляет собой производную от голоморфной функции. Теорема доказана. □

Теорема 5.5 (О среднем). *Пусть $f$ — голоморфная в области $D$ функция и $\overline{\mathcal{O}_r(a)} \subset D$. Тогда*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta.$$

Доказательство. В силу теоремы 5.2 имеет место равенство

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}d\zeta,$$

где $\gamma_r$ — положительно ориентированная граница круга $\mathcal{O}_r(a)$. Выбирая для окружности $\gamma_r$ параметризацию $\zeta = a + re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, приходим к утверждению теоремы. □

## § 6. Ряд Тейлора и теорема единственности

Наше определение голоморфной (или аналитической) функции базировалось на свойстве комплексной дифференцируемости. Имеется другой подход к определению аналитической функции, основанный на представлении ее в виде суммы степенного ряда в окрестности каждой точки области. Следующий результат показывает, что оба эти подхода приводят к одному и тому же классу функций.

Теорема 6.1. *Пусть $f$ — голоморфная в области $D$ функция и $z_0$ — произвольная точка области $D$. Тогда в любом круге $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$ функция $f$ представима в виде суммы сходящегося степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \tag{6.1}$$

*коэффициенты которого вычисляются по формулам*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \tag{6.2}$$

$n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Допустим вначале, что $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)} \subset D$, и пусть $\gamma = \partial\mathcal{O}_r(z_0)$ — положительно ориентированная граница круга $\mathcal{O}_r(z_0)$. Тогда $f$ имеет представление в $\mathcal{O}_r(z_0)$ интегральной формулой Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Для фиксированного $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$ ядро Коши $1/(\zeta - z)$ разложим в ряд

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Поскольку для всех $\zeta \in \gamma$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1,$$

то полученный ряд сходится равномерно по $\zeta \in \gamma$ в силу признака Вейерштрасса. Следовательно, этот ряд можно почленно интегрировать на $\gamma$. Умножая его на непрерывную функцию $f(\zeta)/(2\pi i)$ и выполняя почленное интегрирование, приходим к равенству

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n.$$

В силу интегральной формулы Коши для производных

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

$n = 1, 2, \ldots$.

Остается заметить, что коэффициенты (6.2) ряда (6.1) не зависят ни от точки $z$, ни от выбора окружности $\gamma$. Поэтому ряд (6.1) сходится и его сумма совпадает с функцией $f$ в любом круге $\mathcal{O}_r(z_0)$, который содержится в области $D$. $\square$

Замечание 6.1. Ряд (6.1), коэффициенты которого вычисляются по формулам (6.2), называется *рядом Тейлора* функции $f$ в окрестности точки $z_0$. Кроме того, если функция $f$ представима в виде ряда (6.1) в некотором круге $\mathcal{O}_r(z_0)$, то коэффициенты ряда однозначно определяются формулами (6.2), как было показано в замечании к теореме 3.1. Другими словами, представление голоморфной функции в виде суммы ряда по степеням $(z - z_0)$ единственно.

**Целые функции и теорема Лиувилля.**

Определение 6.1. Голоморфная во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функция $f$ называется *целой*.

К целым функциям относятся полиномы, экспонента, синус, косинус и другие. Из теоремы о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора сразу же следует, что целую функцию $f$ можно представить степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

который сходится во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. При этом коэффициенты ряда вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\gamma_R$ — положительно ориентированная окружность радиуса $R$ с центром в начале координат.

Следующий результат показывает, что ограничение на рост целой функции также существенно влияет на ее вид.

Теорема 6.2. *Пусть $f$ — целая функция и для некоторых $M > 0$, $r > 0$ и целого неотрицательного $m$ выполняется неравенство*

$$|f(z)| \leqslant M|z|^m$$

*при $|z| \geqslant r$. Тогда $f$ является полиномом степени не выше, чем $m$.*

Следствие 6.1 (Теорема Лиувилля). *Целая ограниченная функция тождественно постоянна.*

Доказательство. Пусть $R > r$ и $\gamma_R$ — положительно ориентированная окружность $|\zeta| = R$. Как отмечалось выше, $f$ можно представить степенным рядом $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

При сделанных предположениях выполняются неравенства

$$|c_n| \leqslant \frac{MR^m}{2\pi R^{n+1}}2\pi R = MR^{m-n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Если $n \geqslant m+1$, то $R^{m-n} \to 0$ при $R \to \infty$ и $c_n = 0$. Это означает, что $f$ является полиномом степени не выше, чем $m$. □

**Нули голоморфной функции и теорема единственности.**

Точка $a \in \mathbb{C}$ называется нулем функции $f$, если $f(a) = 0$.

Определение 6.2. *Порядком* (или *кратностью*) нуля $a \in \mathbb{C}$ функции $f$, голоморфной в этой точке, называется наименьший номер отличной от нуля производной $f^{(n)}(a)$. Другими словами, точка $a$ является нулем функции $f$ порядка $m$, если $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0$, $f^{(m)}(a) \neq 0$.

Из формул для коэффициентов ряда Тейлора следует, что порядок нуля совпадает с наименьшим номером отличного от нуля коэффициента тейлоровского разложения функции в окрестности этой точки. При этом, если $a$ — нуль бесконечного порядка, то $f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности $\mathcal{O}_r(a)$. С другой стороны, если $a$ — нуль конечного порядка $m$, то найдется окрестность $\mathcal{O}_\delta(a)$, $\delta > 0$, в которой нет нулей функции $f$, отличных от $a$. Действительно, в некоторой окрестности $\mathcal{O}_r(a)$ функция $f$ представима рядом Тейлора

$$f(z) = (z-a)^m \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k}(z-a)^k = (z-a)^m \varphi(z),$$

где $\varphi$ — голоморфная в $\mathcal{O}_r(a)$ функция и $\varphi(a) = c_m \neq 0$. В силу непрерывности функции $\varphi$ найдется окрестность $\mathcal{O}_\delta(a)$, в которой $\varphi$ не обращается в нуль. В силу отсутствия делителей нуля в поле комплексных чисел $f(z) \neq 0$ в проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_\delta(a)$.

Заметим, что в вещественном анализе ситуация с нулями и представлением бесконечно дифференцируемой функции ее рядом Тейлора кардинально отличается. Классическим примером является функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

которая имеет в окрестности точки ряд Тейлора с нулевыми коэффициентами, но обращается в нуль лишь в самой точке $x = 0$.

Теорема 6.3 (Единственности). *Если две голоморфные в области $D$ функции $f$ и $g$ совпадают на множестве $E$, которое имеет хотя бы одну предельную точку $a$, принадлежащую области $D$, то $f(z) \equiv g(z)$ всюду в $D$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(z) = f(z) - g(z)$, которая является голоморфной в области $D$ и обращается в нуль на множестве $E$, а в силу непрерывности и в точке $a$. Нам нужно доказать, что $h(z) \equiv 0$. Пусть $Q$ — множество нулей функции $h$ в области $D$. Внутренность этого множества обозначим через $G_1$. Другими словами, $\zeta \in G_1$ в том и только том случае, если найдется окрестность $\mathcal{O}_\varrho(\zeta)$, в которой $h$ обращается в нуль. По самому определению $G_1$ является открытым множеством и $G_1 \subset D$. Пусть $G_2 = D \setminus G_1$ и покажем, что $G_2$ также является открытым множеством, т. е. каждая точка принадлежит $G_2$ с некоторой окрестностью. Действительно, в противном случае некоторая точка $\zeta$ из $G_2$ была бы предельной точкой нулей функции $h$. Но тогда, как показывают рассуждения, проведенные перед формулировкой теоремы, $\zeta$ не может быть нулем конечной кратности и нашлась бы окрестность этой точки, в которой $h$ обращается в нуль. Но это означало бы, что $\zeta \in G_1$. Итак, $D = G_1 \cup G_2$, где $G_1$ и $G_2$ — открытые непересекающиеся множества. В силу связности $D$ одно из множеств $G_1$ или $G_2$ должно быть пустым. С другой стороны, точка $a$ является предельной точкой нулей функции $h$ и, следовательно, принадлежит $G_1$. В результате, $G_2 = \varnothing$ и $G_1 = D$, что и доказывает теорему. □

Следствие 6.2. *Если $f(z) \not\equiv 0$ голоморфна в области $D$, то все ее нули изолированы и конечного порядка.*

## § 7. Индекс. Общая форма теоремы Коши и интегральной формулы Коши

Для дальнейшего расширения теоремы Коши нам потребуется ввести некоторые топологические понятия.

**7.1. Приращение аргумента вдоль кривой. Индекс.** Пусть $\gamma\colon z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, — кусочно-гладкая кривая, не проходящая через начало координат. Тогда определен интеграл

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{z'(t)}{z(t)} dt.$$

Выясним геометрический смысл его мнимой части. Пусть $d = \operatorname{dist}(\gamma, 0)$ — расстояние от $\gamma$ до начала координат. Поскольку $z(t)$ является равномерно непрерывной функцией на отрезке $[\alpha, \beta]$, то найдется такое $\delta > 0$, что $|z(t') - z(t'')| < d/2$ при $|t' - t''| < \delta$. Выполним разбиение $t_0 = \alpha < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$ так, чтобы $(t_k - t_{k-1}) < \delta$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Это разбиение индуцирует разложение кривой $\gamma$ в сумму дуг $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$, где $\gamma_k\colon z = z(t)$, $t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k$. Через $\Delta_k$ обозначим круг $\mathcal{O}_r(z(t_k))$ с центром в $z(t_k)$ и радиусом $r = d/2$. Из условия на разбиение следует, что $\gamma_k \subset \Delta_k$, $k = 1, \ldots, n$. Кроме того, расстояние от точки $z = 0$ до каждого круга $\Delta_k$ не меньше $d/2$. Это позволяет в каждом круге $\Delta_k$ определить непрерывную ветвь $\arg_{(k)} z$ (в каждом свою) и, следовательно, регулярную ветвь логарифма $\ln_{(k)} z = \ln|z| + i \arg_{(k)} z$, которая будет первообразной функции $1/z$ в $\Delta_k$. Используя свойство аддитивности интеграла, получаем

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z} &= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{z} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\ln|z(t_k)| - \ln|z(t_{k-1})|) + i \sum_{k=1}^{n} (\arg_{(k)} z(t_k) - \arg_{(k)} z(t_{k-1})) \\
&= \ln\left|\frac{z(\beta)}{z(\alpha)}\right| + i \sum_{k=1}^{n} \arg \frac{z(t_k)}{z(t_{k-1})},
\end{aligned}$$

где в последней сумме под аргументом понимается главное значение из интервала $(-\pi, \pi)$. В действительности, разность $(\arg_{(k)} z(t_k) - \arg_{(k)} z(t_{k-1}))$ не зависит от выбора ветви аргумента. Сумма

$$\sum_{k=1}^{n} \arg \frac{z(t_k)}{z(t_{k-1})}$$

выражает приращение аргумента $z(t)$ (в радианной мере), когда $z(t)$ пробегает кривую $\gamma$. Как и ранее, поворот вектора против движения часовой стрелки считается положительным. В связи с этими рассуждениями введем следующее понятие.

Определение 7.1. Пусть $\gamma$ — кусочно-гладкая кривая, не проходящая через точку $z = 0$. *Приращением аргумента $z$ вдоль кривой* $\gamma$ называется величина

$$\Delta_\gamma \arg z = \operatorname{Im} \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

Заметим, что в этих терминах

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z} = \ln\left|\frac{z(\beta)}{z(\alpha)}\right| + i\Delta_\gamma \arg z.$$

В случае замкнутой кривой $\gamma$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z} = i\Delta_\gamma \arg z,$$

а само приращение аргумента $\Delta_\gamma \arg z$ кратно $2\pi$.

Допустим теперь, что кривая $\gamma\colon z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, расположена в области $D$, в которой определена голоморфная функция $w = f(z)$. Если кроме того $f(z) \neq 0$ на $\gamma$, то кривая $\Gamma = f(\gamma)\colon w = f(z(t))$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, не будет проходить через точку $w = 0$. Поэтому определена величина $\Delta_\Gamma \arg w$, которую будем называть *приращением аргумента функции $f$ вдоль кривой $\gamma$* и обозначать $\Delta_\gamma \arg f(z)$. Непосредственно из определения получаем

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \operatorname{Im}\int\limits_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \operatorname{Im}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(z(t))}{f(z(t))} z'(t)dt = \operatorname{Im}\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

т. е.

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \operatorname{Im}\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \tag{7.1}$$

Из (7.1) сразу же следует, что для любого комплексного числа $c \neq 0$ имеет место равенство

$$\Delta_\gamma \arg(cf(z)) = \Delta_\gamma \arg f(z).$$

Отметим еще одно так называемое *логарифмическое свойство* приращения аргумента функции вдоль кривой.

Лемма 7.1. *Пусть $\gamma$ — кусочно-гладкая кривая, расположенная в области $D$, в которой определены голоморфные функции $f_1$ и $f_2$. Допустим также, что $f_1$ и $f_2$ не обращаются в нуль на $\gamma$. Тогда*

$$\Delta_\gamma \arg(f_1(z)f_2(z)) = \Delta_\gamma \arg f_1(z) + \Delta_\gamma \arg f_2(z).$$

Доказательство. Из формулы (7.1) и правила дифференцирования произведения следует, что

$$\begin{aligned}\Delta_\gamma \arg(f_1(z)f_2(z)) &= \operatorname{Im}\int\limits_{\gamma} \frac{(f_1(z)f_2(z))'}{f_1(z)f_2(z)} dz \\ &= \operatorname{Im}\int\limits_{\gamma} \frac{f_1'(z)f_2(z) + f_1(z)f_2'(z)}{f_1(z)f_2(z)} dz \\ &= \Delta_\gamma \arg f_1(z) + \Delta_\gamma \arg f_2(z),\end{aligned}$$

и лемма доказана. □

Из (7.1) и свойств интеграла также следует, что

$$\Delta_{-\gamma} \arg f(z) = -\Delta_\gamma \arg f(z), \qquad \Delta_\gamma \arg \frac{1}{f(z)} = -\Delta_\gamma \arg f(z).$$

Введем в рассмотрение еще одно важное понятие, которое характеризует соотношение между замкнутой кривой и точкой вне этой кривой. Если $\gamma$ — замкнутая кусочно-гладкая кривая, не проходящая через точку $a$, то $f(z) = z - a$ является голоморфной функцией, которая не обращается в нуль на $\gamma$. Поэтому определена величина

$$\Delta_\gamma \arg(z-a) = \operatorname{Im} \int\limits_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

Поскольку кривая $\gamma$ замкнута, то эта величина кратна $2\pi$, а вещественная часть интеграла в правой части последнего равенства равна нулю.

Определение 7.2. Пусть $\gamma$ — замкнутая кусочно-гладкая кривая, не проходящая через точку $a$. Тогда *индексом* точки $a$ относительно кривой $\gamma$ называется число

$$J(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

Из предыдущего следует, что величина

$$J(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg(z-a)$$

является целочисленной и выражает число оборотов вектора, соединяющего $a$ с точкой $z$, когда она обходит кривую $\gamma$. Иногда $J(\gamma, a)$ называют также *порядком кривой* $\gamma$ относительно точки $a$. Непосредственно из определения индекса и свойств интеграла следует равенство $J(-\gamma, a) = -J(\gamma, a)$. Проведенные ранее вычисления показывают также, что если $\gamma$ — положительно ориентированная окружность с центром в точке $a$, то $J(\gamma, a) = 1$. Этим объясняется термин „положительно ориентированная“ .

Для замкнутой кривой $\gamma$ дополнение $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ является открытым множеством, а максимальные связные подмножества в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ представляют собой области и называются *компонентами связности* дополнения $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

Теорема 7.1. *Пусть $\gamma$ — замкнутая кусочно-гладкая кривая. Тогда функция $z \mapsto J(\gamma, z)$ является целочисленной и постоянной в каждой компоненте связности дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$. Кроме того, индекс обращается в нуль во внешней компоненте связности (содержащей бесконечно удаленную точку).*

Доказательство. Замечая, что $J(\gamma, z)$ можно рассматривать как интеграл Коши с плотностью, тождественно равной 1, получаем бесконечную дифференцируемость $J(\gamma, z)$ и равенство

$$\frac{d}{dz} J(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

Поскольку $d\zeta/(\zeta - z)^2$ является полным дифференциалом в $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, то правая часть последнего равенства обращается в нуль. Следовательно, $J(\gamma, z) \equiv \text{const}$ в каждой компоненте связности множества $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

Равенство индекса нулю во внешней компоненте связности $\mathbb{C} \setminus \gamma$ следует из его постоянства в этой компоненте связности и того, что интеграл

$$\int\limits_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

стремится к нулю при $z \to \infty$. □

**7.2. Общая форма теоремы Коши.** Как было установлено в теореме 4.4, если функция $f$ голоморфна в выпуклой области $D$, то результат ее интегрирования по любой замкнутой кривой $\gamma$, расположенной в $D$, равен нулю. Для произвольной области $D$ в таком виде результат не имеет места, на что указывает пример кольца $1 < |z - a| < 2$ и голоморфной в этом кольце функции $f(z) = 1/(z - a)$. В связи с этим естественно возникает два вопроса: для какого класса областей $D$ остается верным заключение теоремы 4.4 и, если область $D$ произвольна, то для какого семейства замкнутых кривых интеграл от голоморфной в $D$ функции равен нулю? Прежде, чем сформулировать ответ на поставленные вопросы, докажем одно вспомогательное утверждение и приведем некоторые определения.

Лемма 7.2. *Пусть $f$ — голоморфная в области $D$ функция. Тогда функция*

$$g(\zeta, z) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{если} \quad \zeta \neq z, \\ f'(z), & \text{если} \quad \zeta = z, \end{cases}$$

*будет непрерывной в $D \times D$, а для любой кривой $\gamma$, расположенной в $D$,*

$$h(z) = \int\limits_{\gamma} g(\zeta, z) d\zeta$$

*будет голоморфной в $D$ функцией.*

Доказательство. Докажем вначале непрерывность $g(\zeta, z)$ как функции двух переменных в $D \times D$. В точках $(\zeta_0, z_0)$ при $\zeta_0 \neq z_0$ непрерывность очевидна, поскольку это является следствием непрерывности частного при не обращении в нуль знаменателя. Пусть теперь $z_0 \in D$ и рассмотрим поведение функции $g(\zeta, z)$ в окрестности точки $(z_0, z_0)$. Выберем $r > 0$ меньше расстояния от $z_0$ до границы $\partial D$ области $D$. Тогда в замкнутом круге $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)}$ функция $f$ будет представима абсолютно и равномерно сходящимся рядом Тейлора

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots .$$

Поэтому для $\zeta, z \in \mathcal{O}_r(z_0)$ имеем

$$f(\zeta) - f(z) = c_1(\zeta - z) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n[(\zeta - z_0)^n - (z - z_0)^n]$$

$$= (\zeta - z) \left\{ f'(z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n[(\zeta - z_0)^{n-1} + (\zeta - z_0)^{n-2}(z - z_0) + \ldots + (z - z_0)^{n-1}] \right\}$$

и далее

$$|g(\zeta, z) - g(z_0, z_0)| = \left|\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - f'(z_0)\right| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| n r^{n-1}.$$

Замечая, что ряд в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $r \to 0$, приходим к непрерывности функции $g$ в точке $(z_0, z_0)$.

Покажем теперь, что функция $h$ является голоморфной в области $D$. Снова фиксируем $z_0 \in D$ и $r > 0$ так, чтобы $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$. Для любого треугольника $\Delta$, расположенного в $\mathcal{O}_r(z_0)$ вместе со своим замыканием имеем

$$\int_{\partial\Delta} h(z)dz = \int_{\partial\Delta} \left( \int_{\gamma} g(\zeta, z) d\zeta \right) dz = \int_{\gamma} \left( \int_{\partial\Delta} g(\zeta, z) dz \right) d\zeta.$$

Замена порядка интегрирования обоснована непрерывностью функции $g$. Заметим теперь, что $g(\zeta, z)dz$ является полным дифференциалом в $\mathcal{O}_r(z_0)$. Поэтому

$$\int_{\partial\Delta} g(\zeta, z)dz = 0$$

для всех $\zeta \in D$. Но тогда и

$$\int_{\partial\Delta} h(z)dz = 0.$$

Следовательно, по теореме Морера 5.4 функция $h$ голоморфна в $\mathcal{O}_r(z_0)$, а поскольку $z_0$ выбиралось произвольным в $D$, то получаем голоморфность функции $h$ во всей области $D$. □

Введем теперь некоторые понятия и определения. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — замкнутые кусочно-гладкие кривые и $k_1, \ldots, k_n$ — целые числа. Формальную сумму $\Gamma = k_1\gamma_1 + \ldots, k_n\gamma_n$ будем называть *циклом.* Будем говорить, что цикл $\Gamma$ расположен в области $D$, если $\gamma_j \subset D$, $j = 1, \ldots, n$. В случае, когда $\Gamma$ расположен в $D$, а $f$ — непрерывная в $D$ функция, под интегралом от функции $f$ по циклу $\Gamma$ будем понимать

$$\int_{\Gamma} f(z)dz := \sum_{j=1}^{n} k_j \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Таким образом, если $k$ — натуральное число, то $(-k)\gamma = k(-\gamma)$.

Определение интеграла по циклу позволяет ввести понятие индекса точки относительно цикла. Если $\Gamma = k_1\gamma_1 + \ldots, k_n\gamma_n$ — цикл и $a \notin \Gamma$ (т. е. $a$ не лежит ни на одной из кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$), то

$$J(\Gamma, a) := \sum_{j=1}^{n} k_j J(\gamma_j, a).$$

Определение 7.3. Пусть $\Gamma$ — цикл, расположенный в области $D$. Будем говорить, что цикл $\Gamma$ *гомологичен нулю относительно области* $D$ и писать

$$\Gamma \sim 0 \pmod{D},$$

если $J(\Gamma, a) = 0$ для всех точек $a \notin D$.

Теорема 7.2 (Общая Коши). *Пусть $D$ — область в $\mathbb{C}$ и $\Gamma$ — цикл, гомологичный нулю относительно области $D$. Тогда для любой голоморфной в $D$ функции $f$ справедливы следующие утверждения:*

$(i)$ *если $z \in D \setminus \Gamma$, то*

$$J(\Gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta;$$

$(ii)$ *выполняется равенство*

$$\int\limits_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Доказательство. Пусть $f$ — голоморфная в области $D$ функция. Рассмотрим в $D \times D$ функцию

$$g(\zeta, z) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{если} \quad \zeta \neq z, \\ f'(z), & \text{если} \quad \zeta = z, \end{cases}$$

Из леммы 7.2 следует, что $g$ непрерывна на $D \times D$, а функция

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} g(\zeta, z) d\zeta$$

является голоморфной в области $D$.

Рассмотрим теперь открытое множество

$$Q = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \colon\ J(\Gamma, z) = 0\}$$

и определим на нем функцию

$$h_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

В силу свойств интеграла Коши функция $h_0$ является голоморфной на $Q$. Кроме того, из условия $\Gamma \sim 0 \,(\mathrm{mod}\, D)$ следует, что $\mathbb{C} \setminus D \subset Q$ и для $z \in Q \cap D$ имеет место равенство

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = h_0(z).$$

Следовательно, полагая

$$F(z) = \begin{cases} h(z) & \text{при} \quad z \in D, \\ h_0(z) & \text{при} \quad z \in \mathbb{C} \setminus D, \end{cases}$$

получаем целую функцию. При этом

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = \lim_{z \to \infty} h_0(z) = 0.$$

Отсюда, в частности, следует ограниченность функции $F$, и по теореме Лиувилля 6.1 получаем $F(z) \equiv 0$. Равенство $h(z) = 0$ эквивалентно утверждению $(i)$ из формулировки теоремы.

Утверждение $(ii)$ следует из $(i)$ применением к функции $f_1(z) = (z-a)f(z)$, где $a$ — произвольная точка из $D \setminus \Gamma$. Действительно,

$$0 \;=\; J(\Gamma, a) f_1(a) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta$$

и теорема доказана. □

Следствие 7.1 (Теорема Коши для односвязной области). *Пусть $D$ — односвязная область и $\gamma$ — замкнутая кусочно-гладкая кривая, расположенная в $D$. Тогда для любой голоморфной в $D$ функции $f$ выполняется равенство*

$$\int\limits_{\gamma} f(z) dz \;=\; 0.$$

Доказательство. Заметим, что если точка $a \notin D$, то она принадлежит внешней компоненте связности множества $\mathbb{C} \setminus \gamma$, поскольку $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ связно. Поэтому $\gamma$ образует цикл, гомологичный нулю относительно области $D$. Но тогда утверждение следствия следует из пункта $(ii)$ теоремы 7.2. □

Для другого следствия общей формы теоремы Коши нам потребуется одно определение. Пусть $\gamma$ — замкнутая кусочно-гладкая жорданова кривая. По теореме Жордана она разбивает всю плоскость $\mathbb{C}$ на две области, одна из которых ограничена и называется внутренней, а другая не ограничена и называется внешней. При этом $\gamma$ является общей границей этих областей. Как было показано выше, $J(\gamma, z) = 0$ для точек $z$ из внешней области. Можно показать (мы не будем этого делать, поскольку в каждом конкретном случае это проверяется непосредственным вычислением или легко следует из геометрического смысла индекса), что в случае, когда $z$ лежит во внутренней области, индекс $J(\gamma, z)$ может равняться 1 или -1. Например, если $\gamma$ — окружность с центром в точке $a$ и ее параметризация такова, что при возрастании параметра точка движется по окружности, оставляя круг (область, ограниченную $\gamma$) слева, то $J(\gamma, a) = 1$. Этим объясняется происхождение термина "положительно ориентированная граница". В дальнейшем под положительной ориентацией замкнутой кусочно-гладкой жордановой кривой $\gamma$ мы будем понимать такую ее параметризацию, при которой $J(\gamma, z) = 1$ для точек $z$ из внутренней области.

Определение 7.4. Будем говорить, что цикл $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1 - \ldots - \gamma_n$, где $\gamma_j$ — кусочно-гладкие замкнутые жордановы кривые с положительной ориентацией, ограничивает область $D$, если $\Gamma$ является границей области $D$ и

$$J(\Gamma, z) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{при} \quad z \in D, \\ 0 & \text{при} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}, \end{cases}$$

При этом $\Gamma$ называется положительно ориентированной границей области $D$ и также обозначается $\partial D$.

Следствие 7.2 (Теорема Коши для многосвязной области). *Пусть $\Gamma$ — цикл, ограничивающий область $D$, и $f$ — голоморфная функция в области $D'$, которая содержит замыкание $\overline{D}$. Тогда*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Доказательство. По условию $\Gamma \sim 0 \,(\mathrm{mod}\ D')$ и утверждение следует из пункта $(ii)$ теоремы 7.2. □

Следствие 7.3 (Интегральная формула Коши для многосвязной области). *В условиях предыдущего следствия для всех $z \in D$ выполняется равенство*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \qquad (7.2)$$

*а также для всех $n = 1, 2, \ldots$ имеет место равенство для производных*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}. \qquad (7.3)$$

Доказательство. Равенство (7.2) сразу же следует из пункта $(i)$ теоремы 7.2, если заметить, что по условию $J(\Gamma, z) = 1$. Формула (7.2) показывает, что и в случае области $D$, ограниченной циклом $\Gamma$, значения голоморфной функции $f$ внутри области $D$ восстанавливаются по ее значениям на границе $\partial D = \Gamma$. При этом $f$ является интегралом Коши, в котором в качестве плотности выступают ее граничные значения. Таким образом, формула (7.3) следует из теоремы 5.1 о свойствах интеграла Коши. □

## § 8. Ряд Лорана. Изолированные особые точки

**8.1. Ряды Лорана.** Рассмотрим вначале ряд вида $b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots$. Простая замена переменной $z = 1/\zeta$ приводит его к обычному степенному ряду $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n$. Область сходимости этого ряда, как следует из теоремы 3.1, является круг $|\zeta| < R$, где

$$1/R = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}.$$

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является внешность круга $|z| > 1/R$, где его сумма представляет собой голоморфную функцию. Если скомбинировать такой ряд с обычным степенным рядом, то получим более общую форму степенного ряда $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, или $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, областью сходимости которого (если она не пуста) является кольцо. Внутренний и внешний радиусы этого кольца можно получить, например, по формуле Коши—Адамара (3.2).

Теорема 8.1. *Любую функцию $f$, голоморфную в кольце $K = \{z\colon r < |z - a| < R\}$, можно представить как сумму сходящегося в $K$ ряда*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n, \qquad (8.1)$$

*коэффициенты которого определяются по формулам*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\varrho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta, \tag{8.2}$$

$n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, *где* $\gamma_\varrho$ — *положительно ориентированная окружность* $|\zeta - a| = \varrho$, $r < \varrho < R$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что интегралы в правой части (8.2) не зависят от значения $\varrho$. Действительно, если $\varrho', \varrho'' \in (r, R)$, то $\gamma_{\varrho'} - \gamma_{\varrho''}$ является циклом, гомологичным нулю относительно кольца $K$. Поэтому применение теоремы Коши 7.2 к функции $f(z)/(z-a)^{n+1}$ дает равенство

$$\int\limits_{\gamma_{\varrho'}-\gamma_{\varrho''}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta = 0,$$

откуда следует, что

$$\int\limits_{\gamma_{\varrho'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta = \int\limits_{\gamma_{\varrho''}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta.$$

Пусть теперь $r < r' < R' < R$. Тогда цикл $\gamma_{R'} - \gamma_{r'}$ ограничивает кольцо $K' = \{z\colon r' < |z-a| < R'\}$. В силу интегральной формулы Коши 7.3 имеем в кольце $K'$ представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = f_1(z) + f_2(z),$$

где

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \qquad f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

Функцию $f_1$ можно рассматривать как интеграл Коши в круге $|z-a| < R'$ и потому она является голоморфной в этом круге. В силу теоремы 6.1 функцию $f_1$ можно представить рядом Тейлора

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad c_n = \frac{f_1^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{R'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,$$

т. е. коэффициенты $c_n, n = 0, 1, 2, \ldots$, вычисляются по формулам (8.2). Для получения разложения функции $f_2$ во внешности круга $|z-a| > r'$ представим ядро Коши в виде

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z-a)\left(1 - \dfrac{\zeta-a}{z-a}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}.$$

Поскольку при $|z-a| > r'$ и $\zeta \in \gamma_{r'}$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| = \frac{r'}{|z-a|} < 1,$$

то полученный ряд сходится равномерно по $\zeta \in \gamma_{r'}$ и его можно почленно интегрировать. Умножая его на ограниченную функцию $f(\zeta)/(2\pi i)$ и интегрируя почленно, получаем

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n},$$

где

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{r'}} (\zeta - a)^{n-1} f(\zeta) d\zeta = c_{-n}.$$

Складывая теперь полученные разложения для $f_1$ и $f_2$, получаем разложение (8.1) для функции $f$ в кольце $K'$. Поскольку $r'$ и $R'$ можно выбрать сколь угодно близко к $r$ и $R$, соответственно, и коэффициенты $c_n$ не зависят от этого выбора, то полученное представление имеет место во всем кольце $K$. □

Определение 8.1. Ряд (8.1), коэффициенты которого вычисляются по формулам (8.2), называется *рядом Лорана* функции $f$ в кольце $K$. Совокупность членов этого ряда с неотрицательными степенями $(z-a)^n, n = 0, 1, \ldots$, называется его *правильной частью*, а совокупность членов с отрицательными степенями $(z-a)^n, n = -1, -2, \ldots$, — *главной частью*.

Теорема 8.2 (Единственность ряда Лорана). *Если функция $f$ представима сходящимся в кольце $K = \{z \colon r < |z-a| < R\}$ рядом* (8.1)*, то его коэффициенты определяются по формулам* (8.2).

Доказательство. Фиксируем $\varrho \in (r, R)$. Ряд (8.1) сходится равномерно на окружности $\gamma_\varrho$. Поэтому его можно почленно интегрировать. Равномерная сходимость не нарушится, если его умножить на ограниченную функцию. Умножая равенство (8.1) на $(z-a)^{-m-1}$, где $m$ — произвольное целое, и переходя к почленному интегрированию, получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int\limits_{\gamma_\varrho} (z-a)^{n-m-1} dz = \int\limits_{\gamma_\varrho} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} dz.$$

Однако в сумме левой части последнего равенства все слагаемые, кроме соответствующего индексу $n = m$, обращаются в нуль. Поэтому

$$c_m \cdot 2\pi i = \int\limits_{\gamma_\varrho} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} dz$$

и теорема доказана. □

Смысл теоремы состоит в том, что всякий сходящийся ряд является рядом Лорана своей суммы. Формулы для вычисления коэффициентов ряда Лорана на практике применяются редко ввиду громоздкости соответствующих вычислений. На основании доказанной теоремы для получения лорановского разложения можно использовать любой корректный прием.

Приведем теперь некоторые замечания о ряде Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Если функция $f$ голоморфна во внешности некоторого круга $|z| > R$, т. е. в окрестности бесконечно удаленной точки, то в силу теоремы 8.1 ее можно разложить в этой окрестности в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta,$$

где $\gamma_\varrho$ — положительно ориентированная окружность $|\zeta| = \varrho$, $\varrho > R$. Однако при этом несколько меняется терминология. Под главной частью ряда Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки понимается сумма $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ по положительным степеням $z$, а под правильной частью понимается сумма $\sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n$ по отрицательным степеням $z$ и $c_0$. Это связано с тем, что $z^n \to 0$ при $z \to \infty$ для отрицательных $n$ и $z^n \to \infty$ при $z \to \infty$ для положительных $n$. В случае отсутствия главной части $f(z) \to c_0$ при $z \to \infty$, а замена $z = 1/\zeta$ приводит к тому, что функция $g(\zeta) = f(1/\zeta)$ будет голоморфной в окрестности точки $\zeta = 0$.

**8.2. Изолированные особые точки.** Точка $a \in \mathbb{C}$ называется изолированной особой точкой (однозначного характера) для функции $f$, если найдется такое $r > 0$, что $f$ является голоморфной в проколотой окрестности $\dot{O}_r(a)$. В зависимости от поведения функции $f(z)$ при приближении $z$ к особой точке $a$ проводится следующая классификация.

Определение 8.2. Изолированная особая точка $a \in \mathbb{C}$ функции $f$ называется:

(i) *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел

$$\lim_{z \to a} f(z) = A;$$

(ii) *полюсом*, если $f(z) \to \infty$ при $z \to a$;

(iii) *существенно особой точкой*, если $f(z)$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $z \to a$.

Теорема 8.3. *Изолированная особая точка $a$ функции $f$ является устранимой в том и только том случае, если $f$ ограничена в некоторой окрестности $\dot{O}_r(a)$, $r > 0$.*

Доказательство. Если $a$ является устранимой особой точкой, то ограниченность $f(z)$ в некоторой окрестности $\dot{O}_r(a)$ следует из существования предела $\lim f(z)$ при $z \to a$.

Допустим теперь, что $|f(z)| \leqslant M$ при всех $z \in \dot{O}_r(a)$ и некотором $M > 0$. В $\dot{O}_r(a)$, как в кольцевой области, функция $f$ представима в виде суммы ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\varrho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,$$

где $\gamma_\varrho$ — положительно ориентированная окружность $|\zeta - a| = \varrho$, а $\varrho$ можно выбрать любым в интервале $(0, r)$. Поскольку

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\gamma_\varrho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right| \leqslant \frac{M}{2\pi\varrho^{n+1}}\int\limits_{\gamma_\varrho}|d\zeta| = \frac{M}{\varrho^n},$$

то $c_n = 0$ для всех отрицательных $n$. Таким образом, ряд Лорана функции $f$ в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ является, по существу, обычным степенным рядом, а его сумма $g(z)$ представляет собой голоморфную в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ функцию, которая совпадает с функцией $f$ в проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$. □

Замечание 8.1. Из доказательства теоремы видно, что доопределение (или переопределение) функции $f$ в устранимой особой точке $a$ делает ее голоморфной в полной окрестности $\mathcal{O}_r(a)$, чем и объясняется ее название.

Замечание 8.2. Полученные в ходе доказательства неравенства $|c_n| \leqslant M/\varrho^n$ для коэффициентов ряда Лорана, где

$$M = \max_{z\in\gamma_\varrho}|f(z)|,$$

иногда называют *неравенствами Коши.*

Следствие 8.1. *Пусть $f$ — голоморфная в области $D$ функция и $a$ является ее нулем порядка $m$. Тогда в области $D$ имеет место равенство*

$$f(z) = (z-a)^m g(z),$$

*где $g$ — голоморфная в $D$ функция и $g(a) \neq 0$.*

Доказательство. Функция $g(z) = f(z)/(z-a)^m$ является голоморфной в $D\setminus\{a\}$. Из вида ряда Тейлора функции $f$ в окрестности точки $a$ следует, что $a$ является устранимой особой точкой для функции $g$. Таким образом, доопределяя функцию $g$ в точке $a$ соответствующим образом, получаем голоморфную в $D$ функцию. Условие $g(a) = 0$ означало бы, что $f$ имеет в точке $a$ нуль более высокого порядка, чем $m$. Следовательно, $g(a) \neq 0$. □

При доказательстве теоремы 8.3 мы установили также, что изолированная особая точка $a$ является устранимой для функции $f$ в том и только том случае, если разложение $f$ в ряд Лорана в проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ не содержит главной части. Оказывается, что главная часть лорановского разложения функции в окрестности изолированной особой точки полностью определяет характер особенности.

Теорема 8.4. *Изолированная особая точка $a \in \mathbb{C}$ функции $f$ является полюсом (существенно особой) в том и только том случае, если главная часть ряда Лорана функции $f$ в проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ содержит конечное (бесконечное) число членов с ненулевыми коэффициентами.*

Доказательство. Утверждение теоремы достаточно доказать только для полюса. Допустим, что лорановское разложение функции $f$ в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ имеет вид

$$f(z) = c_{-m}(z-a)^{-m} + c_{-m+1}(z-a)^{-m+1} + \dots$$

и $c_{-m} \neq 0$, т. е. главная часть имеет конечное число членов с ненулевыми коэффициентами. Тогда функция $\varphi$, определяемая как сумма степенного ряда

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k-m}(z-a)^k,$$

будет голоморфной в полной окрестности $\mathcal{O}_r(a)$. При этом $\varphi(a) = c_{-m} \neq 0$. Из равенства $f(z) = (z-a)^{-m}\varphi(z)$ видно, что $f(z) \to \infty$ при $z \to a$. Таким образом, $a$ является полюсом для функции $f$.

Допустим теперь, что $a$ — полюс функции $f$. Тогда $f(z) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ и, следовательно, в этой окрестности функция $g(z) = 1/f(z)$ является голоморфной и $g(z) \to 0$ при $z \to a$. Полагая $g(a) = 0$, получаем голоморфную в $\mathcal{O}_r(a)$ функцию. Пусть $m$ — порядок нуля функции $g$ в точке $a$. Тогда $g(z) = (z-a)^m\varphi(z)$ где $\varphi$ — голоморфная в $\mathcal{O}_r(a)$ функция и $\varphi(z) \neq 0$ при $z \in \mathcal{O}_r(a)$. Функция $1/\varphi(z)$ также будет голоморфной в $\mathcal{O}_r(a)$, а ее разложение в ряд Тейлора в $\mathcal{O}_r(a)$ будет иметь вид

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k,$$

где $a_0 \neq 0$. Но тогда в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ функция $f$ представима в виде

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = (z-a)^{-m}\frac{1}{\varphi(z)} = (z-a)^{-m}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k,$$

из которого видно, что главная часть ряда Лорана функции $f$ в окрестности точки $a$ имеет конечное число ненулевых членов. □

Определение 8.3. *Порядком* (или *кратностью*) полюса $a$ функции $f$ называется порядок этой точки как нуля функции $1/f$.

Из доказательства теоремы видно, что порядок полюса совпадает с номером старшего члена главной части лорановского разложения функции в окрестности полюса. Следующий результат указывает на сложное поведение функции в окрестности существенно особой точки.

Теорема 8.5 (Сохоцкого). *Пусть $f$ голоморфна в проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ и $a$ является существенно особой точкой функции $f$. Тогда для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$ найдется последовательность $\{z_n\} \subset \dot{\mathcal{O}}_r(a)$ такая, что $z_n \to a$, $f(z_n) \to A$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. В случае $A = \infty$ утверждение следует из теоремы 8.3, согласно которой $f$ не может быть ограниченной в окрестности $\dot{\mathcal{O}}_\varrho(a)$ ни для какого $\varrho \in (0, r)$.

Пусть $A \in \mathbb{C}$ и допустим, что $A$ не является предельной точкой никакой последовательности $\{f(z_n)\}$, для которой $z_n \to a$. Тогда найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что $|f(z) - A| \geqslant \varepsilon$ при $z \in \dot{\mathcal{O}}_\delta(a)$ Функция

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - A}$$

будет голоморфной в $\dot{\mathcal{O}}_\delta(a)$ и $|g(z)| \leqslant 1/\varepsilon$. По теореме 8.3 точка $a$ должна быть устранимой особой точкой для функции $g$. Доопределяя ее некоторым значением $g(a) \in \mathbb{C}$, получим голоморфную в полной окрестности $\mathcal{O}_\delta(a)$ функцию. Если $g(a) \neq 0$, то должно выполняться предельное соотношение $f(z) \to 1/g(a) + A$ при $z \to a$, что противоречит предположениям теоремы. В случае $g(a) = 0$ должно выполняться условие $f(z) \to \infty$ при $z \to a$, что также противоречит предположениям теоремы. □

В действительности имеется значительно более сильный результат, известный в литературе как *большая теорема Пикара.* Мы его сформулируем без доказательства.

Теорема 8.6 (Пикара). *Допустим, что голоморфная функция $f$ имеет существенно особую точку $z = a$. Тогда в каждой окрестности этой точки функция $f$ принимает все комплексные значения, за исключением быть может одного, бесконечное число раз.*

**Бесконечно удаленная точка.** В случае, когда $f$ голоморфна во внешности некоторого круга, т.е. в области $|z| > R$, бесконечно удаленную точку также рассматривают как изолированную особую точку. Характер особенности (и порядок полюса, если $f(z) \to \infty$ при $z \to \infty$) определяется в этом случае как соответствующий характер изолированной особой точки $\zeta = 0$ функции $g(\zeta) = f(1/\zeta)$. Легко видеть, что результаты теорем 8.3 — 8.5 остаются в силе, если в них положить $a = \infty$. Напомним при этом, что под главной частью ряда Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки понимается совокупность членов разложения с положительными степенями $z^n$.

Допустим теперь, что $f$ — целая функция. Характер особой точки $z = \infty$ во многом определяет вид функции $f$. Если $z = \infty$ является устранимой особой точкой, т.е. существует конечный предел функции $f(z)$ при $z \to \infty$, то в силу теоремы Лиувилля (следствие 6.1) $f(z) \equiv \mathrm{const}$. Если $z = \infty$ является полюсом порядка $m$, то существует ненулевой конечный предел отношения $f(z)/z^m$ при $z \to \infty$. Но тогда по теореме 6.2 функция $f$ является полиномом степени $m$. Наконец, в случае, когда $z = \infty$ является существенно особой точкой, по теореме 8.6 Пикара $f(z)$ принимает все значения в $\mathbb{C}$, за исключением, быть может, одного. Напомним, что $e^z$ не обращается в нуль. Иногда теорему Пикара для целых функций формулируют следующим образом: *Если целая функция не принимает хотя бы двух различных комплексных значений, то она тождественно постоянна.*

Целая функция, для которой бесконечно удаленная точка является существенно особой, называется *целой трансцендентной.* Примерами целых трансцендентных функций являются $e^z, \sin z, \cos z$.

## § 9. Вычеты и вычисление интегралов

Пусть $a$ — изолированная особая точка функции $f$ и $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ — проколотая окрестность точки $a$, в которой функция $f$ является голоморфной. Из теоремы Коши для $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ следует, что интеграл

$$\int\limits_{\gamma_\varrho} f(z)dz,$$

где $\gamma_\varrho$ — положительно ориентированная окружность $|z-a|=\varrho$, не зависит от выбора $\varrho$ в интервале $(0,r)$. В связи с этим, *вычетом* голоморфной функции $f$ в изолированной особой точке $a$ называется комплексное число

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\varrho} f(z)dz,$$

где $\gamma_\varrho$ — положительно ориентированная окружность $|z-a|=\varrho$ с радиусом $\varrho$ из интервала $(0,r)$, а $f$ голоморфна в проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$. Иногда для обозначения вычета используют более короткую запись $\operatorname*{res}_a f$.

Теорема 9.1. *Вычет функции $f$ в изолированной особой точке $a$ равен коэффициенту при $(z-a)^{-1}$ лорановского разложения функции $f$ в окрестности точки $a$.*

Доказательство. Поскольку ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ функции $f$ сходится равномерно на окружности $\gamma_\varrho$, то его можно почленно интегрировать. Замечая также, что $\int_{\gamma_\varrho}(z-a)^n dz = 0$ при $n \neq -1$, получаем

$$\operatorname*{res}_a f \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\varrho} f(z)dz \;=\; \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int\limits_{\gamma_\varrho}(z-a)^n dz \;=\; c_{-1}J(\gamma_\varrho,a) \;=\; c_{-1}.$$

Теорема доказана. □

Замечание 9.1. Из хода доказательства теоремы видно, что если $\gamma$ — замкнутая кусочно-гладкая кривая, расположенная в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)dz \;=\; J(\gamma,a)\operatorname*{res}_a f.$$

Следствие 9.1. *В устранимой особой точке вычет равен нулю.*

Предложение 9.1. *Пусть $a$ — полюс кратности $m \geqslant 1$ голоморфной в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ функции $f$. Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) \;=\; \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\left[\frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)\right].$$

Доказательство. Поскольку кратность полюса $a$ равняется $m$, то разложение в ряд Лорана функции $f$ в окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ будет иметь вид

$$f(z) \;=\; c_{-m}(z-a)^{-m} + \ldots + c_{-1}(z-a)^{-1} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots,$$

где $c_{-m} \neq 0$. Функция $g(z) = (z-a)^m f(z)$ будет иметь в точке $a$ устранимую особенность, а $c_{-1}$ будет коэффициентом ее ряда Тейлора при $(z-a)^{m-1}$. Следовательно,

$$c_{-1} = \operatorname*{res}_a f = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} g(z) \Big|_{z=a}.$$

□

Следующий результат называют теоремой Коши о вычетах и он играет важную роль в вычислении интегралов.

Теорема 9.2. *Пусть $D$ — область, ограниченная циклом $\gamma$ (т. е. $\gamma = \partial D$ — положительно ориентированная граница области $D$), и $f$ — голоморфная на $\overline{D}$ функция, исключая конечное число особых точек $a_1, \ldots, a_n$, расположенных в $D$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} f(z) dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z).$$

Доказательство. Пусть $r > 0$ таково, что $\overline{\mathcal{O}_r(a_k)} \subset D$ для всех $k = 1, \ldots, n$, и $\overline{\mathcal{O}_r(a_j)} \cap \overline{\mathcal{O}_r(a_k)} = \varnothing$ при $j \neq k$. Тогда цикл $\gamma - \sum_{k=1}^n \lambda_k$, где $\lambda_k = \partial \mathcal{O}_r(a_k)$, будет гомологичным нулю относительно области голоморфности функции $f$. Поэтому в силу теоремы Коши имеем

$$\int\limits_{\partial D} f(z) dz - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\lambda_k} f(z) dz = 0,$$

откуда следует требуемое равенство, поскольку

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\lambda_k} f(z) dz = \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z),$$

$k = 1, \ldots, n$. □

**Вычет в бесконечно удаленной точке.** Пусть функция $f$ голоморфна во внешности некоторого круга $|z| > R$. Тогда бесконечно удаленную точку мы причисляем к изолированным особым точкам. Определим вычет в бесконечно удаленной точке посредством равенства

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\gamma_\varrho} f(z) dz,$$

где $\gamma_\varrho$ — положительно ориентированная окружность $|z| = \varrho$, $\varrho > R$. Интегрируя почленно лорановское разложение $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ функции $f$ в окрестности $z = \infty$ по окружности $-\gamma_\varrho$, получаем

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

Это равенство часто используется для вычисления вычетов функций в бесконечно удаленной точке. Отметим в связи с этим отличие бесконечно удаленной точки от конечных изолированных особых точек. Коэффициент $c_{-1}$ относится к правильной части ряда Лорана разложения функции $f$ в окрестности точки $z=\infty$. Поэтому даже в случае, когда $z=\infty$ является устранимой особой точкой, вычет в ней может оказаться отличным от нуля.

Теорема 9.3. *Пусть функция $f$ является голоморфной во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа особых точек $a_1,\dots,a_n$. Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z) \,=\, 0.$$

Доказательство. Поскольку особых точек конечное число, то найдется такое $R>0$, что $|a_k|<R$ для всех $k=1,\dots,n$. Обозначим $\gamma_R$ положительно ориентированную окружность $|z|=R$. По предыдущей теореме

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} f(z)dz \,=\, \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z).$$

Замечая, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} f(z)dz \,=\, -\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z),$$

получаем требуемое равенство. □

Пусть $D$ — область, которая получена удалением из комплексной плоскости $\mathbb{C}$ конечного числа замкнутых попарно не пересекающихся жордановых областей $\overline{\Delta_1},\dots,\overline{\Delta_n}$, ограниченных кусочно-гладкими кривыми $\gamma_1,\dots,\gamma_n$, соответственно. Такую область будем называть внешней областью с кусочно-гладкой границей. Положительно ориентированной границей этой области будем считать отрицательно ориентированные кривые $\gamma_k$ ($J(\gamma_k,a)=-1$ для $a\in\Delta_k$), $k=1,\dots,n$, и обозначать $\partial D$. В случае достаточно простых кривых $\gamma_k$ можно сказать, что при движении вдоль границы $\partial D$ область $D$ остается слева.

Теорема 9.4. *Пусть $D$ — внешняя область с кусочно-гладкой границей $\partial D$ и $f$ — голоморфная на $\overline{D}$ функция, исключая конечное число особых точек $a_1$, …, $a_n$, расположенных в $D$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} f(z)dz \,=\, \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z).$$

Доказательство. Пусть $R>0$ такое, что граница $\partial D$ и точки $a_1,\dots,a_n$ расположены внутри круга $|z|<R$. Обозначим через $\Gamma_R$ положительно ориентированную окружность $|z|=R$ и пусть $D_R=\{z\in D\colon |z|<R\}$. Тогда $\Gamma_R+\partial D$ будет положительно ориентированной границей области $D_R$ и по теореме 9.2 получаем равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R+\partial D} f(z)dz \,=\, \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z).$$

Замечая, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} f(z)dz = -\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z),$$

приходим к доказываемому утверждению. □

**Вычисление интегралов.** Теория вычетов дает очень эффективный инструмент для вычисления определенных интегралов. При этом следует иметь в виду, что подынтегральная функция должна быть близка к голоморфной. На практике это, как правило, выполняется в силу того, что интегрируются, в основном, элементарные функции. Более существенным является то, что теория вычетов связана с интегрированием по замкнутым кривым, в то время как в вещественном анализе интегрирование ведется по отрезку, а в случае несобственных интегралов по всей числовой прямой или некоторой ее части. Рассмотрим некоторые типичные примеры преодоления этих трудностей.

### I. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $R(x, y)$ — рациональная функция (т. е. отношение полиномов) двух переменных. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta.$$

Идея применения техники вычетов к вычислению такого интеграла состоит в том, чтобы представить его как линейный интеграл, полученный при интегрировании по замкнутой кривой. Пусть $\mathbb{T}$ — положительно ориентированная единичная окружность и $\mathbb{T}$: $z = e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, — ее параметризация. Тогда на $\mathbb{T}$ будут выполняться следующие соотношения

$$dz = izd\theta, \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{T}} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz} = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta.$$

Если рациональная функция

$$R_1(z) = \frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

от комплексной переменной $z$ не имеет на $\mathbb{T}$ полюсов, то

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \frac{1}{i}\int\limits_{\mathbb{T}} R_1(z)dz = 2\pi\sum_{|a|<1}\operatorname*{res}_{z=a} R_1(z),$$

где суммирование ведется по всем полюсам функции $R_1$, которые расположены внутри единичного круга. Такая запись суммы мотивирована тем, что вычет в точке голоморфности функции $R_1$ равен нулю.

## II. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим теперь интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — полиномы степени $m$ и $n$, соответственно. Будем считать, что они не имеют общих корней, т. е. дробь $P/Q$ является несократимой. Для того, чтобы сходился рассматриваемый интеграл, нужно, чтобы знаменатель $Q$ не имел вещественных корней и степень числителя $P$ была меньше степени знаменателя $Q$, по крайней мере, на 2, т. е. $n-m \geqslant 2$.

Лемма 9.1. *Пусть $P$ и $Q$ — полиномы без общих корней степени $m$ и $n$, соответственно. Допустим, что $Q$ не имеет вещественных корней и $n-m \geqslant 2$. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx \;=\; 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{res}_{z=a} \frac{P(z)}{Q(z)},$$

*где суммирование ведется по всем нулям полинома $Q$, расположенным в верхней полуплоскости.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — нули полинома $Q$. Поскольку дробь $P/Q$ является несократимой ($P$ и $Q$ не имеют общих нулей), то эти точки являются полюсами рациональной функции $P/Q$. Выберем $R > 0$ так, чтобы для всех $k = 1, \ldots, n$ выполнялись неравенства $|a_k| < R$. Другими словами, все полюсы рациональной функции $P/Q$ расположены в круге $|z| < R$. Рассмотрим полуокружность $\Gamma_R\colon z = Re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, и отрезок $\lambda_R\colon z = x$, $-R \leqslant x \leqslant R$. Поскольку $\Gamma_R + \lambda_R$ образует положительно ориентированную границу полукруга $D_R = \{z\colon |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$, то по теореме 9.2

$$\int_{\Gamma_R+\lambda_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz \;=\; 2\pi i \sum_{k\colon\ \operatorname{Im} a_k>0} \operatorname*{res}_{z=a_k} \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Заметим, что при увеличении $R$ правая часть этого равенства не меняется, поскольку вне круга $|z| < R$ нулей полинома $Q$ нет. С другой стороны,

$$\int_{\Gamma_R+\lambda_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz \;=\; \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz + \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}dx, \quad \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

Далее, пусть $P(z) = b_m z^m + \ldots + b_0$, $Q(z) = c_n z^n + \ldots + c_0$, где $b_m \neq 0$, $c_n \neq 0$. Тогда для $z \in \Gamma_R$ имеем

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \;=\; \frac{1}{R^{n-m}} \frac{|b_m + b_{m-1}/z + \ldots + b_0/z^m|}{|c_n + c_{n-1}/z + \ldots + c_0/z^n|},$$

откуда с учетом неравенства $n - m \geqslant 2$ следует, что

$$R \cdot \max_{z\in\Gamma_R} \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \to 0$$

при $R \to \infty$. Но тогда

$$\left| \int\limits_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| \leqslant \int\limits_{\Gamma_R} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \cdot |dz| \leqslant \pi R \cdot \max_{z \in \Gamma_R} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \to 0$$

при $R \to \infty$. В результате приходим к равенству из формулировки леммы. $\square$

## III. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛЕММЫ ЖОРДАНА

Интегралы вида

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x dx, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos x dx$$

абсолютно расходятся, если знаменатель имеет степень всего на единицу выше степени числителя. С другой стороны, интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

сходится условно. Для вычисления таких интегралов с помощью вычетов используется лемма Жордана.

Лемма 9.2 (Жордана). *Пусть $g$ — непрерывная на множестве $\{z\colon \operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| \geqslant R_0\}$ функция при некотором $R_0 > 0$ . Допустим также, что*

$$\max_{z \in \Gamma_R} |g(z)| \to 0$$

*при $R \to \infty$, где $\Gamma_R\colon z = Re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, — полуокружность. Тогда для любого $\alpha > 0$ выполняется соотношение*

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{\Gamma_R} g(z) e^{i\alpha z} dz = 0.$$

Доказательство. Для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что интеграл

$$\int\limits_{\Gamma_R} \left| e^{i\alpha z} \right| |dz| = R \int\limits_{0}^{\pi} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta = 2R \int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta$$

ограничен равномерно по $R > 0$. Поскольку $\sin \theta$ является вогнутой на промежутке $(0, \pi)$ функцией, то $\sin \theta \geqslant 2\theta/\pi$ при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Используя это неравенство, получаем

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta \leqslant \int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-\alpha 2R\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{2\alpha R} \int\limits_{0}^{\alpha R} e^{-t} dt \leqslant \frac{\pi}{2\alpha R} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t} dt = \frac{\pi}{2\alpha R}.$$

Отсюда находим, что
$$\int\limits_{\Gamma_R} \left|e^{i\alpha z}\right| |dz| < \frac{\pi}{\alpha}.$$
□

Лемма Жордана применяется обычно к вычислению интегралов вида
$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\cos\alpha x dx, \qquad I_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\sin\alpha x dx$$
где $\alpha > 0$, а $g(x)$ — рациональная функция, у которой степень знаменателя лишь на единицу больше степени числителя. Для применения теории вычетов рассматривается
$$I = I_1 + iI_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{i\alpha x}dx$$
и строится замкнутая кривая, состоящая из отрезка $\lambda_R\colon z = x$, $-R \leqslant x \leqslant R$, и полуокружности $\Gamma_R\colon z = Re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. При достаточно больших значениях $R$ имеем
$$\int\limits_{\Gamma_R+\lambda_R} g(z)e^{i\alpha z}dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{res}_{z=a} \left[g(z)e^{i\alpha z}\right].$$
Однако, в силу леммы Жордана
$$\int\limits_{\Gamma_R} g(z)e^{i\alpha z}dz \to 0$$
при $R \to \infty$. Поэтому
$$\int\limits_{\lambda_R} g(z)e^{i\alpha z}dz \to I$$
при $R \to \infty$ и, следовательно,
$$I = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{res}_{z=a} \left[g(z)e^{i\alpha z}\right].$$
При этом $I_1 = \operatorname{Re} I$ и $I_2 = \operatorname{Im} I$.

## IV. ДОЛЕВОЙ ВЫЧЕТ В ПРОСТОМ ПОЛЮСЕ

Пусть $a$ — изолированная особая точка функции $f$, т. е. $f$ голоморфна в $\dot{O}_r(a)$ при некотором $r > 0$. Рассмотрим дугу окружности $\gamma_{\varrho,\alpha}\colon z = a + \varrho e^{i\theta}$, $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + \alpha$, где $\varrho \in (0, r)$ и $\alpha \in (0, 2\pi]$. Если $\alpha = 2\pi$, то $\gamma_{\varrho,\alpha}$ представляет собой полную окружность $\gamma_\varrho$ и
$$\int\limits_{\gamma_\varrho} f(z)dz = i2\pi \operatorname*{res}_{z=a} f(z).$$
В общем случае для интеграла вдоль $\gamma_{\varrho,\alpha}$ при $\alpha < 2\pi$ выражения через вычет нет. Однако, если $a$ является простым полюсом (кратности 1), то можно вычислить предел этого интеграла при $\varrho \to 0$.

Лемма 9.3. *Пусть $a$ — простой полюс функции $f$ и $\gamma_{\varrho,\alpha}\colon z = a + \varrho e^{i\theta}$, $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + \alpha$ — дуга окружности, содержащаяся в угловом секторе раствора $\alpha$, $0 < \alpha < 2\pi$. Тогда*

$$\lim_{\varrho\to 0} \int\limits_{\gamma_{\varrho,\alpha}} f(z)dz \,=\, i\alpha \operatorname*{res}_{z=a} f(z).$$

Доказательство. Поскольку $a$ является простым полюсом функции $f$, то в окрестности этой точки разложение $f$ в ряд Лорана имеет вид $f(z) = c_{-1}(z-a)^{-1} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots$, $c_{-1} \neq 0$. Следовательно, в этой окрестности $f(z) = c_{-1}(z-a)^{-1} + g(z)$, где $g$ — голоморфная в полной окрестности точки $a$. Но тогда

$$\int\limits_{\gamma_{\varrho,\alpha}} f(z)dz \,=\, c_{-1} \int\limits_{\gamma_{\varrho,\alpha}} \frac{dz}{z-a} + \int\limits_{\gamma_{\varrho,\alpha}} g(z)dz.$$

Поскольку $g(z)$ ограничена в окрестности точки $a$, то

$$\int\limits_{\gamma_{\varrho,\alpha}} g(z)dz \to 0$$

при $\varrho \to 0$. Замечая также, что

$$\int\limits_{\gamma_{\varrho,\alpha}} \frac{dz}{z-a} \,=\, i \int\limits_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha} d\theta \,=\, i\alpha,$$

приходим к утверждению леммы. □

Приведем два примера применения доказанных лемм.

**Пример 1.** *Доказать равенство*

$$\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}dx \,=\, \frac{\pi^2}{4}.$$

В комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль луча $L = \{z = iy\colon y \leqslant 0\}$ можно выделить регулярную ветвь логарифма

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \qquad -\pi/2 < \arg z < 3\pi/2,$$

и рассмотреть функцию $f(z) = \ln z/(z^2-1)$. Эта функция имеет в $\mathbb{C}\setminus L$ две изолированные особые точки $z = \pm 1$. Поскольку в окрестности точки $z = 1$ выделенная ветвь логарифма имеет разложение

$$\ln z \,=\, \ln(1 + (z-1)) \,=\, \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n},$$

то для функции $f(z)$ точка $z = 1$ является устранимой особой точкой. Точка $z = -1$ является простым полюсом с вычетом

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) \,=\, \lim_{z\to -1} \frac{\ln z}{z-1} \,=\, -\frac{1}{2}\ln(-1) \,=\, -\frac{i\pi}{2}.$$

Для больших $R > 2$ и малых $\varepsilon < 1/4$ рассмотрим область $D(R,\varepsilon)$, которая получается из полукруга $\{z\colon |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$ удалением множеств $\{z\colon |z| \leqslant \varepsilon, \operatorname{Im} z > 0\}$ и $\{z\colon |z+1| \leqslant \varepsilon, \operatorname{Im} z > 0\}$. Положительно ориентированная граница области $D(R,\varepsilon)$ состоит из дуг:

$$\partial D(R,\varepsilon) = \Gamma_R + \lambda_1^\varepsilon - \gamma_1^\varepsilon + \lambda_2^\varepsilon - \gamma_2^\varepsilon + \lambda_3^\varepsilon,$$

где $\Gamma_R\colon z = Re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; $\lambda_1^\varepsilon\colon z = x$, $-R \leqslant x \leqslant -1-\varepsilon$; $\gamma_1^\varepsilon\colon z = -1+\varepsilon e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; $\lambda_2^\varepsilon\colon z = x$, $-1+\varepsilon \leqslant x \leqslant -\varepsilon$; $\gamma_2^\varepsilon\colon z = \varepsilon e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; $\lambda_3^\varepsilon\colon z = x$, $\varepsilon \leqslant x \leqslant R$.

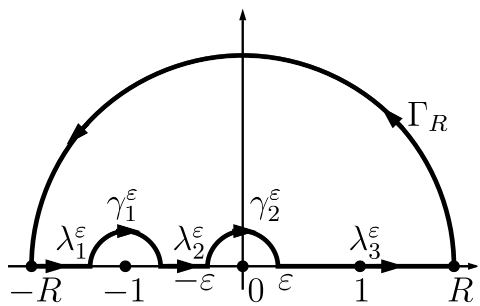


Рис. 2. К примеру 1

Поскольку $f$ голоморфна на $\overline{D(R,\varepsilon)}$, то по теореме Коши

$$\int\limits_{\partial D(R,\varepsilon)} f(z)dz = 0,$$

или, что эквивалентно,

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)dz + \int\limits_{-R}^{-1-\varepsilon} f(x)dx - \int\limits_{\gamma_1^\varepsilon} f(z)dz + \int\limits_{-1+\varepsilon}^{-\varepsilon} f(x)dx - \int\limits_{\gamma_2^\varepsilon} f(z)dz + \int\limits_{\varepsilon}^{R} f(x)dx = 0.$$

Заметим, что

$$\left|\int\limits_{\Gamma_R} f(z)dz\right| \leqslant \int\limits_{\Gamma_R} |f(z)|\cdot|dz| \leqslant \frac{\sqrt{(\ln R)^2+\pi^2}}{R^2-1}\pi R \to 0$$

при $R \to \infty$. Поэтому, осуществляя предельный переход при $R \to \infty$, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{-1-\varepsilon} \frac{\ln|x|+i\pi}{x^2-1}dx + \int\limits_{-1+\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{\ln|x|+i\pi}{x^2-1}dx + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}dx - \int\limits_{\gamma_1^\varepsilon} f(z)dz - \int\limits_{\gamma_2^\varepsilon} f(z)dz = 0.$$

Отделяя в левой части равенства вещественную часть и выполняя в первых двух интегралах замену переменной, получаем

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\ln x}{x^2-1}dx + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}dx - \operatorname{Re}\left\{\int_{\gamma_1^\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_2^\varepsilon} f(z)dz\right\} = 0.$$

Далее,

$$\left|\int_{\gamma_2^\varepsilon} f(z)dz\right| \leqslant \frac{\sqrt{(\ln\varepsilon)^2+\pi^2}}{1-\varepsilon}\pi\varepsilon \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$, а в силу доказанной выше леммы

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_1^\varepsilon} f(z)dz = i\pi \operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Таким образом,

$$2\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}dx - \frac{\pi^2}{2} = 0, \qquad \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

□

**Пример 2.** *Вычислить интеграл*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$$

Заметим вначале, что функция $f(z) = e^{iz}/z$ голоморфна в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ и в точке $z=0$ имеет простой полюс с вычетом

$$\operatorname*{res}_{z=0}\frac{e^{iz}}{z} = \lim_{z\to 0} e^{iz} = 1.$$

Для $R>1$ и $0<\varrho<1/2$ рассмотрим кривые:

$\Gamma_R\colon\ z = Re^{it},\ 0\leqslant t\leqslant\pi;\quad \gamma_\varrho\colon\ z=\varrho e^{it},\ 0\leqslant t\leqslant \pi;\quad \lambda_R^\varrho = [-R,-\varrho],\quad L_R^\varrho = [\varrho, R].$

Поскольку $\Gamma_R+\lambda_R^\varrho-\gamma_\varrho+L_R^\varrho$ является положительно ориентированной границей области $D(R,\varrho)$, в которой функция $f(z)$ голоморфна, то по теореме Коши

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_{\lambda_R^\varrho} f(z)dz - \int_{\gamma_\varrho} f(z)dz + \int_{L_R^\varrho} f(z)dz = 0.$$

В силу леммы Жордана

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0.$$

Поэтому при $R \to \infty$ получаем равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{-\varrho} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int\limits_{\varrho}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}dx = \int\limits_{\gamma_\varrho} f(z)dz.$$

Приравнивая мнимые части в этом равенстве, приходим к соотношению

$$\int\limits_{-\infty}^{-\varrho} \frac{\sin x}{x}dx + \int\limits_{\varrho}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \operatorname{Im}\left\{\int\limits_{\gamma_\varrho} f(z)dz\right\}.$$

Наконец, осуществляя предельный переход при $\varrho \to 0$, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \operatorname{Im}\left\{i\pi \operatorname*{res}_{z=0} f(z)\right\} = \pi.$$

□

## § 10. Регулярные ветви логарифма и корней

**10.1. Условия существования регулярных ветвей.** Основной вопрос, который изучается в этом параграфе, заключается в выяснении условий возможности выделения регулярной ветви $\ln f(z)$ и $\sqrt[n]{f(z)}$ для голоморфной в области $D$ функции $f$. Очевидно, что нужно в качестве одного из условий потребовать необращение в нуль функции $f$ в области $D$. Другие условия связаны с топологической структурой области $D$ и ее образа $f(D)$.

Теорема 10.1. *Пусть $f$ — голоморфная в области $D$ функция и $f(z) \neq 0$ при $z \in D$. Тогда в области $D$ можно выделить регулярную ветвь $\ln f(z)$ в том и только том случае, если для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma$, расположенной в $D$, выполняется условие*

$$J(f(\gamma), 0) = 0, \qquad \text{\textit{или, что эквивалентно,}} \qquad \Delta_\gamma \arg f(z) = 0. \tag{10.1}$$

Доказательство. Допустим вначале, что $F(z)$ — регулярная ветвь $\ln f(z)$ в области $D$, т. е. $F$ голоморфна в $D$ и $e^{F(z)} \equiv f(z)$. Тогда $F'(z) = f'(z)/f(z)$ и $(f'(z)/f(z))dz$ — полный дифференциал в области $D$. Следовательно, для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma$ в области $D$ будет выполняться равенство

$$0 = \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i J(f(\gamma), 0).$$

Обратно, допустим теперь, что $J(f(\gamma), 0) = 0$ для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma$ в $D$. Это эквивалентно тому, что $(f'(z)/f(z))dz$ является полным дифференциалом в $D$. Поэтому существует первообразная $F(z)$ для $f'(z)/f(z)$, которая определяется с точностью до аддитивной константы. Фиксируем некоторую точку $a \in D$ и значение $\ln f(a)$ из $Ln\{f(a)\}$. Распорядимся аддитивной константой первообразной так, чтобы выполнялось равенство

$F(a) = \ln f(a)$. Заметим теперь, что

$$\left(f(z)e^{-F(z)}\right)' = e^{-F(z)}\left(f'(z) - f(z)F'(z)\right) = 0$$

для всех $z \in D$. Следовательно, $f(z)e^{-F(z)} \equiv \text{const}$. При $z = a$ имеем $f(a)e^{-\ln f(a)} = 1$. Таким образом, $f(z)e^{-F(z)} \equiv 1$ и $e^{F(z)} \equiv f(z)$. Другими словами, $F(z)$ является регулярной ветвью в области $D$ функции $\ln f(z)$. □

Следствие 10.1. *Если $f$ — голоморфная в области $D$ функция, $f(z) \neq 0$ при $z \in D$ и выполняется условие (10.1), то для любого $c \in \mathbb{C}$ в области $D$ можно выделить регулярную ветвь функции $(f(z))^c = e^{c \ln f(z)}$.*

Следствие 10.2. *Если $f$ — голоморфная в односвязной области $D$ функция и $f(z) \neq 0$ при $z \in D$, то в $D$ можно выделить регулярные ветви функций $\ln f(z)$ и $(f(z))^c$, $c \in \mathbb{C}$.*

Действительно, поскольку $D$ — односвязная область, а $f'(z)/f(z)$ является голоморфной в $D$ функцией, то в силу теоремы Коши

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma$, расположенной в $D$. Это означает выполнение условия (10.1) и возможность выделения регулярных ветвей функций $\ln f(z)$ и $(f(z))^c$, $c \in \mathbb{C}$.

Замечание 10.1. В условиях теоремы 10.1 регулярную ветвь $\ln f(z)$ в области $D$ можно представить формулой

$$\ln f(z) = \ln f(a) + \int\limits_{\gamma_z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta, \tag{10.2}$$

где $a$ — фиксированная точка области $D$, $\ln f(a)$ — некоторое значение из множества $Ln\{f(a)\}$ и $\gamma_z$ — кусочно-гладкая кривая, соединяющая точку $a$ с точкой $z$ в области $D$.

Действительно, регулярная ветвь $\ln f(z)$ в области $D$ выделяется как первообразная функции $f'(z)/f(z)$. С другой стороны, при доказательстве теоремы 4.1 было показано, что первообразная может быть получена интегрированием по кусочно-гладким кривым с началом в некоторой фиксированной точке $a \in D$ и с концом в текущей точке $z \in D$. Кроме того, учитывая геометрический смысл интеграла от логарифмической производной

$$\int\limits_{\gamma_z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \ln\left|\frac{f(z)}{f(a)}\right| + i\Delta_{\gamma_z} \arg f(\zeta),$$

формулу (10.2) можно переписать в виде

$$\ln f(z) = \ln|f(z)| + i\left[\theta + \Delta_{\gamma_z} \arg f(\zeta)\right], \tag{10.3}$$

где $\theta$ — некоторое фиксированное значение $\arg f(a)$, т. е. $\theta \in \operatorname{Arg}\{f(a)\}$.

Замечание 10.2. Если $D$ — односвязная область и $0 \notin D$, то в области $D$ можно определить $\ln z$ по формуле

$$\ln z = \ln a + \int\limits_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln|z| + i\left[\theta + \Delta_{\gamma_z} \arg\zeta\right],$$

где $a \in D$, $\ln a \in \mathrm{Ln}\{a\}$, $\gamma_z$ — кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки $a$ и $z$ в $D$ и $\theta \in \mathrm{Arg}\{a\}$.

Замечание 10.3. Все регулярные ветви $\ln f(z)$ в области $D$ отличаются друг от друга на аддитивную постоянную $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть $F_1(z)$ и $F_2(z)$ — две голоморфные в области $D$ функции, удовлетворяющие условию

$$e^{F_1(z)} \equiv e^{F_2(z)} \equiv f(z).$$

Тогда $e^{F_1(z)-F_2(z)} \equiv 1$ и, следовательно,

$$F_1(z) - F_2(z) \equiv k(z) \cdot 2\pi i,$$

где $k(z) \in \mathbb{Z}$ для всех $z \in D$. Однако, из этого равенства видно, что $k(z)$ — непрерывная функция, принимающая только целые значения. Это возможно, как следует из леммы ниже, лишь в случае, когда $k(z)$ тождественно постоянна, т. е. $k(z) \equiv k$. □

Лемма 10.1. *Пусть $k(z)$ — непрерывная в области $D$ функция, которая принимает значения из множества $K \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющего условию $|w' - w''| \geqslant d > 0$ для всех $w', w'' \in K$, $w' \neq w''$. Тогда $k(z) \equiv \mathrm{const}$.*

Доказательство. Фиксируем $a \in D$ и через $G_1$ обозначим множество тех точек $z \in D$, для которых $k(z) = k(a)$. Пусть также $G_2 = D \setminus G_1$. В силу непрерывности функции $k(z)$ каждая точка $z_0$ из $G_1$ входит в это множество с некоторой окрестностью. Действительно, для $\varepsilon \in (0, d/2)$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|k(z) - k(z_0)| < \varepsilon$ при $z \in \mathcal{O}_\delta(z_0)$. Поскольку $k(z_0) = k(a)$ и $\varepsilon < d/2$, то также должно выполняться равенство $k(z) = k(a)$ и, следовательно, $\mathcal{O}_\delta(z_0) \subset G_1$. Таким образом, $G_1$ — открытое множество. Аналогично устанавливается, что и $G_2$ является открытым множеством. Однако, $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ и $D \subset G_1 \cup G_2$. В силу связности $D$ одно из множеств $G_1$ или $G_2$ должно быть пустым. По условию $a \in G_1$. Следовательно, $G_2 = \varnothing$ и $D = G_1$ т. е. $k(z) \equiv k(a)$. □

Теорема 10.2. *Пусть $f$ — голоморфная в области $D$ функция и $f(z) \neq 0$ при $z \in D$. Тогда для натурального числа $n$ в области $D$ можно выделить регулярную ветвь $\sqrt[n]{f(z)}$ в том и только том случае, если для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma$, расположенной в $D$, выполняется условие*

$$J(f(\gamma), 0) = k \cdot n, \quad \text{или, что эквивалентно,} \quad \Delta_\gamma \arg f(z) = k \cdot n \cdot 2\pi, \qquad (10.4)$$

*где $k \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Допустим вначале, что $g(z)$ — регулярная ветвь $\sqrt[n]{f(z)}$ в области $D$, т. е. $g$ голоморфна в $D$ и $(g(z))^n \equiv f(z)$. Тогда $g(z) \neq 0$ в $D$ и из равенства $f'(z) = n(g(z))^{n-1}g'(z)$ следует

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = n\frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Если $\gamma$ — замкнутая кусочно-гладкая кривая в области $D$, то $\Gamma = f(\gamma)$ и $\Gamma^* = g(\gamma)$ также будут замкнутыми кусочно-гладкими кривыми, которые не проходят через начало координат. Из полученного выше равенства получаем

$$J(f(\gamma),0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = n\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{g'(z)}{g(z)}dz = nJ(\Gamma^*,0),$$

т. е. выполняется условие (10.4), поскольку $J(\Gamma^*,0)$ является целым числом.

Обратно, допустим, что условие (10.4) выполняется для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma$, расположенной в области $D$. Фиксируем в области $D$ точку $a$ и некоторое значение $g(a) \in \{(f(a))^{1/n}\}$. Определим в области $D$ функцию

$$g(z) = g(a)\exp\left\{\frac{1}{n}\int\limits_{\gamma_z}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta\right\},$$

где $\gamma_z$ — кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки $a$ и $z$ в области $D$. Покажем, что $g(z)$ корректно определена, голоморфна в $D$ и выполняется равенство $(g(z))^n = f(z)$ для всех $z \in D$.

Для корректности определения $g(z)$ нам нужно показать, что ее значение не зависит от выбора кусочно-гладкой кривой $\gamma_z$, соединяющей точки $a$ и $z$. Пусть $\gamma_z^*$ — другая такая кривая. Тогда $\gamma = \gamma_z - \gamma_z^*$ будет замкнутой кусочно-гладкой кривой в $D$. По условию теоремы

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = J(f(\gamma),0) = k\cdot n,$$

где $k \in \mathbb{Z}$. В силу периодичности экспоненты

$$\exp\left\{\frac{1}{n}\int\limits_{\gamma}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta\right\} = e^{2k\pi i} = 1.$$

Используя свойство аддитивности интеграла, получаем

$$\exp\left\{\frac{1}{n}\int\limits_{\gamma_z}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{n}\int\limits_{\gamma_z^*}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta\right\} = 1,$$

откуда следует корректность определения функции $g(z)$.

Для доказательства голоморфности функции $g(z)$ выберем произвольно точку $z_0 \in D$ и окрестность $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$. Поскольку $\mathcal{O}_r(z_0)$ является односвязной областью, а функция $f'(z)/f(z)$ голоморфна, то $(f'(z)/f(z))dz$ — полный дифференциал в $\mathcal{O}_r(z_0)$. Первообразную $h$ для $f'(z)/f(z)$ в $\mathcal{O}_r(z_0)$ можно определить равенством

$$h(z) = \int\limits_{[z_0,z]} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta.$$

Выбирая $\gamma_z = \gamma_{z_0} + [z_0, z]$, приходим к равенству

$$g(z) = g(z_0)e^{\frac{1}{n}h(z)},$$

откуда следует голоморфность функции $g$ в $\mathcal{O}_r(z_0)$. Поскольку точка $z_0$ выбиралась произвольно, то $g$ голоморфна в области $D$. Из представления $g(z)$ в окрестности $\mathcal{O}_r(z_0)$ следует также, что

$$g'(z) = \frac{1}{n}g(z)h'(z) = \frac{1}{n}g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Далее заметим, что функция $f(z)(g(z))^{-n}$ является голоморфной в области $D$ и в точке $z = a$ принимает значение 1. Поскольку

$$\begin{aligned} \left[f(z)(g(z))^{-n}\right]' &= f'(z)(g(z))^{-n} - nf(z)(g(z))^{-n-1}g'(z) \\ &= (g(z))^{-n}\left[f'(z) - n\frac{g'(z)}{g(z)}f(z)\right] = 0 \end{aligned}$$

для всех $z \in D$, то $f(z)(g(z))^{-n} \equiv 1$ и $(g(z))^n \equiv f(z)$. □

Замечание 10.4. В условиях теоремы 10.2 регулярную ветвь $g(z)$ функции $\sqrt[n]{f(z)}$ в области $D$ можно получить по формуле

$$g(z) = g(a)\exp\left\{\frac{1}{n}\int\limits_{\gamma_z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta\right\}, \qquad (10.5)$$

где $a \in D$, $g(a) \in \{(f(a))^{1/n}\}$ и $\gamma_z$ — кусочно-гладкая кривая, соединяющая в области $D$ точки $a$ и $z$. Принимая во внимание геометрический смысл интеграла от логарифмической производной функции $f$, представление регулярной ветви $\sqrt[n]{f(z)}$ можно переписать в виде

$$g(z) = |f(z)|^{1/n}\exp\left\{\frac{i}{n}\left(\theta + \Delta_{\gamma_z}\arg f(\zeta)\right)\right\}, \qquad (10.6)$$

где $\theta \in \mathrm{Arg}\{f(a)\}$.

Замечание 10.5. Все регулярные ветви функции $\sqrt[n]{f(z)}$ в области $D$ отличаются друг от друга множителем $e^{i2k\pi/n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Доказательство. Действительно, если $g_1(z)$ и $g_2(z)$ — две регулярные ветви функции $\sqrt[n]{f(z)}$, то

$$\left(\frac{g_1(z)}{g_2(z)}\right)^n \equiv 1,$$

откуда получаем

$$g_1(z) \equiv \varkappa(z) g_2(z),$$

где $\varkappa(z) \in \{e^{i2k\pi/n}\colon k = 0, 1, \ldots, n-1\}$. Из леммы 10.1 следует, что $\varkappa(z) \equiv \mathrm{const}$, и утверждение доказано. □

**Пример 1.** *Исследовать вопрос существования регулярных ветвей многозначной функции $\sqrt[4]{z^3(z+1)}$ в области $D = \mathbb{C} \setminus E$, где $E$ — компактное связное множество, содержащее точки $z = 0$ и $z = -1$ (например, $E = [-1, 0]$).*

Нам нужно проверить выполнимость условий теоремы 10.2 для функции $f(z) = z^3(z+1)$, $n = 4$, и области $D = \mathbb{C} \setminus E$. Поскольку точки $z = 0$ и $z = -1$ не принадлежат области $D$, то $f(z) \neq 0$ при $z \in D$. Далее, пусть $\gamma$ — замкнутая кусочно-гладкая кривая, расположенная в $D$. Рассматривая функцию $f$ как произведение $f(z) = f_1(z) f_2(z)$, где $f_1(z) = z^3$ и $f_2(z) = z + 1$, и применяя логарифмическое свойство индекса, получаем

$$J(f(\gamma), 0) = J(f_1(\gamma), 0) + J(f_2(\gamma), 0).$$

Заметим теперь, что

$$J(f_1(\gamma), 0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} dz = \frac{3}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{dz}{z} = 3J(\gamma, 0), \quad J(f_2(\gamma), 0) = J(\gamma, -1),$$

откуда находим выражение для $J(f(\gamma), 0)$:

$$J(f(\gamma), 0) = 3J(\gamma, 0) + J(\gamma, -1).$$

В силу связности множества $E$ точки $z = 0$ и $z = -1$ принадлежат одной и той же компоненте связности $\mathbb{C} \setminus \gamma$ и по теореме 7.1 имеет место равенство

$$J(\gamma, 0) = J(\gamma, -1) = k,$$

где $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом,

$$J(f(\gamma), 0) = 3k + k = 4k,$$

т. е. условие (10.4) выполнено и в области $\mathbb{C} \setminus E$ можно выделить регулярную ветвь многозначной функции $\sqrt[4]{z^3(z+1)}$. □

**10.2. Разложение в ряды регулярных ветвей логарифма и корня.** Рассмотрим теперь вопрос представления рядами Тейлора и Лорана регулярных ветвей (когда они существуют) многозначных функций $\ln f(z)$ и $(f(z))^a$, $a \in \mathbb{C}$. Когда вводились элементарные функции, было показано, что для регулярной ветви $\ln(1+z)$, выделяемой в единичном круге $\mathbb{D}$ условием $\ln(1+z)|_{z=0} = 0$, имеет место представление

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$$

Поскольку другие регулярные ветви отличаются лишь слагаемым $2k\pi i$, то для них тейлоровское разложение в $\mathbb{D}$ будет иметь вид

$$\ln_{(k)}(1+z) = 2k\pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n,$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Рассмотрим теперь функцию $(1+z)^a$, где $a \in \mathbb{C}$. Ее регулярные ветви в единичном круге $\mathbb{D}$ определяются через регулярные ветви логарифма

$$h_k(z) \;=\; e^{a \ln_{(k)}(1+z)}.$$

Пусть $h(z)$ — ветвь, которая соответствует значению $k = 0$, т. е. выделяется условием $h(0) = 1$. Тогда все остальные ветви будут отличаться лишь множителем

$$h_k(z) \;=\; e^{ia2\pi k} h(z),$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Найдем разложение в ряд Тейлора ветви $h(z)$. Для вычисления коэффициентов ряда Тейлора воспользуемся равенствами

$$h'(z) \;=\; \frac{a}{1+z} h(z), \qquad h''(z) \;=\; \frac{a(a-1)}{(1+z)^2} h(z), \ldots,$$
$$h^{(n)}(z) \;=\; \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{(1+z)^n} h(z), \ldots$$

и условием $h(0) = 1$. Таким образом,

$$h(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} C_a^n z^n, \quad \text{где} \quad C_a^n \;=\; \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} \qquad (C_a^0 \;=\; 1).$$

Далее, в области $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ многозначная функция $\ln \frac{1-z}{1+z}$ имеет регулярные ветви. Действительно, функция $f(z) = (1-z)/(1+z)$ в этой области в нуль не обращается. Кроме того, для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus [-1,1]$ имеем

$$J(f(\gamma), 0) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{2dz}{z^2-1}$$
$$\;=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z+1} \;=\; J(\gamma, 1) - J(\gamma, -1).$$

Поскольку точки $z = 1$ и $z = -1$ расположены в одной и той же компоненте связности множества $\mathbb{C} \setminus \gamma$, то $J(\gamma, -1) = J(\gamma, 1)$ и условия теоремы 10.1 выполнены. Следовательно, в $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ выделяются ветви функции $\ln \frac{1-z}{1+z}$. Но тогда во внешности единичного круга (как в кольцевой области) каждая ветвь должна иметь разложение в ряд Лорана.

Пусть $g(z)$ — некоторая ветвь многозначной функции $\ln \frac{1-z}{1+z}$. Тогда

$$g'(z) \;=\; \frac{2}{z^2-1} \;=\; 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n}}$$

и ряд в правой части этого равенства сходится во внешности единичного круга. Сумма почленно проинтегрированного ряда

$$S(z) \;=\; -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) z^{2n-1}}$$

представляет собой голоморфную во внешности единичного круга функцию. При этом $(g(z) - S(z))' \equiv 0$ и, следовательно, $g(z) - S(z) \equiv \mathrm{const}$. Заметим теперь что $(1-z)/(1+z) \to -1$ при $z \to \infty$, т.е. ветви функции $\ln \frac{1-z}{1+z}$ имеют в бесконечно удаленной точке устранимую особенность, а их пределы принадлежат множеству $\mathrm{Ln}\{-1\}$, т.е. имеют вид $i(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, $S(z) \to 0$ при $z \to \infty$. В результате приходим к разложению в ряд Лорана ветвей $\ln \frac{1-z}{1+z}$:

$$\ln_{(k)} \frac{1-z}{1+z} = i(2k+1)\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} z^{-(2n-1)}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Для натурального $n \geqslant 2$ рассмотрим в $\mathbb{C} \setminus [-1, 0]$ многозначную функцию

$$\sqrt[n]{z^{n-1}(z+1)}.$$

Как и в примере 1 устанавливается существование регулярных ветвей этой функции. Найдем разложение в ряд Лорана ветви, которая принимает положительные значения при $z = x > 1$. Замечая, что

$$\sqrt[n]{z^{n-1}(z+1)} = z \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{1/n},$$

где в качестве $(1 + \frac{1}{z})^{1/n}$ рассматривается регулярная ветвь во внешности единичного круга, принимающая положительные значения при $z = x > 1$, и используя разложение $(1+z)^a$ в единичном круге, получаем

$$\sqrt[n]{z^{n-1}(z+1)} = z \sum_{m=0}^{\infty} C_{1/n}^m \frac{1}{z^m} = \sum_{m=0}^{\infty} C_{1/n}^m \frac{1}{z^{m-1}}.$$

Для других ветвей разложение имеет вид

$$\left(\sqrt[n]{z^{n-1}(z+1)}\right)_{(k)} = e^{i2k\pi/n} \sum_{m=0}^{\infty} C_{1/n}^m z^{-(m-1)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

**Пример 2.** *Вычислить интеграл*

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}.$$

Как и в примере 1 устанавливается существование регулярных ветвей многозначной функции $\sqrt[3]{z^2(2-z)}$ в области $\mathbb{C} \setminus [0, 2]$. Фиксируем $R > 2$ и определим ветвь по формуле

$$g(z) = |z^2(2-z)|^{1/3} \exp\left\{\frac{i}{3}\left(\pi + \Delta_{\gamma_z} \arg \zeta^2(2-\zeta)\right)\right\}, \tag{10.7}$$

где $\pi$ — одно из значений $\arg(R^2(2-R)) = \arg(-1)$ а $\gamma_z$ — кусочно-гладкая кривая, соединяющая $R$ с точкой $z$ внутри области $\mathbb{C} \setminus [0, 2]$. Для малого $\varepsilon > 0$

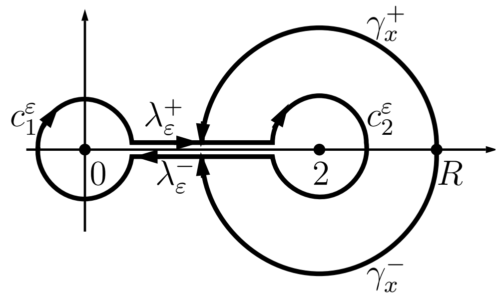


Рис. 3. К примеру 2

рассмотрим отрицательно ориентированные окружности $C_1^\varepsilon$ и $C_2^\varepsilon$ радиуса $\varepsilon$ с центрами в точках $z=0$ и $z=2$, соответственно, отрезок $\lambda_\varepsilon^+ = [\varepsilon, 2-\varepsilon]$ и такой же отрезок $\lambda_\varepsilon^-$ с противоположной ориентацией. Тогда $\lambda_\varepsilon^+ + C_2^\varepsilon + \lambda_\varepsilon^- + C_1^\varepsilon$ можно рассматривать как положительно ориентированную границу $\partial D_\varepsilon$ внешней области $D_\varepsilon$.

Поскольку в $D_\varepsilon$ нет особых точек функции $1/g(z)$, то по теореме о вычетах

$$\int\limits_{\partial D_\varepsilon} \frac{dz}{g(z)} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{1}{g(z)}. \tag{10.8}$$

Для вычисления вычета в правой части равенства (10.8) заметим, что функция $1/g(z)$ во внешности круга $|z|>2$ совпадает с одной из ветвей многозначной функции

$$e^{-i\pi/3}\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}\right)^{-1/3},$$

которые имеют следующее разложение в ряд Лорана

$$\begin{aligned} e^{-i\pi/3}\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}\right)^{-1/3}_{(k)} &= e^{-i\pi/3}\frac{1}{z}e^{-i2k\pi/3}\sum_{m=0}^{\infty} C^m_{-1/3}\frac{(-2)^m}{z^m} \\ &= e^{-i(2k+1)\pi/3}\sum_{m=0}^{\infty} C^m_{-1/3}\frac{(-2)^m}{z^{m+1}}, \end{aligned}$$

$k=0,1,2$. Поскольку $C^m_{-1/3}(-2)^m>0$ при всех $m=0,1,2,\ldots$, то сумма ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} C^m_{-1/3}\frac{(-2)^m}{z^{m+1}}$$

принимает положительное значение при $z=R$. С другой стороны, $1/g(R)$ имеет аргумент $-\pi/3$. Следовательно, во внешности круга $|z|>2$ имеет место разложение

$$\frac{1}{g(z)} = e^{-i\pi/3} \sum_{m=0}^{\infty} C_{-1/3}^{m} \frac{(-2)^m}{z^{m+1}}.$$

Отсюда находим

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{1}{g(z)} = -c_{-1} = -e^{-i\pi/3}.$$

Для вычисления интеграла в левой части равенства (10.8) нужно выяснить, какие значения принимает функция $g$ на $\lambda_\varepsilon^+$ — верхней стороне отрезка $[\varepsilon, 2-\varepsilon]$ и на его нижней стороне $\lambda_\varepsilon^-$. Пусть $\gamma_x^+$ — дуга, соединяющая точки $R$ и $x \in \lambda_\varepsilon^+$, а $\gamma_x^-$ — дуга, соединяющая $R$ и $x \in \lambda_\varepsilon^-$. Соответствующие значения функции $g$ будем обозначать $g(x+i0)$ и $g(x-i0)$, соответственно. Замечая, что

$$\Delta_{\gamma_x^+} \arg z^2(2-z) = 2\Delta_{\gamma_x^+} \arg z + \Delta_{\gamma_x^+} \arg(z-2) = \pi, \quad \Delta_{\gamma_x^-} \arg z^2(2-z) = -\pi,$$

получаем

$$g(x+i0) = \sqrt[3]{x^2(2-x)}e^{i2\pi/3}, \qquad g(x-i0) = \sqrt[3]{x^2(2-x)}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\lambda_\varepsilon^+} \frac{dz}{g(z)} = e^{-i2\pi/3} \int\limits_{\varepsilon}^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}, \qquad \int\limits_{\lambda_\varepsilon^-} \frac{dz}{g(z)} = -\int\limits_{\varepsilon}^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}.$$

Далее,

$$\left| \int\limits_{C_1^\varepsilon} \frac{dz}{g(z)} \right| \leqslant \int\limits_{C_1^\varepsilon} \frac{|dz|}{|z^2(2-z)|^{1/3}} \leqslant \frac{2\pi\varepsilon}{\varepsilon^{2/3}(2-\varepsilon)^{1/3}} \to 0,$$

$$\left| \int\limits_{C_2^\varepsilon} \frac{dz}{g(z)} \right| \leqslant \frac{2\pi\varepsilon}{(2-\varepsilon)^{2/3}\varepsilon^{1/3}} \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$. Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial D_\varepsilon} \frac{dz}{g(z)} = \left(e^{-i2\pi/3} - 1\right) I$$

и равенство (10.8) в пределе при $\varepsilon \to 0$ принимает вид

$$\left(e^{-i2\pi/3} - 1\right) I = -2\pi i e^{-i\pi/3}.$$

В результате получаем

$$I = \frac{2\pi i e^{-i\pi/3}}{1 - e^{-i2\pi/3}} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3}} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

## § 11. Принцип аргумента и отображающие свойства голоморфных функций

Пусть функция $f$ голоморфна в области $D$, за исключением изолированных особых точек, которые являются ее полюсами. Если $K$ — компактное подмножество области $D$, то на $K$ может быть лишь конечное число полюсов. В противном случае нашлась бы предельная точка полюсов на $K$, что противоречило бы условию наличия лишь изолированных особых точек. Как было показано ранее, каждый полюс имеет конечную кратность. Пусть $b_1, \ldots, b_m$ — полюсы функции $f$, попадающие на $K$, а $q_1, \ldots, q_m$ — их кратности. Тогда $P = q_1 + \ldots + q_m$ называется *числом полюсов* функции $f$ на множестве $K$ *с учетом их кратности.* Если $f(z) \not\equiv 0$, то ее нули также будут изолированными и иметь конечную кратность. Следовательно, на $K$ будет расположено лишь конечное их число. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — нули функции $f$, попадающие на $K$, а $s_1, \ldots, s_n$ — их кратности. Тогда $N = s_1 + \ldots + s_n$ называется *числом нулей* функции $f$ на множестве $K$ *с учетом их кратности.*

Теорема 11.1 (Принцип аргумента). *Пусть $D$ — область, ограниченная циклом $\gamma$, и $f$ — голоморфная на $\overline{D} = D \cup \gamma$ (т. е. в некоторой области, содержащей $\overline{D}$,) функция, за исключением изолированных особых точек, которые являются ее полюсами. Допустим также, что нули и полюсы функции $f$ не попадают на $\gamma$. Тогда число $N$ ее нулей и число $P$ ее полюсов в области $D$ с учетом их кратности удовлетворяют соотношению*

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = J(f(\gamma), 0) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma} \arg f(z). \tag{11.1}$$

Доказательство. Поскольку замыкание $\overline{D}$ области $D$ является компактным множеством, то в $D$ содержится лишь конечное число нулей и полюсов функции $f$. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — ее нули с кратностями $s_1, \ldots, s_n$, а $b_1, \ldots, b_m$ — ее полюсы с кратностями $q_1, \ldots, q_m$, соответственно. Тогда $N = s_1 + \ldots + s_n$ и $P = q_1 + \ldots + q_m$. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{-s_k} \prod_{k=1}^{m} (z - b_k)^{q_k} f(z).$$

Очевидно, что изолированные особые точки $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ функции $g$ являются устранимыми. Следовательно, функция $g$ является голоморфной и не обращается в нуль на $\overline{D}$. Из равенства

$$f(z) = (z - a_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (z - a_n)^{s_n} (z - b_1)^{-q_1} \cdot \ldots \cdot (z - b_m)^{-q_m} g(z)$$

следует, что

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{z - a_k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{q_k}{z - b_k} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Поскольку $g(z) \neq 0$ на $\overline{D}$, то функция $g'(z)/g(z)$ является голоморфной на $\overline{D}$ и по теореме Коши

$$\int\limits_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)}dz = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz \;=\; \sum_{k=1}^{n} s_k J(\gamma, a_k) - \sum_{k=1}^{m} q_k J(\gamma, b_k) \;=\; N - P$$

и теорема доказана. □

На практике принцип аргумента чаще всего применяется через следующий результат.

Теорема 11.2 (Руше́). *Пусть $D$ — область, ограниченная циклом $\gamma$, а $f$ и $\varphi$ — голоморфные на $\overline{D} = D \cup \gamma$ функции, удовлетворяющие условию $|\varphi(z)| < |f(z)|$ при $z \in \gamma$. Тогда $f$ и $f+\varphi$ имеют в $D$ одинаковое число нулей с учетом их кратности.*

Доказательство. По условию теоремы $f(z) \neq 0$ и $f(z) + \varphi(z) \neq 0$ при $z \in \gamma$. Следовательно, функция

$$F(z) \;=\; \frac{f(z)+\varphi(z)}{f(z)}$$

является голоморфной на $\overline{D}$, за исключением, быть может, конечного числа полюсов, расположенных в $D$. Кроме того, $F$ не обращается в нуль на $\gamma$. В действительности, полюсами функции $F$ могут быть лишь нули функции $f$. Пусть $N_1$ — общее число нулей функции $f$, а $N_2$ — общее число нулей функции $f+\varphi$, в области $D$ с учетом их кратности. Если $N$ — общее число нулей, а $P$ — общее число полюсов, функции $F$ в области $D$ с учетом их кратности, то $N - P = N_2 - N_1$ и по принципу аргумента

$$N_2 - N_1 \;=\; J(F(\gamma), 0).$$

Однако, из равенства $F(z) = 1 + \varphi(z)/f(z)$ и условия $|\varphi(z)/f(z)| < 1$ при $z \in \gamma$ видно, что $F(\gamma)$ расположена в круге $|w-1| < 1$. Следовательно, точка $w = 0$ расположена во внешней компоненте связности множества $\mathbb{C} \setminus F(\gamma)$ и $J(F(\gamma), 0) = 0$. Это влечет равенство $N_1 = N_2$. □

Теорема 11.3 (Основная теорема алгебры). *Каждый многочлен $n$-той степени $P(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_0$ имеет в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ ровно $n$ нулей с учетом их кратности.*

Доказательство. Пусть $f(z) = z^n$ и $\varphi(z) = c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_0$. Тогда

$$\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right| \;=\; \frac{1}{|z|}\left|c_{n-1} + \frac{c_{n-2}}{z} + \ldots + \frac{c_0}{z^{n-1}}\right| \to 0$$

при $z \to \infty$. Поэтому найдется такое $R > 0$, что $|\varphi(z)/f(z)| < 1$ при $|z| \geqslant R$. Следовательно, на окружности $\Gamma_R\colon z = Re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, для функций $f$ и $\varphi$ выполняются условия теоремы Руше́ и функции $f(z) = z^n$ и $f(z)+\varphi(z) = P(z)$ будут иметь в круге $|z| < R$ одинаковое число нулей с учетом их кратности. Однако $z = 0$ является нулем кратности $n$ для $f(z) = z^n$. Вне этого круга полином $P$ в нуль не обращается, поскольку $|\varphi(z)| < |f(z)|$ при $|z| \geqslant R$. □

Следующий результат является усилением теоремы об обратном отображении.

Теорема 11.4 (О локальной структуре отображения). *Пусть $f$ голоморфна в области $D$ и $f(z_0) = w_0$, $z_0 \in D$. Допустим также, что функция $f(z) - w_0$ имеет в точке $z_0$ нуль порядка $n$, т. е. $f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ и $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Тогда найдутся такие окрестности $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$, $r > 0$, и $\mathcal{O}_\varrho(w_0)$, $\varrho > 0$, что для любого $w^* \in \dot{\mathcal{O}}_\varrho(w_0)$ уравнение $f(z) = w^*$ имеет в $\mathcal{O}_r(z_0)$ ровно $n$ различных корней.*

Доказательство. Поскольку $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, то $f(z) \not\equiv \text{const}$. В силу изолированности нулей непостоянной голоморфной функции найдется окрестность $\mathcal{O}_r(z_0)$, которая содержится в $D$ вместе со своим замыканием и такая, что функции $f(z) - w_0$ и $f'(z)$ не обращаются в нуль в $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$. Пусть $\gamma = \partial\mathcal{O}_r(z_0)$ — положительно ориентированная граница круга $\mathcal{O}_r(z_0)$ и $\Gamma = f(\gamma)$ — ее образ при отображении посредством $f$. Замечая, что $\Gamma$ не проходит через точку $w_0$, выберем число $\varrho > 0$ меньше, чем расстояние от $w_0$ до $\Gamma$. Фиксируем произвольно $w^*$ из $\dot{\mathcal{O}}_\varrho(w_0)$. Из условия выбора $\varrho$ следует, что

$$|w_0 - w^*| < |f(z) - w_0|$$

для всех $z \in \gamma$. Но тогда по теореме Руше́ функции

$$f(z) - w_0 \qquad \text{и} \qquad f(z) - w^* = (f(z) - w_0) + (w_0 - w^*)$$

имеют в $\mathcal{O}_r(z_0)$ одинаковое число нулей с учетом их кратности. Однако, $f(z) - w_0$ имеет в $\mathcal{O}_r(z_0)$ один нуль $z = z_0$ порядка $n$. Поскольку $f'(z) \neq 0$ при $z \in \dot{\mathcal{O}}_r(z_0)$, то все нули функции $f(z) - w^*$ в окрестности $\mathcal{O}_r(z_0)$ являются простыми. Таким образом, в $\mathcal{O}_r(z_0)$ содержится ровно $n$ точек $z_1, \ldots, z_n$, которые являются решениями уравнения $f(z) = w^*$. □

Напомним, что голоморфная в области $D$ функция $f$ называется однолистной в этой области, если $f(z_1) \neq f(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$ для любой пары точек $z_1, z_2$ из $D$. Функция $f$ называется локально однолистной в $D$, если для каждой точки $z_0 \in D$ найдется окрестность $\mathcal{O}_r(z_0)$, в которой $f$ однолистна.

Замечание 11.1. Из теоремы о локальной структуре отображения следует, что необходимым и достаточным условием локальной однолистности функции $f$ в области $D$ является необращение в нуль производной, т. е. условие $f'(z) \neq 0$ в $D$. Достаточность этого условия была доказана ранее, как следствие теоремы об обратном отображении.

Теорема 11.5 (Принцип открытости или сохранения области). *Непостоянная голоморфная функция $f$ переводит открытые множества в открытые, а область — в область.*

Доказательство. Пусть $f$ голоморфна в области $D$ и $f(D) = G$. Если $w_0 \in G$, то в $D$ найдется такое $z_0$, что $f(z_0) = w_0$. Поскольку $f(z) \not\equiv \text{const}$, то найдется такое натуральное $n$, что $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Но тогда по теореме 11.4 найдутся окрестности $\mathcal{O}_r(z_0)$ и $\mathcal{O}_\varrho(w_0)$ такие, что $\mathcal{O}_\varrho(w_0) \subset f(\mathcal{O}_r(z_0)) \subset G$. Следовательно, $G$ — открытое множество. Связность множества $G$ следует из того, что при непрерывных отображениях связные множества переходят в связные. □

Теорема 11.6 (Принцип максимума модуля). *Пусть $f$ — непостоянная голоморфная в области $D$ функция. Тогда максимум модуля $|f(z)|$ а также максимумы и минимумы вещественной $\operatorname{Re} f(z)$ и мнимой $\operatorname{Im} f(z)$ частей функции $f$ не могут достигаться во внутренних точках области $D$.*

Доказательство. Допустим, что в точке $z_0 \in D$ достигается максимум модуля функции $f$, т.е. $|f(z)| \leqslant |f(z_0)|$ для всех $z \in D$. Тогда $G = f(D)$ должна содержаться в круге $|w| \leqslant |f(z_0)|$. С другой стороны, точка $w_0 = f(z_0)$ лежит на границе этого круга, а по теореме 11.5 $G$ является открытым множеством и, следовательно, найдется такое $\varrho > 0$, что $\mathcal{O}_\varrho(w_0) \subset G$. Однако в $\mathcal{O}_\varrho(w_0)$ найдется точка $w_1$, для которой $|w_1| > |w_0|$, а в области $D$ найдется точка $z_1$, для которой $f(z_1) = w_1$, т.е. $|f(z_1)| > |f(z_0)|$. Получили противоречие предположению о максимальности $|f(z_0)|$. Аналогично устанавливаются утверждения о максимуме и минимуме вещественной и мнимой частей функции $f$. □

Принцип максимума модуля имеет многочисленные приложения в анализе. Например, решение задачи о том, в какой точке квадрата достигается максимум произведения четырех расстояний от точки до вершин квадрата, существенно упрощается с применением принципа максимума модуля голоморфной функции. Следующая теорема также является следствием этого принципа.

Теорема 11.7 (Лемма Шварца). *Пусть голоморфная в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ функция $f$ удовлетворяет условиям: $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leqslant 1$ при $z \in \mathbb{D}$. Тогда для всех $z \in \mathbb{D}$ выполняется неравенство*

$$|f(z)| \leqslant |z| \tag{11.2}$$

*и, кроме того,*

$$|f'(0)| \leqslant 1. \tag{11.3}$$

*При этом знак равенства в (11.2) при $z \neq 0$ или в (11.3) достигается лишь в случае $f(z) = e^{i\theta} z$, где $\theta \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. В силу сделанных в условии теоремы предположений функция $\varphi(z) = f(z)/z$ голоморфна в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ и в точке $z = 0$ имеет устранимую особенность. Полагая $\varphi(0) = f'(0)$, получаем голоморфную в $\mathbb{D}$ функцию $\varphi$. При этом для каждого $r \in (0,1)$ в силу принципа максимума модуля имеем

$$\max_{|z|\leqslant r} |\varphi(z)| = \max_{|z|=r} |\varphi(z)| = \frac{1}{r} \max_{|z|=r} |f(z)| \leqslant \frac{1}{r}.$$

Таким образом, если $z \in \mathbb{D}$ фиксировано, то для $r \in (|z|, 1)$ будет выполняться неравенство $|\varphi(z)| \leqslant 1/r$. Осуществляя в этом неравенстве предельный переход при $r \to 1$, получаем $|\varphi(z)| \leqslant 1$. Это эквивалентно неравенству $|f(z)| \leqslant |z|$. Кроме того, $|\varphi(0)| = |f'(0)| \leqslant 1$.

Допустим теперь, что для $z_0 \neq 0$ из $\mathbb{D}$ выполняется равенство $|f(z_0)| = |z_0|$. Это означало бы, что $|\varphi(z_0)| = 1$. Но тогда в силу принципа максимума модуля $\varphi(z) \equiv e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, или, что эквивалентно, $f(z) \equiv e^{i\theta} z$. В случае равенства в (11.3) выполнялось бы равенство $|\varphi(0)| = 1$ и мы снова приходим к виду функции $f(z) \equiv e^{i\theta} z$. □

**Конформность.**

Рассмотрим голоморфную в области $D$ функцию $f$. Допустим, что в точке $z_0 \in D$ не обращается в нуль производная $f'(z_0) \neq 0$. Тогда, как следует из теоремы о локальной структуре отображения, найдется окрестность $\mathcal{O}_r(z_0)$, в которой $f$ однолистна. Пусть $\gamma\colon z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, — гладкий путь (т. е. $z'(t) \neq 0$) в $\mathcal{O}_r(z_0)$, проходящий через точку $z_0$, т. е. $z(t_0) = z_0$ при некотором $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Его образ $\Gamma\colon w = f(z(t))$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, при отображении $w = f(z)$ также является гладким путем, проходящим через точку $w_0 = f(z_0)$. Действительно, $w'(t) = f'(z(t))z'(t) \neq 0$ при $t \in (\alpha, \beta)$. В частности,

$$w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0). \tag{11.4}$$

Исследуем значение этого равенства.

Вначале заметим, что $\Delta w = w(t) - w(t_0)$ — секущая для кривой $\Gamma$, проходящая через точку $w_0$, а $\Delta z = z(t) - z(t_0)$ — соответствующая секущая для кривой $\gamma$, проходящая через точку $z_0$. При этом $\Delta w = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|)$ и

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = |f'(z_0)|.$$

Геометрически это означает, что $|f'(z_0)|$ является коэффициентом искажения длины в точке $z_0$ при отображении $f$. Причем он не зависит от направления пути, проходящего через точку $z_0$, т. е. все пути в точке $z_0$ имеют один и тот же коэффициент искажения длины. Образно это можно сформулировать как то, что „бесконечно малая“ окружность с центром в точке $z_0$ переходит в „бесконечно малую“ окружность с центром в точке $w_0 = f(z_0)$. Таким образом, *геометрический смысл модуля производной* в точке — это коэффициент искажения длин в этой точке. Ранее мы видели, что $|f'(z_0)|^2$ является якобианом отображения $w = f(z)$, т. е. коэффициентом искажения площади.

Поскольку касательная к гладкой кривой является предельным положением секущей, то $\arg z'(t_0)$ выражает угол, который образует касательная к кривой $\gamma$ в точке $z_0$ с положительным направлением вещественной оси. Аналогичное значение имеет $\arg w'(t_0)$ в $w$-плоскости. При соответствующем выборе ветви аргумента из равенства (11.4) получаем

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0).$$

Таким образом, *геометрический смысл* $\arg f'(z_0)$ — это угол поворота направления направления касательной к гладкой кривой $\gamma$ в точке $z_0$ при отображении посредством $f$. Этот угол не зависит от выбора кривой $\gamma$, проходящей через точку $z_0$. Поэтому, если $\gamma$ и $\gamma^*$ — две кривые, проходящие через точку $z_0$ и пересекающиеся в этой точке под углом $\alpha$, то их образы $\Gamma = f(\gamma)$ и $\Gamma^* = f(\gamma^*)$ будут пересекаться в точке $w_0$ под тем же углом $\alpha$. Это свойство называют *консерватизмом углов* или *конформностью* отображения $w = f(z)$ в точке $z_0$.

Теорема 11.8. *Пусть $w = f(z)$ определена в области $D$ и непрерывно дифференцируема в вещественном смысле. Тогда $f$ является конформным в точке $z_0 \in D$ в том и только том случае, если она дифференцируема в комплексном смысле в этой точке и $f'(z_0) \neq 0$.*

Доказательство. Условие непрерывной дифференцируемости в вещественном смысле отображения $w = f(z)$ означает, что координатные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, где $z = x + iy$, $w = u + iv$, имеют непрерывные частные производные. То, что из дифференцируемости $f$ в комплексном смысле и условия $f'(z_0) \neq 0$ следует конформность (консерватизм углов) в точке $z_0$ было показано выше. Допустим теперь, что отображение $f$ конформно в точке $z_0$. Если $\gamma\colon z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, — гладкий путь, проходящий через точку $z_0$, т. е. $z(t_0) = z_0$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$, то производную от функции $w = f(z(t))$ можно записать в виде

$$w'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)y'(t_0),$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Выражая $x'(t)$ и $y'(t)$ через $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$, равенство для $w'(t_0)$ можно переписать в виде

$$w'(t_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)z'(t_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\overline{z'(t_0)}.$$

Поскольку путь $\gamma$ гладкий, то $z'(t_0) \neq 0$ и из последнего равенства получаем

$$\frac{w'(t_0)}{z'(t_0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\overline{z'(t_0)}}{z'(t_0)}. \tag{11.5}$$

Конформность в точке $z_0$ отображения $w = f(z)$ означает, что $\arg\{w'(t_0)/z'(t_0)\}$ не зависит от $\arg z'(t_0)$. С другой стороны, выражение $\overline{z'(t_0)}/z'(t_0)$ принимает все значения $e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, когда меняется направление касательной $z'(t_0)$ к кривой $\gamma$ в точке $z_0$ (при повороте $\gamma$ в точке $z_0$). Поэтому из равенства (11.5) видно, что конформность отображения $w = f(z)$ в точке $z_0$ возможна лишь в случае выполнения равенства

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

которое эквивалентно условиям Коши—Римана. Кроме того, поскольку гладкие кривые преобразуются при отображении $w = f(z)$ в гладкие кривые, то выполняется условие $f'(z_0) \neq 0$. □

Замечание 11.2. Из равенства (11.5) также следует, что условие независимости коэффициента искажения длины $|w'(t_0)/z'(t_0)|$ от направления пути $\gamma$ влечет одно из соотношений

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Первое из них, как было отмечено выше, эквивалентно условиям Коши—Римана. Второе соотношение выражает тот факт, что функция $\overline{f(z)}$ является дифференцируемой в комплексном смысле в точке $z_0$.

**Конформность в расширенной комплексной плоскости.**

При рассмотрении конформных отображений $f$ областей в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ нужно распространить понятие конформности на случаи, когда область определения или область значений (или обе) отображения $f$ содержат бесконечно удаленную точку.

Допустим вначале, что конечная точка $a$ отображается посредством голоморфной функции $f$ в бесконечно удаленную точку, т. е. $f(z) \to \infty$ при $z \to a$. Это означает, что $z = a$ является полюсом для функции $f$. Функция $g(z) = 1/f(z)$ будет иметь точку $z = a$ в качестве устранимой особой точки. Кроме того, полагая $g(a) = 0$, получаем голоморфную в окрестности точки $a$ функцию $g$. Конформность отображения $g$ (а, следовательно, и $f$) в точке $a$ эквивалентна условию $g'(a) \neq 0$. Это означает, что функция $f$ должна иметь в точке $z = a$ простой полюс. Таким образом, функция $f$ будет однолистной и *конформной в* некоторой *окрестности полюса* $a$ в том и только том случае, когда этот *полюс простой*.

Рассмотрим теперь случай, когда $f$ голоморфна в окрестности бесконечно удаленной точки. Обсуждать вопрос конформности $f$ в точке $z = \infty$ имеет смысл лишь при условии существования предела (конечного или бесконечного) функции $f(z)$ при $z \to \infty$. Допустим вначале, что этот предел конечный, т. е. $f(z) \to w_0$ при $z \to \infty$ и $w_0 \in \mathbb{C}$. Другими словами, точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой для функции $f$. Тогда функция $g(\zeta) = f(1/\zeta)$ также будет иметь в точке $\zeta = 0$ устранимую особенность. Полагая $g(0) = w_0$, мы получаем голоморфную в окрестности точки $\zeta = 0$ функцию $g$. Конформность функции $g$ в точке $\zeta = 0$ эквивалентна условию $g'(0) \neq 0$. Перепишем это условие на функцию $f$. Поскольку

$$g'(0) = \lim_{\zeta \to 0} \frac{g(\zeta) - w_0}{\zeta} = \lim_{z \to \infty} z(f(z) - w_0) = -\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z),$$

то приходим к выводу: если $z = \infty$ является *устранимой особой точкой* для функции $f$, то отображение $w = f(z)$ будет однолистным и *конформным в* некоторой *окрестности бесконечно удаленной точки* в том и только том случае, если $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \neq 0$.

Рассмотрим, наконец, случай $f(z) \to \infty$ при $z \to \infty$, т, е. когда $z = \infty$ является полюсом для функции $f$. В этом случае свойство конформности переносится на функцию $g(\zeta) = 1/f(1/\zeta)$ в точке $\zeta = 0$. Условие $g'(0) \neq 0$ в терминах функции $f$ принимает вид

$$g'(0) = \lim_{\zeta \to 0} \frac{g(\zeta)}{\zeta} = \lim_{z \to \infty} \frac{z}{f(z)} \neq 0.$$

Это означает, что $z = \infty$ является простым полюсом для функции $f$.

## § 12. Локально равномерная сходимость

**12.1. Определение и свойства локально равномерной сходимости.** Среди различных видов сходимости последовательностей функций в теории аналитических функций исключительно важную роль играет так называемая локально равномерная сходимость.

Определение 12.1. Будем говорить, что последовательность определенных в области $D$ функций $f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится *локально равномерно* в $D$ к функции $f$, если для каждой точки $z_0 \in D$ найдется такая ее окрестность $\mathcal{O}_r(z_0)$, $r > 0$, что $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$ и $f_n(z) \to f(z)$ равномерно в $\mathcal{O}_r(z_0)$ при $n \to \infty$.

Замечание 12.1. Приведенное определение можно дать в другой эквивалентной формулировке. Последовательность $\{f_n\}$ сходится локально равномерно в области $D$ к функции $f$ в том и только том случае, если для любого компактного подмножества $K \subset D$ последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на $K$ к функции $f$.

Доказательство. Действительно, если $f_n \to f$ локально равномерно в $D$ в смысле определения 12.1 и $K$ — компактное подмножество области $D$, то для любой точки $z_0 \in K$ найдется $r_0 > 0$ такое, что $\mathcal{O}_{r_0}(z_0) \subset D$ и $f_n(z) \to f(z)$ равномерно в $\mathcal{O}_{r_0}(z_0)$ при $n \to \infty$. Поскольку каждая точка множества $K$ обладает такой окрестностью, а $K$ — компактное множество, то можно выбрать конечное число окрестностей $\mathcal{O}_{r_1}(z_1), \ldots, \mathcal{O}_{r_m}(z_m)$, которые покрывают $K$ и в каждой из которых сходимость последовательности $\{f_n\}$ равномерная. Пусть теперь $\varepsilon > 0$. Для каждой окрестности $\mathcal{O}_{r_k}(z_k)$, $k = 1, \ldots, m$, существует номер $N_k$ такой, что $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ при всех $z \in \mathcal{O}_{r_k}(z_k)$ и $n \geqslant N_k$. Но тогда для $n \geqslant \max\{N_1, \ldots, N_m\}$ и всех $z \in K$ будет выполняться неравенство $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольно, то это и означает равномерную сходимость последовательности $\{f_n\}$ на множестве $K$.

Обратно, если последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на каждом компактном подмножестве $K \subset D$, то для любой точки $z_0 \in D$ найдется (в силу того, что $D$ — открытое множество) окрестность $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$. Замкнутый круг $\{z\colon |z - z_0| \leqslant r/2\}$ является компактным подмножеством области $D$ и по предположению $f_n(z) \to f(z)$ равномерно в окрестности $\mathcal{O}_{r/2}(z_0)$. □

Теорема 12.1 (Вейерштрасса). *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность голоморфных в области $D$ функций и $f_n(z) \to f(z)$ локально равномерно в $D$ при $n \to \infty$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

*(i) $f$ является голоморфной в $D$ функцией;*

*(ii) $f_n'(z) \to f'(z)$ локально равномерно в $D$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. $(i)$ Пусть $z_0$ — произвольная точка области $D$. Выберем $r > 0$ так, чтобы замкнутый круг $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)}$ содержался в области $D$. Поскольку этот круг является компактным подмножеством области $D$, то $f_n(z) \to f(z)$ равномерно на $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)}$, а предельная функция $f$ будет непрерывной. Далее, для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset \mathcal{O}_r(z_0)$ в силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ на ней будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$$

Однако по теореме Коши интегралы в левой части равенства равны нулю. Это означает, что для функции $f$ в $\mathcal{O}_r(z_0)$ выполнены условия теоремы Морера 5.4

и, следовательно, $f$ голоморфна в $\mathcal{O}_r(z_0)$. Поскольку $z_0$ была произвольной точкой области $D$ то голоморфность $f$ в $D$ доказана.

Для доказательства $(ii)$ воспользуемся интегральной формулой Коши для производных (5.2). Снова фиксируем $z_0 \in D$ и $r > 0$ такое, что $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)} \subset D$. Если $\gamma_r = \partial\mathcal{O}_r(z_0)$ — положительно ориентированная граница окрестности $\mathcal{O}_r(z_0)$, то для всех $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$ будут выполняться равенства

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta, \qquad f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta.$$

Но тогда для $z \in \mathcal{O}_{r/2}(z_0)$ будем иметь

$$|f'(z) - f_n'(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)-f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right| \leqslant \frac{4}{r}\max_{\zeta\in\gamma_r}|f(\zeta)-f_n(\zeta)|.$$

Поскольку правая часть этого неравенства не зависит от $z \in \mathcal{O}_{r/2}(z_0)$ и стремится к нулю при $n \to \infty$, то $f_n'(z) \to f'(z)$ равномерно в $\mathcal{O}_{r/2}(z_0)$. Принимая во внимание то, что $z_0$ выбиралось произвольно из $D$, приходим к утверждению $(ii)$. □

Иногда утверждение $(i)$ называют первой теоремой Вейерштрасса, а $(ii)$ — второй теоремой Вейерштрасса.

Ранее мы доказали, что сумма степенного ряда представляет собой голоморфную в круге сходимости функцию. Теорема Вейерштрасса позволяет расширить этот результат следующим образом.

Следствие 12.1 (Теорема Вейерштрасса для рядов). *Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, составленный из голоморфных в области $D$ функций $f_n$ сходится локально равномерно в $D$. Тогда его сумма $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ является голоморфной в $D$ функцией и ряд можно почленно дифференцировать, т. е. $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$.*

Теорема 12.2 (Гурвица). *Пусть функции $f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, голоморфны и не обращаются в нуль в области $D$. Допустим также, что $f_n(z) \to f(z)$ локально равномерно в $D$. Тогда либо $f(z) \equiv 0$, либо $f(z) \neq 0$ при $z \in D$.*

Доказательство. Допустим, что $f(z) \not\equiv 0$ и $f(a) = 0$ в некоторой точке $a \in D$. Тогда в силу изолированности нулей голоморфной функции найдется такое $r > 0$, что $\overline{\mathcal{O}_r(a)} \subset D$ и $f(z) \neq 0$ при $z \in \dot{\mathcal{O}}_r(a)$. Можно считать, что $f$ не обращается в нуль и на $\gamma = \partial\mathcal{O}_r(a)$. Поскольку $\gamma$ является компактным множеством, то

$$\min_{z\in\gamma}|f(z)| = \delta > 0.$$

В силу локально равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ найдется номер $N$ такой, что

$$|f_n(z) - f(z)| < \delta/2$$

при всех $n \geqslant N$ и $z \in \gamma$. Но тогда по теореме Руше функция $f_n(z) = f(z) + (f_n(z) - f(z))$ будет иметь в $\mathcal{O}_r(a)$ столько же нулей с учетом их кратности, сколько и функция $f(z)$. Однако, это противоречит условиям теоремы, согласно которым $f_n$ не должна обращаться в нуль в области $D$. □

Следствие 12.2. *Пусть последовательность однолистных и голоморфных в области $D$ функций $f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится локально равномерно в $D$ к функции $f(z) \not\equiv const$. Тогда $f$ также однолистна в области $D$.*

Доказательство. Допустим, что $f(z_1) = f(z_2) = w_0$ для некоторых $z_1, z_2 \in D$ и $z_1 \neq z_2$. Выберем $r > 0$ так, чтобы $\mathcal{O}_r(z_1) \subset D$, $\mathcal{O}_r(z_2) \subset D$ и $\mathcal{O}_r(z_1) \cap \mathcal{O}_r(z_2) = \varnothing$. Поскольку каждая функция $f_n$ однолистна в $D$, то $f_n(z) \neq w_0$ хотя бы в одной из окрестностей $\mathcal{O}_r(z_1)$ или $\mathcal{O}_r(z_2)$. Поэтому можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ и одну из окрестностей $\mathcal{O}_r(z_1)$ или $\mathcal{O}_r(z_2)$ так, чтобы все функции подпоследовательности $f_{n_k}$ не принимали значения $w_0$ в выбранной окрестности, т. е. $f_{n_k}(z) - w_0 \neq 0$. Но тогда по теореме Гурвица либо $f(z) \equiv w_0$, либо $f(z) \neq w_0$ в выбранной окрестности. Первое противоречит условию $f(z) \not\equiv const.$, а второе противоречит предположению $f(z_1) = f(z_2) = w_0$. □

**12.2. Принцип компактности.** Пусть $K$ — компактное множество в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Через $\mathcal{C}(K)$ обозначим совокупность всех непрерывных комплекснозначных функций, определенных на $K$. Как известно из курса математического анализа, всякая непрерывная на компактном множестве функция является и равномерно непрерывной на этом компактном множестве. Кроме того предел равномерно сходящейся последовательности функций представляет собой непрерывную функцию. Для семейств непрерывных функций возникает еще одно понятие, связанное с непрерывностью.

Определение 12.2. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство комплекснозначных функций, определенных на множестве $E \subset \mathbb{C}$. Будем говорить, что это семейство является *равностепенно непрерывным* на $E$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$ для любых $z', z''$ из $E$, удовлетворяющих условию $|z' - z''| < \delta$, и всех функций $f$ из семейства $\mathcal{F}$.

Очевидно, что каждая функция $f$ из равностепенно непрерывного семейства $\mathcal{F}$ является равномерно непрерывной на множестве $E$. Следующий результат составляет принцип компактности в $\mathcal{C}(K)$. В литературе этот результат известен как теорема Арцела — Асколи.

Теорема 12.3. *Пусть $K$ — компактное в $\mathbb{C}$ множество и $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K)$ — семейство, которое равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на $K$. Тогда из любой последовательности $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ можно выделить подпоследовательность, которая равномерно сходится на $K$.*

Доказательство. В доказательстве выделим три пункта.

1. *Выбор счетного плотного подмножества в $K$.* Если $K$ является конечным множеством, то утверждение теоремы тривиально. Поэтому будем считать, что $K$ бесконечно, и построим счетное плотное в $K$ подмножество. Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ рассмотрим разбиение комплексной плоскости на квадраты путем проведения параллельных координатным осям прямых с интервалом в $1/2^k$. Поскольку $K$ является ограниченным множеством, то лишь конечное число замкнутых квадратов разбиения имеют не пустое пересечение с $K$. В

каждом таком квадрате выберем по одной точке и полученное конечное множество обозначим через $Q_k$. Тогда $Q = \cup_{k=1}^{\infty} Q_k$ будет счетным множеством, плотным в $K$.

2. *Выделение подпоследовательности функций, сходящейся на счетном подмножестве.* Занумеруем точки множества $Q = \{q_1, q_2, \dots\}$ и выделим, используя диагональный метод Кантора, из $\{f_n\}$ подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке множества $Q$. Применяя к ограниченной числовой последовательности $\{f_n(q_1)\}_{n=1}^{\infty}$ принцип Больцано — Вейерштрасса, выделим сходящуюся подпоследовательность $\{f_{1,n}(q_1)\}_{n=1}^{\infty}$. Для нумерации членов подпоследовательности мы используем двойные индексы $(1, n) \in \mathbb{N}$. Далее, из ограниченной числовой последовательности $\{f_{1,n}(q_2)\}$ выделим сходящуюся подпоследовательность $\{f_{2,n}(q_2)\}$. В силу того, что $\{f_{2,n}\}$ является подпоследовательностью $\{f_{1,n}\}$, то $\{f_{2,n}(q_1)\}$ также является сходящейся последовательностью. Продолжая процесс выбора подпоследовательностей, мы получим счетное семейство подпоследовательностей исходной последовательности:

$$\begin{array}{llll} f_{1,1}, & f_{1,2}, & f_{1,3}, & \dots \\ f_{2,1}, & f_{2,2}, & f_{2,3}, & \dots \\ f_{3,1}, & f_{3,2}, & f_{3,3}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

При этом каждая подпоследовательность $\{f_{m,n}\}$ сходится на множестве точек $q_1, \dots, q_m$ из $Q$ и является подпоследовательностью предыдущей $\{f_{m-1,n}\}$.

Таким образом, диагональная последовательность $\{f_{n,n}\}$ является подпоследовательностью исходной последовательности $\{f_n\}$ и сходится в каждой точке множества $Q$.

3. *Доказательство равномерной сходимости выделенной подпоследовательности.* Для упрощения обозначений будем писать $g_n = f_{n,n}$, $n = 1, 2, \dots$. Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta > 0$ так, чтобы для всех $z', z''$ из $K$, для которых $|z' - z''| < \delta$, выполнялось неравенство $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon/3$ при любой $f$ из $\mathcal{F}$. Это можно сделать в силу равностепенной непрерывности семейства $\mathcal{F}$ на $K$.

Из способа построения множества $Q_k$ следует, что для любого $z \in K$ найдется такое $q \in Q_k$, что $|z - q| < \sqrt{2}/2^k$. Фиксируем $k_0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\delta > \sqrt{2}/2^{k_0}$. Далее, поскольку $Q_{k_0}$ является конечным множеством и последовательность $\{g_n\}$ сходится в каждой точке этого множества, то можно выбрать номер $N$ так, чтобы

$$|g_n(q) - g_m(q)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

при всех $q \in Q_{k_0}$ и $n, m \geqslant N$. Но тогда для произвольного $z \in K$, выбирая $q \in Q_{k_0} \cap \mathcal{O}_\delta(z)$, получаем для $n, m \geqslant N$

$$\begin{aligned} |g_n(z) - g_m(z)| &\leqslant |g_n(z) - g_n(q)| + |g_n(q) - g_m(q)| + |g_m(q) - g_m(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Это означает, что для последовательности $\{g_n\}$ выполняются условия критерия Коши равномерной сходимости на $K$. □

Пусть теперь $D$ — произвольная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Через $\mathcal{H}(D)$ будем обозначать совокупность голоморфных в области $D$ функций. Заметим, что $\mathcal{H}(D)$ является линейным пространством.

Определение 12.3. Семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D)$ называется *локально равномерно ограниченным* в $D$, если для всякой точки $z_0 \in D$ найдутся окрестность $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$ и число $M > 0$ такие, что $|f(z)| \leqslant M$ при всех $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$ и $f \in \mathcal{F}$.

Как и в случае определения локально равномерной сходимости приведенное выше определение можно переформулировать в терминах компактных множеств. Семейство $\mathcal{F}$ является локально равномерно ограниченным в области $D$ в том и только том случае, если на любом компактном множестве $K \subset D$ семейство $\mathcal{F}$ является равномерно ограниченным.

Теорема 12.4. *Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D)$ — локально равномерно ограниченное в $D$ семейство. Тогда семейство производных $\mathcal{F}' = \{f' \colon f \in \mathcal{F}\}$ также является локально равномерно ограниченным в $D$ семейством.*

Доказательство. Пусть $z_0$ — произвольная точка области $D$. По условию теоремы найдутся $r > 0$ и $M > 0$ такие, что $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)} \subset D$ и $|f(z)| \leqslant M$ для всех $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$ и $f \in \mathcal{F}$. В силу интегральной формулы Коши для производных имеет место равенство

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathcal{O}_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

для $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$ и любой $f \in \mathcal{F}$. Но тогда в круге $\mathcal{O}_{r/2}(z_0)$ будет выполняться неравенство

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial\mathcal{O}_r(z_0)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} |d\zeta| \leqslant \frac{4M}{r},$$

т. е. семейство $\mathcal{F}'$ равномерно ограничено в $\mathcal{O}_{r/2}(z_0)$. Поскольку $z_0$ выбиралась произвольным образом, то теорема доказана. □

Теорема 12.5. *Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D)$ — локально равномерно ограниченное в $D$ семейство. Тогда на любом компактном множестве $K \subset D$ это семейство является равностепенно непрерывным.*

Доказательство. Пусть $K$ — компактное подмножество в области $D$. Поскольку расстояние $d = dist(K, \partial D)$ от множества $K$ до границы области $D$ положительно, то можно выбрать $r \in (0, d)$. Множество

$$K_r = \{z \colon dist(z, K) \leqslant r\}$$

также будет компактным подмножеством области $D$, и по предыдущей теореме найдется такое $M > 0$, что

$$|f'(z)| \leqslant M \qquad \text{при всех} \quad z \in K_r \quad \text{и} \quad f \in \mathcal{F}.$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ фиксировано произвольным образом. Выберем $\delta < \min\{r, \varepsilon/M\}$. Тогда для любых $z', z''$ из $K$, удовлетворяющих условию $|z' - z''| <$

$\delta$ будем иметь $[z', z''] \subset K_r$ и

$$|f(z') - f(z'')| = \left| \int\limits_{[z',z'']} f'(z)dz \right| \leqslant M|z' - z''| < M\delta \leqslant \varepsilon,$$

что и доказывает теорему. □

Теорема 12.6. *Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D)$ — локально равномерно ограниченное в $D$ семейство. Тогда из всякой последовательности $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящуюся локально равномерно в $D$.*

Доказательство. Пусть $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ — компактное исчерпание области $D$, т. е. $K_j$ — компактные подмножества области $D$ и $\cup_{j=1}^{\infty} K_j = D$. Такую последовательность компактных множеств можно построить, например, следующим образом. Выберем $R > 0$ и натуральное $N$ так, чтобы множество

$$\{z \in D\colon\ dist(z, \partial D) \geqslant 1/N, \quad |z| \leqslant R\}$$

было не пусто. Тогда в качестве компактного исчерпания можно взять последовательность множеств

$$K_j = \left\{z \in D\colon\ dist(z, \partial D) \geqslant \frac{1}{N+j}, \quad |z| \leqslant R + j\right\},$$

$j = 1, 2, \ldots$.

В силу предыдущей теоремы семейство $\mathcal{F}$ удовлетворяет на каждом компакте $K_j$ условиям теоремы 12.3, т. е. оно на каждом $K_j$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Применяя, как и при доказательстве теоремы Арцела — Асколи, диагональный метод Кантора, получаем подпоследовательность $f_{n_k}$, которая сходится равномерно на каждом компакте $K_j$, $j = 1, 2, \ldots$.

Пусть теперь $K$ — произвольное компактное подмножество области $D$. Из построения последовательности $\{K_j\}$ следует, что найдется такой номер $j_0$, что $K \subset K_{j_0}$. Поэтому выделенная подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится равномерно на $K$. Это и означает, что $\{f_{n_k}\}$ сходится локально равномерно в области $D$. □

## § 13. Элементарные конформные отображения и теорема Римана об отображении

### Дробно-линейные преобразования.

Под дробно-линейным преобразованием понимается рациональная функция

$$L(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{13.1}$$

где комплексные числа $a, b, c, d$ называются коэффициентами преобразования $L$ и удовлетворяют условию

$$ad - bc \neq 0. \tag{13.2}$$

Условие (13.2) отвечает за невырожденность отображения $L$, поскольку оно эквивалентно тому, что нуль числителя и нуль знаменателя не совпадают. Нас будет интересовать $L$ как отображение расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя. В связи с этим отметим, что представление (13.1) не однозначно, поскольку умножение всех коэффициентов на одно и то же ненулевое число не изменяет самого отображения $w = L(z)$.

Предложение 13.1. *Совокупность $\mathcal{M}$ всех дробно-линейных преобразований образует группу относительно операции композиции.*

Доказательство. Пусть $L_k(z) = (a_k z + b_k)/(c_k z + d_k)$, $k = 1, 2,$ — два дробно-линейных преобразования, т. е. $a_k d_k - b_k c_k \neq 0$. Тогда

$$L_1 \circ L_2(z) = L_1(L_2(z)) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + c_2d_1)z + (c_1b_2 + d_1d_2)}.$$

Чтобы убедиться в том, что $L_1 \circ L_2$ является дробно-линейным преобразованием, нужно проверить выполнение условия (13.2) для этого отображения. Простые вычисления показывают, что

$$(a_1a_2+b_1c_2)(c_1b_2+d_1d_2)-(a_1b_2+b_1d_2)(c_1a_2+c_2d_1) = (a_1d_1-b_1c_1)(a_2d_2-b_2c_2) \neq 0,$$

поскольку условие (13.2) выполняется для $L_1$ и $L_2$.

Покажем теперь, что для каждого дробно-линейного преобразования $L$ существует обратное $L^{-1}$ и $L^{-1} \in \mathcal{M}$. Решая уравнение

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

относительно $z$, находим

$$z = L^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Условие (13.2) для $L^{-1}$ эквивалентно этому же условию для $L$. □

Отметим, что группа $\mathcal{M}$ (которую также называют группой мебиусовых преобразований) не коммутативна. Существование обратного отображения доказывает, что дробно-линейное преобразование $L$ осуществляет взаимно однозначное соответствие $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$. При этом $L(\infty) = a/c$ и $L(-d/c) = \infty$, если $c \neq 0$, и $L(\infty) = \infty$, если $c = 0$.

Предложение 13.2. *Каждое дробно-линейное преобразование осуществляет конформное отображение $\overline{\mathbb{C}}$ на себя.*

Доказательство. Пусть $L$ определяется равенством (13.1) с условием (13.2) на коэффициенты. Допустим вначале, что $c \neq 0$. Тогда для любого $z \neq \infty$ и $\neq -d/c$ выполняется условие

$$L'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0,$$

которое означает конформность $L$ в точке $z$. В точке $z = -d/c$ функция $L$ имеет простой полюс и, как следует из предыдущего параграфа, является конформным в этой точке. Бесконечно удаленная точка в рассматриваемом случае является устранимой особой точкой и $L(z) \to a/c$ при $z \to \infty$. При этом

$$\lim_{z\to\infty} z\left(L(z) - \frac{a}{c}\right) = \lim_{z\to\infty} \frac{z(bc-ad)}{c(cz+d)} = \frac{bc-ad}{c^2} \neq 0,$$

т. е. $L$ конформна в точке $z = \infty$.

Если $c = 0$, то в силу (13.2) коэффициенты $a$ и $d$ не должны обращаться в нуль. Поэтому $L'(z) = a/d \neq 0$, что означает конформность $L$ в конечных точках. В бесконечно удаленной точке $L$ имеет простой полюс и также является конформным. □

Предложение 13.3. *Пусть $z_1, z_2, z_3$ — три различные точки в $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда существует единственное $T \in \mathcal{M}$, для которого $T(z_1) = 1$, $T(z_2) = 0$ и $T(z_3) = \infty$.*

Доказательство. В случае конечных точек, т. е. когда $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, отображение $T$ определяется равенством

$$T(z) = \frac{z-z_2}{z-z_3} \bigg/ \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}\,.$$

В случае, когда одна из точек $z_1, z_2$ или $z_3$ является бесконечно удаленной, требуемое отображение получается из приведенной выше формулы соответствующим предельным переходом

$$T(z) = \begin{cases} \dfrac{z-z_2}{z-z_3}, & \text{если} \quad z_1 = \infty, \\ \dfrac{z_1-z_3}{z-z_3}, & \text{если} \quad z_2 = \infty, \\ \dfrac{z-z_2}{z_1-z_2}, & \text{если} \quad z_3 = \infty. \end{cases}$$

Остается доказать единственность отображения. Допустим, что $S$ — дробно-линейное преобразование с теми же свойствами. Тогда дробно-линейное преобразование $L = S \circ T^{-1}$ оставляет неподвижными точки $1, 0$ и $\infty$. Из условия $L(\infty) = \infty$ следует, что в представлении (13.1) коэффициент $c$ должен равняться нулю. Поэтому $L$ должно иметь вид $L(z) = az + b$. Используя теперь условия $L(0) = 0$ и $L(1) = 1$, приходим к заключению, что $L(z) \equiv z$. Отсюда следует тождество $S(z) \equiv T(z)$. □

Определение 13.1. Под *ангармоническим отношением* четырех различных точек $z_1, z_2, z_3, z_4$ в $\overline{\mathbb{C}}$ понимается образ точки $z_1$ при отображении ее посредством дробно-линейного преобразования $T$, которое удовлетворяет условиям $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = 0$, $T(z_4) = \infty$. При этом используется обозначение

$$T(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Заметим, что если все четыре точки $z_1, z_2, z_3, z_4$ конечны, то

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \Big/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\,.$$

Важность ангармонического отношения обусловлена уже тем, что оно является инвариантом при дробно-линейном преобразовании.

Теорема 13.1. *Пусть $z_1, z_2, z_3, z_4$ — четыре различные точки в $\overline{\mathbb{C}}$ и $L \in \mathcal{M}$. Тогда*

$$(L(z_1), L(z_2), L(z_3), L(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Доказательство. Пусть $T(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$, т. е. $T \in \mathcal{M}$ и $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = 0$, $T(z_4) = \infty$. Тогда $S = T \circ L^{-1}$ обладает свойством $S(L(z_2)) = 1$, $S(L(z_3)) = 0$ и $S(L(z_4)) = \infty$. По определению ангармонического отношения имеем

$$(L(z_1), L(z_2), L(z_3), L(z_4)) = S(L(z_1)) = T \circ L^{-1} \circ L(z_1) = T(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

и теорема доказана. □

Замечание 13.1. Для любых различных трех точек $z_1, z_2, z_3$ в $z$-плоскости и различных трех точек $w_1, w_2, w_3$ в $w$-плоскости существует единственное дробно-линейное преобразование $L$, для которого

$$L(z_1) = w_1, \quad L(z_2) = w_2, \quad L(z_3) = w_3.$$

Это отображение можно найти, разрешив равенство

$$(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3)$$

относительно $w$.

**Круговое свойство**

При стереографической проекции каждой окружности на сфере Римана в комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ соответствует окружность или прямая. Поэтому под окружностью в $\overline{\mathbb{C}}$ в дальнейшем будем понимать окружность или прямую. Другими словами, прямая — это окружность в $\overline{\mathbb{C}}$ проходящая через бесконечно удаленную точку. Оказывается, что семейство окружностей в $\overline{\mathbb{C}}$ преобразуется посредством дробно-линейных преобразований в себя.

Предложение 13.4. *Прообразом вещественной оси при отображении $L\colon \overline{\mathbb{C}} \mapsto \overline{\mathbb{C}}$, $L \in \mathcal{M}$, является окружность в $\overline{\mathbb{C}}$ (т. е. окружность или прямая).*

Доказательство. Пусть $L$ определяется равенством (13.1) с условием (13.2) на коэффициенты. Условие $z \in L^{-1}(\mathbb{R})$ можно записать в виде равенства $\operatorname{Im} L(z) = 0$ или

$$\frac{az + b}{cz + d} - \frac{\overline{a}\overline{z} + \overline{b}}{\overline{c}\overline{z} + \overline{d}} = 0.$$

Последнее равенство можно переписать в эквивалентном виде

$$(a\overline{c} - \overline{a}c)|z|^2 + (a\overline{d} - \overline{b}c)z + (b\overline{c} - \overline{a}d)\overline{z} + (b\overline{d} - \overline{b}d) = 0. \tag{13.3}$$

Если $a\bar{c} - \bar{a}c = 0$, то уравнение (13.3) принимает вид

$$\operatorname{Im}\{(a\bar{d} - \bar{b}c)z\} = \operatorname{Im}\{\bar{b}d\},$$

т. е. определяет в комплексной $z$-плоскости прямую.

Допустим теперь, что $a\bar{c} - \bar{a}c \neq 0$ Тогда уравнение (13.3) можно записать в виде

$$|z|^2 - \bar{A}z - A\bar{z} + B = 0 \qquad \text{или} \qquad |z - A|^2 = |A|^2 - B,$$

где

$$A = \frac{\bar{a}d - b\bar{c}}{a\bar{c} - \bar{a}c}, \qquad B = \frac{b\bar{d} - \bar{b}d}{a\bar{c} - \bar{a}c}.$$

Замечая также, что

$$|A|^2 - B = \frac{|ad - bc|^2}{|a\bar{c} - \bar{a}c|^2} > 0,$$

приходим к выводу о том, что уравнение (13.3) определяет окружность. □

Предложение 13.5. *Различные четыре точки $z_1, z_2, z_3, z_4$ лежат на одной окружности в $\overline{\mathbb{C}}$ в том и только том случае, если*

$$\operatorname{Im}(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0.$$

Доказательство. Пусть $T$ — дробно-линейное преобразование, удовлетворяющее условиям $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = 0$, $T(z_4) = \infty$, а $\mathcal{C}$ — окружность в $\overline{\mathbb{C}}$, проходящая через точки $z_2, z_3, z_4$. В силу предыдущего предложения прообразом вещественной оси при отображении $T$ будет окружность в $\overline{\mathbb{C}}$. Поскольку точки $1, 0$ и $\infty$ расположены на вещественной оси, то этим прообразом будет окружность $\mathcal{C}$. Но тогда точка $z_1$ будет принадлежать окружности $\mathcal{C}$ в том и только случае, если $T(z_1) \in \mathbb{R}$, т. е. $T(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ вещественно. □

Теорема 13.2. *При дробно-линейном преобразовании окружности в $\overline{\mathbb{C}}$ переходят в окружности в $\overline{\mathbb{C}}$.*

Доказательство. Пусть $L$ — произвольное дробно-линейное преобразование и $\mathcal{C}$ — окружность в $\overline{\mathbb{C}}$. Выберем на $\mathcal{C}$ три различные точки $z_1, z_2, z_3$ и пусть $\mathcal{C}^*$ — окружность в $w$-плоскости, которая проходит через точки $L(z_1)$, $L(z_2)$, $L(z_3)$. Для любого $z \in \overline{\mathbb{C}}$ в силу инвариантности ангармонического отношения относительно дробно-линейного преобразования будет выполняться равенство

$$(L(z), L(z_1), L(z_2), L(z_3)) = (z, z_1, z_2, z_3).$$

Из предыдущего предложения следует, что $z \in \mathcal{C}$ в том и только том случае, когда правая часть последнего равенства вещественна. Аналогично, $L(z) \in \mathcal{C}^*$ в том и только том случае, когда левая часть этого же равенства вещественна. Таким образом, $z \in \mathcal{C}$ в том и только том случае, когда $L(z) \in \mathcal{C}^*$, т. е. $L(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^*$. □

**Принцип симметрии.**

Если дробно-линейное преобразование (13.1) определяется вещественными коэффициентами, то оно переводит вещественную ось на себя, а пару точек

$z$ и $\overline{z}$, симметричных относительно вещественной оси, в пару точек, которые также будут симметричны относительно вещественной оси. Поскольку дробно-линейные преобразования обладают круговым свойством, то естественно ожидать, что пары точек, симметричных относительно некоторой окружности в $\overline{\mathbb{C}}$ будут переводиться дробно-линейным преобразованием в пары точек, симметричных относительно образа этой окружности.

Предложение 13.6. *Пусть $z_1, z_2, z_3$ — три различные точки в $\mathbb{C}$ и $\mathcal{C}$ — окружность (или прямая), проходящая через них. Тогда точки $z$ и $z^*$ симметричны относительно $\mathcal{C}$ в том и только том случае, если выполняется соотношение*

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}. \tag{13.4}$$

Доказательство. Пусть $T$ — дробно-линейное преобразование, которое переводит точки $z_1, z_2, z_3$ в $1, 0$ и $\infty$, соответственно. Тогда условие (13.4) эквивалентно тому, что $T(z^*) = \overline{T(z)}$, или $z^* = T^{-1}(\overline{T(z)})$. Поэтому утверждение будет доказано, если мы покажем, что равенство (13.4) влечет симметрию точек $z$ и $z^*$ относительно $\mathcal{C}$. Выделим в доказательстве этого два случая.

1). Пусть $\mathcal{C}$ является прямой, т. е. проходит через бесконечно удаленную точку. Тогда отношение $(z_1 - z_2)/(z_1 - z_3)$ вещественно и условие (13.4) принимает вид

$$\frac{z^* - z_2}{z^* - z_3} = \overline{\left(\frac{z - z_2}{z - z_3}\right)}.$$

Отсюда следуют равенства

$$\arg \frac{z^* - z_2}{z^* - z_3} = -\arg \frac{z - z_2}{z - z_3}, \qquad \frac{|z^* - z_2|}{|z^* - z_3|} = \frac{|z - z_2|}{|z - z_3|},$$

которые означают подобие треугольников с вершинами $z^*, z_2, z_3$ и $z, z_2, z_3$. Поскольку эти треугольники имеют еще и общую сторону, то они равны. Отсюда следует симметричность $z^*$ и $z$ относительно прямой $\mathcal{C}$, проходящей через точки $z_2$ и $z_3$.

2). Пусть теперь $\mathcal{C}$ — окружность с центром в точке $a$ и радиуса $R$. Поскольку точки $z_1, z_2, z_3$ лежат на $\mathcal{C}$, то $|z_k - a| = R$ для $k = 1, 2, 3$. Используя это и инвариантность ангармонического отношения относительно дробно-линейных преобразований, соотношение (13.4) приводится к следующему виду

$$\begin{aligned}
(z^*, z_1, z_2, z_3) &= \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} = (\overline{z}, \overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}) \\
&= \left(\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}}, \frac{R^2}{\overline{z_1} - \overline{a}}, \frac{R^2}{\overline{z_2} - \overline{a}}, \frac{R^2}{\overline{z_3} - \overline{a}}\right) \\
&= \left(\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}}, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a\right) \\
&= \left(\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}} + a, z_1, z_2, z_3\right).
\end{aligned}$$

Другими словами,

$$T(z^*) = T\left(\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}} + a\right).$$

Поскольку $T$ однолистно, то отсюда следует, что

$$z^* = \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}} + a \qquad \text{или} \qquad z^* - a = \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}}.$$

Следовательно, для $z$ и $z^*$ выполняются соотношения

$$\arg(z^* - a) = \arg(z - a), \qquad |z^* - a| \cdot |z - a| = R^2.$$

Первое соотношение означает, что $z$ и $z^*$ лежат на одном луче, выходящем из центра $a$ окружности $\mathcal{C}$, а второе равенство показывает, что произведение расстояний от центра $a$ до точек $z$ и $z^*$ равно квадрату радиуса окружности $\mathcal{C}$. Таким образом, $z$ и $z^*$ являются симметричными относительно $\mathcal{C}$. □

Теорема 13.3. *Пусть дробно-линейное преобразование $L$ отображает окружность $\mathcal{C}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ в окружность $\mathcal{C}'$ в $\overline{\mathbb{C}}$, т. е. $\mathcal{C}' = L(\mathcal{C})$. Тогда каждая пара точек $z$ и $z^*$, симметричных относительно $\mathcal{C}$, переводится в пару точек $L(z)$ и $L(z^*)$, симметричных относительно $\mathcal{C}'$.*

Доказательство. Пусть $z_1, z_2, z_3$ — три различные точки на окружности $\mathcal{C}$. Тогда $L(z_1), L(z_2), L(z_3)$ расположены на $\mathcal{C}'$. Допустим теперь, что $z$ и $z^*$ — пара точек, симметричных относительно $\mathcal{C}$. В силу доказанного выше предложения это эквивалентно равенству

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}.$$

Однако, в силу инвариантности ангармонического отношения относительно дробно-линейных преобразований, это равенство влечет следующее

$$(L(z^*), L(z_1), L(z_2), L(z_3)) = \overline{(L(z), L(z_1), L(z_2), L(z_3))},$$

которое эквивалентно условию симметричности точек $L(z)$ и $L(z^*)$ относительно окружности $\mathcal{C}'$. □

Прежде чем мы приступим к изучению других элементарных конформных отображений, сделаем некоторые общие замечания. Конформное отображение, ассоциированное с голоморфной функцией, дает наглядное представление о ней, подобно графику в случае функции вещественного переменного. Кроме того, во многие области математики и ее приложения теория функций комплексного переменного входит через конформное отображение. Одной из наиболее важных проблем, возникающих при этом, является задача отыскания конформного отображения одной области на другую. Чтобы иметь представление о разрешимости этого вопроса в рамках элементарных функций, нужно хорошо знать их отображающие свойства. Последняя цель достигается, как правило, выяснением того, как преобразуются те или иные семейства кривых. В качестве исследуемых семейств кривых часто выбирают ортогональную сетку прямых, параллельных координатным осям, или используются полярные координаты и изучаются образы концентрических окружностей и лучей, выходящих из начала координат.

**Степенная функция.**

Пусть $\alpha > 0$. В области $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ можно выделить регулярную ветвь логарифма и регулярную ветвь многозначной функции $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$. Выделение этих ветвей, по существу, сводится к определению в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ветви $\arg z$. Будем считать, что ветвь $\arg z$ выделена. Тогда для $w = z^\alpha$ будут выполняться равенства

$$|w| = |z|^\alpha, \qquad \arg w = \alpha \cdot \arg z.$$

Отсюда сразу же следует, что дуги, расположенные на концентрических окружностях с центром в начале координат, переводятся в дуги этого же семейства, а лучи, выходящие из начала координат, взаимно однозначно отображаются на такие же лучи. При этом луч, выходящий из начала координат под углом $\theta$ к положительному направлению вещественной оси, переводится в луч, который в $w$-плоскости выходит под углом $\alpha\theta$.

Таким образом, если $0 < \alpha < 1$, то степенная функция однолистно отображает область $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ на угловой сектор раствора $\alpha \cdot 2\pi$. В случае $\alpha > 1$ степенная функция не является однолистной в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Однако она будет однолистной в любом угловом секторе раствора $2\pi/\alpha$. Из равенства

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dz} e^{\alpha \ln z} = \alpha \frac{w}{z}$$

следует, что степенная функция определяет конформное отображение во всех точках области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

**Экспоненциальная функция.**

Рассмотрим отображающие свойства функции $w = e^z$. Если $z = x + iy$, то $w = e^x e^{iy}$, откуда видно, что прямая $z = x + iy_0$, $-\infty < x < \infty$, взаимно однозначно отображается на луч $w = e^x e^{iy_0}$, $-\infty < x < \infty$, который выходит из начала координат и образует с положительным направлением вещественной оси угол, равный $y_0$. Прямые, параллельные мнимой оси, отображаются на окружности с центром в начале координат. При этом каждая точка окружности является бесконечно-кратной, поскольку функция $e^z$ имеет период $2\pi i$. Всякая другая прямая в $z$-плоскости переходит в логарифмическую спираль в $w$-плоскости. Областью однолистности экспоненциальной функции является всякая горизонтальная полоса, имеющая ширину, не превышающую $2\pi$. В частности, горизонтальная полоса $\{z \colon y_1 < \operatorname{Im} z < y_2\}$ при $y_2 - y_1 < 2\pi$ однолистно отображается на сектор $\{w \colon y_1 < \arg w < y_2\}$, который в случае $y_2 - y_1 = \pi$ является полуплоскостью. Поскольку

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z \neq 0,$$

то отображение, осуществляемое экспоненциальной функцией, конформно в каждой точке.

**Функция Жуковского.**

Рациональная функция

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

называется функцией Жуковского. Ее название обусловлено тем, что эту функцию Жуковский применил для аэродинамического расчета крыла самолета. Она имеет два простых полюса в точках $z = 0$ и $z = \infty$. Поскольку

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right),$$

то отображение, осуществляемое функцией Жуковского, конформно во всех точках расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, за исключением двух точек $z = \pm 1$. Конформность в точках $z = 0$ и $z = \infty$ следует из того, что в этих точках функция имеет простые полюсы.

Выясним теперь, каким свойством должна обладать область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, чтобы функция Жуковского была в ней однолистна. Пусть $z_1, z_2$ — произвольные две точки в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Из равенства

$$\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) - \left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) = (z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right)$$

видно, что $D$ является областью однолистности функции Жуковского в том и только том случае, если она не содержит пары точек $z_1, z_2$, для которых $z_1 z_2 = 1$. Простейшими такими областями являются внутренность и внешность единичного круга, а также верхняя и нижняя полуплоскости.

Для более полного представления о характере отображения, осуществляемого функцией Жуковского, положим $z = re^{i\theta}$ и $w = u + iv$. Другими словами, в $z$-плоскости мы рассматриваем полярные координаты, а в $w$-плоскости декартовы. Тогда

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta, \qquad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

Из этих равенств следует, что окружность $|z| = r$, $r \neq 1$, переходит в эллипс с полуосями

$$a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \qquad b = \frac{1}{2}\left|r - \frac{1}{r}\right|$$

и фокусами в точках $w = \pm 1$. Действительно,

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

и $c^2 = a^2 - b^2 = 1$ (т. е. $(-c, 0), (c, 0)$ — фокусы эллипса). При этом положительному обходу точкой $z$ окружности $|z| = r$ при $r > 1$ соответствует положительный обход эллипса точкой $w$, а в случае $r < 1$ обход эллипса осуществляется в противоположном направлении. Кроме того, окружностям $|z| = r$ и $|z| = 1/r$ соответствует в $w$-плоскости один и тот же эллипс. Единичная окружность $|z| = 1$ переходит в отрезок $[-1, 1]$, который обходится дважды. К этому отрезку стягиваются эллипсы, которые являются образами окружностей $|z| = r$ при $r \to 1$.

Пусть теперь $\theta \in (0, \pi/2)$ фиксировано, а $r$ меняется от 0 до $+\infty$. Тогда для всех $w$, соответствующих точкам этого луча, будет выполняться равенство

$$\frac{u^2}{\cos^2\theta} - \frac{v^2}{\sin^2\theta} = 1,$$

т. е. точки $w$ находятся на гиперболе с теми же фокусами $w = \pm 1$. Легко видеть, что когда $r$ меняется от 0 до $\infty$, точка $w$ движется по правой ветви гиперболы снизу — вверх. Если изменить знак $\theta$, т. е. взять его из интервала $(-\pi/2, 0)$, то образом этого луча будет та же ветвь гиперболы, но с противоположным обходом. Лучи, выходящие из начала координат под углом $\theta \in (\pi/2, \pi)$ к положительному направлению вещественной оси, отображаются на левые ветви гипербол, которые обходятся снизу — вверх. Смена знака $\theta$ и в этом случае приводит лишь к смене направления обхода ветви гиперболы. Отметим также, что $v = \pm \operatorname{tg}\theta \cdot u$ — уравнения асимптот гиперболы.

Образом луча, соответствующего $\theta = 0$, является луч $[1, \infty)$, который обходится дважды. Аналогично, образом луча, соответствующего значению $\theta = \pi$, является луч $(-\infty, -1]$, который также обходится дважды. Для лучей с направлением $\theta = \pm\pi/2$ образами является мнимая ось с противоположными обходами.

В силу конформности отображения, осуществляемого функцией Жуковского, семейство эллипсов (образов окружностей) и семейство гипербол (образов лучей) образуют ортогональную сетку в $w$-плоскости.

Из приведенных выше рассуждений видно, что функция Жуковского конформно отображает внутренность, а также и внешность, единичного круга на $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$. Верхняя и нижняя полуплоскости конформно отображаются на плоскость с двумя разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$.

Круговое свойство дробно-линейных преобразований позволяет конформно отобразить любой круг (или полуплоскость) на область, ограниченную окружностью в $\overline{\mathbb{C}}$. Оказывается, что дробно-линейными преобразованиями и исчерпываются все конформные отображения одной круговой области на другую.

Теорема 13.4. *Совокупность всех конформных (голоморфных и однолистных) отображений $f$ единичного круга $\mathbb{D}$ на себя описываются формулой*

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \tag{13.5}$$

*где $a \in \mathbb{D}$, $\theta \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Выясним вначале вид дробно-линейного преобразования $L$, которое отображает $\mathbb{D}$ на себя, т. е. $L(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. При этом отображении единичная окружность $\mathbb{T}$ должна перейти в себя. Пусть $a \in \mathbb{D}$ — точка, которая переходит в начало координат $L(a) = 0$. В силу принципа симметрии точка $a^* = 1/\overline{a}$ перейдет в бесконечно удаленную точку. Таким образом, определились нули числителя и знаменателя дробно-линейного преобразования $L$, а с ним и вид отображения

$$L(z) = A\frac{z-a}{z-1/\overline{a}} = \varkappa\frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

Поскольку при $z \in \mathbb{T}$

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = \left|\frac{z-a}{\overline{z}-\overline{a}}\right| = 1,$$

то $|\varkappa| = 1$ или $\varkappa = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Кроме того, всякое отображение вида (13.5) осуществляет конформное отображение $\mathbb{D}$ на себя, поскольку является дробно-линейным преобразованием, которое переводит единичную окружность на себя, а точку $a$ из $\mathbb{D}$ переводит в начало координат.

Допустим теперь, что $f\colon \mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$ — произвольное конформное отображение $\mathbb{D}$ на себя, и пусть $f(0) = a$, $a \in \mathbb{D}$. Рассмотрим дробно-линейное преобразование

$$L(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$

которое отображает $\mathbb{D}$ на себя и переводит точку $a$ в начало координат. Тогда $\varphi(z) = L \circ f(z)$ также конформно отображает $\mathbb{D}$ на себя и $\varphi(0) = 0$. По лемме Шварца

$$|\varphi(z)| \leqslant |z|$$

для всех $z \in \mathbb{D}$. С другой стороны, $\varphi^{-1}$ также удовлетворяет условиям леммы Шварца и потому

$$|\varphi^{-1}(w)| \leqslant |w|$$

для всех $w \in \mathbb{D}$. Полагая в этом неравенстве $w = \varphi(z)$, получаем

$$|z| \leqslant |\varphi(z)|,$$

что вместе с предыдущим неравенством приводит к тождеству $|\varphi(z)| \equiv |z|$. В силу леммы Шварца тогда $\varphi(z) \equiv \varkappa z$, где $|\varkappa| = 1$. Следовательно,

$$L \circ f(z) \equiv \varkappa z \qquad \text{и} \qquad f(z) = L^{-1}(\varkappa z),$$

т. е. $f$ является дробно-линейным преобразованием. □

Аналогично можно найти общий вид конформного отображения верхней полуплоскости на единичный круг. Снова ими будут лишь дробно-линейные преобразования. Пусть $w = L(z)$ — дробно-линейное преобразование, отображающее верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на единичный круг $|w| < 1$. Пусть $A \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} A > 0$, — точка, которая переходит в начало координат, т. е. $L(A) = 0$. Тогда, поскольку $L(\mathbb{R}) = \mathbb{T}$, то симметричная точка $\overline{A}$ должна перейти в бесконечно удаленную точку. Следовательно, $L$ должна иметь вид

$$L(z) = \varkappa\frac{z-A}{z-\overline{A}}.$$

Поскольку $|x - A| = |x - \overline{A}|$ при $x \in \mathbb{R}$, то условие соответствия вещественной оси и единичной окружности приводит к равенству $|\varkappa| = 1$. Таким образом, общий вид конформного отображения верхней полуплоскости на единичный круг определяется формулой

$$L(z) = e^{i\theta}\frac{z-A}{z-\overline{A}},$$

где $\theta \in \mathbb{R}$ и $\operatorname{Im} A > 0$.

В геометрически ориентированной части теории аналитических функций проблема конформного отображения играет доминирующую роль. Теоремы существования и единственности позволяют определить аналитическую функцию с важными свойствами, минуя ее аналитическую запись.

В 1851 г. Риман объявил о фундаментальной теореме, согласно которой каждую односвязную область, отличную от всей плоскости, можно конформно отобразить на единичный круг. Однако его доказательство оказалось не лишенным недостатков, на которые обращал внимание Вейерштрасс. Около половины века понадобилось для отыскания строгого доказательства этой теоремы. Одним из первых его получил Кебе. Ниже мы приведем доказательство теоремы Римана, близкое к предложенному Кебе.

В силу теоремы Лиувилля не существует конформного отображения всей плоскости на единичный круг.

Теорема 13.5 (Римана). *Пусть $D$ — односвязная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $D \neq \mathbb{C}$. Допустим также, что $z_0$ — точка области $D$. Тогда существует единственная голоморфная и однолистная в $D$ функция $f$, которая отображает $D$ на единичный круг $\mathbb{D}$ и удовлетворяет условиям $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$.*

Доказательство. Докажем вначале единственность. Допустим, что две функции $f_1$ и $f_2$ удовлетворяют условиям теоремы. Тогда функция $\zeta = \varphi(w) = f_2 \circ f_1^{-1}(w)$ будет конформно отображать единичный круг $\mathbb{D}$ на себя и $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$. Как следует из предыдущей теоремы, $\varphi$ должна определяться формулой

$$\varphi(w) = e^{i\theta}\frac{w-a}{1-\overline{a}w}.$$

Однако, поскольку $\varphi(0) = 0$, то $a = 0$, а условие $\varphi'(0) > 0$ приводит к тождеству $\varphi(w) \equiv w$. Но тогда, подставляя $w = f_1(z)$ в равенство

$$f_2 \circ f_1^{-1}(w) \equiv w,$$

получаем $f_2(z) \equiv f_1(z)$ и единственность отображения доказана.

Для доказательства существования отображающей функции $f$ введем в рассмотрение класс $\mathcal{F}$ однолистных в области $D$ функций $g$, которые удовлетворяют условиям: $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) > 0$ и $|g(z)| < 1$ при $z \in D$, т. е. $g(D) \subset \mathbb{D}$. Покажем вначале непустоту введенного класса функций. По условиям теоремы $D \neq \mathbb{C}$. Поэтому найдется $a \in \mathbb{C} \setminus D$. В силу того, что $D$ является односвязной областью и $z - a$ не обращается в нуль в $D$, можно в области $D$ выделить регулярные ветви функций $\ln(z-a)$ и

$$Q(z) = \sqrt{z-a} = e^{\frac{1}{2}\ln(z-a)}.$$

Допустим, что для пары точек $z_1$ и $z_2$ из области $D$ выполняется одно из равенств

$$Q(z_1) = Q(z_2) \qquad \text{или} \qquad Q(z_1) = -Q(z_2).$$

Тогда после возведения в квадрат обеих частей равенства получаем $z_1 = z_2$. Это означает, что $Q$ однолистна в $D$ и $Q(D)$ не содержит пары точек, симметричных относительно начала координат. В силу принципа открытости точка $w_0 = Q(z_0)$ принадлежит области $Q(D)$ вместе с некоторой окрестностью

$\mathcal{O}_r(w_0)$. Но тогда, в силу отмеченного выше свойства области $Q(D)$, симметричная окрестность $\mathcal{O}_r(-w_0)$ должна иметь пустое пересечение с $Q(D)$. Следовательно, $|Q(z)+w_0| > r$ для всех $z \in D$, а функция

$$h(z) \;=\; \frac{r}{w_0 + Q(z)}$$

является однолистной в области $D$ и $|h(z)| < 1$ при $z \in D$. Выполняя дополнительно дробно-линейное преобразование, получаем функцию

$$g(z) \;=\; \frac{\overline{h'(z_0)}}{|h'(z_0)|}\,\frac{h(z)-h(z_0)}{1-\overline{h(z_0)}h(z)},$$

которая принадлежит семейству $\mathcal{F}$, т. е. $g(D) \subset \mathbb{D}$, $g(z_0) = 0$ и $g'(z_0) = |h'(z_0)|/(1-|h(z_0)|^2) > 0$. Таким образом непустота класса $\mathcal{F}$ доказана.

Пусть теперь

$$\alpha \;=\; \sup\{g'(z_0)\colon\; g \in \mathcal{F}\}.$$

Мы пока не исключаем возможности того, что $\alpha = +\infty$. Из определения супремума следует существование такой последовательности $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, что $f_n'(z_0) \to \alpha$ при $n \to \infty$. Поскольку семейство $\mathcal{F}$ равномерно ограничено в области $D$, то в силу принципа компактности из последовательности $\{f_n\}$ можно выделить подпоследовательность $f_{n_k}$, которая сходится локально равномерно в области $D$. Из теоремы 12.1 Вейерштрасса следует, что предельная функция $f$ подпоследовательности $f_{n_k}$ является голоморфной в $D$ и

$$f'(z_0) \;=\; \lim_{k\to\infty} f_{n_k}'(z_0) \;=\; \alpha.$$

Отсюда, в частности, следует конечность $\alpha$. По следствию 12.2 из теоремы Гурвица имеем также однолистность предельной функции $f$. Таким образом $f$ принадлежит семейству $\mathcal{F}$ и является решением поставленной выше экстремальной задачи.

Покажем теперь, что полученная функция $f$ и является конформным отображением области $D$ на единичный круг $\mathbb{D}$. Допустим противное, т. е. что $f(D) \neq \mathbb{D}$. Тогда найдется точка $w^* \in \mathbb{D} \setminus f(D)$. В односвязной области $D$ выделим регулярную ветвь

$$H(z) \;=\; \sqrt{\frac{f(z)-w^*}{1-\overline{w^*}f(z)}},$$

фиксируя некоторое значение $H(z_0) = \zeta^* \in \{(-w^*)^{1/2}\}$. Как и в случае с функцией $Q(z)$, легко проверяется однолистность функции $H(z)$. Добиться условия нормировки можно с помощью дополнительного дробно-линейного преобразования, переходя к функции

$$F(z) \;=\; \frac{\overline{H'(z_0)}}{|H'(z_0)|}\,\frac{H(z)-\zeta^*}{1-\overline{\zeta^*}H(z)}.$$

Функция $F$ принадлежит семейству $\mathcal{F}$ и

$$F'(z_0) \;=\; \frac{|H'(z_0)|}{1-|\zeta^*|^2}.$$

Дифференцируя равенство

$$(H(z))^2 = \frac{f(z) - w^*}{1 - \overline{w^*}f(z)}$$

и полагая $z = z_0$, получаем

$$2\zeta^* H'(z_0) = \alpha(1 - |w^*|^2).$$

Следовательно,

$$F'(z_0) = \frac{\alpha(1 - |w^*|^2)}{2|\zeta^*|(1 - |\zeta^*|^2)} = \frac{1 + |w^*|}{2|\zeta^*|}\alpha = \frac{1 + |\zeta^*|^2}{2|\zeta^*|}\alpha.$$

Поскольку $|\zeta^*| < 1$, то $1 + |\zeta^*|^2 > 2|\zeta^*|$, и мы получаем противоречие определению $\alpha$. □

Конформное отображение осуществляет взаимно однозначное соответствие областей, т. е. открытых множеств. Вопрос о том, при каких условиях конформное отображение можно продолжить на границу области, был решен Каратеодори. Сформулируем без доказательства один из его результатов, который часто называют *принцип соответствия границ.*

Теорема 13.6 (Каратеодори). *Пусть области $D$ и $D^*$ ограничены жордановыми кривыми $\gamma$ и $\gamma^*$. Тогда конформное отображение $f$ области $D$ на область $D^*$ можно продолжить до гомеоморфного (взаимно однозначного и непрерывного как прямого, так и обратного) отображения замкнутых областей.*

Заметим, что в силу теоремы Римана для любых двух односвязных областей, отличных от всей комплексной плоскости, существует конформное отображение одной области на другую.

## § 14. Аналитическое продолжение

Согласно теореме единственности голоморфная функция однозначно определяется ее значениями в сколь угодно малой окрестности какой-либо одной точки. Во времена Ньютона считалось, что все функции только такие, а трудности видели лишь в вычислении значений там, где исходная формула ее не определяла, т. е. в аналитическом продолжении. Основная логическая трудность, связанная с аналитическим продолжением, состоит в его неоднозначности.

До этого момента мы под функцией понимали классическое понятие, когда каждой точке области определения ставилось в соответствие только одно комплексное число. С другой стороны, при изучении логарифма и корней мы сталкивались с трудностью их определения, но преодолевали эту трудность выделением ветвей. В этом параграфе мы рассмотрим другую концепцию, которая расширяет понятие функции и также направлена на преодоление трудностей, связанных с многозначностью логарифма и корней.

**Степенные ряды.**

Вейерштрасс в построении теории аналитических функций систематически использовал степенные ряды. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ определяет голоморфную функцию $f$ в некотором круге $\mathcal{O}_{R_0}(z_0)$, радиус которого можно вычислить по коэффициентам ряда посредством формулы (3.2) Коши—Адамара. Пусть $z_1 \in \mathcal{O}_{R_0}(z_0)$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_1)^n$ — разложение в ряд Тейлора этой же функции $f$. Радиус сходимости $R_1$ этого ряда не меньше расстояния от $z_1$ до границы круга $\mathcal{O}_{R_0}(z_0)$, но может оказаться больше. Во втором случае сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_1)^n$ представляет собой голоморфную функцию $f_1$ в $\mathcal{O}_{R_1}(z_1)$, которая совпадает с $f$ на пересечении кругов $\mathcal{O}_{R_0}(z_0) \cap \mathcal{O}_{R_1}(z_1)$. Таким образом мы получаем аналитическое продолжение функции $f$ на $\mathcal{O}_{R_0}(z_0) \cup \mathcal{O}_{R_1}(z_1)$. Идея Вейерштрасса заключалась в повторении такого процесса продолжения функции и под аналитической функцией он понимал совокупность всех продолжений начальной функции $f$. Степенные ряды из этой совокупности всех продолжений рассматривались как различные формы одной и той же функции.

Теорема 3.1 дает радиус сходимости степенного ряда, но не дает никакой информации о его сходимости в граничных точках круга сходимости. Можно было бы предположить, что сходимость ряда в граничной точке как то связана с возможностью аналитического продолжения его суммы через эту точку за пределы круга сходимости. Однако это не так, в чем можно убедиться, рассмотрев следующие два примера.

Функция $f(z) = 1/(1-z)$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, но в единичном круге представляет собой сумму степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, который расходится в каждой точке единичной окружности. С другой стороны, сумма $g(z)$ степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ не может быть продолжена аналитически из единичного круга в область, содержащую точку $z = 1$, поскольку

$$g''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} z^n$$

стремится к $\infty$, когда $z \to 1$ вдоль вещественного радиуса.

Определение 14.1. Пусть $S(z)$ — сумма степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{14.1}$$

с положительным радиусом сходимости $R$. Будем говорить, что точка $z_0$ на окружности $|z| = R$ является *регулярной* точкой степенного ряда (14.1), если $S(z)$ аналитически продолжается в некоторую окрестность этой точки. В противном случае будем называть $z_0$ *особой* точкой степенного ряда (14.1).

Следующий результат известен как теорема Коши— Адамара.

Теорема 14.1. *Пусть степенной ряд (14.1) имеет положительный радиус сходимости $R$. Тогда на окружности $|z| = R$ имеется хотя бы одна особая точка.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. для каждой точки $\zeta \in \gamma_R$, $\gamma_R = \partial\mathcal{O}_R(0)$, найдется круг $U_\zeta$ с центром в точке $\zeta$ и радиусом $R_\zeta > 0$ такой, что сумма $S(z)$ ряда (14.1) аналитически продолжается в $U_\zeta \cup \mathcal{O}_R(0)$. Поскольку семейство кругов $U_\zeta$, $\zeta \in \gamma_R$, образует открытое покрытие компактного множества $\gamma_R$, то из него в силу леммы Гейне—Бореля можно выделить конечное подпокрытие $U_{\zeta_1}, \dots, U_{\zeta_n}$. Но тогда $S(z)$ аналитически продолжается в область

$$D = \mathcal{O}_R(0) \bigcup \left( \bigcup_{k=1}^{n} U_{\zeta_k} \right).$$

Это продолжение корректно определено, поскольку в случае $U_{\zeta_k} \cap U_{\zeta_l} \neq \varnothing$ также имеем

$$U_{\zeta_k} \cap U_{\zeta_l} \cap \mathcal{O}_R(0) \neq \varnothing$$

и в последнем пересечении трех кругов продолжения в $U_{\zeta_k}$ и $U_{\zeta_l}$ совпадают с $S(z)$, а по теореме единственности они совпадают и во всей области определения. В результате мы получаем, что $S(z)$ является голоморфной функцией в области $D$, которая содержит круг большего радиуса, чем $R$. Но это противоречит тому, что $R$ — радиус сходимости степенного ряда (14.1) и теорема доказана. □

Определение 14.2. Если ряд (14.1) имеет положительный радиус сходимости $R$ и каждая точка окружности $|z| = R$ является особой, то эта окружность называется *естественной границей* суммы ряда $S(z)$.

Примерами степенных рядов, для которых граница круга сходимости является естественной границей, могут служить ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

В обоих примерах все точки единичной окружности являются особыми для их суммы.

**Аналитическое продолжение вдоль пути.**

Уточним вначале терминологию.

Определение 14.3. *Функциональным элементом* или, короче, *элементом* будем называть пару $(f, U)$ где $U$ — некоторый круг, а $f$ — голоморфная в $U$ функция.

Два элемента $(f, U)$ и $(g, V)$ являются *непосредственным аналитическим продолжением* друг друга, если $U \cap V \neq \varnothing$ и $f(z) = g(z)$ при $z \in U \cap V$. Вместе $f$ и $g$ определяют голоморфную функцию в объединении кругов $U \cup V$. Поэтому также говорят, что $g$ является аналитическим продолжением функции $f$ в круг $V$. В силу теоремы единственности для аналитических функций такое продолжение единственно, если оно существует.

Допустим теперь, что $(f_1, U_1), \dots, (f_n, U_n)$ — цепочка элементов, в которой $(f_k, U_k)$ и $(f_{k-1}, U_{k-1})$ являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга при всех $k = 2, \dots, n$ В этом случае будем говорить, что $(f_n, U_n)$ является аналитическим продолжением элемента $(f_1, U_1)$ вдоль цепочки элементов.

Сразу же отметим одно важное обстоятельство. Если $(f_n, U_n)$ является аналитическим продолжением элемента $(f_1, U_1)$ вдоль некоторой цепочки элементов и $U_1 \cap U_n \neq \varnothing$, то вовсе не обязательно, чтобы $(f_1, U_1)$ и $(f_n, U_n)$ являлись непосредственным аналитическим продолжением друг друга. Например, рассмотрим круги $U_k, k = 0, 1, 2$, единичного радиуса с центрами в точках $a_k = e^{i2k\pi/3}$, а в качестве функций $f_k$ выберем регулярные ветви многозначной функции $\{\sqrt{z}\}$ в этих кругах с условиями $f_k(a_k) = e^{ik\pi/3}$. Тогда, как легко убедиться, пары элементов $(f_0, U_0), (f_1, U_1)$ и $(f_1, U_1), (f_2, U_2)$ являются непосредственными аналитическими продолжениями друг друга, но $f_0(z) \neq f_2(z)$ в пересечении $U_0 \cap U_2$.

С другой стороны, если $(f_3, U_3)$ является аналитическим продолжением элемента $(f_1, U_1)$ вдоль цепочки элементов $(f_1, U_1), (f_2, U_2), (f_3, U_3)$ и

$$U_1 \cap U_2 \cap U_3 \neq \varnothing,$$

то $(f_1, U_1), (f_3, U_3)$ должны быть непосредственным аналитическим продолжением друг друга в силу теоремы единственности.

В этом параграфе нам не нужно требование гладкости кривых (или путей). Кроме того, в качестве промежутка изменения параметра для удобства будем брать отрезок $[0, 1]$.

Определение 14.4. Пусть $\gamma$ — путь с параметризацией $z = z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Если существует такое разбиение $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ и такая цепочка элементов $(f_1, U_1), \ldots, (f_n, U_n)$, что $(f_k, U_k), (f_{k+1}, U_{k+1})$ являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга для всех $k = 1, \ldots, n-1$ и $z(t) \in U_k$ при $t \in [t_{k-1}, t_k]$ для всех $k = 1, \ldots, n$, то будем говорить, что $(f_n, U_n)$ является аналитическим продолжением элемента $(f_1, U_1)$ вдоль пути $\gamma$.

Теорема 14.2. *Пусть $(f, U)$ — элемент и $\gamma$ — путь с начальной точкой $z_0 \in U$ и конечной точкой $z_1$. Допустим, что $(f_1, U_1), \ldots, (f_n, U_n)$ и $(g_1, V_1)$, $\ldots$, $(g_m, V_m)$ — две цепочки элементов, осуществляющих аналитическое продолжение элемента $(f, U)$ вдоль пути $\gamma$. Тогда $(f_n, U_n)$ и $(g_m, V_m)$ являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга.*

Доказательство. Пусть $\gamma$: $z = z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и цепочке $(f_1, U_1)$, $\ldots$, $(f_n, U_n)$ соответствует разбиение $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, а цепочке $(g_1, V_1)$, $\ldots$, $(g_m, V_m)$ соответствует разбиение $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$. По условию $f_1(z) = f(z) = g_1(z)$ в $U = U_1 = V_1$ и точка $z(1) = z_1$ принадлежит пересечению $U_n \cap V_m$. Теорема будет доказана, если показать, что в случае, когда отрезки $[t_{i-1}, t_i]$ и $[s_{j-1}, s_j]$ имеют непустое пересечение, элементы $(f_i, U_i)$ и $(g_j, V_j)$ являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга.

Допустим противное и пусть пара индексов $(i, j)$ имеет минимальную сумму $i + j$ среди тех, которые удовлетворяют условиям: $[t_{i-1}, t_i] \cap [s_{j-1}, s_j] \neq \varnothing$ и $(f_i, U_i), (g_j, V_j)$ не являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга. Пусть для определенности $s_{j-1} \leqslant t_{i-1}$. Тогда $i \geqslant 2$ (в противном случае $t_{i-1} = s_{j-1} = 0$) и $s_j \geqslant t_{i-1}$. Следовательно,

$$z(t_{i-1}) \in U_{i-1} \cap U_i \cap V_j.$$

Но тогда $[s_{j-1}, s_j] \cap [t_{i-2}, t_{i-1}] \neq \varnothing$ и в силу свойства минимальности суммы $i+j$ элементы $(f_{i-1}, U_{i-1})$, $(g_j, V_j)$ являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга. С другой стороны, $(f_{i-1}, U_{i-1})$ и $(f_i, U_i)$ являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга по определению аналитического продолжения вдоль пути. Учитывая также, что

$$U_{i-1} \cap U_i \cap V_j \neq \varnothing,$$

приходим к заключению, что $(f_i, U_i)$ и $(g_j, V_j)$ являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Доказанная теорема показывает, что аналитическое продолжение элемента $(f, U)$ вдоль пути $\gamma$ приводит к единственной функции, голоморфной в окрестности концевой точки пути $\gamma$. Поэтому будем обозначать $f_\gamma$ эту функцию.

Определение 14.5. Пусть $D$ — область и $\gamma_0\colon\ z = \varphi_0(t)$, $\gamma_1\colon\ z = \varphi_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — два пути в $D$ с общими концами $\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = z_0$, $\varphi_0(1) = \varphi_1(1) = z_1$. Будем говорить, что $\gamma_0$ и $\gamma_1$ *гомотопны* в $D$, если существует непрерывное отображение

$$\Phi\colon\ [0,1] \times [0,1] \to D$$

такое, что $\Phi(0,t) = \varphi_0(t)$, $\Phi(1,t) = \varphi_1(t)$ для всех $t \in [0,1]$ и $\Phi(s,0) = z_0$, $\Phi(s,1) = z_1$ для всех $s \in [0,1]$. В этом случае $\Phi$ называется *гомотопией* путей $\gamma_0$ и $\gamma_1$.

Гомотопию можно рассматривать как непрерывную деформацию кривой $\gamma_0$ в кривую $\gamma_1$ в области $D$. Гомотопия осуществляет эту деформацию посредством кривых $\gamma_s\colon\ z = \Phi(s,t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Теорема 14.3. *Любые два пути с общими концевыми точками в односвязной области гомотопны.*

Доказательство. Пусть $\gamma_0\colon\ z = \varphi_0(t)$, $\gamma_1\colon\ z = \varphi_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — два пути в $D$ с общими концевыми точками $\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = z_0$ и $\varphi_0(1) = \varphi_1(1) = z_1$. Допустим вначале, что $D$ — выпуклая область. Тогда гомотопия $\Phi$ может быть определена равенством

$$\Phi(s,t) = (1-s)\varphi_0(t) + s\varphi_1(t).$$

В случае произвольной односвязной области $D$ можно посредством конформного отображения $f$, которое существует в силу теоремы 13.5 Римана, отобразить $D$ на единичный круг $\mathbb{D}$. Образы $f(\gamma_0)$ и $f(\gamma_1)$ можно гомотопировать, поскольку $\mathbb{D}$ является выпуклой областью. Затем гомотопию путей $f(\gamma_0)$ и $f(\gamma_1)$ перевести обратным отображением $f^{-1}$ в гомотопию $\gamma_0$ и $\gamma_1$. □

Теорема 14.4. *Пусть $D$ — область в $\mathbb{C}$ и $\gamma_0$, $\gamma_1$ — пути с общими концами $z_0$ и $z_1$, гомотопные в $D$. Допустим также, что элемент $(f, U)$, $U \subset D$, $z_0 \in U$, аналитически продолжается вдоль каждого пути $\gamma_s$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, которые определяет гомотопия. Тогда результаты продолжения элемента $(f, U)$ вдоль путей $\gamma_0$ и $\gamma_1$ совпадают, т. е. $f_{\gamma_0}(z) = f_{\gamma_1}(z)$ в некоторой окрестности точки $z_1$.*

Доказательство. Пусть $\Phi\colon [0,1]\times[0,1] \to D$ — гомотопия путей $\gamma_0$ и $\gamma_1$. Как и выше, через $\gamma_s$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, будем обозначать путь с параметризацией $z = \Phi(s,t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Покажем, что для каждого $s_0 \in [0,1]$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех $s \in [0,1]$, удовлетворяющих неравенству $|s - s_0| < \delta$, аналитические продолжения элемента $(f,U)$ вдоль путей $\gamma_s$ совпадают с аналитическим продолжением вдоль $\gamma_{s_0}$ т. е. $f_{\gamma_s}(z) = f_{\gamma_{s_0}}(z)$ в некоторой окрестности точки $z_1$.

Допустим, что $(f_1,U_1),\ldots,(f_n,U_n)$ — цепочка элементов, осуществляющая аналитическое продолжение $(f,U)$ вдоль пути $\gamma_{s_0}$, т. е. $U_1 = U$, $f_1(z) = f(z)$ при $z \in U$ и $z_1 \in U_n$. Пусть также $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ — разбиение отрезка $[0,1]$, при котором

$$Q_k = \{z = \Phi(s_0,t)\colon\ t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k\}$$

содержится в круге $U_k$, $k = 1,\ldots,n$. Поскольку $Q_k$, $k = 1,\ldots,n$, являются компактными множествами, то

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n} \operatorname{dist}(Q_k,\partial U_k) = \varepsilon > 0.$$

В силу непрерывности функции $\Phi$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|\Phi(s,t) - \Phi(s_0,t)| < \varepsilon$$

при всех $t \in [0,1]$ и $|s - s_0| < \delta$. В частности, для всех $k = 1,\ldots,n$ и $s$, $|s - s_0| < \delta$, будет выполняться условие $\Phi(s,t) \in U_k$ при $t \in [t_{k-1},t_k]$. Это означает, что цепочка элементов $(f_1,U_1),\ldots,(f_n,U_n)$ осуществляет аналитическое продолжение $(f,U)$ и вдоль пути $\gamma_s$, т. е. $f_{\gamma_s}(z) = f_{\gamma_{s_0}}(z)$ при $z \in U_n$ и $|s - s_0| < \delta$.

Пусть теперь

$$G_1 = \{s \in [0,1]\colon\ f_{\gamma_s}(z) = f_{\gamma_0}(z) \text{ в некоторой окрестности точки } z_1\},$$

а $G_2 = [0,1] \setminus G_1$. По доказанному, если $s_1 \in G_1$, то найдется $\delta_1 > 0$ такое, что $s \in G_1$ при $|s - s_1| < \delta_1$. Аналогично, если $s_2 \in G_2$, то найдется $\delta_2 > 0$ такое, что $s \in G_2$ при $|s - s_2| < \delta_2$. В силу связности отрезка $[0,1]$ одно из множеств $G_1$ или $G_2$ должно быть пустым. Поскольку $0 \in G_1$, то $G_2 = \varnothing$ и $f_{\gamma_1}(z) = f_{\gamma_0}(z)$ в некоторой окрестности точки $z_1$. □

Будем говорить, что два элемента $(f_1,U_1)$ и $(f_2,U_2)$ *эквивалентны*, если один из другого получается аналитическим продолжением (вдоль некоторого пути). Очевидно, что такое определение эквивалентности является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Класс эквивалентности $\mathbb{F}$ элементов будем называть *полной аналитической функцией*. Любой элемент $(f,U)$ из $\mathbb{F}$ определяет весь класс эквивалентности посредством аналитического продолжения.

Допустим теперь, что $D$ — некоторая область и в ней определена голоморфная функция $f$. Если круг $U$ содержится в $D$, то продолжения элемента $(f,U)$ вдоль любого пути $\gamma$ в $D$ приводит к той же функции $f$. В этом случае можно сказать, что элемент $(f,U)$ выделяет в $D$ ветвь полной аналитической функции $\mathbb{F}$.

ТЕОРЕМА 14.5. *Пусть $D$ — односвязная область и $(f, U)$ — элемент, который аналитически продолжается вдоль любого пути в области $D$. Тогда существует единственная голоморфная в $D$ функция, которая совпадает с $f$ в $U$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_0$ — центр круга $U$ и $\gamma_z$ — путь в $D$ с началом в точке $z_0$ и концом в $z \in D$. Через $g(z)$ обозначим продолжение $f_{\gamma_z}(z)$ элемента $(f, U)$ вдоль пути $\gamma_z$. Из предыдущей теоремы следует, что $g(z)$ не зависит от выбора пути $\gamma_z$. Таким образом, функция $g$ корректно определена, голоморфна в $D$ и $g(z) = f(z)$ при $z \in U$. □

ЗАМЕЧАНИЕ 14.1. Эта теорема (а также предыдущая) называется *теоремой о монодромии.* Ее содержание можно сформулировать также следующим образом. Полная аналитическая функция, которая допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути в односвязной области $D$, определяет в $D$ ветвь, выделяемую некоторым элементом.

Для полной аналитической функции возникает новый тип изолированных особых точек по сравнению с теми, которые были изучены для однозначных функций, т.е. ветвей. Точка $a$ называется изолированной особой точкой полной аналитической функции $\mathbb{F}$, если существует проколотая окрестность $\dot{O}_r(a)$ и элемент $(f, U)$, $U \subset \dot{O}_r(a)$, этой функции, который продолжается вдоль любого пути в $\dot{O}_r(a)$. Пусть $0 < \varrho < r$ и $\gamma_\varrho$ — окружность с центром в точке $a$. Допустим также, что $z_0 \in \gamma_\varrho \cap U$. Тогда при продолжении начального элемента вдоль пути $\gamma_\varrho$ после ее обхода можем в результате получить тот же элемент. В этом случае точка $a$ называется *особой точкой однозначного характера.* Если обход $\gamma_\varrho$ приводит к элементу, отличному от исходного, то $a$ называется *точкой ветвления.* В первом случае можно показать, что в окрестности $\dot{O}_r(a)$ выделяется ветвь функции $\mathbb{F}$. Во втором случае возможны два варианта. Существует целое число $n \geqslant 2$ такое, что $n$-кратный обход $\gamma_\varrho$ в одном направлении приводит к исходному элементу. Тогда точка $a$ называется точкой ветвления *конечного порядка*, а наименьшее из чисел $n$, обладающих этим свойством, называется *порядком ветвления.* Если же обходы в одном направлении приводят каждый раз к новым элементам, то $a$ называется точкой ветвления *бесконечного порядка* или *логарифмической* точкой ветвления.

**Принцип симметрии Римана— Шварца.**

Рассмотрим теперь специальный случай аналитического продолжения, когда области $D_1$ и $D_2$ не пересекаются, а имеют общий участок границы. Предварительно установим один результат, который иногда называют „теорема о стирании разреза“.

ЛЕММА 14.1. *Пусть область $D$ и прямая $L$ такие, что $D \cap L = I \neq \varnothing$. Допустим также, что функция $f$ непрерывна в $D$ и голоморфна на $D \setminus I$. Тогда $f$ является голоморфной и во всей области $D$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку свойство голоморфности является локальным, то для доказательства леммы достаточно установить голоморфность $f$ в точках множества $I$, которое представляет собой систему непересекающихся интервалов на прямой $L$. Пусть $a$ — произвольная точка множества $I$ и

$\mathcal{O}_r(a) \subset D$. По предположению $f$ непрерывна в $\mathcal{O}_r(a)$. Поэтому в силу теоремы Морера голоморфность $f$ будет доказана, если установить равенство нулю интегралов от функции $f$ по границе каждого треугольника, расположенного в $\mathcal{O}_r(a)$. Заметим, что прямая $L$ пересекает круг $\mathcal{O}_r(a)$ по диаметру и делит его на два полукруга $U^+$ и $U^-$.

Пусть теперь $\Delta$ — треугольник, который вместе с замыканием содержится в $\mathcal{O}_r(a)$. Если $\Delta$ полностью содержится в $U^+$ или $U^-$, то равенство

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

следует из теоремы Коши. Пусть $\Delta^+ = \Delta \cap U^+$ и $\Delta^- = \Delta \cap U^-$. Тогда

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta^+} f(z)dz + \int_{\partial\Delta^-} f(z)dz.$$

Однако, интегралы в правой части равенства равны нулю по теореме Коши и лемма доказана. □

Следующий результат известен как *принцип симметрии Римана— Шварца.*

Теорема 14.6. *Пусть $D$ — область, симметричная относительно вещественной оси, и $D^+ = \{z \in D\colon\ \operatorname{Im} z > 0\}$, $D^- = \{z \in D\colon\ \operatorname{Im} z < 0\}$, $I = D \cap \mathbb{R}$. Допустим, что $f$ является непрерывной на $D^+ \cup I$, голоморфной в $D^+$ и принимает вещественные значения на $I$. Тогда она имеет аналитическое продолжение во всю область $D$, где удовлетворяет соотношению симметрии*

$$f(z) = \overline{f(\overline{z})}.$$

Доказательство. Определим в области $D$ функцию $F$ посредством равенств

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & \text{если} \quad z \in D^+ \cup I, \\ \overline{f(\overline{z})}, & \text{если} \quad z \in D^-. \end{cases}$$

Теорема будет доказана, если мы установим голоморфность функции $F$ в области $D$. Голоморфность $F$ в $D^+$ следует из ее определения и предположений теоремы. Пусть $z_0 \in D^-$ и $r > 0$ такое, что $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D^-$. Тогда в $\mathcal{O}_r(z_0)$ функция $F$ определяется по нижней формуле и

$$\lim_{z\to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\overline{f(\overline{z})} - \overline{f(\overline{z_0})}}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \overline{\left(\frac{f(\overline{z}) - f(\overline{z_0})}{\overline{z} - \overline{z_0}}\right)} = \overline{f'(\overline{z_0})}.$$

Таким образом, $F$ голоморфна в $D \setminus I$.

Покажем, что $F$ непрерывна в $D$. Для этого остается проверить непрерывность в точках на $I$. Пусть $x_0 \in I$ и $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности $f$ на $D^+ \cup I$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(z) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $z \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \cap [D^+ \cup I]$. Но тогда для $z \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \cap D^-$ будем иметь $\overline{z} \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \cap D^+$ и в силу вещественности значения $f(x_0)$ получаем

$$|F(z) - f(x_0)| = |\overline{f(\overline{z})} - f(x_0)| = |f(\overline{z}) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Поскольку $x_0 \in I$ и $\varepsilon > 0$ выбирались произвольно, то непрерывность $F$ на $I$, а, следовательно, и в $D$ доказана. Утверждение о голоморфности $F$ в области $D$ следует из леммы. □

Доказанная теорема имеет очевидные обобщения в связи с тем, что любые две окружности $C_1$ и $C_2$ в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ можно отобразить друг на друга с помощью дробно-линейного преобразования. Область $D$ можно выбирать симметричной относительно окружности $C_1$, а в качестве $I$ тогда будет выступать пересечение $C_1 \cap D$. Если функция $f$ голоморфна в части $D^+$ области $D$, которая расположена внутри круга, ограниченного $C_1$, непрерывна на $D^+ \cup I$ и принимает значения $f(z) \in C_2$, когда $z \in I$, то ее можно продолжить аналитически во всю область $D$. При этом пары точек $z_1, z_2$, симметричных относительно $C_1$, будут переходить в пары точек $f(z_1), f(z_2)$ симметричных относительно $C_2$. Принцип симметрии Римана—Шварца часто используется для построения конформных отображений.

## § 15. Мероморфные функции

В конце параграфа 5 мы рассмотрели некоторые свойства целых функций, т. е. таких, которые голоморфны во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Определение 15.1. Функция $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называется мероморфной, если она голоморфна в $\mathbb{C}$, за исключением, быть может, изолированных особых точек, являющихся полюсами.

Заметим, что целые функции составляют подкласс класса мероморфных функций. Другой важный подкласс мероморфных функций образуют рациональные функции. Отметим некоторые важные свойства рациональных функций.

Пусть $P(z) = a_m z^m + \ldots + a_0$, $a_m \neq 0$, — полином степени $m$ и $Q(z) = b_n z^n + \ldots + b_0$, $b_n \neq 0$, — полином степени $n$. Допустим также, что $P(z)$ и $Q(z)$ не имеют общих множителей, а следовательно, общих нулей. Тогда наибольшее из чисел $m$ и $n$ будем называть *порядком* рациональной функции $P(z)/Q(z)$. Нули полинома $P(z)$ являются нулями и функции $R(z)$ с теми же кратностями, а нули полинома $Q(z)$ представляют собой полюсы функции $R(z)$ также с теми же кратностями. Кроме того, из представления

$$R(z) = \frac{z^m}{z^n} \frac{a_m + a_{m-1}/z + \ldots + a_0/z^m}{b_n + b_{n-1}/z + \ldots + b_0/z^n} = z^{m-n} R_1(z),$$

где $R_1(z) \to a_m/b_n \neq 0$ при $z \to \infty$, видно, что $z = \infty$ является нулём функции $R$ кратности $n - m$, если $m < n$. В случае $m > n$ в точке $z = \infty$ функция $R$ имеет полюс кратности $m - n$. Случай $m = n$ соответствует устранимой особой точке в $z = \infty$ и эта точка не является нулём функции $R$. Таким образом, рациональная функция имеет одинаковое число нулей и полюсов в $\overline{\mathbb{C}}$ с учётом их кратности. Это число совпадает с порядком рациональной функции.

Пусть теперь $A$ — произвольное комплексное число. Тогда рациональная функция $R(z) - A$ имеет то же число полюсов в $\overline{\mathbb{C}}$ (они просто совпадают), что и $R(z)$. Следовательно, порядки этих рациональных функций совпадают и функция $R(z) - A$ имеет в $\overline{\mathbb{C}}$ ровно $k$ нулей с учётом их кратности, где $k$ — порядок рациональной функции $R(z)$. Другими словами, всякая рациональная функция $R(z)$ порядка $k$ имеет в $\overline{\mathbb{C}}$ ровно $k$ нулей и $k$ полюсов, а также каждое уравнение $R(z) = A$ имеет в точности $k$ корней.

**15.1. Теорема Миттаг–Леффлера.** Возвращаясь к общему классу мероморфных функций, заметим, что в каждом круге $|z| \leqslant R$ мероморфная функция может иметь лишь конечное число полюсов. В противном случае нашлась бы предельная точка полюсов. Накапливаться полюсы мероморфной функции могут лишь к бесконечно удалённой точке. Допустим теперь, что $f$ и $g$ — две мероморфные функции, имеющие одни и те же полюсы с одинаковыми главными частями разложений в ряды Лорана в окрестностях этих полюсов. Тогда разность $f(z) - g(z)$ будет целой функцией. Это наблюдение приводит к следующему выводу. Общий вид мероморфной функции с заданными главными частями представляет собой сумму произвольной целой функции и некоторой мероморфной функции с заданными главными частями. Например, совокупность мероморфных функций, имеющих простые полюсы с вычетом 1 в каждой точке $z = n$, $n \in \mathbb{Z}$, описывается формулой

$$f(z) = \pi \operatorname{ctg} \pi z + h(z),$$

где $h$ — целая функция.

Заметим, что главная часть мероморфной функции в полюсе $z = a$, $a \in \mathbb{C}$, имеет вид $P(1/(z-a))$, где $P(z)$ — полином с нулевым свободным членом, т. е. $P(0) = 0$. Вопрос построения мероморфной функции с конечным числом полюсов $a_1, \dots, a_n$, в которых функция имела бы главные части

$$P_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), \dots, P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right),$$

легко решается. Сумма

$$\sum_{k=1}^{n} P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$$

представляет собой мероморфную функцию с требуемыми свойствами. Суммируя ее с произвольной целой функцией, получаем общий вид решения поставленной задачи.

Сложнее обстоит дело в случае бесконечного числа полюсов. В рассмотренном выше примере мероморфных функций с простыми полюсами в точках $z = n$, $n \in \mathbb{Z}$, ряд из главных частей

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-n}$$

не сходится ни в одной точке комплексной плоскости. Это означает, что мы должны преобразовать ряд из главных частей так, чтобы он стал сходящимся.

Определение 15.2. Ряд из мероморфных функций будем называть сходящимся локально равномерно, если для любого компактного множества $K$, $K \subset \mathbb{C}$, лишь конечное число членов ряда имеет полюсы на $K$, а после их удаления остаток ряда сходится равномерно на $K$.

Следующий результат известен как теорема Миттаг—Леффлера.

Теорема 15.1. *Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных точек, не имеющая ни одной предельной точки в $\mathbb{C}$, а $\{P_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность полиномов без свободных членов. Тогда существует мероморфная функция $f(z)$, которая имеет главные части $P_k(1/(z-a_k))$ в точках $a_k$, $k = 1, 2, \ldots$, и не имеет других особых точек в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Занумеруем точки последовательности полюсов так, чтобы выполнялись неравенства

$$|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant |a_3| \leqslant \ldots.$$

Допустим вначале, что $a_1 \neq 0$, и выберем положительные числа $\alpha_k$, $k = 1, 2, \ldots$, так, чтобы сходился ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$. Поскольку главная часть $P_k(1/(z-a_k))$ является голоморфной функцией в круге $\mathcal{O}_{|a_k|}(0)$, то ее ряд Тейлора

$$P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} z^n$$

сходится в $\mathcal{O}_{|a_k|}(0)$ и сходится абсолютно и равномерно в круге $|z| \leqslant |a_k|/2$. Пусть

$$Q_k(z) = \sum_{n=0}^{n_k} c_n^{(k)} z^n$$

— его частичная сумма, где номер $n_k$ выбран так, что

$$\max_{|z| \leqslant \frac{|a_k|}{2}} \left| P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) - Q_k(z) \right| < \alpha_k.$$

Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) - Q_k(z) \right]. \tag{15.1}$$

Фиксируем $R > 0$ и разобьем этот ряд на две части

$$\sum_{k:\ |a_k| \leqslant 2R} \left[ P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) - Q_k(z) \right] + \sum_{k:\ |a_k| > 2R} \left[ P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) - Q_k(z) \right].$$

Заметим, что для всех номеров $k$, удовлетворяющих условию $|a_k| > 2R$, функции $P_k(1/(z-a_k))$ голоморфны в $\mathcal{O}_{2R}(0)$ и

$$\max_{|z| \leqslant R} \left| P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) - Q_k(z) \right| < \alpha_k,$$

поскольку $R < |a_k|/2$. Следовательно, остаток ряда сходится равномерно и абсолютно в круге $|z| \leqslant R$, а потому представляет собой голоморфную в $\mathcal{O}_R(0)$ функцию. Конечная сумма является рациональной функцией и в круге $\mathcal{O}_R(0)$ имеет требуемые полюса с заданными главными частями.

Поскольку $R$ выбиралось произвольным образом, то ряд (15.1) сходится локально равномерно. Его сумма имеет требуемое поведение в $\mathbb{C}$, за исключением возможно лишь в начале координат. Добавляя к этой сумме главную часть в $z = 0$, получаем требуемую мероморфную функцию. □

В качестве первого примера рассмотрим мероморфную функцию $\pi^2/\sin^2 \pi z$, которая имеет двойные полюсы в точках $z = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Главной частью разложения в ряд Лорана в окрестности точки $z = n$ является $1/(z-n)^2$. Поскольку ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 1/(z-n)^2$ сходится локально равномерно, то

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} + g(z),$$

где $g$ — целая функция. Покажем, что $g(z) \equiv 0$.

Прежде всего заметим, что функция $\pi^2/\sin^2 \pi z$ и сумма ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

являются периодическими с периодом 1. Поэтому функция $g(z)$ также должна иметь тот же период. Если $z = x + iy$, то

$$|\sin \pi z|^2 = \operatorname{ch}^2 \pi y - \cos^2 \pi x$$

и, следовательно, $\pi^2/\sin^2 \pi z \to 0$ при $|y| \to \infty$ равномерно по $x \in [0,1]$. Этим же свойством обладает и сумма ряда. Действительно,

$$\frac{1}{|x+iy-n|^2} \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{y^2} & \text{при}\, n = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ |y| \geqslant 1, \\[2mm] \dfrac{1}{y^2+(n-1)^2} & \text{при}\, n \neq 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ |y| \geqslant 1, \end{cases}$$

откуда видно, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \to 0 \qquad \text{при} \qquad |y| \to \infty,$$

равномерно по $x \in [0,1]$. В силу периодичности функции $g$ получаем ее ограниченность во всей комплексной плоскости. По теореме 6.1 Лиувилля $g(z) \equiv \mathrm{const}$, но поскольку $g(z) \to 0$ при $z \to \infty$, то $g(z) \equiv 0$. В результате приходим к равенству

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Вернемся теперь к мероморфной функции с простыми полюсами и вычетами 1 в целых точках. Ее главные части представляют собой функции

$$\frac{1}{z-n} = -\frac{1}{n} - \frac{z}{n^2} - \frac{z^2}{n^3} - \dots \qquad (|z| < n,\ n \neq 0,\ n \in \mathbb{Z}).$$

Добавление постоянного слагаемого $1/n$ приводит к локально равномерно сходящемуся ряду и потому корректно определена мероморфная функция

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\frac{z}{n(z-n)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}.$$

По теореме 12.1 Вейерштрасса этот ряд можно почленно дифференцировать, что приводит к равенству

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n\neq 0}\frac{1}{(z-n)^2} = \frac{d}{dz}\left(\pi \operatorname{ctg} \pi z\right).$$

Следовательно,

$$f(z) - \pi \operatorname{ctg} \pi z \equiv \text{const}.$$

Однако слева стоит нечетная функция и константа должна равняться нулю. Таким образом

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\frac{z}{n(z-n)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}.$$

Для мероморфных функций имеет место аналог теоремы Пикара: „Мероморфная функция, отличная от постоянной, принимает все комплексные значения, за исключением, быть может, двух“ . Заметим, что функция $\operatorname{tg} z$ является мероморфной и не принимает значений $\pm i$.

**15.2. Бесконечные произведения.** Целые функции образуют подмножество в классе всех мероморфных функций. Если целая функция $g$ не обращается в нуль, то в $\mathbb{C}$ выделяется регулярная ветвь $h(z) = \ln g(z)$, которая также является целой функцией. При этом $g(z) = e^{h(z)}$. Обратно, для любой целой функции $h$ равенство $g(z) = e^{h(z)}$ определяет целую функцию, которая не обращается в нуль в $\mathbb{C}$. Если теперь у двух целых функций $g_1$ и $g_2$ совпадают нули (с учетом их кратностей), то отношение $g_2(z)/g_1(z)$ будет целой функцией, не имеющей в $\mathbb{C}$ нулей. Следовательно, $g_2(z) = g_1(z)e^{h(z)}$, где $h$ — целая функция. Построение целой функции с заданными нулями естественно осуществить в виде произведения.

Определение 15.3. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность комплексных чисел. Будем говорить, что произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \tag{15.2}$$

сходится, если существует предел последовательности частичных произведений $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$. Будем также говорить что произведение (15.2) сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Предложение 15.1. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то произведение (15.2) сходится. Кроме того, абсолютно сходящееся произведение сходится к нулю в том и только том случае, если хотя бы один из множителей $(1+a_n)$ равен нулю.*

Доказательство. Допустим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, и пусть

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$$

— частичное произведение. Необходимое условие сходимости ряда влечет $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому найдется такой номер $N$, что $|a_n| < 1/2$ при $n \geqslant N$. В единичном круге $|z| < 1$ определена голоморфная функция

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n,$$

и для $k \geqslant N$ определены значения $\ln(1+a_k)$. Далее, для $n > N$ частичные произведения можно представить в виде

$$P_n = P_N \prod_{k=N+1}^{n}(1+a_k) = P_N e^{S_n},$$

где $S_n = \sum_{k=N+1}^{n}\ln(1+a_k)$. Непосредственно из разложения $\ln(1+z)$ в степенной ряд видно, что

$$|\ln(1+z)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|z|^n = \frac{|z|}{1-|z|} \leqslant 2|z|$$

при $|z| < 1/2$. Следовательно, при $k \geqslant N$ выполняются неравенства

$$|\ln(1+a_k)| \leqslant 2|a_k|,$$

что влечет существование предела

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=N+1}^{\infty}\ln(1+a_n).$$

В силу непрерывности функции $e^z$ приходим к равенству

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_N e^S,$$

из которого следует доказываемое утверждение. □

Предложение 15.2. *Пусть $\{\varphi_n\}$ — последовательность голоморфных в области $D$ функций и числовая последовательность $\{\alpha_n\}$ такие, что $\alpha_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n < \infty$ и $|\varphi_n(z) - 1| \leqslant \alpha_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и $z \in D$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

*(i) Произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\varphi_n(z)$ сходится равномерно в $D$ к некоторой голоморфной функции $\varphi(z)$.*

*(ii) Если $\varphi_n(z) \neq 0$ при всех $z \in D$ и $n = 1, 2, \ldots$, то $\varphi(z) \neq 0$ в $D$ и*

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n'(z)}{\varphi_n(z)}.$$

Доказательство. Для доказательства $(i)$ заметим, что при каждом $z \in D$ мы можем применить предыдущее предложение, положив $\varphi_n(z) = 1 + a_n(z)$, где $|a_n(z)| \leqslant \alpha_n$. Поскольку последнее неравенство выполняется для всех $z \in D$, то произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n(z))$$

сходится равномерно в $D$ к некоторой функции $\varphi(z)$. В силу теоремы Вейерштрасса $\varphi$ является голоморфной в $D$ функцией.

Для доказательства $(ii)$ фиксируем произвольно компактное подмножество $K \subset D$. Пусть $P_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(z)$ — частичное произведение. По теореме Вейерштрасса $P_n'(z) \to \varphi'(z)$ равномерно на $K$, поскольку $P_n(z) \to \varphi(z)$ локально равномерно в $D$. По предположению $\varphi_n(z) \neq 0$ при $n = 1, 2, \ldots$ и $z \in D$. Это влечет $\varphi(z) \neq 0$ при $z \in D$. Но тогда

$$\min_{z \in K} |\varphi(z)| > 0$$

и $P_n'(z)/P_n(z) \to \varphi'(z)/\varphi(z)$ равномерно на $K$. Замечая теперь, что

$$\frac{P_n'(z)}{P_n(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k'(z)}{\varphi_k(z)},$$

приходим к требуемому утверждению. □

Предложение 15.3. *Пусть $\{a_n\}$ — последовательность ненулевых комплексных чисел такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|a_n|^2$ сходится. Тогда бесконечное произведение*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n} \tag{15.3}$$

*сходится для всех $z \in \mathbb{C}$ и представляет собой целую функцию, которая обращается в нуль только в точках $a_n$.*

Доказательство. Заметим вначале, что для $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| \leqslant 1$, выполняется неравенство

$$|(1 - \zeta)e^{\zeta} - 1| \leqslant |\zeta|^2.$$

Действительно,

$$|(1-\zeta)e^{\zeta}-1| = |\zeta|^2 \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) \zeta^{n-1} \right| \leqslant |\zeta|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = |\zeta|^2.$$

Фиксируем теперь произвольно $R > 0$. В силу того, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|a_n|^2$ сходится, $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, найдется номер $N$ такой, что $R/|a_n| < 1$ при $n \geqslant N$. Но тогда для всех $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leqslant R$, и $n \geqslant N$ будут выполняться неравенства

$$\left| \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n} - 1 \right| \leqslant \frac{R^2}{|a_n|^2}.$$

Отсюда и из предложения 15.2 следует, что бесконечное произведение (15.3) сходится и представляет собой голоморфную в круге $|z| < R$ функцию. Поскольку $R > 0$ выбиралось произвольным, то произведение (15.3) является целой функцией, которая обращается в нуль только в точках $a_n$, $n = 1, 2, \ldots$. □

В качестве приложения полученных результатов докажем равенство

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \tag{15.4}$$

Доказательство. Для удобства введем обозначения

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}, \qquad g(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ сходится, то в силу предложения 15.2 произведение $g(z)$ является целой функцией и

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

С другой стороны, $f'(z)/f(z) = \pi \operatorname{ctg} \pi z$ и, учитывая представление для $\pi \operatorname{ctg} \pi z$, приходим к равенству

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f(z)}{g(z)} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}\right) = 0.$$

Таким образом, $f(z) = cg(z)$, где $c$ — некоторое число. Однако

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{g(z)}{z} = 1$$

и равенство (15.4) доказано. □

**15.3. Гамма–функция.** Продолжение функции $n!$ с множества целых неотрицательных чисел на более широкое числовое множество рассматривали многие математики. Два способа расширения факториала, предложенные Эйлером, приводят к так называемой гамма–функции. Если определить $\Gamma(n) = (n-1)!$, то мы получим функцию, определённую на целых положительных числах, удовлетворяющую условиям:

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Задача состоит теперь в том, чтобы определить $\Gamma(z)$ для комплексных чисел $z$ с выполнением условий

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Заметим вначале, что для любых натуральных $n$ и $k$ имеет место равенство

$$\Gamma(n+k) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)[n(n+1)\ldots(n+k-1)] = \Gamma(n)(n)_k,$$

где под $(n)_k$ понимается так называемый *сдвинутый факториал*, который определяется для любого комплексного $z$ равенством

$$(z)_k \;=\; z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+k-1).$$

Меняя ролями $n$ и $k$, получаем

$$\Gamma(n+k) \;=\; \Gamma(n)(n)_k \;=\; \Gamma(k)(k)_n,$$

откуда следует, что

$$\Gamma(k) \;=\; \frac{\Gamma(n)(n)_k}{(k)_n}.$$

При фиксированном $k$ и $n\to\infty$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(n)_k} \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n+k-1} \;=\; 1.$$

Идея Эйлера заключалась в представлении

$$\Gamma(k) \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{n^k(n-1)!}{(k)_n}$$

и заменой $k$ на $z$.

Покажем, что $\Gamma(z)$ корректно определена и представляет собой мероморфную функцию, если положить

$$\Gamma(z) \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{n^z(n-1)!}{(z)_n} \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{n^z(n-1)!}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n-1)}. \tag{15.5}$$

Преобразуем обратную величину общего члена последовательности (15.5) следующим образом

$$\begin{aligned}\frac{(z)_n}{n^z(n-1)!} \;&=\; ze^{-z\ln n}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{z}{k}\right)\\ &=\; z\exp\left\{z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\ln n\right)\right\}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}.\end{aligned}$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\ln n\right) \;=\; \gamma \;=\; 0{,}5772\ldots$$

– постоянная Эйлера, то

$$G(z) \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{(z)_n}{n^z(n-1)!} \;=\; ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k},$$

как следует из предложения 15.3, является целой функцией с простыми нулями в точках $z=0,-1,-2,\ldots$.

Таким образом, предел в (15.5) определяет мероморфную функцию с простыми полюсами в точках $z = 0, -1, -2, \ldots$. Кроме того, гамма–функцию можно определить как бесконечное произведение

$$\Gamma(z) \;=\; \frac{1}{z}e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^{-1}e^{z/n}. \tag{15.6}$$

Из (15.5) видно, что $\Gamma(1) = 1$ и

$$\Gamma(z+1) \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{n^{z+1}(n-1)!}{(z+1)_n} \;=\; z\lim_{n\to\infty}\frac{n}{z+n}\,\frac{n^z(n-1)!}{(z)_n} \;=\; z\Gamma(z),$$

т. е. $\Gamma(z)$ удовлетворяет всем требуемым условиям.

Другой подход к расширению понятия факториала связан с равенством

$$n! \;=\; \int_0^{\infty} t^n e^{-t}dt,$$

которое приводит к рассмотрению функции

$$F(z) \;=\; \int\limits_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt, \tag{15.7}$$

где $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$, $\ln t \in \mathbb{R}$. Интеграл, определяющий функцию $F(z)$, является несобственным. Поэтому вначале исследуем его на сходимость. Пусть $0 < \alpha < \beta < \infty$ и

$$\mathbb{S}(\alpha,\beta) \;=\; \{z \in \mathbb{C}\colon\; \alpha < \operatorname{Re} z < \beta\}.$$

Для $z \in \mathbb{S}(\alpha,\beta)$ и $t \in (0,\infty)$ выполняется неравенство

$$\big|t^{z-1}e^{-t}\big| \;=\; t^{\operatorname{Re} z-1}e^{-t} \;\leqslant\; M_{\alpha,\beta}(t),$$

где

$$M_{\alpha,\beta}(t) \;=\; \begin{cases} t^{\alpha-1} & \text{при} \quad 0 < t < 1,\\ t^{\beta-1}e^{-t} & \text{при} \quad 1 \leqslant t < \infty. \end{cases}$$

Поскольку интеграл $\int_0^\infty M_{\alpha,\beta}(t)dt$ сходится, то в силу критерия Коши интеграл в (15.7) сходится абсолютно и равномерно в полосе $\mathbb{S}(\alpha,\beta)$. При этом

$$F(z) \;=\; \lim_{n\to\infty}F_n(z), \qquad F_n(z) \;=\; \int\limits_{1/n}^{n} t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Далее, из непрерывности функции $\Phi(z,t) = t^{z-1}e^{-t}$ следует непрерывность $F_n(z)$ в полосе $\mathbb{S}(\alpha,\beta)$. Кроме того, если $\Delta$ — треугольник, расположенный в $\mathbb{S}(\alpha,\beta)$, и $\partial\Delta$ — его положительно ориентированная граница, то учитывая голоморфность функции $t^{z-1}$ в $\mathbb{S}(\alpha,\beta)$, получаем

$$\int\limits_{\partial\Delta} F_n(z)dz \;=\; \int\limits_{\partial\Delta}\left(\int\limits_{1/n}^{n} t^{z-1}e^{-t}dt\right)dz \;=\; \int\limits_{1/n}^{n}\left(\int\limits_{\partial\Delta} t^{z-1}dz\right)e^{-t}dt \;=\; 0.$$

Следовательно, по теореме 5.4 Морера функции $F_n$, $n = 1, 2, \ldots$, голоморфны в полосе $\mathbb{S}(\alpha, \beta)$.

Покажем теперь, что $F_n(z) \to F(z)$ при $n \to \infty$ равномерно в полосе $\mathbb{S}(\alpha, \beta)$. Пусть $m, n$ — два натуральных числа и $m < n$. Тогда для $z \in \mathbb{S}(\alpha, \beta)$ имеем

$$|F_n(z) - F_m(z)| = \left| \int\limits_{1/n}^{1/m} t^{z-1} e^{-t} dt + \int\limits_m^n t^{z-1} e^{-t} dt \right| \leqslant \int\limits_{1/n}^{1/m} M_{\alpha,\beta}(t) dt + \int\limits_m^n M_{\alpha,\beta}(t) dt.$$

Отсюда и из сходимости интеграла $\int_0^\infty M_{\alpha,\beta}(t)dt$ следует равномерная сходимость последовательности $\{F_n(z)\}$ в полосе $\mathbb{S}(\alpha, \beta)$. Но тогда по теореме 12.1 Вейерштрасса функция $F(z)$ является голоморфной в $\mathbb{S}(\alpha, \beta)$ как локально равномерный предел последовательности голоморфных функций. Поскольку в проведенных выше рассуждениях $\alpha$ и $\beta$ выбирались произвольно, то интеграл в (15.7) определяет голоморфную в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ функцию $F(z)$.

Теорема 15.2. *Для всех $z$ из правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ имеет место равенство*

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Доказательство. Поскольку функция $F(z)$ из (15.7) и гамма—функция голоморфны в правой полуплоскости, то в силу теоремы 6.3 единственности достаточно доказать равенство $F(x) = \Gamma(x)$ при $x > 1$. Фиксируем $x > 1$ и заметим, что интегрирование по частям $n+1$ раз приводит к равенству

$$\int\limits_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x \int\limits_0^1 (1-s)^n s^{x-1} ds = \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n)}.$$

Отсюда и из представления (15.5) равенство $F(x) = \Gamma(x)$ будет следовать, если показать, что

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt. \tag{15.8}$$

Пусть

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant n, \\ 0 & \text{при} \quad t > n. \end{cases}$$

Поскольку функция $\varphi_n(t)e^t$ является невозрастающей на $[0, \infty)$ (на это указывает знак производной) и принимает значение 1 при $t = 0$, то $0 \leqslant \varphi_n(t) \leqslant e^{-t}$ при $t \geqslant 0$. Следовательно, $\varphi_n(t) t^{x-1} \leqslant e^{-t} t^{x-1}$ при всех $t \geqslant 0$ и $n = 1, 2, \ldots$. Но тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_0^\infty \varphi_n(t) t^{x-1} dt = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,$$

что эквивалентно (15.8), и теорема доказана. □

**Некоторые соотношения с гамма–функцией.** Из равенства $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$ и представления (15.6) следует

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) \,=\, \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)^{-1}.$$

Это с учётом равенства (15.4) даёт *формулу дополнения Эйлера*

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) \,=\, \frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

Полагая в этой формуле $z = 1/2$, приходим к равенству $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Отсюда с использованием функционального уравнения для гамма—функции выводятся более общие равенства

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) \,=\, \sqrt{\pi}\prod_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right),$$

$n = 1, 2, \ldots$.

Замечание 15.1. Для $\alpha > 0$ интеграл

$$\int_0^\infty e^{-x^\alpha}\,dx$$

сходится. Выполняя в нем замену переменной $x = t^{1/\alpha}$, приходим к равенству

$$\int_0^\infty e^{-x^\alpha}dx \,=\, \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

В частности, при $\alpha = 2$ получаем

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx \,=\, \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{15.9}$$

Используя равенство (15.9), вычислим так называемый *интеграл Френеля*

$$\int_0^\infty e^{it^2}dt \,=\, \int_0^\infty \cos t^2 dt + i\int_0^\infty \sin t^2 dt.$$

Рассмотрим замкнутый контур $\Gamma_R = L_R + \gamma_R - \lambda_R$, $R > 0$, где

$$L_R\colon\ z(t) = t,\quad 0 \leqslant t \leqslant R;\qquad \lambda_R\colon\ z(t) \,=\, te^{i\pi/4},\quad 0 \leqslant t \leqslant R;$$
$$\gamma_R\colon\ z(t) \,=\, Re^{it},\quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/4.$$

Поскольку $f(z) = e^{iz^2}$ является целой функцией, то

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz \,=\, 0$$

при всех $R > 0$. Заметим также, что

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\gamma_R} f(z)dz\right| &= R\left|\int\limits_0^{\pi/4} e^{iR^2e^{i2t}}e^{it}dt\right| \\ &\leqslant R\int\limits_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin 2t}dt \leqslant R\int\limits_0^{\pi/4} e^{-R^2 4t/\pi}dt \\ &= \frac{\pi}{4R}\int\limits_0^{R^2} e^{-\theta}d\theta = \frac{\pi}{4R}\left(1-e^{-R^2}\right)\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

Но тогда поскольку

$$0 = \int\limits_{\Gamma_R} f(z)dz = \int\limits_{L_R} f(z)dz - \int\limits_{\lambda_R} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_R} f(z)dz,$$

то

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{L_R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\lambda_R} f(z)dz.$$

Это эквивалентно равенству

$$\int\limits_0^\infty e^{it^2}dt = e^{i\pi/4}\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt,$$

из которого с учетом равенства (15.9) получаем

$$\int\limits_0^\infty e^{it^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\pi/4}. \tag{15.10}$$

В частности,

$$\int\limits_0^\infty \cos t^2 dt = \int\limits_0^\infty \sin t^2 dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

## § 16. Гармонические функции и задача Дирихле

Напомним, что под гармонической в области $D$ функцией понимается вещественнозначная дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(z) = u(x, y)$, $z = x + iy$, удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

В силу линейности оператора Лапласа линейная комбинация двух гармонических функций также является гармонической функцией. Ранее было показано, что если $f(z) = u(z) + iv(z)$ является голоморфной в области $D$ функцией, то вещественная часть $u(z) = u(x, y)$ и мнимая часть $v(z) = v(x, y)$ представляют собой гармонические в области $D$ функции.

Теорема 16.1. *Пусть $D$ — односвязная область. Тогда для всякой гармонической в $D$ функции $u(z)$ найдется такая голоморфная в $D$ функция $f(z)$, что $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ для всех $z \in D$.*

Доказательство. Определим в области $D$ функцию $g$ посредством равенства

$$g(z) \,=\, \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z),$$

$z = x + iy$. Поскольку функция $u(z) = u(x, y)$ является дважды непрерывно дифференцируемой, то комплекснозначная функция $g$ дифференцируема в вещественном смысле. Кроме того, вещественная и мнимая части функции $g(z)$ удовлетворяют условиям Коши—Римана, что является следствием гармоничности функции $u(z)$. Следовательно, функция $g(z)$ является дифференцируемой в комплексном смысле, т. е. голоморфна в области $D$. В силу того, что $D$ является односвязной областью, для функции $g(z)$ существует первообразная $f(z)$ в этой области. Используя аддитивную константу, первообразную $f(z) = U(z) + iV(z)$ можно выбрать так, чтобы для некоторой точки $z_0 \in D$ выполнялось равенство $U(z_0) = u(z_0)$. Из представления производной

$$f'(z) \,=\, U'_x(z) - iU'_y(z)$$

и равенства $f'(z) = g(z)$ следует, что у функций $U(z)$ и $u(z)$ частные производные по $x$ и по $y$ совпадают. Это вместе с равенством $U(z_0) = u(z_0)$ влечет тождество $U(z) \equiv u(z)$. Таким образом,

$$u(z) \,=\, U(z) \,=\, \operatorname{Re} f(z)$$

и теорема доказана. □

Следствие 16.1. *Всякая гармоническая в произвольной области $D$ функция $u(z) = u(x, y)$ является бесконечно дифференцируемой.*

Доказательство. Пусть $z_0$ — произвольная точка области $D$. В силу того, что $D$ — открытое множество, найдется $r > 0$ такое, что $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$. Поскольку круг $\mathcal{O}_r(z_0)$ представляет собой односвязную область, то найдется голоморфная в $\mathcal{O}_r(z_0)$ функция $f(z)$, для которой $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$ при $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$. Таким образом, бесконечная дифференцируемость функции $u(z) = u(x, y)$ (по $x$ и по $y$) следует из бесконечной дифференцируемости голоморфной функции $f(z)$. □

В одномерном случае уравнение Лапласа сводится к равенству нулю второй производной. Решениями этого уравнения являются функции вида $u(x) = ax + b$. Ряд свойств гармонических функций аналогичен свойствам линейных функций.

Теорема 16.2 (Принцип экстремума). *Непостоянная гармоническая в области $D$ функция $u(z)$ не может достигать локального максимума или минимума во внутренней точке области.*

Доказательство. Допустим, что $u(z_0)$ является наибольшим (или наименьшим) значением функции $u(z)$ в некоторой окрестности $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$. По предыдущей теореме найдется такая голоморфная в $\mathcal{O}_r(z_0)$ функция $f$, для которой $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$ при $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$. Но тогда по принципу экстремума для вещественной части голоморфной функции $f(z) \equiv \text{const}$ в $\mathcal{O}_r(z_0)$. Следовательно, и $u(z) \equiv \text{const}$ в $\mathcal{O}_r(z_0)$. Чтобы распространить это на всю область $D$, снова рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z),$$

которая определена и голоморфна во всей области $D$. Однако в $\mathcal{O}_r(z_0)$ имеет место равенство $g(z) = f'(z) = 0$. По теореме единственности для голоморфных функций $g(z) \equiv 0$ в $D$. Следовательно, у функции $u(x, y)$ частные производные $u'_x$, $u'_y$ тождественно равны нулю во всей области $D$. Это значит, что $u(z) \equiv \text{const}$ в $D$ и теорема доказана. □

Из принципа экстремума сразу же следуют два варианта теоремы единственности для гармонических функций. Заметим при этом, что поскольку разность двух гармонических функций также является гармонической функцией, то условие совпадения двух гармонических функций можно сформулировать в виде условий равенства нулю гармонической функции.

Теорема 16.3 (Единственности). *Пусть $u(z)$ — гармоническая в области $D$ функция и выполнено одно из условий:*

*(i) $u(z) = 0$ в некоторой окрестности $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$;*

*(ii) область $D$ ограничена, а функция $u(z)$ непрерывно продолжается в замыкание $\overline{D}$ области $D$ и $u(z) = 0$ при $z \in \partial D$.*

*Тогда $u(z) \equiv 0$ в области $D$.*

Доказательство. Допустим вначале, что выполнено условие $(i)$. Это означает, что функция $u(z)$ достигает локального максимума (и минимума) в точке $z_0$. Но в силу принципа экстремума тогда гармоническая функция $u(z)$ должна быть тождественно постоянной, т. е. $u(z) \equiv 0$ в $D$.

Допустим теперь, что выполнено условие $(ii)$. На ограниченном замкнутом множестве $\overline{D}$ непрерывная функция $u(z)$ должна достигать своего максимума и минимума. Однако в силу принципа экстремума максимум и минимум гармонической функции не может достигаться во внутренних точках области, если $u(z) \not\equiv \text{const}$. Поскольку на границе $\partial D$ функция $u(z)$ принимает только одно значение, равное нулю, то $u(z) \equiv 0$ в области $D$ и теорема доказана. □

Замечание 16.1. Утверждение теоремы о том, что из условия $(i)$ следует тождественное обращение в нуль гармонической в области $D$ функции, называют внутренней теоремой единственности. Действительно, если две гармонические функции $u_1(z)$ и $u_2(z)$ совпадают в некоторой окрестности $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$, то их разность $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ должна быть тождественным нулем в области $D$, т. е. $u_1(z) \equiv u_2(z)$ в $D$.

Замечание 16.2. Утверждение теоремы о том, что из условия $(ii)$ следует тождественное обращение в нуль гармонической в области $D$ функции, дает теорему единственности решения задачи Дирихле. Под классической *задачей Дирихле* понимается задача отыскания гармонической в области $D$ и непрерывной в замыкании $\overline{D}$ функции $u(z)$ по заданным граничным значениям.

**Пример.** В связи с различными обобщениями задачи Дирихле полезно рассмотреть следующий пример гармонической в единичном круге $\mathbb{D}$ функции, которая непрерывно продолжается во все точки единичной окружности $\mathbb{T}$, за исключением одной $\zeta = 1$. Пусть $L(z) = (1+z)/(1-z)$ — дробно-линейное преобразование единичного круга на правую полуплоскость. Точка $\zeta = 1$ переходит в бесконечно удаленную точку. Вещественная часть

$$u(z) = \operatorname{Re} L(z) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

является гармонической в $\mathbb{D}$ функцией и принимает нулевые значения на $\mathbb{T} \setminus \{1\}$. Из отображающих свойств $L(z)$ видно, что линиями уровня функции $u(z)$ являются окружности, которые касаются единичной окружности $\mathbb{T}$ в точке $\zeta = 1$.

Следующий результат с учетом теоремы Каратеодори позволяет редуцировать задачу Дирихле с произвольной односвязной области $D$, ограниченной жордановой кривой, на единичный круг.

Теорема 16.4 (Конформная инвариантность). *Пусть $u(z)$ — гармоническая в области $G$ функция, а $f(z)$ является голоморфной в области $D$ и принимает значения из $G$, т. е. $f(D) \subset G$. Тогда $v(z) = u(f(z))$ является гармонической в области $D$ функцией.*

Доказательство. Если $f(z) \equiv \text{const}$, то и $v(z) \equiv \text{const}$, т. е. является гармонической функцией. Допустим теперь, что $f(z) \not\equiv \text{const}$. Фиксируем произвольно точку $z_0 \in D$ и пусть $w_0 = f(z_0)$. В силу принципа открытости (или сохранения области) найдется $\varrho > 0$ такое, что $\mathcal{O}_\varrho(w_0) \subset f(D)$. Поскольку $\mathcal{O}_\varrho(w_0)$ является односвязной областью, то найдется голоморфная в ней функция $g(w)$, для которой $\operatorname{Re} g(w) = u(w)$ при всех $w \in \mathcal{O}_\varrho(w_0)$. В силу непрерывности $f$ найдется $r > 0$ такое, что $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$ и $f(\mathcal{O}_r(z_0)) \subset \mathcal{O}_\varrho(w_0)$. Но тогда в окрестности $\mathcal{O}_r(z_0)$ будет выполняться равенство $v(z) = \operatorname{Re} g(f(z))$. Таким образом, функция $v(z)$ является гармонической в окрестности $\mathcal{O}_r(z_0)$, поскольку в этой окрестности она представима как вещественная часть голоморфной функции. Поскольку $z_0$ выбиралось произвольно, то $v(z)$ гармонична в области $D$ и теорема доказана. □

Доказанная теорема чаще всего применяется в случае, когда $f$ является конформным отображением. Этим объясняется ее название. Гармонические функции обладают также важным свойством среднего значения, которое используется при численном моделировании.

ТЕОРЕМА 16.5 (О СРЕДНЕМ). *Пусть $u(z)$ — гармоническая в круге $\mathcal{O}_r(z_0)$ и непрерывная в замыкании $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)}$ функция. Тогда*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u(z_0 + r\zeta)|d\zeta|,$$

*где $\mathbb{T}$ — положительно ориентированная единичная окружность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале заметим, что в силу односвязности круга найдется такая голоморфная в $\mathcal{O}_r(z_0)$ функция $f(z)$, что $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$ при всех $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$. Для каждого $\varrho \in (0, r)$ применима интегральная формула Коши, согласно которой

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta,$$

где $\gamma_\varrho$ — положительно ориентированная окружность $|\zeta - z_0| = \varrho$. Используя параметризацию $\gamma_\varrho\colon \zeta = z_0 + \varrho e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, равенство выше можно переписать в виде

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \varrho e^{i\theta})d\theta.$$

Отделяя в обеих частях этого равенства вещественную часть, получаем

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + \varrho e^{i\theta})d\theta.$$

В силу непрерывности функции $u(z)$ в замкнутом круге $|z - z_0| \leqslant r$ в интеграле можно осуществить предельный переход при $\varrho \nearrow r$, что приводит к утверждению теоремы. □

ТЕОРЕМА 16.6 (ФОРМУЛА ПУАССОНА). *Пусть $u(z)$ — гармоническая в единичном круге $\mathbb{D}$ и непрерывная в его замыкании $\overline{\mathbb{D}}$ функция. Тогда для всех $a \in \mathbb{D}$ выполняется равенство*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - |a|^2}{|e^{i\theta} - a|^2}u(e^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |a|^2}{|\varkappa - a|^2}u(\varkappa)|d\varkappa|. \tag{16.1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $a = 0$ равенство (16.1) выражает теорему о среднем. Допустим теперь, что $a \neq 0$ и рассмотрим дробно-линейное преобразование

$$L(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z},$$

которое конформно отображает единичный круг $\mathbb{D}$ на себя и $L(a) = 0$. Определим функцию $v(z) = u \circ L^{-1}(z)$. В силу конформной инвариантности свойства гармоничности функция $v(z)$ также будет гармонической в $\mathbb{D}$. Кроме того, она будет непрерывна в $\overline{\mathbb{D}}$ и $v(0) = u(a)$. Поэтому, применяя теорему о среднем к функции $v(z)$, получаем

$$u(a) = v(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} u(L^{-1}(\zeta))|d\zeta|.$$

Выполним в интеграле замену переменной

$$\varkappa = L^{-1}(\zeta), \qquad \zeta = L(\varkappa), \qquad d\zeta = L'(\varkappa)d\varkappa$$

и перепишем полученное равенство в виде

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} u(\varkappa)|L'(\varkappa)||d\varkappa| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} u(\varkappa)\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}\varkappa|^2}|d\varkappa|.$$

Поскольку при $\varkappa \in \mathbb{T}$ имеет место равенство

$$|1-\overline{a}\varkappa| = |\overline{\varkappa}-\overline{a}| = |\varkappa - a|,$$

то полученное соотношение для $u(a)$ эквивалентно (16.1). □

Равенство (16.1) известно как формула Пуассона, которая восстанавливает гармоническую в $\mathbb{D}$ и непрерывную в $\overline{\mathbb{D}}$ функцию $u(z)$ по ее значениям на границе $\mathbb{T}$. Таким образом, формула Пуассона дает конструктивное решение классической задачи Дирихле для единичного круга $\mathbb{D}$, если известно, что решение существует. Далее мы покажем, что для любой непрерывной на $\mathbb{T}$ функции задача Дирихле разрешима. Мы докажем разрешимость даже более общей задачи, когда на границе $\mathbb{T}$ задается не обязательно непрерывная функция.

**Интеграл Пуассона.**

Пусть $\varphi$ — интегрируемая (абсолютно по Риману или по Лебегу) на $\mathbb{T}$ вещественнозначная функция. Тогда для $z \in \mathbb{D}$ определен интеграл

$$P(z;\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\varphi(e^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|\varkappa - z|^2}\varphi(\varkappa)|d\varkappa|,$$

который называется *интегралом Пуассона* с плотностью $\varphi$. Выражение

$$(1-|z|^2)/|\varkappa - z|^2$$

называют *ядром Пуассона.* Легко видеть, что для $z \in \mathbb{D}$ и $\varkappa \in \mathbb{T}$ имеет место равенство

$$\frac{1-|z|^2}{|\varkappa - z|^2} = \operatorname{Re}\frac{\varkappa + z}{\varkappa - z}.$$

Выражение $(\varkappa + z)/(\varkappa - z)$ называют *ядром Шварца* и для плотности $\varphi$ определен также *интеграл Шварца*

$$S(z;\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa + z}{\varkappa - z}\varphi(\varkappa)|d\varkappa|.$$

Связь

$$\operatorname{Re} S(z;\varphi) \;=\; P(z;\varphi)$$

между интегралами Пуассона и Шварца с одной и той же плотностью позволяет использовать методы теории аналитических функций при изучении свойств интеграла Пуассона.

Теорема 16.7. *Пусть $\varphi$ — интегрируемая на единичной окружности $\mathbb{T}$ вещественнозначная функция. Тогда $S(z;\varphi)$ является голоморфной в единичном круге $\mathbb{D}$ функцией. Кроме того, если $\varphi$ обращается в нуль на некоторой открытой дуге $\gamma\subset\mathbb{T}$, то $S(z;\varphi)$ аналитически продолжается через $\gamma$ во внешность единичного круга и на $\gamma$ функция $S(z;\varphi)$ принимает чисто мнимые значения.*

Доказательство. Пусть $z_0$ — произвольная точка единичного круга $\mathbb{D}$. Выберем $r>0$, меньшим половины расстояния от $z_0$ до $\mathbb{T}$. Поскольку

$$S(z;\varphi)-S(z_0;\varphi) \;=\; \frac{z-z_0}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\varkappa\varphi(\varkappa)}{(\varkappa-z)(\varkappa-z_0)}|d\varkappa|,$$

то для $z\in\dot{O}_r(z_0)$ имеет место следующее

$$\left|\frac{S(z;\varphi)-S(z_0;\varphi)}{z-z_0}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\varkappa\varphi(\varkappa)}{(\varkappa-z_0)^2}|d\varkappa|\right| \;=\; \frac{|z-z_0|}{\pi}\left|\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\varkappa\varphi(\varkappa)}{(\varkappa-z)(\varkappa-z_0)^2}|d\varkappa|\right|$$
$$\leqslant\; \frac{|z-z_0|}{4\pi r^3}\int\limits_{\mathbb{T}}|\varphi(\varkappa)||d\varkappa|.$$

Отсюда следует комплексная дифференцируемость функции $S(z;\varphi)$ в точке $z_0$. Поскольку $z_0$ выбиралось произвольно, то голоморфность $S(z;\varphi)$ в $\mathbb{D}$ доказана.

Пусть теперь $\varphi(\varkappa)=0$ на открытой дуге $\gamma\subset\mathbb{T}$. Для любого $z_0\in\gamma$ расстояние от $z_0$ до $\mathbb{T}\setminus\gamma$ будет положительным и поскольку в этом случае

$$S(z;\varphi) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}\setminus\gamma}\frac{\varkappa+z}{\varkappa-z}\varphi(\varkappa)|d\varkappa|,$$

то рассуждения, аналогичные проведенным в случае $z_0\in\mathbb{D}$, приводят к непрерывности и комплексной дифференцируемости функции $S(z;\varphi)$ на дуге $\gamma$. Кроме того, поскольку

$$\operatorname{Re}\frac{\varkappa+z}{\varkappa-z} \;=\; \frac{1-|z|^2}{|\varkappa-z|^2} \;=\; 0$$

при $z\in\gamma$ и $\varkappa\in\mathbb{T}\setminus\gamma$, то $\operatorname{Re} S(z;\varphi)=0$ на $\gamma$. Аналитическое продолжение $S(z;\varphi)$ через дугу $\gamma$ следует из принципа симметрии Римана—Шварца. Теорема доказана. □

Следствие 16.2. *Для любой интегрируемой плотности $\varphi$ интеграл Пуассона $P(z;\varphi)$ является гармонической в единичном круге $\mathbb{D}$ функцией, а если плотность $\varphi$ обращается в нуль на некоторой открытой дуге $\gamma\subset\mathbb{T}$, то $P(z;\varphi)$ гармонически продолжается через $\gamma$ во внешность единичного круга и $P(z;\varphi)=0$ при $z\in\gamma$.*

Отметим три важных свойства интеграла Пуассона.

**1. Линейность.** $P(z;\varphi_1+\varphi_2) = P(z;\varphi_1) + P(z;\varphi_2)$, $P(z;\alpha\varphi) = \alpha P(z;\varphi)$, где $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ — плотности, а $\alpha$ — число.

**2. Монотонность.** Если $\varphi(\varkappa) \geqslant 0$ для всех $\varkappa \in \mathbb{T}$, то $P(z;\varphi) \geqslant 0$ для всех $z \in \mathbb{D}$.

**3.** $P(z;1) \equiv 1$ и $\inf\limits_{\varkappa\in\mathbb{T}} \varphi(\varkappa) \leqslant P(z;\varphi) \leqslant \sup\limits_{\varkappa\in\mathbb{T}} \varphi(\varkappa)$.

Доказательство. Линейность является следствием свойств интеграла.

Для доказательства монотонности заметим, что ядро Пуассона

$$\frac{1-|z|^2}{|\varkappa - z|^2} = \operatorname{Re}\frac{\varkappa + z}{\varkappa - z}$$

представляет собой неотрицательную функцию на $\mathbb{T}$ при всех $z \in \mathbb{D}$. Поэтому, умножая ядро Пуассона на неотрицательную плотность $\varphi(\varkappa)$, получим в результате интегрирования по $\mathbb{T}$ неотрицательную функцию от $z$ в $\mathbb{D}$.

Приступая к доказательству третьего свойства, заметим сразу же, что равенство $P(z;1) \equiv 1$ является следствием интегральной формулы Пуассона для гармонической функции $u(z) \equiv 1$. Пусть теперь

$$\alpha = \inf_{\varkappa\in\mathbb{T}} \varphi(\varkappa), \qquad \beta = \sup_{\varkappa\in\mathbb{T}} \varphi(\varkappa).$$

Тогда в силу свойств монотонности и линейности получаем

$$\alpha \equiv P(z;\alpha) \leqslant P(z;\varphi) \leqslant P(z;\beta) \equiv \beta.$$

$\square$

Теорема 16.8. *Пусть $\varphi$ — функция, интегрируемая на $\mathbb{T}$ и непрерывная в точке $\varkappa_0 \in \mathbb{T}$. Тогда*

$$\lim_{z\to\varkappa_0} P(z;\varphi) = \varphi(\varkappa_0).$$

Доказательство. Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$ и выберем дугу $\gamma \subset \mathbb{T}$ с центром в точке $\varkappa_0$ так, чтобы для всех $\varkappa \in \gamma$ выполнялось неравенство

$$|\varphi(\varkappa) - \varphi(\varkappa_0)| < \varepsilon/2.$$

Это можно сделать в силу непрерывности $\varphi$ в точке $\varkappa_0$. Определим на $\mathbb{T}$ две плотности

$$\varphi_1(\varkappa) = \begin{cases} \varphi(\varkappa) - \varphi(\varkappa_0) & \text{при} \quad \varkappa \in \gamma, \\ 0 & \text{при} \quad \varkappa \in \mathbb{T}\setminus\gamma \end{cases}$$

и

$$\varphi_2(\varkappa) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \varkappa \in \gamma, \\ \varphi(\varkappa) - \varphi(\varkappa_0) & \text{при} \quad \varkappa \in \mathbb{T}\setminus\gamma. \end{cases}$$

Поскольку $P(z;\varphi(\varkappa_0)) \equiv \varphi(\varkappa_0)$, то

$$P(z;\varphi) - \varphi(\varkappa_0) = P(z;\varphi_1) + P(z;\varphi_2).$$

Заметим теперь, что $P(z;\varphi_2)$ непрерывно продолжается на дугу $\gamma$ и обращается на ней в нуль. Следовательно, найдется такое $\delta > 0$, что

$$|P(z;\varphi_2)| < \varepsilon/2 \qquad \text{при} \qquad |z-\varkappa_0| < \delta.$$

Кроме того, из свойств интеграла Пуассона следует также, что

$$|P(z;\varphi_1)| \leqslant \sup_{\varkappa\in\gamma} |\varphi(\varkappa)-\varphi(\varkappa_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, для любого $z \in \mathbb{D}$, удовлетворяющего условию $|z-\varkappa_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$|P(z;\varphi)-\varphi(\varkappa_0)| \leqslant |P(z;\varphi_1)| + |P(z;\varphi_2)| < \varepsilon.$$

$\square$

Доказанная теорема показывает, что не только классическая задача Дирихле (отыскание гармонической функции, которая на границе совпадала бы с заданной непрерывной функцией) разрешима посредством конструкции интеграла Пуассона для единичного круга $\mathbb{D}$, но и более общая задача, когда заданная на $\mathbb{T}$ функция $\varphi$ не является непрерывной. В частности, можно рассмотреть случай кусочно-непрерывной граничной функции $\varphi$.

**Задача Дирихле для кусочно-непрерывных граничных условий.**

Пусть на единичной окружности $\mathbb{T}$ определена функция $\varphi$, которая непрерывна на $\mathbb{T}$, за исключением конечного числа точек $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$, в которых она терпит разрывы первого рода.

Задача: *найти ограниченную гармоническую в $\mathbb{D}$ функцию $u(z)$, которая непрерывно продолжается на $\overline{\mathbb{D}} \setminus K$, $K = \{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m\}$, и совпадает с $\varphi$ на $\mathbb{T} \setminus K$.*

Решение этой задачи дает интеграл Пуассона с плотностью $\varphi$, т. е. $u(z) = P(z;\varphi)$. Докажем единственность решения поставленной задачи.

Допустим, что $u_1$ и $u_2$ — два решения. Тогда $U(z) = u_1(z) - u_2(z)$ будет гармонической в $\mathbb{D}$ и непрерывной на $\overline{\mathbb{D}} \setminus K$ функцией. При этом $U(\varkappa) = 0$ при $\varkappa \in \mathbb{T} \setminus K$. Нам нужно показать, что $U(z) \equiv 0$ в $\mathbb{D}$. Пусть

$$M = \sup_{z\in\mathbb{D}} |U(z)|, \quad d = \min_{i\neq j} |\varkappa_i - \varkappa_j|, \quad \varkappa_k = e^{i\theta_k}, \quad \theta_k \in [0, 2\pi),\ k = 1, \ldots, m.$$

Фиксируем произвольно $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < d/2$, и определим дуги

$$\gamma_k^\varepsilon\colon\ z(\theta) = e^{i\theta},\ \theta_k - \frac{\varepsilon}{2} < \theta < \theta_k + \frac{\varepsilon}{2}, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Рассмотрим на $\mathbb{T}$ две плотности, определяемые равенствами

$$\varphi_\varepsilon^{\pm}(\varkappa) = \begin{cases} \pm M & \text{при} \quad \varkappa \in \Lambda_\varepsilon = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{m} \gamma_k^\varepsilon, \\ \quad 0 & \text{при} \quad \varkappa \in \mathbb{T} \setminus \Lambda_\varepsilon. \end{cases}$$

Интегралы Пуассона с этими плотностями $U_\varepsilon^\pm(z) = P(z;\varphi_\varepsilon^\pm)$ представляют собой гармонические в $\mathbb{D}$ функции и удовлетворяют условиям $U_\varepsilon^+(z) \geqslant 0$, $U_\varepsilon^-(z) \leqslant 0$ при $z \in \mathbb{D}$.

В силу принципа экстремума для гармонических функций $U_\varepsilon^+(z) - U(z) \geqslant 0$, $U(z) - U_\varepsilon^-(z) \geqslant 0$ при $z \in \mathbb{D}$. Действительно, если $z_n \to \varkappa \in \mathbb{T}$ при $n \to \infty$, то

$$\varliminf_{n\to\infty} [U_\varepsilon^+(z_n) - U(z_n)] \geqslant 0.$$

Для $\varkappa \in \mathbb{T} \setminus K$ это следует из того, что $U(z_n) \to 0$ при $n \to \infty$, а $U_\varepsilon^+(z_n) \geqslant 0$ при всех $n$. В случае $\varkappa \in K$ это следует из того, что $U_\varepsilon^+(z_n) \to M$ при $n \to \infty$, а $U(z_n) \leqslant M$ для всех $n$. Следовательно, если

$$\inf_{z\in\mathbb{D}} [U_\varepsilon^+(z) - U(z)] = \alpha < 0,$$

то можно выбрать подпоследовательность $\{z_n\}$ такую, что

$$\lim_{n\to\infty} [U_\varepsilon^+(z_n) - U(z_n)] = \alpha.$$

Из этой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{z_{n_j}\}$. Ее предел $z^*$ не может принадлежать $\mathbb{T}$, поскольку

$$\lim_{j\to\infty} [U_\varepsilon^+(z_{n_j}) - U(z_{n_j})] = \alpha < 0.$$

Следовательно, $z^* \in \mathbb{D}$ и в ней достигается минимум гармонической функции $U_\varepsilon^+(z) - U(z)$, что противоречит принципу экстремума. Таким образом, $U_\varepsilon^+(z) \geqslant U(z)$ при всех $z \in \mathbb{D}$. Аналогично устанавливается, что $U_\varepsilon^-(z) \leqslant U(z)$ при $z \in \mathbb{D}$. С другой стороны, для $z \in \mathbb{D}$ имеем

$$\begin{aligned} |U_\varepsilon^\pm(z)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k^\varepsilon} \frac{1-|z|^2}{|\varkappa - z|^2} \varphi_\varepsilon^\pm(\varkappa) |d\varkappa| \right| \\ &\leqslant \frac{M}{2\pi} \frac{1+|z|}{1-|z|} \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k^\varepsilon} |d\varkappa| = \frac{M}{2\pi} \frac{1+|z|}{1-|z|} n\varepsilon. \end{aligned}$$

Но тогда и

$$|U(z)| \leqslant \varepsilon \frac{nM}{2\pi} \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Поскольку $\varepsilon$ выбиралось произвольно из промежутка $(0, d/2)$, то в полученном неравенстве можно осуществить предельный переход при $\varepsilon \to 0$ и мы приходим к равенству $U(z) = 0$.

Результаты, связанные с решением задачи Дирихле в единичном круге, можно перенести с использованием теорем Римана и Каратеодори на области, ограниченные жордановыми кривыми.

## § 17. Асимптотические методы. Функция Эйри

Многие физические законы формулируются в терминах дифференциальных уравнений. Решения возникающих очень естественно дифференциальных уравнений далеко не всегда выражаются в элементарных функциях. Это привело к появлению широкого класса специальных функций. При этом часто специальные функции вводятся как несобственные интегралы, зависящие от параметра. Некоторые специальные функции протабулированы, что сейчас позволяют с легкостью делать современные компьютеры. С другой стороны, исследование асимптотических свойств специальных функций требует развития аналитических методов. В этом параграфе на примере функции Эйри будет рассмотрено применение методов комплексного анализа для изучения асимптотических свойств специальных функций.

В 1838 г. Эйри при изучении задач оптики (явления радуги) пришел к дифференциальному уравнению $y'' = xy$, которое впоследствии получило его имя. Ему удалось найти решение в виде несобственного интеграла и протабулировать найденное решение на некотором интервале. В 1928 г. Джеффрис ввел сам термин „*функция Эйри*“ и ее представление

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt.$$

Замечая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt = 0,$$

и, учитывая четность косинуса, функцию Эйри можно представить в виде

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t^3/3+xt)} dt, \tag{17.1}$$

$x \in \mathbb{R}$.

Отметим также, что применение преобразования Фурье к решению уравнения Эйри приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, которое легко решается в элементарных функциях. Применение обратного преобразования Фурье даёт представление (17.1) с точностью до множителя.

Однако интеграл в (17.1) быстро осциллирует и не является абсолютно сходящимся, что затрудняет исследование функции Эйри в таком представлении. Более полно раскрываются свойства функции Эйри и достигается более эффективное исследование уравнения Эйри с выходом во всю комплексную плоскость. К решению уравнения Эйри в контексте комплексного переменного мы вернемся позже после обсуждения некоторых асимптотических методов для интегралов.

Прежде всего напомним некоторые термины: $f(z) = o(g(z))$ при $z \to \omega$, если $f(z) = \alpha(z)g(z)$, где $\alpha(z) \to 0$ при $z \to \omega$; $f(z) = O(g(z))$ при $z \to \omega$, если $f(z) = \beta(z)g(z)$, где $|\beta(z)| \leqslant K$ в некоторой окрестности точки $\omega$. Будем также писать $f(z) \sim g(z)$ при $z \to \omega$, если $f(z) - g(z) = o(g(z))$ при $z \to \omega$.

**17.1. Метод Лапласа.** Под *интегралами Лапласа* понимают интегралы вида

$$F(\lambda) = \int\limits_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx, \tag{17.2}$$

где $f(x), S(x)$ — действительные функции, которые называются *амплитудной функцией* (или амплитудой) и *фазовой функцией* (или фазой), а $\lambda$ — вещественный параметр. Основной вопрос: асимптотика $F(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$. В специальном случае (когда $S(x) = -x$, $a = 0$, $b = \infty$) $F(\lambda)$ представляет собой преобразование Лапласа функции $f(x)$. Поэтому интеграл в (17.2) называют интегралом Лапласа.

Для упрощения формулировок будем считать, что функции $f(x)$ и $S(x)$ бесконечно дифференцируемы, хотя это не обязательно. Интеграл в (17.2) может быть несобственным как в связи с неограниченностью подынтегрального выражения, так и в связи с тем, что либо $a = -\infty$, либо $b = \infty$, либо $(a, b) = (-\infty, \infty)$.

В основе метода Лапласа лежит наблюдение, что основной вклад в асимптотику интеграла Лапласа дают лишь значения подынтегральной функции в малой окрестности точки максимума фазовой функции. Это проявляется в следующем утверждении.

Лемма 17.1. *Пусть $\alpha > 0$ и $r > 0$ фиксированы. Тогда при $\lambda \to \infty$ выполняется соотношение*

$$\int\limits_0^r e^{-\lambda x}x^{\alpha-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha} + O(e^{-r\lambda}).$$

Доказательство. Условие $\alpha > 0$ гарантирует сходимость интеграла. Кроме того,

$$\int\limits_0^r e^{-\lambda x}x^{\alpha-1}dx = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}x^{\alpha-1}dx - \int\limits_r^\infty e^{-\lambda x}x^{\alpha-1}dx.$$

Первый интеграл в правой части последнего равенства после замены переменной интегрирования $\lambda x = t$ дает выражение $\Gamma(\alpha)/\lambda^\alpha$. Что касается второго интеграла, то при $\lambda \geqslant 1$ имеем

$$\int\limits_r^\infty e^{-\lambda x}x^{\alpha-1}dx = e^{-r\lambda}\int\limits_r^\infty e^{-\lambda(x-r)}x^{\alpha-1}dx \leqslant e^{-r\lambda}\int\limits_r^\infty e^{-(x-r)}x^{\alpha-1}dx,$$

т. е. этот интеграл является $O(e^{-r\lambda})$ при $\lambda \to \infty$. □

Поскольку мы допускаем неограниченность промежутка интегрирования, то под условием „*$S(x)$ достигает максимального значения на $[a, b]$ в единственной точке $x_0 \in (a, b)$*“ будем понимать выполнение неравенства

$$S(x_0) > \sup_{|x-x_0|\geqslant\delta} S(x)$$

для всех $\delta > 0$.

Теорема 17.1. *Пусть $S(x)$ достигает максимального значения на $[a,b]$ в единственной точке $x_0 \in (a,b)$ и $S''(x_0) < 0$, $f(x_0) \neq 0$. Тогда если интеграл в (17.2) абсолютно сходится при некотором $\lambda = \lambda_0$, то он абсолютно сходится при всех $\lambda \geqslant \lambda_0$ и*

$$F(\lambda) = f(x_0)e^{\lambda S(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(x_0)|}} + O\left(\frac{e^{\lambda S(x_0)}}{\lambda}\right)$$

*при $\lambda \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $\lambda > \lambda_0$. Тогда

$$\left|f(x)e^{\lambda S(x)}\right| = |f(x)|e^{\lambda_0 S(x)}e^{(\lambda-\lambda_0)S(x)} \leqslant e^{(\lambda-\lambda_0)S(x_0)}|f(x)|e^{\lambda_0 S(x)},$$

откуда следует сходимость интеграла в (17.2) при $\lambda \geqslant \lambda_0$. Далее будем считать, что $\lambda > \max\{\lambda_0, 0\}$.

Поскольку $x_0$ является точкой максимума функции $S(x)$, то $S'(x_0) = 0$ и

$$S(x) - S(x_0) = \frac{1}{2}S''(x_0)(x-x_0)^2 h(x),$$

где $h(x)$, как и функция $S(x)$, бесконечно дифференцируема. При этом $h(x_0) = 1$ и, следовательно, в некоторой окрестности точки $x_0$ функция $h(x)$ принимает положительные значения. В этой окрестности рассмотрим функцию

$$g(x) = (x-x_0)\sqrt{h(x)},$$

где $\sqrt{h(x)}$ принимает положительные значения. Поскольку $g(x_0) = 0$ и $g'(x_0) = 1$, то найдутся $x_1$, $x_2$ из $(a,b)$ и $r > 0$ такие, что $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$, а функция $g(x)$ отображает гомеоморфно отрезок $[x_1, x_2]$ на $[-r, r]$.

Представим теперь интеграл $F(\lambda)$ в виде

$$F(\lambda) = e^{\lambda S(x_0)}(F_1(\lambda) + F_2(\lambda) + F_3(\lambda)),$$

где

$$F_1(\lambda) = \int_a^{x_1} f(x)e^{\lambda[S(x)-S(x_0)]}dx, \qquad F_2(\lambda) = \int_{x_2}^{b} f(x)e^{\lambda[S(x)-S(x_0)]}dx$$

и

$$F_3(\lambda) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)e^{\lambda[S(x)-S(x_0)]}dx.$$

В силу сделанных предположений

$$\sup\{S(x) - S(x_0)\colon\ x \in (a, x_1] \cup [x_2, b)\} = -\mu,$$

где $\mu > 0$. Поскольку при $\lambda > \lambda_0$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}\lambda[S(x) - S(x_0)] &= (\lambda-\lambda_0)[S(x)-S(x_0)] + \lambda_0[S(x)-S(x_0)]\\ &\leqslant -(\lambda-\lambda_0)\mu - \lambda_0 S(x_0) + \lambda_0 S(x),\end{aligned}$$

то для $F_1(\lambda)$ получаем оценку

$$|F_1(\lambda)| \leqslant e^{-\lambda\mu} e^{\lambda_0(\mu - S(x_0))} \int\limits_a^{x_1} |f(x)| e^{\lambda_0 S(x)} dx,$$

т. е. $F_1(\lambda) = O(e^{-\mu\lambda})$ при $\lambda \to \infty$. Аналогично получаем, что $F_2(\lambda) = O(e^{-\mu\lambda})$ при $\lambda \to \infty$.

Приступая к оценке интеграла $F_3(\lambda)$, введем обозначение

$$\sigma = -\frac{1}{2} S''(x_0).$$

Заметим, что $\sigma > 0$ и на отрезке $[x_1, x_2]$ выполняется равенство

$$S(x) - S(x_0) = -\sigma(g(x))^2.$$

Как отмечалось выше, функция $g(x)$ гомеоморфно отображает отрезок $[x_1, x_2]$ на отрезок $[-r, r]$. Пусть $\varphi(y) = g^{-1}(y)$ — обратная функция. Выполним в интеграле $F_3(\lambda)$ замену переменной $x = \varphi(y)$ и представим его в виде

$$\begin{aligned} F_3(\lambda) &= \int\limits_{-r}^{r} f(\varphi(y)) e^{-\lambda\sigma y^2} \varphi'(y) dy \\ &= f(x_0) \int\limits_{-r}^{r} e^{-\lambda\sigma y^2} dy + \int\limits_{-r}^{r} [f(\varphi(y))\varphi'(y) - f(x_0)] e^{-\lambda\sigma y^2} dy. \end{aligned}$$

Поскольку

$$f(\varphi(y))\varphi'(y)\big|_{y=0} = f(x_0),$$

то $f(\varphi(y))\varphi'(y) - f(x_0) = y\psi(y)$, где $\psi(y)$ — бесконечно дифференцируемая функция на $[-r, r]$. Пусть

$$M = \max_{y \in [-r, r]} |\psi(y)|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_{-r}^{r} [f(\varphi(y))\varphi'(y) - f(x_0)] e^{-\lambda\sigma y^2} dy \right| &\leqslant M \int\limits_{-r}^{r} e^{-\lambda\sigma y^2} |y| dy \\ &= 2M \int\limits_0^r e^{-\lambda\sigma y^2} y dy = M \int\limits_0^{r^2} e^{-\lambda\sigma t} dt \\ &\leqslant M \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda\sigma t} dt = \frac{M}{\sigma\lambda}. \end{aligned}$$

Далее, используя четность подынтегральной функции и выполняя замену $u = \sigma y^2$, получаем

$$\int\limits_{-r}^{r} e^{-\lambda\sigma y^2} dy = 2\int\limits_0^r e^{-\lambda\sigma y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \int\limits_0^{\sigma r^2} u^{-1/2} e^{-\lambda u} du.$$

Из предыдущего с использованием леммы 17.1 приходим к асимптотике интеграла $F_3(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$

$$F_3(\lambda) \,=\, f(x_0)\frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\sigma\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \,=\, f(x_0)\sqrt{\frac{\pi}{\sigma\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

что вместе с оценками интегралов $F_1(\lambda)$ и $F_2(\lambda)$ приводит к утверждению теоремы. □

Замечание 17.1. Заключение теоремы означает, что

$$F(\lambda) \,\sim\, f(x_0)e^{\lambda S(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(x_0)|}}$$

в случае, когда точка максимума фазовой функции $S(x)$ расположена внутри промежутка $[a,b]$. Из хода доказательства теоремы видно, что в случае, когда $x_0$ попадает в концевую точку отрезка $[a,b]$, асимптотика интеграла $F(\lambda)$ будет иметь вид

$$F(\lambda) \,\sim\, \frac{1}{2}f(x_0)e^{\lambda S(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(x_0)|}}.$$

В качестве простого применения доказанной теоремы приведем асимптотику гамма-функции $\Gamma(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$. Действительно, для $\lambda > 0$ имеем

$$\Gamma(\lambda+1) \,=\, \int\limits_0^\infty t^\lambda e^{-t}dt \,=\, \int\limits_0^\infty e^{\lambda(\ln t - t/\lambda)}dt.$$

Выполним замену переменной $t$ по формуле $t = \lambda x$. Тогда $\ln t = \ln\lambda + \ln x$, $dt = \lambda dx$ и

$$\Gamma(\lambda+1) \,=\, \lambda e^{\lambda\ln\lambda}\int\limits_0^\infty e^{\lambda(\ln x - x)}dx \,=\, \lambda^{\lambda+1}\int\limits_0^\infty e^{\lambda S(x)}dx,$$

где $S(x) = \ln x - x$. Из равенства $S'(x) = 1/x - 1$ видно, что $S(x)$ имеет на $(0,\infty)$ максимум в единственной точке $x_0 = 1$. При этом $S(1) = S''(1) = -1$. Но тогда в силу теоремы 17.1

$$\Gamma(\lambda+1) \,=\, \lambda^{\lambda+1}e^{-\lambda}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \,=\, \sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$$

при $\lambda \to \infty$. Для целых $\lambda$ это равенство известно как формула Стирлинга

$$n! \,=\, \Gamma(n+1) \,=\, \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

при $n \to \infty$. Интересно, что уже при $n = 2$ главная часть асимптотики дает значение $1,919\ldots$, близкое к $2!$.

**17.2. Метод стационарной фазы.** Теперь рассмотрим асимптотику интегралов вида

$$\Phi(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}dx \tag{17.3}$$

при $\lambda \to \infty$, где $[a, b]$ — конечный промежуток, а функции $f(x)$ и $S(x)$ по-прежнему будем считать бесконечно дифференцируемыми и называть соответственно амплитудой и фазовой функциями. Предположение о вещественности функции $f(x)$ можно очевидным образом заменить так, чтобы она принимала комплексные значения, представив её в виде суммы вещественной и мнимой частей. Интеграл вида (17.3) в литературе называют интегралом Фурье.

Известная лемма Римана–Лебега утверждает, что если интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ сходится, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx \to 0$$

при $\lambda \to \infty$. Если $S(x)$ монотонна, то можно заменой переменной интегрирования преобразовать интеграл $\Phi(\lambda)$ и воспользоваться леммой Римана–Лебега. Однако это не дает представления о скорости стремления к нулю $\Phi(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$. Оказывается, что главный член асимптотического разложения интеграла Фурье будет определяться поведением подынтегрального выражения в окрестности „*стационарных*“ точек фазовой функции $S(x)$, т. е. решений уравнения $S'(x) = 0$. Интуитивно понятно, что в окрестности стационарной точки фазовая функция $S(x)$ будет не сильно меняться, что замедляет осцилляцию экспоненты.

Стационарная точка $x_0$ будет называться *невырожденной*, если $S''(x_0) \neq 0$.

Лемма 17.2. *Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и $r > 0$ фиксированы. Тогда при $\lambda \to \infty$ выполняется соотношение*

$$\int_0^r x^{\alpha-1}e^{i\lambda x}dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}e^{i\alpha\pi/2} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Доказательство. В комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ рассмотрим ветвь функции $z^{\alpha-1}$, которая принимает положительные значения на положительной вещественной полуоси. Пусть $g(z) = z^{\alpha-1}e^{iz}$. Пусть $0 < \varepsilon < R$. В области $D_{R,\varepsilon} = \{z \in \mathbb{C}\colon \varepsilon < |z| < R, 0 < \arg z < \pi/2\}$ применима теорема Коши для функции $g(z)$, согласно которой

$$\int_{\partial D_{R,\varepsilon}} g(z)dz = 0.$$

При этом $\partial D_{R,\varepsilon} = [\varepsilon, R] + \gamma_R - [i\varepsilon, iR] - \gamma_\varepsilon$, $\gamma_r\colon\ z(t) = re^{it}, 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$. Поскольку $|g(z)| \leqslant \varepsilon^{\alpha-1}$ при $z \in \gamma_\varepsilon$, то интеграл по дуге $\gamma_\varepsilon$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Интеграл по дуге $\gamma_R$ стремится к нулю при $R \to \infty$ в силу леммы

Жордана 9.2. Следовательно,

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left[\int\limits_{[\varepsilon,R]} g(z)dz - \int\limits_{[i\varepsilon,iR]} g(z)dz\right] = 0,$$

что приводит к равенству

$$\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{ix}dx = e^{i\alpha\pi/2}\int\limits_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy = e^{i\alpha\pi/2}\Gamma(\alpha).$$

Далее,

$$\int\limits_0^r x^{\alpha-1}e^{i\lambda x}dx = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{i\lambda x}dx - \int\limits_r^\infty x^{\alpha-1}e^{i\lambda x}dx.$$

Выполняя в первом интеграле замену переменной интегрирования $\lambda x = y$, получаем

$$\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{i\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^\alpha}\int\limits_0^\infty y^{\alpha-1}e^{iy}dy = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}e^{i\alpha\pi/2}.$$

Для оценки второго интеграла воспользуемся интегрированием по частям

$$\left|\int\limits_r^\infty x^{\alpha-1}e^{i\lambda x}dx\right| = \frac{1}{\lambda}\left|x^{\alpha-1}e^{i\lambda x}|_r^\infty - (\alpha-1)\int\limits_r^\infty \frac{e^{i\lambda x}}{x^{2-\alpha}}dx\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda}\left(r^{\alpha-1} + (1-\alpha)\int\limits_r^\infty \frac{dx}{x^{2-\alpha}}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Лемма доказана □

Теорема 17.2. *Пусть функции $f(x)$ и $S(x)$ бесконечно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, функция $S(x)$ имеет единственную стационарную точку $x_0 \in (a,b)$, в которой $f(x_0) \neq 0$ и $S''(x_0) > 0$. Тогда для интеграла* (17.3) *выполняется соотношение*

$$\Phi(\lambda) = \int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}dx = e^{i\pi/4}e^{i\lambda S(x_0)}f(x_0)\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

*при $\lambda\to\infty$.*

Доказательство. Как и в ходе доказательства теоремы 17.1 выделим окрестность точки $x_0$, используя представление

$$S(x) - S(x_0) = \frac{1}{2}S''(x_0)(x-x_0)^2h(x),$$

и рассмотрим функцию

$$g(x) = (x-x_0)\sqrt{h(x)}.$$

В результате возникает отрезок $[x_1, x_2]$, который функция $g(x)$ гомеоморфно отображает на отрезок $[-r, r]$, $r > 0$. При этом $g(x_0) = 0$ и $g'(x_0) = 1$.

Представим интеграл $\Phi(\lambda)$ в виде

$$\Phi(\lambda) = \Phi_1(\lambda) + \Phi_2(\lambda) + \Phi_3(\lambda),$$

где

$$\Phi_1(\lambda) = \int\limits_a^{x_1} f(x)e^{i\lambda S(x)}dx, \quad \Phi_2(\lambda) = \int\limits_{x_2}^{b} f(x)e^{i\lambda S(x)}dx$$

и

$$\Phi_3(\lambda) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)e^{i\lambda S(x)}dx.$$

Поскольку $x_0$ — единственная точка на $[a, b]$, в которой $S'(x)$ обращается в нуль, то

$$\min\{|S'(x)|\colon\ x \in [a, x_1] \bigcup [x_2, b]\} = \mu > 0.$$

Но тогда

$$\begin{aligned}
|\Phi_1(\lambda)| &= \left|\int\limits_a^{x_1} f(x)e^{i\lambda S(x)}dx\right| = \frac{1}{\lambda}\left|\int\limits_a^{x_1} \frac{f(x)}{S'(x)}\,\frac{d}{dx}\left\{e^{i\lambda S(x)}\right\}dx\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\left|\frac{f(x)}{S'(x)}e^{i\lambda S(x)}\Big|_{x=a}^{x=x_1}\right| + \left|\int\limits_a^{x_1} e^{i\lambda S(x)}\left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)' dx\right|\right) \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\left|\frac{f(x_1)}{S'(x_1)}\right| + \left|\frac{f(a)}{S'(a)}\right| + \int\limits_a^{x_1}\left|\left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)'\right| dx\right),
\end{aligned}$$

т. е. $\Phi_1(\lambda) = O(1/\lambda)$ при $\lambda \to \infty$. Аналогично получаем, что $\Phi_1(\lambda) = O(1/\lambda)$ при $\lambda \to \infty$.

Интеграл $\Phi_3(\lambda)$ представим в виде

$$\Phi_3(\lambda) = e^{i\lambda S(x_0)}\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)e^{i\lambda\sigma(g(x))^2}dx,$$

где $\sigma = \frac{1}{2}S''(x_0) > 0$. Обозначим через $\varphi(y)$ функцию, обратную к $g(x)$ и выполним в интеграле замену переменной $x = \varphi(y)$. В результате интеграл $\Phi_3(\lambda)$ преобразуем следующим образом

$$\begin{aligned}
\Phi_3(\lambda) &= e^{i\lambda S(x_0)}\int\limits_{-r}^{r} f(\varphi(y))\varphi'(y)e^{i\lambda\sigma y^2}dy \\
&= e^{i\lambda S(x_0)}\left(f(x_0)\int\limits_{-r}^{r} e^{i\lambda\sigma y^2}dy + \int\limits_{-r}^{r} y\psi(y)e^{i\lambda\sigma y^2}dy\right),
\end{aligned}$$

где $y\psi(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y) - f(x_0)$. Используя интегрирование по частям, получаем

$$\left|\int_{-r}^{r} y\psi(y)e^{i\lambda\sigma y^2}dy\right| = \frac{1}{\sigma\lambda}\left|\psi(y)e^{i\sigma\lambda y^2}\Big|_{-r}^{r} - \int_{-r}^{r}\psi'(y)e^{i\lambda\sigma y^2}dy\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{\sigma\lambda}\left(|\psi(r)| + |\psi(-r)| + \int_{-r}^{r}|\psi'(y)|dy\right) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\lambda \to \infty$. Далее, полагая $t = \sigma y^2$, получаем

$$\int_{-r}^{r} e^{i\lambda\sigma y^2}dy = 2\int_{0}^{r} e^{i\lambda\sigma y^2}dy = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\int_{0}^{\sigma r^2} t^{-1/2}e^{i\lambda t}dt.$$

Из леммы 17.2 следует теперь, что

$$\int_{-r}^{r} e^{i\lambda\sigma y^2}dy = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\sigma\lambda}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\lambda \to \infty$. Но тогда

$$\Phi_3(\lambda) = f(x_0)e^{i\lambda S(x_0)}e^{i\pi/4}\sqrt{\frac{\pi}{\sigma\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\lambda \to \infty$. Это с учетом полученных выше результатов и равенства $\sigma = \frac{1}{2}S''(x_0)$ приводит к утверждению доказываемой теоремы. □

Замечание 17.2. Если в условиях теоремы 17.2 неравенство $S''(x_0) > 0$ заменить на неравенство $S''(x_0) < 0$, то заключение теоремы поменяется на следующее

$$\Phi(\lambda) = e^{-i\pi/4}f(x_0)e^{i\lambda S(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda S''(x_0)}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

при $\lambda \to \infty$.

Действительно, для фазовой функции $-S(x)$ будут выполнены все условия теоремы. Применение теоремы к этому случаю приводит к соотношению

$$\overline{\Phi(\lambda)} = e^{i\pi/4}f(x_0)e^{-i\lambda S(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda S''(x_0)}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Переход в этом равенстве к комплексному сопряжению приводит к приведенному выше соотношению.

**Асимптотика $Ai(x)$ при $x \to -\infty$.** Метод стационарной фазы позволяет найти асимптотику функции Эйри (17.1) при $x \to -\infty$. В этом случае $u = -x$ можно рассматривать как большой параметр. При этом

$$Ai(x) = Ai(-u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t^3/3 - ut)}dt.$$

Поскольку $u > 0$, замена переменной $t = u^{1/2}\tau$ преобразует интеграл к виду

$$Ai(-u) = \frac{u^{1/2}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iu^{3/2}(\tau^3/3-\tau)} d\tau.$$

Обозначим $\lambda = u^{3/2}$ и рассмотрим интеграл

$$\Phi(\lambda) = \frac{u^{1/2}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda S(x)} dx,$$

где $S(x) = x^3/3 - x$. Фазовая функция $S(x) = x^3/3 - x$ имеет две стационарные точки $x = \pm 1$, в которых

$$S(1) = -\frac{2}{3}, \quad S''(1) = 2, \quad S(-1) = \frac{2}{3}, \quad S''(-1) = -2.$$

Обе стационарные точки являются невырожденными. Для получения асимптотики $\Phi(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ разобьем промежуток интегрирования $(-\infty, \infty)$ на интервалы $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, \infty)$. Тогда для $\Phi(\lambda)$ получим представление

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) &= \int\limits_{-\infty}^{-2} e^{i\lambda S(x)} dx + \int\limits_{-2}^{0} e^{i\lambda S(x)} dx + \int\limits_{0}^{2} e^{i\lambda S(x)} dx + \int\limits_{2}^{\infty} e^{i\lambda S(x)} dx \\ &= \Phi_1(\lambda) + \Phi_2(\lambda) + \Phi_3(\lambda) + \Phi_4(\lambda).\end{aligned}$$

Асимптотические свойства интегралов $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_4(\lambda)$ получаются с использованием интегрирования по частям. Поскольку $S'(x) = x^2 - 1$, то

$$\Phi_1(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{-2} e^{i\lambda S(x)} dx = \frac{1}{i\lambda} \left[ \frac{e^{i\lambda S(x)}}{x^2 - 1} \Bigg|_{-\infty}^{-2} + 2 \int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{x e^{i\lambda S(x)}}{(x^2 - 1)^2} dx \right],$$

откуда следует, что $\Phi_1(\lambda) = O(1/\lambda)$ при $\lambda \to \infty$. Аналогично получаем $\Phi_4(\lambda) = O(1/\lambda)$ при $\lambda \to \infty$.

Далее, из теоремы 17.2 следует, что

$$\Phi_3(\lambda) = e^{i\pi/4} e^{-i2\lambda/3} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Аналогично из замечания 17.2 получаем

$$\Phi_2(\lambda) = e^{-i\pi/4} e^{i2\lambda/3} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Таким образом, главный член асимптотики интеграла $\Phi(\lambda)$ определяется интегралами $\Phi_2(\lambda), \Phi_3(\lambda)$ и

$$\Phi(\lambda) = \Phi_2(\lambda) + \Phi_3(\lambda) = 2\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \cos\left(\frac{2\lambda}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\lambda \to \infty$. Возвращаясь к функции Эйри, получаем

$$Ai(-u) = \frac{u^{1/2}}{2\pi}\Phi(u^{3/2}) = \pi^{-1/2}u^{-1/4}\cos\left(\frac{2}{3}u^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{u}\right)$$

при $u \to \infty$.

**17.3. Метод перевала.** Метод перевала (или метод наискорейшего спуска) можно рассматривать как комплексный вариант метода Лапласа. Этот метод связан с изучением асимптотики при $\lambda \to \infty$ интегралов вида

$$I(\lambda) = \int\limits_{\gamma} f(\zeta)e^{\lambda S(\zeta)}d\zeta, \tag{17.4}$$

где $f(\zeta)$ и $S(\zeta)$ — голоморфные функции, а $\gamma$ — некоторый контур в области комплексной плоскости.

Основная идея метода заключается в использовании голоморфности подынтегрального выражения для преобразования контура $\gamma$ в новый контур $\gamma^*$, на котором фазовая функция $S(\zeta)$ имеет постоянную мнимую часть, т. е. $\mathsf{Im}S(\zeta) = v_0$ при $\zeta \in \gamma^*$. Но тогда интеграл (17.4) можно будет записать в виде

$$I(\lambda) = e^{i\lambda v_0}\int\limits_{\gamma^*} f(\zeta)e^{\lambda \mathsf{Re} S(\zeta)}d\zeta,$$

т. е. на $\gamma^*$ интеграл $I(\lambda)$ с точностью до множителя превращается в интеграл Лапласа. Здесь снова важную роль играют критические точки. Как и выше, под *критической точкой* будем понимать корень уравнения $S'(z) = 0$ и критическую точку $z_0$ будем называть *невырожденной*, если $S''(z_0) \neq 0$.

Рассмотрим поведение фазовой функции $S(z)$ в окрестности невырожденной критической точки $z_0$. Поскольку $S'(z_0) = 0$ и $S''(z_0) \neq 0$, то точка $z_0$ является нулем второго порядка для функции $S(z) - S(z_0)$ и

$$S(z) - S(z_0) = (z - z_0)^2 h(z),$$

где $h(z)$ — голоморфная функция в той же области, что и $S(z)$. При этом $h(z_0) = \frac{1}{2}S''(z_0) \neq 0$ и условие $h(z) \neq 0$ будет сохраняться в некоторой окрестности $\mathcal{O}_r(z_0)$, $r > 0$. В силу следствия 10.2 (о выделении регулярной ветви логарифма в односвязной области) в этой окрестности можно выделить регулярную ветвь $\psi(z)$ корня $\sqrt{h(z)}$. Определим в $\mathcal{O}_r(z_0)$ функцию $g(z) = (z - z_0)\psi(z)$. Тогда в $\mathcal{O}_r(z_0)$ имеет место равенство

$$S(z) - S(z_0) = (g(z))^2.$$

При этом $g'(z_0) = \psi(z_0) \neq 0$ и по теореме 11.4 о локальной структуре отображения найдется окрестность $\mathcal{O}_\varrho(0)$, в которой определена и однолистна обратная функция $\varphi(z) = g^{-1}(\zeta)$. Но тогда

$$S(\varphi(\zeta)) - S(z_0) = [g(\varphi(\zeta))]^2 = \zeta^2$$

при $|\zeta| \leqslant \varrho$. Пусть $\zeta = \xi + i\eta$ и

$$S(z) - S(z_0) = U(z) + iV(z).$$

Из равенства выше видно, что

$$V(\varphi(\zeta)) = \mathsf{Im}\zeta^2 = 2\xi\eta$$

обращается в нуль в круге $|\zeta| \leqslant \varrho$ на вещественном и мнимом диаметрах. При этом функция

$$U(\varphi(\zeta)) = \xi^2 - \eta^2$$

достигает в точке $\zeta = 0$ минимума на вещественном диаметре и максимума на мнимом диаметре.

Таким образом, кривая $\gamma^*\colon\ z(t) = \varphi(it),\ -\varrho \leqslant t \leqslant \varrho$, проходит через точку $z_0 = z(0)$ и удовлетворяет условиям:

(i) $\mathsf{Im}S(z)$ является постоянной на $\gamma^*$;

(ii) $\mathsf{Re}S(z)$ достигает максимума на $\gamma^*$ в критической точке $z_0$.

Заметим также, что $z_0$ является „*седловой*“точкой для функции $U(z)$ При этом, выходя из точки $z_0$ вдоль кривой $\gamma^*$, мы имеем наискорейшее убывание функции $U(z)$. Последнее объясняется тем, что градиент $\nabla U = U'_x + iU'_y$ функции $U$ направлен вдоль кривой $\gamma^*$. Действительно,

$$\overline{z'(t)} \cdot \nabla U = |z'(t)| \cdot |\nabla U|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

где $\theta$ — угол между $z'(t)$ и $\nabla U$. С другой стороны, с использованием условий Коши—Римана и равенства $V(z(t)) = 0,\ -\varrho \leqslant t \leqslant \varrho$, получаем

$$\begin{aligned}\mathsf{Im}\{\overline{z'(t)}\nabla U\} &= \mathsf{Im}\{(x'(t) - iy'(t))(U'_x + iU'_y)\}\\ &= U'_y \cdot x'(t) - U'_x \cdot y'(t)\\ &= -\left[V'_x \cdot x'(t) + V'_y \cdot y'(t)\right]\\ &= -\frac{d}{dt}V(z(t)) = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $\sin\theta = 0$, т. е. $z'(t)$ и $\nabla U$ направлены вдоль одной прямой. В связи с этим метод перевала называют также *методом наискорейшего спуска* или *методом „седловой“ точки.*

Как и в случае интегралов Лапласа и Фурье метод перевала можно свести к простой формуле.

Теорема 17.3. *Пусть функции $f(z)$ и $S(z)$ голоморфны в области $D \subseteq \mathbb{C}$, гладкая кривая $\gamma\colon\ z = z(t),\ -r \leqslant t \leqslant r$, расположена в $D$ и проходит через невырожденную критическую точку $z_0 = z(0)$, в которой $f(z_0) \neq 0$. Допустим также, что $\mathsf{Im}S(z(t)) \equiv \mathsf{Im}S(z_0)$ и максимум $\mathsf{Re}S(z(t))$ на $[-r, r]$ достигается в единственной точке $t = 0$. Тогда для интеграла (17.4) имеет место соотношение*

$$I(\lambda) = e^{i\phi} f(z_0) e^{\lambda S(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(z_0)|}} + O\left(\frac{e^{\lambda S(z_0)}}{\lambda}\right)$$

*при $\lambda \to \infty$, где $\phi = \arg z'(0)$.*

Доказательство. В силу сделанных предположений функция

$$\widetilde{S}(t) \;=\; S(z(t)) - S(z_0)$$

определена и принимает вещественные значения на промежутке $[-r, r]$. При этом $\widetilde{S}(0) = \widetilde{S}'(0) = 0$, $\widetilde{S}''(0) \neq 0$. Поэтому к интегралу

$$I(\lambda) \;=\; e^{\lambda S(z_0)} \int_{-r}^{r} f(z(t)) e^{\lambda \widetilde{S}((t)} z'(t) dt$$

применима теорема 17.1, согласно которой

$$\int_{-r}^{r} f(z(t)) e^{\lambda \widetilde{S}((t)} z'(t) dt \;=\; f(z_0) z'(0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\widetilde{S}''(0)|}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\lambda \to \infty$. Полагая в равенстве

$$\widetilde{S}''(t) \;=\; S''(z(t))(z'(t))^2 + S'(z(t)) z''(t)$$

значение $t = 0$, получаем $|\widetilde{S}''(0)| = |S''(z_0)| \cdot |z'(0)|^2$, откуда следует, что

$$I(\lambda) \;=\; \frac{z'(0)}{|z'(0)|} f(z_0) e^{\lambda S(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(z_0)|}} + O\left(\frac{e^{\lambda S(z_0)}}{\lambda}\right).$$

Теорема доказана. □

Замечание 17.3. Множитель $e^{i\phi}$ в асимптотической формуле теоремы 17.3 можно представить в терминах фазовой функции:

$$\phi \;=\; \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg S''(z_0).$$

Действительно, как следует из рассуждений перед формулировкой теоремы 17.3, в окрестности невырожденной критической точки $z_0$ (с точностью до ориентации) параметризацию кривой можно записать в виде $z(t) = \varphi(it)$, $-\varrho \leqslant t \leqslant \varrho$, где $z(0) = z_0$ — критическая точка, и

$$S(\varphi(\zeta)) - S(z_0) \;=\; \zeta^2,$$

$|\zeta| \leqslant \varrho$. Следовательно, $z'(0) = i\varphi'(0)$. С другой стороны, полагая в равенстве

$$S''(\varphi(\zeta))(\varphi'(\zeta))^2 + S'(\varphi(\zeta))\varphi''(\zeta) \;=\; 2$$

$\zeta = 0$, получаем $(\varphi'(0))^2 = 2/S''(z_0)$. Отсюда следует, что

$$\arg \varphi'(0) \;=\; -\frac{1}{2} S''(z_0),$$

и в результате

$$\arg z'(0) \;=\; \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg S''(z_0).$$

**17.4. Уравнение Эйри в комплексной плоскости.** Рассмотрим теперь уравнение Эйри в комплексной плоскости

$$w'' = zw, \tag{17.5}$$

где $z$ и $w$ являются комплексными переменными. Если зафиксировать начальные условия $w(0)$ и $w'(0)$, то методом неопределенных коэффициентов можно найти разложение Тейлора для функции $w(z)$, которое представляет собой степенной ряд, сходящийся во всей комплексной плоскости. Это означает, что решение $w(z)$ уравнения (17.5) является целой функцией. Однако разложение Тейлора плохо приспособлено к изучению асимптотических свойств функции. Интегральные представления решений уравнения можно получить методом обобщенного преобразования Лапласа.

Будем искать решение $w(z)$ уравнения (17.5) в виде

$$w(z) = \int\limits_{\Gamma} F(\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta, \tag{17.6}$$

где контур $\Gamma$ и функция $F$ подлежат определению. Подставляя это выражение в уравнение Эйри (17.5), приходим к равенству

$$\int\limits_{\Gamma} (\zeta^2 - z) F(\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta = 0.$$

Преобразуем теперь последнее равенство так, чтобы переменная $z$ оставалась только в показателе степени. Поскольку

$$\frac{d}{d\zeta}(e^{-z\zeta}) = -ze^{-z\zeta},$$

то интегрирование по частям приводит к равенству

$$-z \int\limits_{\Gamma} F(\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta = \left[F(\zeta) e^{-z\zeta}\right]_{\Gamma} - \int\limits_{\Gamma} F'(\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta,$$

где $[\cdot]_{\Gamma}$ означает вычисление в концевых точках контура $\Gamma$. С учетом этого равенства функция (17.6) является решением уравнения Эйри, если выполнено соотношение

$$\int\limits_{\Gamma} (\zeta^2 F(\zeta) - F'(\zeta)) e^{-z\zeta} d\zeta + \left[F(\zeta) e^{-z\zeta}\right]_{\Gamma} = 0.$$

Смысл метода состоит в выборе контура $\Gamma$ и функции $F$ так, чтобы оба слагаемых в последнем равенстве обратились в нуль. Уравнение $F'(\zeta) = \zeta^2 F(\zeta)$ имеет решение $F(\zeta) = ce^{\zeta^3/3}$. Таким образом, если $[F(\zeta)e^{-z\zeta}]_{\Gamma} = 0$, то в качестве решения уравнения Эйри (17.5) можно взять

$$Ai(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{-z\zeta + \zeta^3/3} d\zeta. \tag{17.7}$$

Функция $G(\zeta) = e^{-z\zeta+\zeta^3/3}$ является целой и стремится к нулю при $\zeta \to \infty$ в секторах

$$\Delta_1 = \left\{\zeta \in \mathbb{C}\colon \ \frac{\pi}{6} < \arg\zeta < \frac{\pi}{2}\right\}, \qquad \Delta_2 = \left\{\zeta \in \mathbb{C}\colon \ \frac{5\pi}{6} < \arg\zeta < \frac{7\pi}{6}\right\},$$
$$\Delta_3 = \left\{\zeta \in \mathbb{C}\colon \ -\frac{\pi}{2} < \arg\zeta < -\frac{\pi}{6}\right\}.$$

Эти секторы выделяются условием $\mathsf{Re}\zeta^3 < 0$. Если в качестве $\Gamma$ выбрать замкнутую кривую, то $[F(\zeta)e^{-z\zeta}]_\Gamma$ обратится в нуль. Однако при этом и (17.7) обратится в нуль, что даст тривиальное решение $w(z) \equiv 0$.

В дальнейшем под контуром $\Gamma$ в формуле (17.7) будем понимать кусочно-гладкую кривую, которая выходит из бесконечности в секторе $\Delta_3$ и уходит на бесконечность в секторе $\Delta_1$. При этом верхняя её часть асимптотически приближается к лучу $\arg\zeta = \theta'$, $\pi/6 < \theta' < \pi/2$, а нижняя часть асимптотически приближается к лучу $\arg\zeta = \theta''$, $-\pi/2 < \theta'' < -\pi/6$. В этом случае интеграл в (17.7) быстро сходится и представляет собой целую функцию. Эта функция является решением уравнения Эйри (17.5). Множитель перед интегралом в (17.7) выбран так, чтобы при вещественных $z$ интегральное представление (17.7) приводило к исходной функции Эйри (17.1). Для доказательства этого достаточно проверить, что $Ai(x)$ при $x > 0$, вычисленная по формуле (17.7) совпадает с $Ai(x)$ из (17.1).

Пусть $x > 0$ фиксировано и $\Gamma$ — контур такой, как описано выше. Если $\gamma_R^+$ — дуга окружности радиуса $R$, расположенная в секторе $\Delta_1$, т. е. $\gamma_R^+\colon\ \zeta(t) = Re^{it}$, $\pi/6 \leqslant t \leqslant \pi/2$, то

$$\int\limits_{\gamma_R^+} e^{-x\zeta+\zeta^3/3} d\zeta \ \to \ 0$$

при $R \to \infty$. Это легко устанавливается рассуждениями, аналогичными тем, которые использовались при доказательстве леммы Жордана. Заметим вначале, что

$$\left|\int\limits_{\gamma_R^+} e^{-x\zeta+\zeta^3/3} d\zeta\right| \leqslant R \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \exp\left\{-xR\cos t + \frac{1}{3}R^3\cos 3t\right\} dt$$
$$\leqslant R \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} e^{\frac{1}{3}R^3\cos 3t} dt.$$

Выполняя в последнем интеграле замену переменной $\theta = 3(t - \pi/6)$, получаем

$$R \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} e^{\frac{1}{3}R^3 \cos 3t} dt = \frac{R}{3} \int\limits_{0}^{\pi} e^{-\frac{1}{3}R^3 \sin\theta} d\theta$$

$$= \frac{2R}{3} \int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-\frac{1}{3}R^3 \sin\theta} d\theta$$

$$\leqslant \frac{2R}{3} \int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-\frac{2}{3\pi}R^3 \theta} d\theta < \frac{\pi}{R^2} \to 0$$

при $R \to \infty$. Аналогично устанавливается, что

$$\int\limits_{\gamma_R^-} e^{-x\zeta + \zeta^3/3} d\zeta \to 0$$

при $R \to \infty$, где $\gamma_R^-$ — дуга окружности радиуса $R$, расположенная в секторе $\Delta_3$. Доказанные предельные соотношения и стандартное применение теоремы Коши показывают, что при вычислении $Ai(x)$, $x > 0$, в равенстве (17.7) в качестве $\Gamma$ можно взять мнимую ось. При этом получаем $\zeta = it$, $-\infty < t < \infty$, и

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(xt + t^3/3)} dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(xt + t^3/3)} dt.$$

Таким образом, равенство (17.7) дает аналитическое продолжение функции Эйри во всю комплексную плоскость.

Используя представление (17.7) функции Эйри, рассмотрим вопрос её асимптотического поведения при $x \to \infty$. Выполним в интеграле замену переменной $\zeta = x^{1/2} w$. При этом контур $\Gamma$, на котором меняется переменная интегрирования $w$, также выходит из бесконечности в секторе $\Delta_3$ и уходит на бесконечность в секторе $\Delta_1$. Теперь интеграл принимает вид

$$Ai(x) = \frac{x^{1/2}}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\lambda S(w)} dw,$$

где $\lambda = x^{3/2}$ и $S(w) = \frac{1}{3}w^3 - w$. Критические точки определяются из уравнения $S'(w) = w^2 - 1 = 0$. Таким образом, мы имеем две критические точки $w = \pm 1$, в которых $S''(1) = 2$ и $S''(-1) = -2$, т. е. обе критические точки являются невырожденными. При этом $S(1) = -2/3$, $S(-1) = 2/3$. Интересующие нас контуры, проходящие через эти точки, будут определяться из уравнения $\mathsf{Im} S(w) = 0$. Если $w = u + iv$, то

$$S(w) = u\left(\frac{1}{3}u^2 - v^2 - 1\right) + iv\left(u^2 - \frac{1}{3}v^2 - 1\right),$$

откуда видно, что кривые с нулевой мнимой частью функции $S(w)$ в $w$-плоскости определяются уравнениями $v = 0$ или $v^2 = 3(u^2 - 1)$. Уравнение $v = 0$ определяет вещественную ось, на которой расположены обе критические точки, но она не является допустимой в интеграле (17.7). Кроме того, на этой линии в критической точке $w = 1$ вещественная часть $\mathsf{Re} S(u)$ имеет локальный минимум.

Выберем в качестве $\Gamma$ ветвь гиперболы $v^2 = 3(u^2 - 1)$, которая проходит через критическую точку $w = 1$. Заметим, что верхняя часть гиперболы $\Gamma$ асимптотически приближается к лучу $\arg w = \pi/3$, а нижняя часть асимптотически приближается к лучу $\arg w = -\pi/3$, т. е. $\Gamma$ является допустимой кривой в (17.7). При этом вещественная часть функции $S(w) - S(1)$ на кривой $\Gamma$ имеет вид

$$\mathsf{Re}\{S(w) - S(1)\} \; = \; -\frac{8}{3}u^3 + 2u + \frac{2}{3}.$$

Поскольку на $\Gamma$ выполняется неравенство $u \geqslant 1$, то вещественная часть $\mathsf{Re}\{S(w) - S(1)\}$ на $\Gamma$ достигает абсолютного максимума в точке $w = 1$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 17.3 и

$$\int\limits_{\Gamma} e^{\lambda S(w)} dw \; = \; i e^{-\frac{2}{3}\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + O\left(\frac{e^{-\frac{2}{3}\lambda}}{\lambda}\right)$$

при $\lambda \to \infty$. Здесь $e^{i\phi} = i$, поскольку касательная к кривой $\Gamma$ в точке $w = 1$ направлена вдоль мнимой оси. В результате, возвращаясь к переменной $x$, получаем

$$Ai(x) \; = \; \frac{1}{2}\pi^{-1/2} x^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \left(1 + O(x^{-3/2})\right)$$

при $x \to \infty$. Учитывая также асимптотику $Ai(x)$ при $x \to -\infty$, полученную ранее, приходим к следующему результату.

Теорема 17.4. *Для функции Эйри* (17.1) *имеют место следующие соотношения*

$$Ai(x) \; \sim \; \pi^{-1/2} |x|^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

*при* $x \to -\infty$,

$$Ai(x) \; \sim \; \frac{1}{2}\pi^{-1/2} x^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}$$

*при* $x \to \infty$.

**17.5. Явление Стокса.** Заметим теперь, что кривая $\Gamma$, которая была использована при получении асимптотического представления $Ai(x)$ при $x \to \infty$, имеет в качестве асимптот лучи, которые делят секторы $\Delta_1$ и $\Delta_3$ пополам. Следовательно, замена переменной $\zeta = w z^{1/2}$ в интеграле (17.7) при условии

$$|\arg z| \; \leqslant \; \frac{\pi}{3} - \delta,$$

где $\delta > 0$ и мало, преобразует кривую $\Gamma$ в допустимую кривую. При этом

$$Ai(z) \; = \; \frac{z^{1/2}}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\lambda \widehat{S}(w)} dw,$$

где $\lambda = |z|^{3/2}$, а $\widehat{S}(w) = e^{i3\theta/2}S(w)$, $z = |z|e^{i\theta}$. Для $\widehat{S}(w)$ критические точки те же, что и для $S(w)$. Поэтому с учетом того, что $\phi = \pi/2 - 3\theta/4$, получаем

$$Ai(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}$$

при $z \to \infty$ в секторе $|\arg z| \leqslant \pi/3 - \delta$.

Запишем также в терминах комплексной переменной асимптотическую формулу из теоремы 17.4 при $x \to -\infty$. На отрицательной вещественной полуоси $z = |z|e^{i\pi}$, $i|z|^{3/2} = -z^{3/2}$ и

$$\cos\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-i\pi/4}e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} + e^{i\pi/4}e^{\frac{2}{3}z^{3/2}}\right).$$

Следовательно,

$$Ai(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4}\left(e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} + ie^{\frac{2}{3}z^{3/2}}\right)$$

при $z \to \infty$ вдоль отрицательной вещественной полуоси.

Таким образом, функция $Ai(z)$ имеет различные асимптотические приближения при $z \to \infty$ в различных секторах комплексной плоскости. В литературе этот эффект связывают с так называемым *явлением Стокса*. Это явление можно проиллюстрировать на простом примере.

Рассмотрим уравнение $w'' = \nu^2 w$, где $\nu > 0$. Оно имеет два линейно независимых решения $e^{\nu z}$ и $e^{-\nu z}$. С другой стороны, решение $\mathrm{ch}(\nu z)$ при больших $|z|$ можно заменить приближенными выражениями:

$$\mathrm{ch}(\nu z) \sim \frac{1}{2}e^{\nu z} \qquad \text{при} \quad z \to \infty, \qquad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2},$$

и

$$\mathrm{ch}(\nu z) \sim \frac{1}{2}e^{-\nu z} \qquad \text{при} \quad z \to \infty, \qquad \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}.$$

При $\arg z = \pm\pi/2$ ни одно из этих приближений не является корректным.

Ситуация в случае функции $Ai(z)$ усложняется еще тем, что асимптотические решения

$$U_+(z) = z^{-1/4}e^{\frac{2}{3}z^{3/2}} \qquad \text{и} \qquad U_-(z) = z^{-1/4}e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}$$

уравнения Эйри, которые дает, например, известный в литературе ВКБ-метод, представляют собой многозначные функции с точкой ветвления в начале координат. С другой стороны, точное решение $Ai(z)$ является целой функцией. Поэтому, если мы обойдем вокруг начала координат, то $Ai(z)$ вернется к первоначальному значению, что не произойдет с ветвями $U_+(z)$ и $U_-(z)$. Следовательно, никакая линейная комбинация этих функций не может служить аппроксимацией $Ai(z)$ при $z \to \infty$ сразу во всех направлениях. Коэффициенты линейной комбинации должны зависеть от сектора комплексной плоскости, что подтверждают полученные выше результаты.

В нашем случае одна из функций $U_+, U_-$ максимально доминирует над другой на *линиях Стокса*, которые определяются уравнением $\mathsf{Im} z^{3/2} = 0$. Это уравнение определяет три луча $\arg z = 0$ и $\arg z = \pm 2\pi/3$. На лучах $\arg z = \pm\pi/3$ и отрицательной вещественной полуоси имеет место равенство $|U_+(z)| = |U_-(z)|$. Эти лучи называют *антистоксовыми линиями.*

То, что коэффициенты при $U_+(z)$ и $U_-(z)$ в асимптотическом представлении функции Эйри должны зависеть от области, впервые обнаружил Стокс в 1857 г. Он также утверждал, что изменение коэффициентов должно происходить там, где одна из функций $U_+(z), U_-(z)$ максимально доминирует над другой, т.е. на линиях Стокса. Изменение коэффициентов проявляется внезапно только тогда, когда мы приближаемся к антистоксовым линиям, где $U_+(z)$ и $U_-(z)$ „сбалансированы“, поскольку на этих линиях $|U_+(z)| = |U_-(z)|$.

Следует отметить также, что в настоящее время в литературе существует путаница в терминологии. В некоторых источниках меняют местами понятия „*линии Стокса*“и „*антистоксовые линии*“.

## Список литературы


[1] О.В. Бесов, *Лекции по математическому анализу*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2014.

[2] В.В. Горяйнов, Е.С. Половинкин, *Лекции по теории функций комплексного переменного*, МФТИ, М., 2017.

[3] М.А. Евграфов, *Аналитические функции*, Наука, М., 1991.

[4] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, М., 1973.

[5] Е.С. Половинкин, *Теория функций комплексного переменного*, ИНФРА-М, М., 2015.

[6] Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин, *Лекции по теории функций комплексного переменного*, Наука, М., 1982.

[7] Б.В. Шабат, *Введение в комплексный анализ. Ч. 1, 2*, Наука, М., 1985.

[8] М.И. Шабунин, Е.С. Половинкин, М.И. Карлов, *Сборник задач по теории функций комплексного переменного*, БИНОМ. Лаборатория знаний, М., 2006.

[9] Г.Н. Яковлев, *Лекции по математическому анализу. Ч. 1, 2*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2001.

[10] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1979.

[11] E.M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton University Press, NJ, 2003.