Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Я. М. Дымарский

ЛЕКЦИИ по математическому анализу

Учебное пособие
В трёх частях

Часть I

Функции одной переменной

МОСКВА
МФТИ
2024

Оглавление

Вспомогательный материал

> Книга по высшей математике
> начинается словами: «Мы знаем...»
>
> *Илья Ильф* «Записные книжки»

Здесь мы напоминаем те понятия и стандартные обозначения, которые систематически применяются в курсе математического анализа.

Если понятие набрано курсивом, то на него нужно обратить особое внимание. Жирным шрифтом набрано вводимое математическое понятие. Понятие, взятое в кавычки-лапки, не является математическим и использовано для интуитивного понимания. Текст, взятый в кавычки-елочки, является цитатой.

Теоремы, леммы, следствия и примеры – суть математические утверждения; замечания и обсуждения – суть «правдоподобные рассуждения», призванные сформировать интуитивное понимание введенных понятий и сформулированных утверждений.

Автор признателен коллегам и студентам, высказавшим ценные замечания и предложения. Отдельную благодарность автор выражает Г. Е. Иванову, особую – А. Ю. Петровичу.

0.1. Множества

Понятия **множества** и его **элементов** являются исходными, поэтому мы ограничимся наивным представлением о них. Множество – это набор (совокупность, собрание) каких-либо объектов, которые называются элементами этого множества. Каждый элемент x

множества X ему **принадлежит**; другими словами: X **содержит** x. Отношение принадлежности обозначают $x \in X$, а отсутствие принадлежности обозначают $x \notin X$. **Пустое множество**, обозначаемое символом $\varnothing$, это множество, не содержащее ни одного элемента.

Элементы множества либо прямо указывают (например, так всегда можно сделать, если их количество конечно), либо выделяют среди других объектов их *характеристическим свойством*, т. е. таким свойством, которым обладает каждый элемент данного множества, и не обладает ни один из объектов, множеству не принадлежащий. Запись $x = y$ означает, что разные буквы обозначают один и тот же элемент, $x \neq y$ означает, что указанные элементы различные.

Пример 0.1.1. характеристического свойства: окружность радиуса R с центром в точке A это множество всех точек плоскости, которые удалены от центра на расстояние R.

Избегая парадоксов теории множеств, мы считаем, что выполнен *принцип определенности*: для заданного множества и любого объекта можно определить, принадлежит ли этот объект множеству (т. е. является его элементом) или не принадлежит.

Мы применяем следующие **отношения между множествами**:

1) Множество Y **содержится** во множестве X, если каждый элемент, принадлежащий Y, принадлежит X; обозначение: $Y \subset X$. Множество Y мы называем **подмножеством** множества X.

2) Множества X и Y **равны (совпадают)**, если каждый элемент множества X является элементом множества Y и наоборот; обозначение: $X = Y$.

Над множествами определены следующие **операции** :

1) **объединение**, обозначается как $X \cup Y$ — множество, содержащее все элементы из X и Y;

2) **разность** $X \setminus Y$ — множество элементов X, не входящих в Y;

3) если $Y \subset X$, то разность $X \setminus Y$ называют **дополнением** к Y в X и обозначают Y_X^C или просто Y^C (от англ. *complement*);

4) **пересечение** $X \cap Y$ — множество из элементов, содержащихся как в X, так и в Y;

5) **прямое (декартово) произведение** множеств $X \times Y$ – множество всех *упорядоченных пар* элементов из X и Y, т. е. $X \times Y :=$ $= \{(x, y) = \ x \in X$ и $y \in Y\}$.

Основные свойства операций над множествами: пусть $X, Y \subset Z$, тогда:

1) дополнение пересечения двух множеств есть объединение дополнений каждого из них: $(X \cap Y)_Z^C = X_Z^C \cup Y_Z^C$;

2) дополнение объединения двух множеств есть пересечение дополнений каждого из них: $(X \cup Y)_Z^C = X_Z^C \cap Y_Z^C$.

Задача 0.1.1. Докажите сформулированные свойства и сформулируйте их для произвольной конечной совокупности множеств $X_1, ..., X_n \subset Z$.

Отношение на множестве X (точнее, **бинарное** отношение) мы задаем с помощью подмножества $R \subset X \times X$ декартова квадрата. Факт связи элементов $x_1, x_2 \in X$ бинарным отношением R обычно обозначают $x_1 R x_2$.

Примеры 0.1.1. : 1) $X = \mathbb{R}$ – множество всех действительных чисел, отношение строгого порядка $x_1 < x_2$; 2) $X = \mathbb{R}$, фиксированное число $\varepsilon > 0$ порождает отношение ε-близости: $|x_1 - x_2| < \varepsilon$; 3) X – множество всех прямых на плоскости, отношение параллельности $l_1 || l_2$ в широком смысле (прямая параллельна сама себе).

Нас интересует, выполнены ли следующие свойства отношения:

1) **рефлексивность**: для любого элемента $x \in X$ верно xRx;

2) **симметричность**: если $x_1 R x_2$, то $x_2 R x_1$;

3) **транзитивность**: если $x_1 R x_2$ и $x_2 R x_3$, то $x_1 R x_3$.

Примеры 0.1.2. : 1) отношение строго порядка нерефлексивно, несимметрично, но транзитивно; 2) отношение ε-близости рефлексивно, симметрично, но в общем случае нетранзитивно; 3) отношение параллельности и рефлексивно, и симметрично, и транзитивно.

Отношение, обладающее указанными тремя свойствами называется **отношением эквивалентности**. Отношение эквивалентности R разбивает все множество X на попарно *непересекающиеся* подмножества (**классы эквивалентности**) по правилу: два элемента x_1 и x_2 принадлежат одному классу в том и только том случае, когда $x_1 R x_2$.

Задача 0.1.2. Докажите: если два класса имеют непустое пересечение, то они совпадают.

0.2. Отображения

Пусть заданы множества X и Y. Если *каждому* элементу $x \in X$ сопоставлен *единственный* элемент $y \in Y$, то говорят, что определено **отображение** (**функция**, **оператор**) $f : X \to Y$, действующее из X в Y.

Множество X называется **областью определения** отображения и обозначается $Def(f)$ или $D(f)$ (от англ. *definition*);

множество Y называется **областью значений** отображения;

множество всех элементов $y \in Y$, для каждого из которых существует такой $x \in X$, что $y = f(x)$, называется **образом** отображения и обозначается $Im(f)$ (от англ. *image*); в силу определения, $Im(f) \subset Y$;

f – это правило (закон), по которому осуществляется сопоставление элементов.

Среди всех отображений особый интерес представляют следующие:

1) **инъективное** отображение (**инъекция**, отображение **в** Y) разные элементы отображает в разные: если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$;

2) **сюръективное** отображение (**сюръекция**, отображение **на** Y) имеет своим образом *все* множество Y: для каждого $y \in Y$ существует такой $x \in X$, что $y = f(x)$, т. е. $Im(f) = Y$;

3) **биективное** отображение (**биекция**, **взаимно однозначное соответствие**) является одновременно и инъективным и сюръективным: для каждого $y \in Y$ существует такой единственный $x \in X$, что $y = f(x)$.

Примеры 0.2.1. 1) X – множество игроков футбольной команды, $Y = \mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, инъекция f сопоставляет каждому игроку его номер, изображенный на футболке. 2) X – множество отрезков, принадлежащих данной прямой (точка прямой понимается как вырожденный отрезок), $Y = \mathbb{R}_0^+$ – множество неотрицательных чисел, сюръекция f сопоставляет каждому отрезку его длину. 3) X, Y – множества игроков шахматных команд двух стран; биекция f сопоставляет каждому игроку команды X единственного игрока команды Y, с которым он будет сражаться.

Если задано отображение $f : X \to Y$ и $Z \subset X$, то отображение $g : Z \to Y$, которое совпадает с f на Z, называется **сужением** (**ограничением**) отображения f на Z и обозначается $f|_Z$.

Графиком отображения $f : X \to Y$ называется подмножество прямого произведения $X \times Y$, определяемое так: $Gr(f) = \{(x, y) \in X \times \times Y : \ y = f(x)\}$.

Примеры 0.2.2. Пусть $X = Y = \mathbb{R}$ – множество действительных чисел. Графиком линейной функции $y = kx$ является прямая, графиком квадратичной функции $y = x^2$ – парабола, графиком функции $y = 1/x$ является гипербола, графиком функции $y = \sin x$ является синусоида.

0.3. Числа

Числа $1, 2, \ldots$ мы называем **натуральными**; их множество обозначают $\mathbb{N}$. На множестве $\mathbb{N}$ определены операции **сложения** и **умножения**. Объединяя множество натуральных чисел с одноэлементным множеством, содержащим число ноль, получаем множество $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \cup \mathbb{N}$. Числа $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ называются **целыми**; их множество обозначают $\mathbb{Z}$. На $\mathbb{Z}$ добавляется операция **вычитания**. Упорядоченные пары (p, q), где числа $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$ *взаимно простые*, называют **рациональными** числами; их множество обозначают $\mathbb{Q}$. Традиционно рациональное число обозначают в виде дроби p/q. На $\mathbb{Q}$ добавляется еще одна операция – **деление**. Основные свойства названных **арифметических** операций известны из школьного курса.

Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел является в курсе математического анализа основным. Ему посвящена первая глава.

Замечание 0.3.1. Применяя прямое произведение множеств, арифметические операции можно интерпретировать как отображения. Например, сложение целых чисел является сюръекцией
$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, которую принято обозначать так: $f(x, y) = x + y$. $\boxminus$

Задача 0.3.1. Докажите, что сложение на множестве натуральных чисел, понимаемое как отображение $f(x, y) = x + y$, не является ни сюръекцией, ни инъекцией.

Множество $\mathbb{Q}$ **упорядочено**, т. е. для произвольных чисел $x, y \in \mathbb{Q}$ установлено отношение $x \leq y$ или $y \leq x$ (x **не превосходит** y или y не превосходит x).

Свойства упорядоченности:

1) рефлексивность: $x \leq x$ – любой элемент не превосходит сам себя;

2) **антисимметричность**: если $x \le y$ и $y \le x$, то $x = y$;

3) транзитивность: если $x \le y$ и $y \le z$, то $x \le z$.

Замечание 0.3.2. Удобно, наряду с отношением «не превосходит», использовать симметричное отношение **не меньше**, которое обозначают $x \ge y$ и определяют так: $x \ge y$ тогда и только тогда, когда $y \le x$. $\boxminus$

Если заведомо $x \ne y$, то определены отношения строгого порядка $x < y$ (x **меньше** y) и $x > y$ (x **больше** y). Отношения строгого порядка обладают только свойством транзитивности. Напомним, что на множестве $\mathbb{Q}$ выполняется

Принцип Архимеда: для любого рационального числа c существует натуральное n, которое его больше, т. е. $n > c$.

0.4. Элементы комбинаторики

Пусть дано множество, содержащее n элементов. Каждое его *упорядоченное* подмножество, состоящее из k элементов, называется **размещением** из n по k.

Пример 0.4.1. Из трех букв A, B, C можно образовать 6 размещений по две буквы: $(A, B), (A, C), (B, C), (B, A), (C, A), (C, B)$.

Количество размещений из n по k обозначается A_n^k и вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1)) = \frac{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-k)} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Обозначение $n! := 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ читается n **факториал**. По определению $0! := 1$.

Задача 0.4.1. Докажите формулу количества размещений.

Размещения из n по n называются **перестановками**. Количество перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле $P_n = n!$.

Задача 0.4.2. Выпишите все перестановки из: 1) трех различных букв, 2) трех букв, из которых две совпадают.

Пусть дано множество, содержащее n элементов. Каждое его *НЕупорядоченное* подмножество, состоящее из k элементов, называется **сочетанием** из n по k.

Пример 0.4.2. Из трех букв A, B, C можно образовать 3 сочетания по две буквы: $(A, B), (A, C), (B, C)$.

Количество сочетаний из n по k обозначается C_n^k и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Задача 0.4.3. Докажите формулу количества сочетаний.

Среди многочисленных комбинаторных равенств отметим только: 1) симметричность: $C_n^k = C_n^{n-k}$, 2) сумма соседних коэффициентов: $C_n^{k+1} + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$, 3) значения крайних коэффициентов: $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$, $C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Задача 0.4.4. Докажите сформулированные свойства.

0.5. Суммы

В математическом анализе постоянно исследуются суммы произвольного конечного количества слагаемых. Принято обозначение

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + ... + a_n.$$

Упростить сумму до одного или двух слагаемых удается в исключительных случаях.

Примеры 0.5.1. упрощения сумм. 1) Сумма n первых членов **арифметической прогрессии** $a_k := a_1 + d(k-1)$ вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

2) Сумма n первых членов **геометрической прогрессии** $b_k := = b_1 q^{k-1}$ (при условии $b_1, q \neq 0$) вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \text{ если } q \neq 1.$$

3) Пусть заданы n чисел a_k, где $k = 1, ..., n$. Определим числа $b_k = a_{k+1} - a_k$. Тогда сумма

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_k = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_1.$$

4) При изучении гармонического анализа важнейшую роль играют суммы синусов и косинусов, аргументы которых изменяются как арифметическая прогрессия:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(x + k\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)\cos\left(x + \frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \text{ при } \alpha \neq 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z};$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(x + k\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)\sin\left(x + \frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \text{ при } \alpha \neq 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Задача 0.5.1. Докажите формулу суммы синусов. Указание: умножьте обе части равенства на $\sin(\alpha/2)$ и к каждому слагаемому примените формулу произведения синусов; затем воспользуйтесь примером 3).

5) Натуральная степень суммы двух слагаемых (**бином Ньютона**) вычисляется с помощью суммы, коэффициенты которой определяются комбинаторной формулой сочетаний:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Задача 0.5.2. Докажите формулу бинома Ньютона.

Также нам потребуется многоиндексное суммирование. Для простоты рассмотрим **двойную** сумму, содержащую mn слагаемых a_{ij}, где индексы *независимо* принимают натуральные значения $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$. Ее можно записать тремя способами:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m} a_{ij}.$$

Задача 0.5.3. Докажите, что записанные выше выражения совпадают.

Задача 0.5.4. Сколько слагаемых содержит сумма $\sum\limits_{i,j=1;\ i\neq j}^{n} a_{ij}$?

Задача 0.5.5. Проверьте, что для любых действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ выполнено **тождество Лагранжа**

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) - \sum_{1\leq i<k\leq n} (a_i b_k - a_k b_i)^2.$$

0.6. Неравенства

Для любых действительных чисел a и b верны неравенства $|a+b| \leq$ $\leq |a|+|b|$ (вырожденного треугольника) и $||a|-|b|| \leq |a-b|$ (сравнения модулей).

Для любых неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ их **среднее арифметическое** не меньше **среднего геометрического**:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n},$$

причем равенство достигается только в случае равенства всех чисел. В частности, $(x_1 + x_2)/2 \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}$.

Для любых действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ выполнено **неравенство Коши-Буняковского**

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)^2 \leq ({x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2) \cdot ({y_1}^2 + {y_2}^2 + \ldots + {y_n}^2).$$

Задача 0.6.1. Опираясь на задачу 0.5.5, докажите неравенство Коши-Буняковского.

0.7. Формулировки определений и утверждений

Наряду с текстовой записью мы используем общепринятые логические символы:

1) $\forall$ – для любого (**квантор общности**);

2) $\exists$ – существует (**квантор существования**);

3) : – такой (ая, ое, ие), что

4) $\hookrightarrow$ – выполняется;

5) $A \Rightarrow B$ – из условия А следует утверждение В или B является следствием A;

6) $A \Leftrightarrow B$ – условия А и В **равносильны**;

7) $\neg A$ – **отрицание** условия А;

8) $A \wedge B$ – **логическое пересечение**, т. е. одновременно выполнены оба условия;

9) $A \vee B$ – **логическое объединение**, т. е. выполнено хотя бы одно из двух условий.

Утверждение $A \Rightarrow B$ можно прочитать еще двумя способами: 1) A является **достаточным условием** для B; 2) B является **необходимым условием** для A. Утверждение $A \Leftrightarrow B$ еще читают так: условие B (A) – **критерий** выполнения условия A (B).

Использование логических символов в пособии не формализовано, поэтому одно и то же утверждение можно записать по-разному.

Пример 0.7.1. Утверждение «каковы бы ни были два рациональных числа, существует рациональное число, лежащее между ними» можно записать, например, так:

$$\forall p \in \mathbb{Q} \;\; \forall q \in \mathbb{Q} : \; p < q \;\hookrightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : \; p < r < q.$$

Символ «$\hookrightarrow$» будем использовать внутри определений и утверждений; символ «$\Rightarrow$» – между утверждениями.

Примем без доказательства, что **отрицание утверждения**, содержащего символы 1)-4), формулируется так:

квантор общности $\forall$ заменяется на квантор существования $\exists$ и наоборот,

условие A в конце утверждения заменяется на его отрицание $\neg A$,

после применения квантора $\exists$ ставится логическая связка «:»,

после квантора $\forall$ ставится (или подразумевается) логическая связка «$\hookrightarrow$».

Примеры 0.7.1. Пусть $A(x)$ – некоторое условие, налагаемое на элементы $x \in X$. Тогда:

1) $\neg(\forall x \in X \;\hookrightarrow\; A(x)) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in X : \; \neg A(x)$;

2) $\neg(\exists x \in X : \; A(x)) \;\Leftrightarrow\; \forall x \in X \;\hookrightarrow\; \neg A(x)$.

Названия утверждений «теорема», «лемма», «следствие» и т. д. имеют условный характер и порождены исторической традицией изложения математического анализа.

Замечание 0.7.1 (о знаках равенства)**.** В математическом анализе знак «=» используется в разных трактовках. Чтобы избежать двусмысленности мы будем применять его модификации:

1) $B := F(A)$ – *определение* объекта B с помощью объекта A;

2) $f(x) \equiv g(x)$ при $x \in X$ – *тождественное* равенство двух отображений на множестве X, где $X \subset D(f)$ и $X \subset D(g)$. $\boxminus$

Примеры 0.7.2. 1) По определению функция $\operatorname{tg}(x) := = \sin(x)/\cos(x)$. 2) $|x| \equiv x$ при $x \geq 0$.

Напомним схему доказательства утверждения методом **математической индукции**. Пусть в условие утверждения входит натуральный параметр n и мы хотим доказать его справедливость для всех $n \in \mathbb{N}$. В этом случае достаточно установить, что

1) утверждение верно при $n = 1$ (*база индукции*);

2) если для любого $n \in \mathbb{N}$ утверждение верно, то оно верно для следующего номера $n + 1$ (*индукционный переход*).

Примеры 0.7.3. Задачи из пп. 0.4, 0.5 и 0.6 решаются методом индукции.

В заключение напомним схему доказательства утверждения A методом **от противного**:

1) пользуясь правилом на стр. 15, формулируем *отрицание* $\neg A$ доказываемого утверждения A;

2) из утверждения $\neg A$ выводим утверждение B, которое является ложным.

Полученное противоречие показывает, что предположение $\neg A$ было неверным, и поэтому верно его отрицание $\neg\neg A$, которое по закону двойного отрицания есть утверждение A.

Глава 1

Действительные числа

Я всматриваюсь в вас, о, числа

Велемир Хлебников

1.1. Постановка проблемы

Математический анализ развивался "от конца к началу": во второй половине 17-го века были интуитивно сформулированы понятия производной и интеграла, тогда же появились первые формулировки узловой теоремы Ньютона-Лейбница, которая связывает дифференциальное и интегральное исчисления. В 18-м веке шло активное накопление фактов математического анализа без их корректного обоснования. Только в первой четверти 19-го века Огюстен Коши (1789-1857) дал первые строгие определения предела, непрерывности функции и производной. Но при этом оставался пробел в самом основании математического анализа – строгое построение теории *действительных* чисел $\mathbb{R}$. С этого мы и начнем.

1.2. Расширение понятия числа

Мы исходим из того, что теорию натуральных чисел $\mathbb{N}$, целых чисел $\mathbb{Z}$ и рациональных чисел $\mathbb{Q}$ считаем известной (см. п. 0.3). Отметим, что расширения $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ имеют *алгебраическую* цель – появление новых операций с числами. У расширения $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ цель *метрическая* – решение проблемы *соизмеримости* отрезков (см. таблицу ниже).

числа	операции	запись
$\mathbb{N}$	сложение, умножение	*конечный* упорядоченный набор цифр
$\mathbb{Z}$	добавляется вычитание	$\pm$ конечный упоряд. набор цифр
$\mathbb{Q}$	добавляется деление	*два* конечных упоряд. набора цифр
$\mathbb{R}$	все функции на $\mathbb{R}$	$\pm$ *бесконечный* упоряд. набор цифр

Пример 1.2.1. Ги́ппас из Метапонта (574-522 до н.э.) доказал, что $\sqrt{2}$, т. е. длина гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника с единичным катетом, не является рациональным числом. Выходило, что отрезок существует, но длины у него нет. На самом деле катет и гипотенуза являются несоизмеримыми отрезками.

Мы требуем, чтобы расширение понятия рационального числа удовлетворяло **принципу преемственности** : 1) сохранение всех имеющихся операций и их *алгебраических свойств*, 2) *неизменность* этих операций для рациональных чисел, 3) сохранение *отношений порядка* (больше, меньше) между числами.

Предложено несколько методов расширения, среди них:

первоначальный «метод сечений», предложенный Рихардом Дедекиндом (1831-1916),

метод *фундаментальных последовательностей* Георга Кантора (1845-1918),

аксиоматический метод, идейным вдохновителем которого был Давид гильберт (1862-1943),

метод *бесконечных десятичных дробей*, предложенный Карлом Вейерштрассом (1815-1897).

Мы воспользуемся последним, преимуществами которого являются наглядность появления иррациональных чисел и элементарность понятийного аппарата. Аксиоматика действительных чисел будет сформулирована нами в этой главе как перечисление характеристических свойств действительных чисел. Метод Кантора будет применен значительно позже (в теории метрических пространств, к которым относится, в частности, $\mathbb{R}$).

1.3. Бесконечная десятичная дробь

Мы применим следующий

ПЛАН ВВЕДЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ:

1) Предложим *новую форму записи* рационального числа в виде десятичной дроби.

2) Увидим в новой записи *возможность расширения* понятия числа.

3) Введем понятие действительного числа как бесконечной десятичной дроби, введем операции с числами и докажем преемственность.

Определение 1.3.1. Бесконечная десятичная дробь *записывается* в виде: $a := \pm a_0, a_1 \ \ldots \ a_n \ldots$, где $a_0 \in \mathbb{N}_0$, $a_k \in \{0, 1, \ldots \ , 9\}$ ($k \in \mathbb{N}$), т. е. правее запятой стоят *цифры.* ⊠

Замечание 1.3.1. Бесконечная десятичная дробь пока только обозначение *бесконечного упорядоченного* множества цифр. ⊟

Замечание 1.3.2. Можно было бы использовать любую позиционную систему счисления, например, двоичную. Но десятичная система привычнее. ⊟

Определение 1.3.2. Десятичная дробь называется **периодической**, если начиная с определенного номера *конечный набор цифр*, именуемый **периодом**, повторяется.

Обозначение: $a = \pm a_0, a_1 \ \ldots \ a_n(a_{n+1} \ \ldots \ a_{n+p})$.

Периодическая десятичная дробь с нулем в периоде, т. е. $a = \pm a_0, a_1 \ \ldots \ a_n(0)$ называется **конечной**. Обычно нуль в скобках не пишут.

Договоренность о десятичной дроби с периодом 9: положим по определению, что

$$\pm a_0, a_1 \ \ldots \ a_n(9) := \pm(a_0, a_1 \ \ldots \ a_n + 0, \underbrace{0 \ \ldots \ 0}_{n-1} 1), \text{ где } a_n \neq 9, \qquad (1.1)$$

т. е. две различные записи мы считаем одной и той же периодической десятичной дробью (мотивировка приведена ниже) ⊠.

Примеры 1.3.1. $3,28(9) = 3,29$, $-3,28(9) = -3,29$.

Лемма 1.3.1 (о конечной десятичной дроби)**.** *Рациональное число $\pm r/q$ можно записать в виде конечной десятичной дроби*

$$\pm\frac{r}{q} = \pm\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\right) = \pm a_0, a_1\ \ldots\ a_n(0)$$

тогда и т. т., когда $q = 2^k \cdot 5^m$, где $k, m \in \mathbb{N}_0$ и $n = \max\{k, m\}$.

Доказательство вытекает из определения десятичной записи натурального числа и определения десятичной дроби.

Пример 1.3.1.

$$\frac{127}{2^3 \cdot 5^2} = \frac{127 \cdot 5}{10^3} = \frac{635}{1000} = \frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1000} = 0,635.$$

Задача 1.3.1. По образцу предыдущего примера докажите лемму 1.3.1.

Лемма 1.3.2 (о представлении рациональных чисел)**.** *Между множеством $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и множеством P всех периодических десятичных дробей (с учетом договоренности (1.1)) существует биекция.*

Доказательство. ($\Leftarrow$) Дана периодическая десятичная дробь $x = 0,(a_1\ \ldots\ a_p)$ (для простоты вычислений мы взяли дробь с $a_n = 0$ и ее период начинается сразу после запятой, т. е. дробь x является **чистой** периодической). Применим к ней *формальное* умножение на 10^p:

$$10^p \cdot 0,(a_1\ \ldots\ a_p) = \overline{a_1\ \ldots\ a_p} + 0,(a_1\ \ldots \overline{a}_p) \ \Rightarrow\ 10^p \cdot x = \overline{a_1\ \ldots\ a_p} + x \ \Rightarrow$$

$$x = \frac{\overline{a_1\ \ldots\ a_p}}{10^p - 1}, \tag{1.2}$$

где $\overline{a_1\ \ldots\ a_p} = a_p + 10a_{p-1} + \ldots + 10^{p-1}a_1$. Мы получили обыкновенную дробь. Значит, нами определено отображение $\varphi : P \to \mathbb{Q}$.

Отображение φ согласовано с договоренностью (1.1), т. е. $\varphi(a_0, a_1\ \ldots\ a_n(9)) = \varphi(a_0, a_1\ \ldots\ a_n + 0,\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{n-1}1)$. Проверим это утверждение с помощью формулы (1.2):

$$\varphi(0,(9)) = \frac{9}{10-1} = 1 = 1 + 0,(0) = 1 + \frac{0}{10-1} = \varphi(1,(0))$$

($\Rightarrow$) Дана дробь $\pm r/q$ ($r, q \in \mathbb{N}$). Пусть среди делителей числа q имеются отличные от 2 и 5 (иначе см. лемму 1.3.1). Делим числитель

r на знаменатель q “уголком”. Так как остаток меньше делителя, то не более, чем через $q-1$ шагов, остаток впервые повторится – и начнется второе повторение периода. И т. д. Значит, определено отображение $\psi : \mathbb{Q} \to P$.

Можно доказать, что деление уголком никогда не даст 9 в периоде. Убедимся в этом на примере дроби $x = 0,(9)$. Пусть, от противного, $\psi(r/q) = 0,(9)$. Если $r \geq q$, то получили бы $a_0 \geq 1$. Пусть $0 < r < q$. Покажем, что в этом случае существует такое $n \in \mathbb{N}$, для которого $r/q < 0,\underbrace{99\ \dots\ 9}_{n}$. После равносильных преобразований

$$\frac{r}{q} < \frac{10^n - 1}{10^n} \ \Leftrightarrow\ 10^n > \frac{q}{(q-r)}$$

получаем неравенство, истинное (в силу принципа Архимеда, стр. 11) для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Но метод деления натуральных чисел уголком на каждом шаге дает конечную десятичную дробь, которая *меньше*, чем данная обыкновенная дробь – противоречие.

Докажем, что предложенные отображения взаимно обратны. С этой целью осуществим деление уголком обыкновенной дроби (1.2):

$$\frac{\overline{a_1\ \dots\ a_p}}{10^p - 1} = \frac{\overline{a_1\ \dots\ a_p}}{10^p} \cdot \frac{\overbrace{99\ \dots\ 9}^{p} + 1}{\underbrace{99\ \dots\ 9}_{p}} = 0, a_1 \dots a_p \left(1 + \frac{1}{\underbrace{99\ \dots\ 9}_{p}} \right) =$$

$$= 0, a_1\ \dots\ a_p + \frac{0, a_1\ \dots\ a_p}{10^p} \cdot \frac{\overbrace{99..9}^{p} + 1}{\underbrace{99\ \dots\ 9}_{p}} =$$

$$= 0, a_1\ \dots\ a_p a_1\ \dots\ a_p + 0,\overbrace{00\ \dots\ 0}^{p} a_1\ \dots\ a_p \cdot \frac{1}{\underbrace{99\ \dots\ 9}_{p}} = \dots$$

Мы получили исходную периодическую дробь. Значит, с учетом договоренности (1.1), верно $\psi = \varphi^{-1}$. ■

Обсуждение 1.3.1. Во-первых, теперь понятно, почему введена договоренность (1.1). Во-вторых, ниже мы определим сложение и умножение бесконечных десятичных дробей. Можно доказать, что определенная нами биекция "сохраняет" эти операции. Для сложения это означает: пусть

$$\psi(r/q) = \pm a_0, a_1 \ \dots \ a_n(a_{n+1} \ \dots \ a_{n+p}),$$

$$\psi(r'/q') = \pm a'_0, a'_1 \ \dots \ a'_m(a'_{m+1} \ \dots \ a'_{m+t}),$$

тогда

$$\psi(\frac{r}{q} + \frac{r'}{q'}) =$$

$$= \pm a_0, a_1 \dots a_n(a_{n+1} \dots a_{n+p}) + (\pm a'_0, a'_1 \dots a'_m(a'_{m+1} \dots a'_{m+t})).$$

Оказывается, только предложенная биекция между Q и P сохраняет операции между дробями. ⊟

Теперь мы можем дать основное

Определение 1.3.3. Действительным (вещественным) числом будем называть бесконечную десятичную дробь $\pm a_0, a_1 \dots a_n \dots$. Если дробь непериодическая, то число назовем **иррациональным**. Т.о., множество действительных чисел $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$, где $\mathbb{J}$ – множество иррациональных чисел. ⊠

Примеры 1.3.2. иррациональных чисел:
1) $0,1010010001\dots1\underbrace{0\dots0}_{k}1\dots$ – это непериодическая десятичная дробь; 2) $\sqrt{2}$; 3) π; 4) число e (определение дано ниже). Примеры 2-4, безусловно, нужно обосновывать.

1.4. Порядок на $\mathbb{R}$

На множестве $\mathbb{R}$ существует порядок преемственный порядку по возрастанию на $\mathbb{Q}$.

Определение 1.4.1. Модулем , неотрицательного действительного числа назовем само число; модулем отрицательного числа $-a_0, a_1 \dots a_n \dots$ назовем число $a_0, a_1 \dots a_n \dots$. ⊠

Определение 1.4.2. (равенство и порядок действительных чисел). Положим, что:

1) два вещественных числа **равны**, если их десятичные записи совпадают;

2) из двух разных неотрицательных чисел **больше** то, у которого больше первая цифра в записи при чтении слева направо;

3) любое неотрицательное действительное число больше любого отрицательного: $a_0, a_1 \ldots a_n \ldots > -b_0, b_1 \ldots b_n \ldots$;

4) из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше.

Если a больше b, то – по определению – b **меньше** a.

Обозначения остаются прежними: $a > b$ означает, что a больше b, $b < a$ означает, что b меньше a; $a \geq b$ означает, что a больше или равно b, $b \leq a$ означает, что b меньше или равно a ⊠

Теорема 1.4.1. *Отношение порядка обладает свойствами:*

1) Преемственности: для рациональных чисел $a, b \in \mathbb{Q}$ введенное отношение порядка совпадает с прежним.

2) Из двух разных действительных чисел одно больше другого.

3) Транзитивность: если $a < b$, $b < c$, то $a < c$.

*4) **Плотность множества рациональных чисел**: между двумя произвольными действительными числами $a < b$ найдется рациональное число $r \in \mathbb{Q}$, т. е. $a < r < b$.*

Задача 1.4.1. 1) Докажите п. 1 теоремы 1.4.1 (хотя бы для случая двух чистых периодических дробей с периодами одинаковой длины), докажите пункты 2 и 3. 2) Докажите: если $a \leq b$, $b \leq c$, то $a \leq c$. Сформулируйте и докажите аналогичное свойство, если $a \leq b$, $b < c$.

Доказательство п. 4 для двух неотрицательных чисел. Пусть

$$0 \leq \underbrace{a_0, a_1 \ldots a_{n-1}}\, a_n \ldots < \underbrace{a_0, a_1 \ldots a_{n-1}}\, b_n \ldots \;\Leftrightarrow\; a_n < b_n.$$

После цифры a_n обязательно появится цифра отличная от 9 (иначе все девятки). Эту цифру увеличим на единицу, а остальные цифры правее заменим нулями – это будет искомое рациональное число. ■

Следствие 1.4.1. *Между двумя действительными числами имеется любое конечное количество рациональных чисел:*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}\ (a < b)\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{Q} :\ a < r_1 < \ldots < r_k < b.$$

Следствие 1.4.2 (плотность множества иррациональных чисел). *Между двумя действительными числами $a < b$ найдется иррациональное $s \in \mathbb{J}: \ a < s < b$.*

Задача 1.4.2. Докажите следствие 1.4.2. Указание: примените п. 3 теоремы 1.4.1 и пример 1.3.2.1 иррационального числа.

Обычно у нас нет полной записи действительного числа в виде бесконечной десятичной дроби. Поэтому полезна

Теорема 1.4.2 (о совпадении действительных чисел). *Если для вещественных чисел c_1, c_2 существуют две последовательности* рациональных *чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых $a_n \leqslant c_1 \leqslant c_2 \leqslant b_n$ и $b_n - a_n \leqslant 1/10^n$, то $c_1 = c_2$.*

Доказательство от противного. Тогда между c_1 и c_2 найдутся два разных *рациональных* числа, для которых $r_2 - r_1 > 1/10^m$, где m – некоторое натуральное число. По свойству транзитивности $a_n < r_1 < r_2 < b_n$. Возьмем n > m и для рациональных чисел (для которых определены арифметические операции!) получим противоречие: $1/10^m < r_2 - r_1 < b_n - a_n \leqslant 1/10^n$. ■

1.5. Числовая прямая

Переходим к *геометрической* интерпретации множества $\mathbb{R}$.

На прямой l выберем две произвольные точки O и A. Первой поставим в соответствие число 0, второй – число 1. Опираясь на аксиоматику евклидовой геометрии и данное нами определения действительных чисел, можно доказать, что между всеми точками $B \in l$ и действительными числами $b \in \mathbb{R}$ существует *единственная биекция* $l \ni B \leftrightarrow b \in \mathbb{R}$, сохраняющая и расстояние ($|OB| = |b|$), и порядок ($D - B - C \ \Leftrightarrow \ d < b < c$). Прямая l, точки которой интерпретируются как числа с помощью указанной биекции, называется **числовой**. Удобно ввести

Определение 1.5.1 (геометрическая терминология).

1) **Отрезок** $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$;

2) **интервал** $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$;

3) **полуинтервалы**

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}, \quad [a, b) := \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}. \boxtimes$$

Дополнительно удобно ввести следующие формальные символы: $+\infty$ (**плюс бесконечность**), $-\infty$ (**минус бесконечность**), ∞ (**бесконечность**) . С их помощью можно осуществить две разные **компактификации** числовой прямой:

Расширенная числовая прямая: $\overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. **Порядок** на $\overline{\mathbb{R}}$: по определению полагаем, что для любого $a \in \mathbb{R}$ выполняется двусторонняя оценка: $-\infty < a < +\infty$.

Проективная прямая: $\mathbb{R}P^1 := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (основной объект исследования в проективной геометрии, отсюда название).

Роль введенных символов и смысл понятия «компактификация» будет раскрываться постепенно на протяжении всего курса.

Мы будем работать с **полубесконечными** интервалами $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, с полубесконечными полуинтервалами $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ (и те, и другие еще называют **лучами**), и со всей числовой прямой $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Отрезки, интервалы, полуинтервалы, лучи и всю числовую прямую мы будем называть **промежутками** и обозначать $\langle a, b \rangle$.

Обсуждение 1.5.1. Следствие 1.4.2 означает, что если пользоваться только рациональными числами, мы заведомо получаем прямую с "дырками". Вот в чем причина "отсутствия длины" у гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника с единичным катетом! Впрочем, мы еще не обосновали, что закрыли *все* дырки на прямой. $\boxminus$

1.6. Точные грани числового множества

Эти понятия являются ключевыми в обосновании теории пределов и всего математического анализа. Они обобщают понятия max и min и позволяют доказать, что на $\mathbb{R}$ нет "дырок".

Определение 1.6.1. Подмножество $X \subset \mathbb{R}$ называется **ограниченным сверху (снизу)**, если

$$\exists C \in \mathbb{R} : \; \forall x \in X \; \hookrightarrow \; x \leq C \; (x \geq C).$$

Число C называется **верхней (нижней) гранью** множества X. Подмножество, ограниченное и сверху, и снизу называется **ограниченным**. $\boxtimes$

Определение 1.6.2. Число M называется **точной верхней гранью** числового множества X ($M = supremum X = \sup X$), если:

1) M является верхней гранью X,

2) любое число, меньшее M, НЕ является верхней гранью, т. е.

$$\forall M' < M \ \exists x \in X \ \hookrightarrow \ x > M'.$$

Число m называется **точной нижней гранью** числового множества X $(m = infimum X = \inf X)$, если:

1) m является нижней гранью X,

2) $\forall m' > m \ \exists x \in X \ \hookrightarrow \ x < m'$. ⊠

Для сравнения напомним, что число $\mathbf{M} = \max X$ $(\mathbf{m} = \min X)$ называется ***максимумом (минимумом) числового множества*** X, если $\mathbf{M} \in X$ $(\mathbf{m} \in X)$ и $\forall x \in X \ \hookrightarrow \ \mathbf{M} \geq x$ $(\mathbf{m} \leq x)$.

Задача 1.6.1. Обозначим через $U(X)$ множество всех верхних граней множества X, а через $L(X)$ – множество всех нижних граней; не исключено, что эти множества пустые. Докажите, что:

1) *Если* $\sup X$ существует, то $\sup X = \min U(X)$, а множество $U(X) = [\sup X, +\infty)$ (т. е. луч); иначе говоря, супремум есть *наименьшая* из верхних граней. *Если* $\inf X$ существует, то $\inf X = \max L(X)$, $L(X) = (-\infty, \inf(X)]$; т. е. инфимум есть *наибольшая* из нижних граней. (Указание: рассуждайте «от противного».)

2) Если $\max X$ $(\min X)$ существует, то $\max X = \sup X$ $(\min X = \inf X)$.

Примеры 1.6.1. 1) Рассмотрим множество $X := \{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда $\sup X = 1$, $\inf X = 0$, причем $\sup X \in X$, $\inf X \notin X$. В самом деле, $1 \in X$ и $\forall n \in \mathbb{N} \ \hookrightarrow \ 1 \geq 1/n$; поэтому, в силу задачи 1.6.1.2, получаем: $1 = \max X = \sup X$. С другой стороны, $\forall n \in \mathbb{N} \ \hookrightarrow \ 0 < 1/n$, значит ноль является нижней гранью X. При этом, для любого действительного числа $m' > 0$, в силу п. 3 теоремы 1.4.1 (о плотности множества рациональных чисел), найдется такое рациональное число r/q, что $0 < r/q < m'$. Возьмем произвольное $N \in \mathbb{N}$, чтобы $N > 2q$, тогда $1/N < 1/(2q) < r/q$. Значит, $0 < 1/N < m'$. Но $1/N \in X$, поэтому число $m' \neq inf X$. Следовательно, $0 = \inf X$.

2) Рассмотрим множество $X = \{x \in \mathbb{Q} : \ x^2 < 2\}$ рациональных чисел, квадрат которых меньше двух. Множество ограниченное, поскольку $\forall x \in X \ \hookrightarrow \ |x| < 2$. Но пока мы не можем ответить на вопрос, существуют ли у него точные грани.

Теорема 1.6.1 (о существовании и единственности точных граней)**.** *Если непустое множество X ограничено сверху (снизу), то существует причем единственный* $\sup X$ *(*$\inf X$*).*

Обсуждение 1.6.1. Именно *существование* супремума и инфимума означает, что с помощью иррациональных чисел на числовой прямой ликвидированы все “дырки”. Отметим, что существование максимума и минимума ограниченного множества не гарантировано, поэтому применение супремума и инфимума предпочтительнее. $\boxminus$

Для доказательство теоремы нам понадобятся следующие утверждения.

Теорема 1.6.2 (Принцип Архимеда на $\mathbb{R}$). *Для любого действительного числа x существует натуральное число n, которое его больше: $n > x$.*

Обсуждение 1.6.2. Геометрически принцип можно понимать так: на евклидовой прямой не существует отрезков “бесконечно большой” длины. Оказывается, существуют алгебраические объекты с операциями сложения и умножения (их называют **полями**), в которых отношение порядка не удовлетворяет принципу Архимеда. $\boxminus$

Доказательство. Если x – неположительное число, то $x < 1$ по определению. Если же $x = a_0, a_1 a_2 \ldots > 0$, то, опять же по определению порядка, $x < a_0 + 1 \in \mathbb{N}$. $\blacksquare$

Лемма 1.6.1 (о “поплавке”). *Пусть число $b \in X$. Определим $X_{\geq b} := \{x \in X: \ x \geq b\}$. Тогда* $\sup X = \sup X_{\geq b}$.

Доказательство сразу следует из определения супремума.

Нам понадобятся следующие понятия:

Определение 1.6.3. Целой частью $[x]$ действительного числа x называют ближайшее к нему целое число *слева*, т. е. $[x] := \max\{n \in \in \mathbb{Z}: \ n \leq x\}$.

Дробной частью действительного числа x называют его разность с целой частью: $\{x\} := x - [x] \geq 0$. $\boxtimes$

Примеры 1.6.2. : 1) целая часть неотрицательного числа равна $[a_0, a_1 a_2 \ldots] = a_0$, 2) $[2] = 2$, $[-2] = -2$, $\{2\} = \{-2\} = 0$, 3) $[2,1] = 2$, $[-2,1] = -3$, 4) $\{2,1\} = 0,1$, $\{-2,1\} = 0,9$.

Задача 1.6.2. Нарисуйте графики функций $y = [x]$ и $y = \{x\}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Доказательство теоремы 1.6.1. Сразу отметим, что супремум, если он существует, единственный. Предположив противное, мы получим два числа, из которых одно строго больше другого и оба числа являются верхними гранями. Из определения супремума следует, что большее из чисел не является супремумом.

Докажем существование супремума. Сначала рассмотрим случай, когда множество X содержит хотя бы одно неотрицательное число. Из леммы 1.6.1 следует, что $\sup X = \sup X_{\geq 0}$. Поэтому, без ограничения общности, мы полагаем, что множество X является непустым и содержит только неотрицательные числа.

Мы конструктивно определим искомый супремум.

0) Из ограниченности сверху множества X, определения порядка и принципа Архимеда следует, что

$$\forall x = a_0, a_1 a_2 \ldots \in X \ \hookrightarrow \ x \leq C = c_0, c_1 c_2 \ldots < c_0 + 1 \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим множество A_0 *целых частей* всех чисел из X. Оно не пусто и конечно, поскольку строго ограничено сверху натуральным числом $c_0 + 1$, а снизу – нулем: $A_0 \subset \{0, 1, \ldots c_0\}$. Поэтому в нем существует наибольший элемент $\overline{a}_0$ – это целая часть искомого супремума.

1) Теперь рассматриваем непустое подмножество $X_0 \subset X$ таких чисел, у которых целая часть равна $\overline{a}_0$. Пусть A_1 – непустое множество всех *первых десятичных знаков* чисел из X_0. Это множество конечно (его элементами могут быть числа 0, 1, $\ldots$9), поэтому существует наибольший элемент $\overline{a}_1$ – это первый десятичный знак искомого супремума.

2) Теперь рассматриваем непустое подмножество $X_1 \subset X_0 \subset X$ таких чисел, у которых первый десятичный знак равен $\overline{a}_1$. Обозначим через $\overline{a}_2$ – наибольший из вторых десятичных знаков всех чисел множества X_1.

$\ldots$

k) Продолжая таким образом, мы построим последовательность вложенных подмножеств $X \supset X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_k \supset \ldots$ и десятичных знаков $\overline{a}_k = \max a_k \quad (k \in \mathbb{N}_0)$, причем

$$X_k = \{x = \overline{a}_0, \overline{a}_1 \ldots \overline{a}_k a_{k+1} \ldots \in X_{k-1}\},$$

т. е. целая часть числа и десятичные знаки до номера k включительно уже выбраны и зафиксированы. Процесс определения знаков $\overline{a}_k$ может оказаться конечным, периодическим бесконечным или непериодическим бесконечным. Но в любом случае мы получили десятичную дробь $\overline{x} = \overline{a_0}, \overline{a_1}\ \overline{a_2} \ldots$. Не исключено, что она окажется периодической с периодом 9. В этом случае мы заменяем ее на конечную, согласно договоренности (1.1).

Покажем, что $\overline{x} = \sup X$. Возьмем произвольное число $x = a_0, a_1 a_2 \ldots \in X$. Из определения десятичных знаков числа $\overline{x}$ следует, что $\forall k \in \mathbb{N}_0: \ a_k \le \overline{a_k}$. Следовательно число $\overline{x}$ является *верхней гранью* множества X.

Покажем, что это *точная* верхняя грань. Возьмем произвольное число $\widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1 \widetilde{a}_2 \ldots = \widetilde{x} < \overline{x}$. Если $\widetilde{x} < 0$, оно меньше любого числа из множества X, которое содержит только неотрицательные числа; значит, это не верхняя грань. Если же $0 \le \widetilde{x} < \overline{x}$, то это означает, что существует номер k, для которого выполняется

$$\widetilde{a}_0 = \overline{a}_0, \ \widetilde{a}_1 = \overline{a}_1, \ \ldots \ , \ \widetilde{a}_{k-1} = \overline{a}_{k-1}, \ \widetilde{a}_k < \overline{a}_k.$$

Но из определения непустого множества X_k следует, что любой его элемент $x \in X_k \subset X$ больше, чем $\widetilde{x}$. Значит, $\widetilde{x}$ не является верхней гранью для X, и точность верхней грани $\overline{x}$ доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда все числа из множества X отрицательны. Тогда любой элемент из X имеет вид $x = -a_0, a_1 a_2 \ldots$. Из всех возможных чисел a_0, которые встречаются в записи чисел $x \in X$, выберем *наименьшее* $\widetilde{a}_0$ (это возможно, поскольку $a_0 \in \mathbb{N}_0$). Затем рассмотрим только те элементы $x \in X$, у которых $a_0 = \widetilde{a}_0$. Из всех десятичных знаков a_1 отобранных элементов выберем наименьший $\widetilde{a}_1$. Затем рассмотрим только те элементы $x \in X$, у которых $a_0 = \widetilde{a}_0, a_1 = \widetilde{a}_1$, и из их десятичных знаков a_2 выберем наименьший $\widetilde{a}_2$. И т. д. В результате определим действительное число $\widetilde{x} := -\widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1 \widetilde{a}_2 \ldots$ Это и есть искомый супремум, что доказывается аналогично первому случаю. ■

Задача 1.6.3. Докажите утверждение теоремы 1.6.1, относящееся к инфимуму.

Учитывая задачу 1.6.1.2, теорему 1.6.1 можно переформулировать так:

Теорема 1.6.3. *Множество $U(X)$ всех верхних граней ограниченного сверху множества X содержит единственный наименьший элемент $\min U(X) = \sup X$. Множество $L(X)$ всех нижних граней ограниченного снизу множества X содержит единственный наибольший элемент $\max L(X) = \inf X$.*

В дальнейшем нам придется иметь дело с двумя такими числовыми множествами, что каждый элемент первого множества не больше каждого элемента второго. В этом случае справедлива

Теорема 1.6.4 (о разделении). *Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$ – непустые множества. Причем $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ справедливо $x \leq y$. Тогда существуют* $\sup X$, $\inf Y$, *причем*

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \ \hookrightarrow \ x \leq \sup X \leq \inf Y \leq y.$$

Доказательство. Существование супремума и инфимума следует из непустоты данных множеств и того обстоятельства, что каждый элемент $y \in Y$ является верхней гранью для X, а каждый элемент $x \in X$ является нижней гранью для Y. Оценки $x \leq \sup X$ и $\inf Y \leq y$ следуют из определений супремума и инфимума. Остается доказать внутреннее неравенство. Поскольку (теорема 1.6.3) $\sup X$ есть наименьшая из верхних граней, то $\forall y \in Y$ справедливо: $\sup X \leq y$. Из полученного неравенства следует, что $\sup X$ есть одна из нижних граней множества Y. Поскольку (теорема 1.6.3) $\inf Y$ есть наибольшая из нижних граней, то $\sup X \leq \inf Y$. ■

Задача 1.6.4. Докажите неравенство $\sup X \leq \inf Y$ из теоремы 1.6.4 методом «от противного».

Для неограниченного числового множества можно ввести понятия точных граней с помощью символов $\pm\infty$.

Определение 1.6.4. Для неограниченного сверху множества X положим по определению $\sup X = +\infty$, а для неограниченного снизу множества X положим $\inf X = -\infty$. ⊠

Теперь теорема 1.6.1 о существовании точных граней справедлива для произвольного множества.

Задача 1.6.5. Сформулируйте теорему 1.6.1 для произвольного множества и докажите ее.

1.7. Арифметические операции на $\mathbb{R}$

Чтобы определить операции с произвольными действительными числами, мы воспользуемся операциями с рациональными числами, точными гранями и теоремой 1.4.2 о совпадении действительных чисел.

Пусть α, β – произвольные действительные числа. Обозначим через A (B) множество всех рациональных чисел a (b) не больших α (β), а через A' (B') множество всех рациональных чисел a' (b') не меньших α (β).

Определение 1.7.1. **Суммой** двух действительных чисел α и β назовем такое действительное число $\gamma := \alpha + \beta$, для которого справедливы двусторонние оценки

$$\forall a \in A \;\; \forall b \in B \;\; \forall a' \in A' \;\; \forall b' \in B' \;\hookrightarrow\; a + b \leq \gamma \leq a' + b'. \boxtimes$$

Докажем корректность данного определения.

Теорема 1.7.1. *Для любых действительных чисел α, β их сумма существует, единственна и имеет место преемственность (т. е. совпадает с определением суммы для рациональных чисел).*

Доказательство существования. Рассмотрим множество $\{a + b\}$ всевозможных сумм, где $a \in A$ и $b \in B$. Это множество ограничено любым числом $a' + b'$, где $a' \in A'$ и $b' \in B'$. Поэтому существует число $\gamma_m = \sup\{a + b\}$ и для него справедлива нижняя оценка $a + b \leq \leq \gamma_m$. Аналогично, существует число $\gamma_M = \inf\{a' + b'\}$, для которого справедлива верхняя оценка $\gamma_M \leq a' + b'$. Но всегда $a + b \leq a' + b'$, поэтому, в силу теоремы 1.6.4,

$$a + b \leq \gamma_m \leq \gamma_M \leq a' + b'.$$

Рассмотрим случай когда оба числа положительные. Заметим, что среди чисел a (a') и b (b') есть десятичные приближения числа α по недостатку (по избытку) и аналогично – для числа β:

$$0 \leq a_n = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \leq \alpha < \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n + 1/10^n = a'_n, \tag{1.3}$$

$$0 \leq b_n = \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_n \leq \beta < \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_n + 1/10^n = b'_n. \tag{1.4}$$

Следовательно, $(a'_n + b'_n) - (a_n + b_n) < 2/10^n$. Таким образом, для чисел γ_m, γ_M выполнены условия теоремы 1.4.2. Стало быть, эти числа совпадают: $\gamma := \gamma_m = \gamma_M$, и для числа γ справедливо определение суммы.

Пусть числа разных знаков, скажем $\alpha > 0$, а $\beta < 0$. Тогда (сравните с (1.3) и (1.4))

$$0 \leq a_n = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \leq \alpha < \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n + 1/10^n = a'_n,$$

$$b_n = -\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_n - 1/10^n < \beta \leq -\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_n = b'_n \leq 0.$$

Значит, $(a'_n + b'_n) - (a_n + b_n) < 2/10^n$ и мы получаем тот же вывод: искомая сумма $\gamma = \gamma_m = \gamma_M$.

Доказательство единственности суммы проведем от противного: допустим, что существует две суммы γ', γ'' и $\gamma' < \gamma''$. Тогда выполнена двусторонняя оценка $a+b \le \gamma' < \gamma'' \le a'+b'$, из которой следует, что эти числа совпадают (если повторить предыдущие рассуждения).

Доказательство преемственности. Если оба числа рациональные, то их сумма удовлетворяет определению, а другой быть не может в силу единственности. ■

Определим умножение положительных действительных чисел $\alpha, \beta > 0$. Через A (B) обозначим множество всех *положительных* рациональных чисел, не больших α (β), а через A' (B') множество всех рациональных чисел a' (b') не меньших α (β).

Определение 1.7.2. Произведением двух положительных чисел α и β назовем такое число $\gamma := \alpha \cdot \beta$, для которого справедлива двусторонняя оценка

$$\forall a \in A \;\; \forall b \in B \;\; \forall a' \in A' \;\; \forall b' \in B' \;\hookrightarrow\; a \cdot b \le \gamma \le a' \cdot b'. \boxtimes$$

Теорема 1.7.2. *Для любых α, $\beta > 0$ их произведение существует, единственно и имеет место преемственность.*

Доказательство теоремы аналогично предыдущему. Существует число $\gamma_m = \sup\{a \cdot b\}$ и для него справедлива нижняя оценка $a \cdot b \le \le \gamma_m$; существует число $\gamma_M = \inf\{a' \cdot b'\}$, для которого справедлива верхняя оценка $\gamma_M \le a' \cdot b'$. Поэтому $a \cdot b \le \gamma_m \le \gamma_M \le a' \cdot b'$. Из оценок (1.3) и (1.4) следует, что разность между произведениями, взятыми по недостатку и избытку данных чисел, оценивается так:

$$a'_n b'_n - a_n b_n = (a_n + \frac{1}{10^n})(b_n + \frac{1}{10^n}) - a_n b_n = \frac{a_n + b_n}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} <$$

$$< \frac{\alpha_0 + 1 + \beta_0 + 1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} < \frac{[\alpha] + [\beta] + 3}{10^n}.$$

Поскольку числитель $[\alpha] + [\beta] + 3$ есть постоянное натуральное число, для любого натурального k найдется такое n, для которого разность $a'_n b'_n - a_n b_n < 1/10^k$. ■

Теперь мы можем дать

Определение 1.7.3. Произведение двух действительных чисел произвольных знаков определяется по правилу знаков:

1. $\forall \alpha: \; 0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$.

2. Произведение чисел одного знака равно произведению их модулей.

3. Произведение чисел разных знаков равно минус произведению их модулей. $\boxtimes$

Нам остается определить обратные операции.

Определение 1.7.4. Противоположным к числу α назовем число $\beta = -\alpha := (-1)\alpha$. **Разность** действительных чисел определяется по правилу $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$.

Обратным к числу $\alpha \neq 0$ назовем такое число $\beta = 1/\alpha$, для которого $\alpha\beta = 1$. **Деление** действительных чисел определяется по правилу $\alpha/\beta := \alpha(1/\beta)$, где $\beta \neq 0$. ⊠

Задача 1.7.1. Докажите корректность определения обратного числа.

Из данных выше определений следует, что свойства арифметических операций, справедливые для рациональных чисел, справедливы и для действительных чисел.

СВОЙСТВА СЛОЖЕНИЯ.

1. **Коммутативность**: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. **Ассоциативность**: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
3. **Свойство нуля**: $0 + \alpha = \alpha$
4. Существование **противоположного** числа: $\forall\alpha\ \exists\beta := -\alpha := (-1)\alpha :\ \alpha + \beta = 0$. По определению **разность** $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$

СВОЙСТВА УМНОЖЕНИЯ

1. **Коммутативность**: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.
2. **Ассоциативность**: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.
3. **Свойство единицы**: $1 \cdot \alpha = \alpha$.
4. Существование **обратного числа** $\forall\alpha \neq 0\ \exists\beta := 1/\alpha :\ \alpha \cdot \beta = 1$.

СВЯЗЬ СЛОЖЕНИЯ С УМНОЖЕНИЕМ

1. **Дистрибутивность**: $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

СВОЙСТВА ПОРЯДКА

1. Всякое число не больше себя: $\alpha \leq \alpha$.
2. Из двух разных чисел одно меньше другого: $\alpha \neq \beta \ \hookrightarrow$ или $\alpha < \beta$, или $\beta < \alpha$.
3. Если одно число не меньше другого и наоборот, то числа равны: $\alpha \leq \beta \ \wedge\ \beta \leq \alpha \ \hookrightarrow\ \alpha = \beta$.
4. **Транзитивность порядка**: $\alpha < \beta \ \wedge\ \beta < \gamma \ \hookrightarrow\ \alpha < \gamma$.
5. Связь **порядка и сложения**: $\alpha < \beta \ \ \forall\gamma \ \hookrightarrow\ \alpha + \gamma < \beta + \gamma$
6. Связь **порядка и умножения**: $\alpha < \beta \ \ \forall\gamma > 0 \ \hookrightarrow\ \alpha\gamma < \beta\gamma$.

7. Свойство **непрерывности**: пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$ – непустые множества; пусть $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ справедливо $x \leq y$. Тогда существует такое число α, что

$$\forall x \in X \;\; \forall y \in Y \;\hookrightarrow\; x \leq \alpha \leq y,$$

т. е. число α находится между X и Y.

Доказательства свойств аналогичны доказательству корректности определений сложения и умножения действительных чисел.

Обсуждение 1.7.1. Все перечисленные свойства образуют **аксиоматику** теории действительных чисел, *равносильную* построенной нами теории бесконечных десятичных дробей. $\boxminus$

Замечание 1.7.1. С символами $\pm\infty$, ∞ арифметические операции не определены! $\boxminus$

Задача 1.7.2. Докажите, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ произведение $0 \cdot \alpha = 0$.

1.8. Расстояния и окрестности

Теперь, когда мы умеем осуществлять арифметические операции с действительными числами, мы можем дать

Определение 1.8.1. расстояния между числами=точками:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ расстояние } \rho(a, b) := |a - b|. \boxtimes$$

В теории пределов мы будем постоянно применять

Определение 1.8.2. ε**-окрестностью** $(\varepsilon > 0)$ точки $a \in \mathbb{R}$ называется множество

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : \; \rho(a, x) < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : \; |a - x| < \varepsilon\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : \; a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Для символов «бесконечностей» окрестности определяются специфично:

$$U_\varepsilon(-\infty) := (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}), \quad U_\varepsilon(+\infty) := (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty),$$

$$U_\varepsilon(\infty) := (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \bigcup (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty).$$

См. рис. 1.1. $\boxtimes$

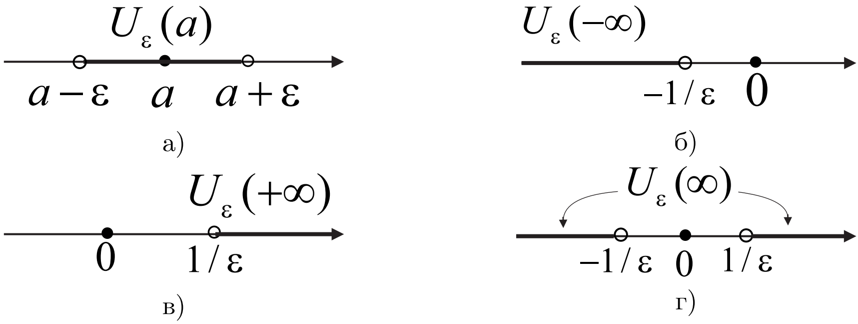

Рис. 1.1 Окрестности

Замечание 1.8.1. Число $a \in \mathbb{R}$ принадлежит своей окрестности, символы бесконечностей НЕ принадлежат своим окрестностям. Определения окрестностей даны таким образом, что при уменьшении параметра ε окрестность сужается:

$$\forall a \in \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}P^1 \ \forall \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0 \ \hookrightarrow \ U_{\varepsilon_1}(a) \supset U_{\varepsilon_2}(a). \ \boxminus$$

1.9. Бесконечные множества

И твой, бесконечность, учебник
Читаю один, без людей

Осип Мандельштам

Появление бесконечных множеств принципиально отличает математический анализ от школьной (“элементарной”) математики. Обсудим самые первые понятия теории бесконечных множеств. Мы добавили к рациональным числам иррациональные. Важно узнать, “как много” новых чисел мы добавили. Для этого надо научиться сравнивать “количество элементов” двух множеств.

Определение 1.9.1. Два множества X и Y называются **равномощными**, если между их элементами существует взаимно-однозначное соответствие (биекция).

Обозначение равномощных множеств: $X \cong Y$. $\boxtimes$

Задача 1.9.1. Докажите, что отношение равномощности симметрично, рефлексивно и транзитивно (см. стр. 8).

Определение 1.9.2. Множество называется **конечным**, если оно или пустое, или равномощно множеству $\{1, 2, \dots, n\}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Число n называется **количеством элементов** множества.

Множество называется **бесконечным**, если для любого натурального n найдется его конечное подмножество из n элементов. ⊠

Лемма 1.9.1. *Два конечных множества равномощны только тогда, когда они содержат одинаковое количество элементов.*

Задача 1.9.2. Докажите лемму 1.9.1.

Без доказательства примем к сведению критерий бесконечности множества:

Лемма 1.9.2. *Множество является бесконечным только тогда, когда оно содержит равномощное ему собственное подмножество.*

Оказалось, что не только конечные, но и бесконечные множества бывают “разными”, точнее – могут иметь разные мощности.

Определение 1.9.3. Множество называется **счетным**, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$. ⊠

Примеры 1.9.1. 1) Множество четных натуральных чисел счетно. 2) Множество целых чисел счетно, т. е. $\mathbb{N} \cong \mathbb{Z}$. В первом случае множество является *под*множеством $\mathbb{N}$, во втором случае множество *содержит* $\mathbb{N}$.

Лемма 1.9.3 (свойства счетных множеств)**.**

1) Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

2) Любое бесконечное подмножество счетного множества счетно.

3) (а) Объединение конечного и счетного множеств счетно.
(б) Конечное объединение счетных множеств счетно.

4) Счетное объединение счетных множеств счетно.

Обсуждение 1.9.1. Утверждение п. 1 можно понимать так: среди всех бесконечных множеств счетные множества имеют наименьшую мощность. ⊟

Доказательство. 1. Пусть X_0 – данное бесконечное множество. Выбираем произвольный элемент $x \in X_0$ и присваиваем ему номер один: $a_1 := x$. Затем *удаляем* его из X_0: $X_1 := X_0 \setminus \{a_1\}$. Выбираем произвольный элемент $y \in X_1$ и присваиваем ему номер два: $a_2 := = y$. Затем удаляем его из X_1: $X_2 := X_1 \setminus \{a_2\}$. Рассуждая таким образом, для произвольного $n \in \mathbb{N}$ определяем элемент $a_n \in X_{n-1} \subset \subset X_0$. Каждый раз у нас есть возможность выбрать элемент, который еще НЕ выбирали, т.к. данное множество бесконечно.

2. Пронумеруем все элементы данного счетного множества. В результате элементам исследуемого подмножества сопоставлены какие-то натуральные числа. Поскольку из любого подмножества натуральных чисел можно выбрать *наименьшее*, из этих номеров можно построить строго возрастающую последовательность $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$. Теперь с помощью нижнего индекса определим биекцию между множеством $\mathbb{N}$ и исследуемым подмножеством.

3. (а) Пусть в конечном множестве n элементов, тогда нумерацию элементов счетного множества начнем с номера $n+1$. (б) Пусть счетных подмножеств k штук. Располагаем их элементы матрицей из k строк, которая *бесконечна* вправо. Затем нумеруем элементы "змейкой". На рис. 1.2 а) показан случай $k = 3$.

4. Поскольку множеств счетное количество, все элементы можно индексировать двойной нумерацией $a_{k,m}$, где k – номер множества, а m – номер элемента в k-м множестве. Располагаем все элементы матрицей *бесконечной вправо и вниз*: k – номер строки, m – номер столбца. Затем нумеруем элементы "змейкой", см. рис. 1.2 б). (С элемента a_{32}, выделенного жирным шрифтом, змейки устроены по-разному.) ■

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & \to & a_{12} & & a_{12} & \to & a_{14} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
a_{31} & & a_{32} & \to & a_{33} & & a_{34} & & \cdots
\end{array}
$$

а)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & \to & a_{12} & & a_{12} & \to & a_{14} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
a_{31} & & \mathbf{a}_{32} & & a_{33} & & a_{34} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow &
\end{array}
$$

б)

Рис. 1.2 Счетные множества

Следствием леммы 1.9.3 является

Теорема 1.9.1. *Множество рациональных чисел счетно.*

Доказательство. Согласно п. 3 леммы 1.9.3, достаточно доказать счетность множества положительных рациональных чисел. Строим бесконечную вправо и вниз матрицу с элементами $a_{k,m} = m/k$ $(k, m \in \in \mathbb{N})$ и пересчитываем ее элементы "змейкой", не учитывая повторяющиеся сократимые дроби. На рис. 1.3 сократимые дроби набраны жирным шрифтом. ■

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1/1 & \to & 2/1 & & 3/1 & \to & 4/1 & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
1/2 & & \mathbf{2/2} & & 3/2 & & \mathbf{4/2} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
1/3 & & 2/3 & & \mathbf{3/3} & & 4/3 & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
1/4 & & \mathbf{2/4} & & 3/4 & & \mathbf{4/4} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow &
\end{array}
$$

Рис. 1.3

Принципиальной для понимания множества $\mathbb{R}$ является

Теорема 1.9.2. *(Г. Кантор) Множество* $\mathbb{R}$ ***несчетно.***

Доказательство. Достаточно доказать этот факт для полуинтервала $[0, 1)$ (обоснуйте). Предположим противное: существует последовательность бесконечных десятичных дробей $x_k = 0, a_1^{(k)} a_2^{(k)} \ldots a_k^{(k)} \ldots$, каждая из которых представляет некоторое действительное число x_k $(k \in \mathbb{N})$, и вся последовательность исчерпывает множество $[0, 1)$. Расположим указанную последовательность десятичных дробей в виде бесконечной вправо и вниз таблицы и рассмотрим диагональные элементы вида $a_k^{(k)}$ (выделены жирным шрифтом):

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0, & \mathbf{a}_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \ldots & & & & & \\
0, & a_1^{(2)} & \mathbf{a}_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \ldots & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
0, & a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & a_3^{(k)} & \ldots & a_{k-1}^{(k)} & \mathbf{a}_k^{(k)} & a_{k+1}^{(k)} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Заменим диагональные элементы $a_k^{(k)}$ произвольными цифрами b_k, отличными от девяток и от самих элементов: $b_k \neq 9$, $b_k \neq a_k^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$. Получим действительное число $y = 0, b_1 b_2 \ldots \in [0, 1)$, которого заведомо нет в последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. ■

Итак, действительных чисел “больше”, чем рациональных. Мощность $\mathbb{R}$ называют **континуумом**, а равномощное $\mathbb{R}$ множество называют **континуальным**. Оказывается множество $\mathbb{J}$ иррациональных чисел тоже континуально.

Теорема 1.9.3. *$\mathbb{J}$ равномощно $\mathbb{R}$:* $\mathbb{R} \cong \mathbb{J}$.

Доказательство. Во-первых, множество $\mathbb{J}$ бесконечно (иначе объединение $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$ было бы счетным). Из $\mathbb{J}$ удаляем произвольное счетное подмножество N (что возможно согласно п. 1 леммы 1.9.3). Оставшееся подмножество $\mathbb{J} \setminus N$ отображаем на себя тождественно. Удаленное счетное подмножество N разбиваем на два счетных подмножества: $N = N_1 \cup N_2$. Первое отображаем биективно на N, а второе биективно на $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{J} = (\mathbb{J} \setminus N) \cup N = (\mathbb{J} \setminus N) \cup (N_1 \cup N_2) \cong (\mathbb{J} \setminus N) \cup N \cup \mathbb{Q} = \mathbb{J} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}. \blacksquare$$

Вывод: расширяя множество рациональных чисел, мы добавили “больше”, чем имели. Мощность множества всех действительных чисел оказалась сосредоточена в подмножестве иррациональных чисел.

Глава 2

Предел числовой последовательности

Моей души предел желанный!

А. С. Пушкин

2.1. Понятие предела

Предел – краеугольное понятие в математическом анализе.

Определение 2.1.1. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число a_n, то говорят, что определена **числовая последовательность** $\{a_n\}$. Другими словами, числовая последовательность – это отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Обозначение: наряду с $\{a_n\}$, либо $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, либо a_n $(n \in \mathbb{N})$, либо $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, либо указанием формулы $a_n = f(n)$.

Элементом последовательности с номером n называется пара (n, a_n) (т. е. это точка графика отображения f), действительное число a_n называется **значением** n-го элемента. ⊠

Множество всех элементов последовательности *счетно* и упорядоченно по строгому возрастанию номеров. Отметим, что *множество* Im *всех значений* последовательности (т. е. образ отображения f) может быть как счетным, так и конечным.

Примеры 2.1.1. 1) $a_n = n$, $Im = \mathbb{N}$; 2) $a_n = (-1)^n$, $Im = \{-1, 1\}$

Способы задания последовательности:

(1) *Формулой* $a_n = f(n)$ (приведите пример).

(2) Как *сумма* n первых членов данной последовательности $\{a_k\}$, т. е. $S_n = a_1 + \ldots + a_n$.

Примеры 2.1.2.

1) если $a_k = a_1 + (k-1)d$, тогда $S_n = \frac{1}{2}(2a_1 + d(n-1))$ – сумма арифметической прогрессии;

2) если $b_k = b_1 q^{k-1}$, тогда $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ – сумма геометрической прогрессии;

3) если $a_k = \cos k\alpha$ $(k \in \mathbb{N}_0)$, то

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos k\alpha = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \cos \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2\pi m, \; m \in \mathbb{Z};$$

4) если $a_k = \frac{1}{k}$, то $S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ – частичная сумма **гармонического ряда**. Формулы в элементарных функциях для S_n не существует.

(3) **Рекуррентный** способ, т. е. выражение значения n-го элемента последовательности через значения предыдущих элементов.

Пример 2.1.1. Пусть $a > 0$ – фиксированное число. Последовательность задана рекуррентно:

$$a_0 = a, \; a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right), \text{ где } n \in \mathbb{N}_0.$$

Дадим основное

Определение 2.1.2. Действительное число $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$, если

1) на языке «ε-модуль»: для *любого* положительного числа ε найдется такой номер N, начиная с которого для *всех* натуральных $n \geq N$ выполняется оценка $|a - a_n| < \varepsilon$;

2) на языке «ε-окрестности»: для любого положительного числа ε найдется такой номер N, начиная с которого для всех натуральных $n \geq N$ значения элементов последовательности принадлежат ε-окрестности точки a.

Те же определения в логических символах записываются так:

$$1)\ \ \forall\varepsilon>0\ \ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq N\hookrightarrow|a-a_n|<\varepsilon;$$

$$2)\ \ \forall\varepsilon>0\ \ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq N\hookrightarrow a_n\in U_\varepsilon(a).$$

Обозначения: $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $a=\lim a_n$ (подразумевая $n\to+\infty$), $a_n\to a$ при $n\to\infty$, $a_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}a$. ⊠

Обсуждение 2.1.1. Предложенная Коши логическая конструкция «*для любого ε ... для всех достаточно больших n*» формализует наше интуитивное представление о том, что числа a_n "неограниченно приближаются" ("стремятся") к числу a. ⊟

Замечание 2.1.1. Второе определение годится для случаев $a=$ $=\pm\infty,\ \infty$. ⊟

Задача 2.1.1. Сформулируйте утверждение $\lim a_n=+\infty$ $(-\infty,\infty)$ с помощью неравенств.

Замечание 2.1.2. Изменение или выбрасывание *конечного* количества элементов последовательности не влияет на существование предела и на значение предела, если он существует. ⊟

Обсуждение 2.1.2. Определение 2.1.2 не является конструктивным: в нем НЕ сказано КАК найти предел; сказано только, какому характеризующему его свойству предел удовлетворяет. Определением 2.1.2 можно напрямую воспользоваться только для проверки гипотезы «*данная* точка a является пределом». ⊟

В этом случае помогает *переформулировка* определения 2.1.2:

Лемма 2.1.1 (аналитический критерий существования предела)**.** *Пусть последовательность задается формулой $a_n=f(n)$. Число $a\in$ $\in\mathbb{R}$ является пределом последовательности тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ неравенство $|f(n)-a|<\varepsilon$ относительно неизвестного $n\in\mathbb{N}$ истинно для всех достаточно больших n.*

Задача 2.1.2. Сформулируйте утверждение леммы 2.1.1 для случаев $a=\pm\infty$ и $a=\infty$. Докажите лемму.

Следует понимать, что наличие предела (конечного или бесконечного) является изысканным свойством последовательности. Если существует *конечный* предел $a\in\mathbb{R}$, то последовательность называется **сходящейся**; если бесконечный – уточняют, последовательность сходится к $\pm\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ или к ∞ в $\mathbb{R}P^1$.

Хотя последовательность не обязана иметь предел, но верна

Теорема 2.1.1 (о единственности предела). *Если предел числовой последовательности существует, то он единственный.*

Доказательство. Допустим противное – существует по крайней мере два предела $a \neq a'$. Возьмем столь малое $\varepsilon > 0$, чтобы ε-окрестности точек a и a' *НЕ пересекались* (если a и a' – числа, то можно взять $\varepsilon = |a - a'|/3$). Согласно определению 2.1.2, найдутся такие номера N_1 и N_2, что

$$\forall n \geq N_1 \hookrightarrow a_n \in U_\varepsilon(a) \wedge \forall n \geq N_2 \hookrightarrow a_n \in U_\varepsilon(a').$$

Тогда $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$ точки a_n обязаны принадлежать *одновременно* обеим окрестностям $U_\varepsilon(a)$ и $U_\varepsilon(a')$ – противоречие. ■

Интуитивный смысл понятия предела раскрывают геометрические критерии его существования.

Лемма 2.1.2 (первый геометрический критерий существования предела). *Точка $a \in \mathbb{R}$ ($\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}P^1$) является пределом последовательности $\{a_n\}$ тогда и только тогда, когда в любой ее окрестности содержатся значения* ***почти всех*** *элементов последовательности, т. е. всех элементов, кроме конечного их количества.*

Доказательство состоит в том, чтобы язык «ε-номер» перевести на геометрический язык.

($\Rightarrow$) Если выполнено определение 2.1.2, то в ε-окрестности предельной точки заведомо содержаться значения *всех* элементов, номер которых не меньше, чем $N(\varepsilon)$. Значит, вне окрестности *могут оказаться* значения только элементов $a_1, \ldots, a_{N-1}$, а их конечное количество.

($\Leftarrow$) Пусть в ε-окрестности точки a не лежат *только* значения элементов $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}$. Из *конечного* множества номеров $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ выберем максимальный номер $M(\varepsilon) = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$. Тогда для всех номеров $n \geq N(\varepsilon) = M(\varepsilon) + 1$ верно $a_n \in U_\varepsilon(a)$. ■

Замечание 2.1.3. НЕЛЬЗЯ в утверждении леммы 2.1.2 переставить слова «значения почти всех элементов» и писать «почти все значения элементов». Так, у последовательности $a_n = (-1)^n$ множество значений $Im = \{-1, 1\}$. Точка $a = 1$ не является пределом, но в любой ее окрестности лежат почти все значения элементов.

Задача 2.1.3. Докажите, что последовательность $a_n = (-1)^n$ не имеет предела.

Лемма 2.1.3 (второй геометрический критерий существования предела). *Точка $a \in \mathbb{R}$ является пределом последовательности $\{a_n\}$ тогда и только тогда, когда в любой горизонтальной полосе с осью симметрии $y = a$ содержатся все точки (n, a_n) графика отображения $f(n) = a_n$, номера которых достаточно велики (рис. 2.1).*

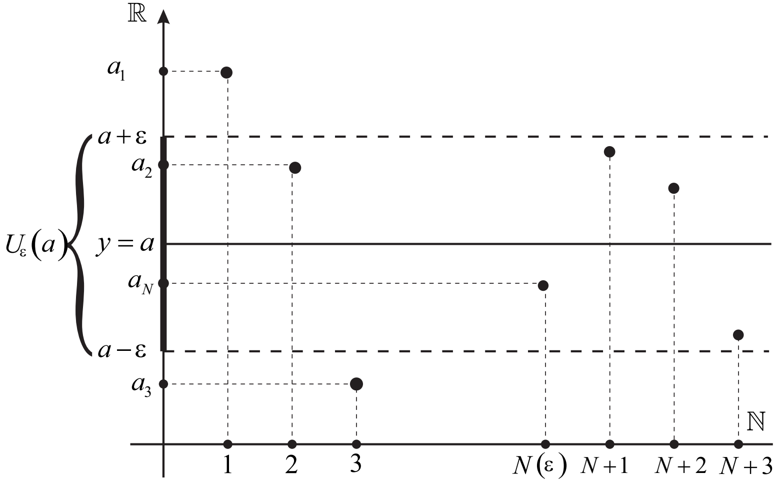

Рис. 2.1 Второй геометрический критерий сходимости

Задача 2.1.4. Переформулируйте критерий на языке «ε - номер». Сформулируйте критерий для случаев $a = \pm\infty$, $a = \infty$. Докажите лемму 2.1.3.

Наличие предела связано с другими свойствами последовательности:

Определение 2.1.3. Последовательность называется **ограниченной** (**ограниченной сверху**, **ограниченной снизу**), если

$$\exists C \in \mathbb{R} : \ \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |a_n| \leq C \quad (a_n \leq C, \ a_n \geq C) \quad \Leftrightarrow$$

множество ее значений ограничено (ограничено сверху, снизу). ⊠

Теорема 2.1.2 (необходимый признак сходимости). *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство сразу следует из определения 2.1.2 предела. Возьмем $\varepsilon = 1$, выберем $N(1)$. Для номеров $n \geq N(1)$ выполняется двусторонняя оценка $a-1 < a_n < a+1$, следовательно для указанных n справедливо неравенство $|a_n| < |a|+1$. Из *конечного* множества чисел $|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|$ выберем максимальное $M \geq 0$. Теперь для *всех* номеров n верно: $|a_n| \leq \max\{|a|+1,\ M\}$. ■

Обратное утверждение неверно.

Пример 2.1.2. $a_n = (-1)^n$ – ограниченная последовательность, которая не является сходящейся (см. замечание 2.1.3 и задачу 2.1.3).

2.2. Переход к пределу в неравенствах

Между отношениями порядка ($>, <, \geq, \leq$) и понятием предела имеются многочисленные связи.

Теорема 2.2.1 (о переносе неравенства с пределов на значения элементов последовательностей)**.** *Пусть существуют пределы* $\lim a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ *и* $\lim b_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$, *причем* $a < b$. *Тогда существует такой номер* N, *начиная с которого (т. е.* $n \geq N$*) выполняется* ***строгое*** *неравенство* $a_n < b_n$.

Доказательство (геометрическое). Возьмем *непересекающиеся* окрестности точек a и b. Из первого геометрического критерия существования предела (лемма 2.1.2) следует, что для всех достаточно больших номеров значения элементов последовательностей *локализуются* в окрестностях своих предельных точек.

Вот доказательство на языке «ε-номер» в случае сходящихся последовательностей:

$$\text{для } \varepsilon = \frac{1}{3}(b-a) \ \ \exists N_i(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ (i=1,2):$$

$$\forall n \geq N_1(\varepsilon) \ \hookrightarrow \ |a-a_n| < \varepsilon \ \wedge \ \forall n \geq N_2(\varepsilon) \ \hookrightarrow \ |b-b_n| < \varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$\forall n \geq \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\} \ \hookrightarrow \ a_n < a + \frac{b-a}{3} < b - \frac{b-a}{3} < b_n. \ ■$$

Задача 2.2.1. Докажите теорему 2.2.1 на языке «ε-номер» для случая $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$.

Теорема 2.2.2 (о переносе неравенства со значений элементов последовательностей на их пределы)**.** *Пусть существуют пределы* $\lim a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ *и* $\lim b_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$, *и существует такой номер* N, *начиная с которого (т. е.* $n \geq N$*) выполняется строгое (или нестрогое) неравенство* $a_n < b_n$ $(a_n \leq b_n)$. *Тогда имеет место* ***нестрогое*** *неравенство* $a \leq b$.

Доказательство от противного приводит к противоречию с предыдущей теоремой 2.2.1.

Следствие 2.2.1. *Пусть существует* $\lim a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, *и существует такой номер* N, *начиная с которого* ($n \geq N$) *выполняется* $a_n < b$ ($a_n \leq b$). *Тогда* $a \leq b$.

Замечание 2.2.1. В утверждениях теоремы 2.2.2 и следствии 2.2.1 заменять нестрогое неравенство $a \leq b$ на строгое нельзя! ⊟

Пример 2.2.1. Для последовательностей $a_n = 0$, $b_n = 1/n$ верно $a_n < b_n$. Но $a = b = 0$.

Теорема 2.2.3 (о трех последовательностях). *Пусть существует такой номер* N, *начиная с которого* (*т. е.* $n \geq N$) *выполняется* ***двустороннее*** *неравенство* $a_n < b_n < c_n$ (*или* $a_n \leq b_n \leq c_n$, *или другие варианты однотипных неравенств*). *Пусть существуют и совпадают пределы* $\lim a_n = \lim c_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$. *Тогда* $\lim b_n = a$.

Доказательство следует из того, что значения последовательности b_n попадают в ε-окрестность точки a вместе со значениями обрамляющих последовательностей. Запишем доказательство в логических символах, когда a – число:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq N \hookrightarrow \ a - \varepsilon < a_n < c_n < a + \varepsilon. \tag{2.1}$$

Но $a_n < b_n < c_n$, поэтому при тех же $n \geq N$ верно двустороннее неравенство $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$. ■

Задача 2.2.2. Почему оценка (2.1) верна одновременно для *двух* последовательностей и a_n, и c_n? Докажите теорему 2.2.3 для случаев $a = \pm\infty$.

2.3. Бесконечно малые последовательности

Из того, что ноль является нейтральным элементом среди действительных чисел, вытекает целесообразность исследования последовательностей следующего вида:

Определение 2.3.1. Последовательность называется **бесконечно малой**, если она имеет предел равный нулю. ⊠

Ценность бесконечно малых последовательностей в том, что

Лемма 2.3.1. *Последовательность* $\{a_n\}$ *имеет конечный предел* $a \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда последовательность* $\{b_n := a_n - a\}$ *является бесконечно малой.*

Задача 2.3.1. Докажите лемму 2.3.1

Теорема 2.3.1 (о свойствах бесконечно малых последовательностей)**.**

1) Если последовательности $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *бесконечно малые, то их сумма и разность (как последовательностей!)* $\{c_n := a_n \pm b_n\}$ *являются бесконечно малой.*

2) Если последовательность $\{a_n\}$ *бесконечно малая, а последовательность* $\{b_n\}$ *ограниченная, то произведение последовательностей* $\{c_n := a_n \cdot b_n\}$ *является бесконечно малой.*

Доказательство п. 1: надо взять подходящее $N(\varepsilon/2)$ для *обеих* последовательностей и воспользоваться неравенством треугольника. В логических символах:

$$\left.\begin{array}{l} \forall\varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon/2) : \forall n \geq N_1 \ \hookrightarrow\ |a_n| < \varepsilon/2 \\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon/2) : \forall n \geq N_2 \ \hookrightarrow\ |b_n| < \varepsilon/2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\forall n \geq \max\{N_1, N_2\} \ \hookrightarrow\ |a_n \pm b_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Доказательство п. 2: существует такое $B > 0$, что $|b_n| \leq B$. Остается взять $N(\varepsilon/B)$ для последовательности $\{a_n\}$. ■

Задача 2.3.2. Запишите доказательство п. 2 в логических символах.

2.4. Операции со сходящимися последовательностями

осуществляются поэлементно.

Теорема 2.4.1. *Справедливы утверждения.*

1) Если $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim b_n = b \in \mathbb{R}$, *то существует* $\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$.

2) Если $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, *то существует* $\lim |a_n| = |a|$.

3) Если $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim b_n = b \in \mathbb{R}$, *то существует* $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

4) Если $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim b_n = b \neq 0$, *то существует* $\lim(a_n/b_n) = a/b$. *(Из условия данной теоремы и из теоремы 2.2.1 следует, что для всех достаточно больших номеров* $b_n \neq 0$.*)*

Обычно говорят: предел суммы (разности, модуля, произведения, частного) равен сумме (разности, модулю, произведению, частному) пределов. При этом подразумевают, что исходные пределы существуют.

Доказательство п. 1. Т. к. последовательности $\{a_n - a\}$ и $\{b_n - b\}$ являются бесконечно малыми, то (в силу п. 1 теоремы 2.3.1) бесконечно малой является последовательность $\{(a_n - a) + (b_n - b)\} = \{(a_n + b_n) - (a + b)\}$.

Аналогично с разностью последовательностей.

Доказательство п. 2. Из неравенства сравнения модулей (см. стр. 14) следует, что $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство п. 3. Требуется доказать, что последовательность $\{a_n \cdot b_n - a \cdot b\}$ является бесконечно малой. Учитывая, что сходящиеся последовательности ограничены (теорема 2.1.2), имеем

$$a_n \cdot b_n - a \cdot b = a_n(b_n - b) + (a_n - a)b \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство пункта 4. Поскольку $\lim b_n = b \neq 0$, то для всех достаточно больших номеров $|b_n| \geq |b|/2$. Поэтому $1/|b_n| \leq 2/|b|$. Получаем

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{1}{b_n}(a_n - a) + \frac{a}{b_n b}(b - b_n)\right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{|b|}|a_n - a| + \frac{2|a|}{b^2}|b_n - b| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \blacksquare$$

2.5. Бесконечно большие последовательности

Так называют последовательности, имеющие пределом $\pm\infty$ или ∞.

Примеры 2.5.1. 1) $n \to +\infty$, 2) $-n \to -\infty$, 3) $(-1)^n n \to \infty$.

Имеет место

Лемма 2.5.1. *Бесконечно большая последовательность является неограниченной.*

Доказательство. Если $\lim a_n = \infty$ $(\pm\infty)$, то

$$\forall C > 0\ \exists N(C) = N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N\ \hookrightarrow\ |a_n| > C.$$

Но если оценка $|a_n| > C$ верна для *всех* достаточно больших номеров n, то она тем более верна для *какого-то* номера n, т. е. верно утверждение:

$$\forall C > 0\ \exists n \in \mathbb{N}:\ |a_n| > C.$$

Но это же *отрицание* определения 2.1.3 ограниченности последовательности. ■

Обратное утверждение не является верным.

Пример 2.5.1. $x_n = (1 + (-1)^n)n$.

Между бесконечно большими и бесконечно малыми последовательностями имеется связь.

Лемма 2.5.2. *Справедливы утверждения:*

1) *Если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой, то последовательность $\{1/x_n\}$ является бесконечно малой.*

2) *Если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно малой и $\forall n \in \mathbb{N}$ верно $x_n \neq 0$, то последовательность $\{1/x_n\}$ является бесконечно большой.*

Доказательство. Из определения бесконечно большой последовательности следует, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N\ \hookrightarrow\ |x_n| > 1/\varepsilon\ \ \Rightarrow\ \ \left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon.$$

Доказательство второго утверждения аналогично. ■

Символы $\pm\infty, \infty$ не являются числами, поэтому с ними нельзя выполнять арифметические действия. Однако некоторые утверждения, справедливые для сходящихся последовательностей, остаются верными для бесконечно больших последовательностей. Сформулируем одно из очевидных утверждений.

Лемма 2.5.3. *Если* $\lim x_n = \pm\infty$, $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, *то* $\lim(x_n + a_n) = \pm\infty$.

В символической записи $(\pm\infty) + a = \pm\infty$. Имеют место и другие верные равенства. Например, $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$; $(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$; если $a > 0$, то $\lim(x_n \cdot a_n) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty$.

Также имеют место некоторые аналоги предельных переходов в неравенствах.

Лемма 2.5.4. *Если $\lim x_n = +\infty$ $(-\infty)$ и $y_n \geq x_n$ $(y_n \leq x_n)$, то $\lim y_n = +\infty$ $(\lim y_n = -\infty)$.*

Задача 2.5.1. Докажите хотя бы одно из утверждений лемм 2.5.3 или 2.5.4.

Трудности представляют так называемые «неопределенности». Если, например, последовательность x_n бесконечно большая, а последовательность y_n бесконечно малая, то характер последовательности $x_n \cdot y_n$ заранее не известен; эту ситуацию обозначают $\infty \cdot 0$. Ниже список наиболее распространенных неопределенностей:

$$\infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad (+\infty) - (+\infty), \quad 1^{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

(операцию возведения в степень, которая присутствует в трех последних неопределенностях, нам еще предстоит определить).

Примеры 2.5.2. разрешений неопределенностей типа $\infty \cdot 0$:

1) $x_n = 1/n^2$, $y_n = n$, $\lim x_n y_n = 0$;

2) $x_n = 1/n$, $y_n = n^2$, $\lim x_n y_n = +\infty$;

3) $x_n = 1/n$, $y_n = n$, $\lim x_n y_n = 1$;

4) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = n$, последовательность $x_n y_n$ ограниченна, но расходится.

Именно умение раскрывать неопределенности является основной технической задачей теории пределов. Здесь важную роль играет шкала роста часто применяемых последовательностей: логарифмической, степенной, показательной, “факториальной” и “показательно-степенной”. Забегая вперед, выпишем некоторые предельные соотношения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^k n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0,$$

где $k \in \mathbb{N}$, $a > 1$.

2.6. Монотонные последовательности

Продолжаем изучать связи между порядком и пределом.

Определение 2.6.1. Последовательность называется **строго (нестрого) возрастающей**, если $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n < a_{n+1}$ $(\leq)$.

Нестрого возрастающую последовательность называют **неубывающей**. Аналогично определяют строго (нестрого) **убывающую** (**невозрастающую**) последовательность. Последовательность называют **монотонной**, если она неубывающая или невозрастающая. ⊠

Теорема 2.6.1. *(К. Вейерштрасс) Если последовательность неубывающая (невозрастающая), то она имеет предел* $\lim a_n = \sup\{a_n\} \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\lim a_n = \inf\{a_n\} \in \overline{\mathbb{R}})$.

Обсуждение 2.6.1. Поскольку точные грани *всегда существуют*, то в случае монотонности мы имеем гарантированное существование предела. Именно в этом ценность данного утверждения. ⊟

Доказательство. Если последовательность ограничена сверху, то ее супремум конечен. Из второго пункта определения 1.6.2 супремума следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент a_N, для которого $\sup\{a_n\} - \varepsilon < a_N$. В силу неубывания, для всех номеров $n > N$ полученное неравенство выполняется тем более. С другой стороны, $a_n \leq \sup\{a_n\}$ для всех номеров. Значит, $a_n \in U_\varepsilon(\sup\{a_n\})$.

Если же последовательность не ограничена сверху, то для любого числа A найдется такой номер $N = N(A)$, что $a_N > A$. Тогда $a_n > A$ для всех бо́льших номеров $n > N$ в силу неубывания последовательности.

Доказательство для невозрастающей последовательности аналогичное. ■

Применим теорему Вейерштрасса для получения так называемого числа e, которое лежит в основе математического анализа.

Определение 2.6.2. Для любого действительного числа x и натурального показателя n положим $x^n := x \cdot \ldots \cdot x$, где произведение содержит n сомножителей. ⊠

Лемма 2.6.1. *(Якоб Бернулли, 1655-1705) Для любого* $x > -1$ *и любого* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство:*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{2.2}$$

Доказательство индукцией по $n \in \mathbb{N}$. При $n = 1$ получаем тождество. Допустив, что неравенство верно для $n \in \mathbb{N}$, для следующего натурального числа

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx) \cdot (1+x) =$$

$$1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x. \blacksquare$$

Теорема 2.6.2. *Последовательность $x_n = (1+1/n)^n$ сходится.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную последовательность $y_n = (1+1/n)^{n+1}$. Во-первых, она ограничена снизу: $y_n > 1$. Далее, исследуем ее на монотонность. С этой целью рассмотрим отношение значений последовательности:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} \geq \left(1 + \frac{n+1}{n^2-1}\right) \frac{n-1}{n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \frac{n-1}{n} = 1;$$

мы применили неравенство Бернулли (2.2) с $x = (n^2-1)^{-1}$ и показателем $n+1$. Значит, последовательность y_n невозрастающая. Поэтому последовательность y_n сходится как ограниченная снизу и невозрастающая.

Поскольку $x_n = y_n(1+1/n)^{-1}$, то $\lim x_n = \lim y_n / \lim(1+1/n) = = \lim y_n$. $\blacksquare$

Определение 2.6.3. Числом Леонарда Эйлера (1707–1783) называют $e := \lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n$. ☒

Замечание 2.6.1. Смысл определения 2.6.3 – непрекращающееся начисление «сложного процента» с прибылью 100 процентов годовых. ⊟

Доказано, что $e \in \mathbb{J}$. Десятичное приближение к e по недостатку с точностью до 10^{-9} таково: $e \approx 2,718281828$

Мы будем встречаться с числом e на протяжении всего курса.

Глава 3

Частичные пределы, критерий Коши

> ...Дик Сэнд буквально разрывался на части, чтобы всюду поспеть...
>
> *Жюль Верн* «Пятнадцатилетний капитан»

Наличие предела у числовой последовательности является изысканным свойством. Однако, "смягчив" понятие предела, мы увидим, что так называемые частичные пределы всегда существуют. Это обстоятельство широко применяется в математическом анализе и других разделах математики.

3.1. Подпоследовательности и частичные пределы

Определение 3.1.1. Пусть $\{a_n\}$ – произвольная последовательность действительных чисел. Пусть $\{n_k\}$ – произвольная *строго* возрастающая последовательность натуральных чисел, занумерованных индексом k. Тогда последовательность $b_k = a_{n_k}$ $(k \in \mathbb{N})$ называется **подпоследовательностью** последовательности $\{a_n\}$. ⊠

Примеры 3.1.1. 1) Сама последовательность является своей подпоследовательностью. 2) Последовательность $b_k = 2k - 1$ возрастающих нечетных натуральных чисел является подпоследовательностью последовательности $a_n = n$ натуральных чисел, где $n_k = 2k - 1$. 3) Последовательность $1, 5, 3, \ldots$ НЕ является подпоследовательностью натуральных чисел (отсутствует строгое возрастание). 4) Упорядоченное множество $\{1, 2, 3\}$ НЕ является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел, поскольку оно конечно.

Замечание 3.1.1. Мы не обязаны нумеровать элементы подпоследовательности другим индексом. Последовательность $b_n = 2n - 1$ также является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел $a_n = n$. $\boxminus$

Определение 3.1.2. Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$, являющееся пределом некоторой подпоследовательности данной последовательности, называется **частичным** пределом. $\boxtimes$

Пример 3.1.1. Последовательность $a_n = (-1)^n$ имеет два частичных предела ± 1.

Замечание 3.1.2. На частичные пределы нельзя огульно переносить утверждения, относящиеся к пределам. Если число a – частичный предел последовательности $\{a_n\}$, число b – частичный предел последовательности $\{b_n\}$, то $a + b$ вообще-то НЕ является частичным пределом последовательности $\{a_n + b_n\}$ (приведите пример). $\boxminus$

Связь между понятием предела и частичного предела описывает

Лемма 3.1.1. *Предел последовательности является ее частичным пределом, но в общем случае не наоборот.*

Доказательство. Утверждение в одну сторону очевидно – в качестве подпоследовательности надо взять саму последовательность. Для доказательства в другую сторону достаточно привести контрпример (приведите). $\blacksquare$

Ниже мы уточним связь между пределом и частичным пределом.

Лемма 3.1.2 (геометрический критерий частичного предела)**.** *Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ является частичным пределом тогда и только тогда, когда в любой ее окрестности содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности.*

Замечание 3.1.3. В отличие от понятия предела, для частичного предела мы не утверждаем, что вне его окрестности находятся значения конечного количества элементов. $\boxminus$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть частичный предел a является пределом *подпоследовательности* $\{b_k\} = a_{n_k}$. Тогда для него справедлив первый геометрический критерий предела (лемма 2.1.2) для *последовательности* $\{b_k\}$. Получаем, что в любой окрестности точки a содержатся значения "почти всех" элементов последовательности $\{b_k\}$. Значит, в любой окрестности содержатся значения бесконечного количества элементов подпоследовательности. Но – автоматически – каждый элемент b_k подпоследовательности является элементом $a_{n_k} = b_k$ последовательности.

($\Leftarrow$) Возьмем последовательность ε-окрестностей точки a, для которых $\varepsilon = \varepsilon(k) \to 0$ при $k \to \infty$. В каждой окрестности выберем значение произвольного нового элемента a_{n_k} последовательности с номером *бóльшим* предыдущего: $n_k > n_{k-1}$; это возможно, поскольку в любой окрестности содержатся значения *бесконечного* количества элементов последовательности. Полученная подпоследовательность сходится к a, так как $\varepsilon(k) \to 0$. ■

3.2. Принцип вложенных отрезков

Там стоит дуб, под дубом ящик, в ящике заяц,
в зайце утка, в утке яйцо, в яйце моя смерть.

Русская народная сказка «Кощей Бессмертный»

Принцип является эквивалентом теоремы о существовании супремума и еще раз демонстрирует, что на числовой прямой $\mathbb{R}$ "дырок" нет. Он применяется при доказательстве существования предела.

Определение 3.2.1. Последовательностью вложенных отрезков называется такая последовательность $\{[a_n, b_n]\}$, что $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow$ $\to\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.

Если, кроме того, $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то получаем **последовательность стягивающихся вложенных отрезков**. ⊠

Обозначим множества левых и правых концов всех отрезков из определения 3.2.1 через $A := \{a_1, a_2, ...\}$ и $B := \{b_1, b_2, ...\}$ соответственно.

Теорема 3.2.1. *(Г. Кантор) Справедливо:*

1) *Пересечение последовательности вложенных отрезков не пусто:*
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = [\sup A, \inf B] \neq \varnothing$$

2) *Пересечение последовательности стягивающихся вложенных отрезков имеет единственную общую точку*
$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup A = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf B.$$

Доказательство. Поскольку для любых $k, n \in \mathbb{N}$ (для определенности $k < n$) справедлива цепочка неравенств
$$a_1 \leq ... \leq a_k \leq ... \leq a_n \leq b_n \leq ... \leq b_k \leq ... \leq b_1,$$
то $a_k \leq a_n \leq b_n \leq b_k$. Т.е. любое число из A не больше любого числа из B. В силу теоремы 1.6.4 существуют конечные $\sup A = c'$ и $\inf B = c''$, причем $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо: $a_n \leq c' \leq c'' \leq b_n$. Значит, $\forall n \in \mathbb{N}$ отрезок $[c', c''] \subset [a_n, b_n]$. Более того, других общих для всех отрезков $[a_n, b_n]$ точек нет. Пусть – от противного – есть общая точка $\widetilde{c} < c'$, тогда (в силу определения супремума) найдется $a_n > \widetilde{c}$. Значит, точка $\widetilde{c}$ не принадлежит отрезку $[a_n, b_n]$.

Если же последовательность вложенных отрезков стягивающаяся, то имеет место совпадение: $c := c' = c''$ (иначе не выполнится условие стягиваемости) и эта точка *единственная* общая для вложенных отрезков, т. к. других общих точек нет (см. выше).

Остается разобраться с пределами. Из теоремы 2.6.1 Вейерштрасса о монотонной ограниченной последовательности следует, что $\lim a_n = \sup A = c = \inf B = \lim b_n$. ■

Замечание 3.2.1. Для системы вложенных *интервалов* теорема НЕ верна, о чем свидетельствует пример ниже. ⊟

Пример 3.2.1. $\cap_{n=1}^{\infty}(0, 1/n) = \varnothing$.

3.3. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Наличие предела – изысканное свойство последовательности. Оказывается, наличие частичного предела – обязательное свойство последовательности.

Теорема 3.3.1. *(Бернард Больцано (1781-1848)-Вейерштрасс) Ограниченная последовательность имеет по крайней мере один частичный предел.*

Доказательство осуществим методом половинного деления (**дихотомия**).

1) В силу ограниченности существует отрезок, целиком содержащий значения последовательности: $[a_0, b_0] \supset \{x_n\}$.

2) Представляем отрезок в виде объединения двух "подотрезков": $[a_0, b_0] = [a_0, (a_0 + b_0)/2] \cup [(a_0 + b_0)/2, b_0]$; затем выделяем подотрезок, содержащий значения бесконечного количества элементов последовательности (хотя бы один из двух полученных подотрезков обладает этим свойством).

3) Выделенный подотрезок называем $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ и опять применяем дихотомию с выделением подотрезка, содержащего значения бесконечного количества элементов последовательности.

4) И так далее. В результате получаем последовательность *стягивающихся вложенных* отрезков

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_k, b_k] \supset \ldots,$$

$$\text{где } |b_k - a_k| = \frac{|b_0 - a_0|}{2^k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

каждый из которых содержит значения бесконечного количества элементов последовательности.

5) Применяя теорему 3.2.1 Кантора о стягивающихся вложенных отрезках, получаем точку x_0, каждая окрестность которой содержит значения *бесконечного* количества элементов последовательности (обоснуйте). Согласно геометрическому критерию (лемма 3.1.2) точка x_0 является частичным пределом. ■

Для неограниченных последовательностей утверждение теоремы 3.3.1 справедливо, но формулировать его надо в $\overline{\mathbb{R}}$.

Лемма 3.3.1. *Если последовательность неограничена, то из двух бесконечностей $+\infty$ и $-\infty$ хотя бы одна является ее частичным пределом.*

Доказательство. Из неограниченности последовательности a_n следует, что из двух равенств $\sup a_n = +\infty$ и $\inf a_n = -\infty$ хотя бы одно верно, допустим – первое. Тогда существует *подпоследовательность* a_{n_k} $(k \in \mathbb{N})$, удовлетворяющая оценке $a_{n_k} > k$. ■

Задача 3.3.1. Докажите существование подпоследовательности a_{n_k}, названной в доказательстве леммы 3.3.1.

Из теоремы 3.3.1 и леммы 3.3.1 следует

Теорема 3.3.2 (Больцано-Вейерштрасса в $\overline{\mathbb{R}}$). *Любая последовательность имеет в $\overline{\mathbb{R}}$ по крайней мере один частичный предел.*

3.4. Верхний и нижний пределы

Продолжая исследование частичных пределов, дадим

Определение 3.4.1. Предельным множеством $L(\{a_n\}) = L \subset \overline{\mathbb{R}}$ последовательности $\{a_n\}$ называется множество всех ее частичных пределов. $\boxtimes$

Каким может быть L? Согласно теореме 3.3.2, предельное множество заведомо непусто: $L \neq \varnothing$. Если последовательность имеет предел a, то, согласно лемме 3.1.1, оно содержит один элемент: $L = \{a\}$. В примере 3.1.1 L содержит два элемента.

Пример 3.4.1. последовательности, частичные пределы которой заполняют *всю* расширенную прямую. Поскольку множество рациональных чисел счетно, их можно пронумеровать – получим последовательность. Поскольку множество $\mathbb{Q}$ *плотно* в $\overline{\mathbb{R}}$ (см. теорему 1.4.1), нетрудно доказать, что предельное множество $L = \overline{\mathbb{R}}$.

Задача 3.4.1. Завершите доказательство.

Наличие частичного предела не гарантирует существование предела (лемма 3.1.1), однако имеет место

Теорема 3.4.1 (критерий существования предела в терминах частичного предела). *Последовательность $\{a_n\}$ имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$ только тогда, когда у нее имеется единственный частичный предел:*

$$\exists \lim a_n = a \in \overline{\mathbb{R}} \;\Leftrightarrow\; L(\{a_n\}) = \{a\}.$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если последовательность сходится к точке a, то, в силу определения, любая ее подпоследовательность тоже сходится, причем к той же точке a.

($\Leftarrow$): Допустим противное, т. е. последовательность имеет единственный частичный предел a, который не является пределом. Тогда, согласно геометрическому критерию существования предела (лемма 2.1.2), существует окрестность точки a, *вне* которой находятся значения *бесконечного* количества элементов последовательности. Из этих элементов, упорядочив их по возрастанию номеров, мы получаем подпоследовательность данной последовательности (сравните с доказательством п. 2 леммы 1.9.3). Из теоремы 3.3.2 следует, что построенная подпоследовательность имеет частичный предел, который не совпадает с a. Противоречие. ■

Определение 3.4.2. Верхним и нижним пределами последовательности a_n называют $\overline{\lim}\ a_n := \sup L$ и $\underline{\lim}\ a_n := \inf L$ соответственно. ⊠

Примеры 3.4.1. В примере 3.1.1 нижний предел равен -1, верхний $+1$. В примере 3.4.1 нижний предел $-\infty$, верхний $+\infty$.

Заметим, что верхний и нижний пределы не определены как частичные пределы. Однако оказывается, что

Лемма 3.4.1. *Верхний и нижний пределы являются частичными пределами, т. е.* $\overline{\lim}\ a_n,\ \underline{\lim}\ a_n \in L(\{a_n\})$.

Доказательство Покажем, что верхний предел сам по себе является частичным пределом. Пусть верхний предел конечен: $\bar{a} := = \overline{\lim}\ a_n \in \mathbb{R}$. Мы покажем, что в любой окрестности точки $\bar{a}$ лежат значения бесконечного количества элементов последовательности, после чего сошлемся на геометрический критерий частичного предела (лемма 3.1.2). Для произвольного $\varepsilon > 0$ число $\bar{a} - \varepsilon$ не есть верхняя грань L, поэтому $\exists \alpha \in L :\ \bar{a} - \varepsilon < \alpha \leq \bar{a}$. Возьмем $\mu := \alpha - (\bar{a} - \varepsilon) > 0$, тогда в окрестности $U_\mu(\alpha)$ лежат значения бесконечного количества элементов последовательности, поскольку α – частичный предел. Но $U_\mu(\alpha) \subset U_\varepsilon(\bar{a})$, поэтому в ε-окрестности точки $\bar{a}$ лежат значения бесконечного количества элементов последовательности. ■

Задача 3.4.2. 1) Докажите лемму 3.4.1 для случая $\bar{a} = +\infty$. 2) Что собой представляет множество L, если $\bar{a} = -\infty$? Докажите лемму 3.4.1 для случая $\bar{a} = -\infty$.

Теперь мы можем дать описание предельных свойств последовательности в терминах верхнего и нижнего пределов.

Теорема 3.4.2. *Справедливо:*

1) *Любая последовательность имеет в $\overline{\mathbb{R}}$ верхний и нижний пределы.*

2) Последовательность имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда верхний и нижний пределы совпадают:

$$\exists\ \lim a_n = a \in \overline{\mathbb{R}} \ \Leftrightarrow\ \overline{\lim}\ a_n = \underline{\lim}\ a_n = \lim a_n.$$

Доказательство Первое утверждение следует из теоремы 3.3.2 и теоремы 1.6.1 о существовании точных граней. Второе – из теоремы 3.4.1 и леммы 3.4.1. ■

3.5. Критерий Коши

В отличие от аналитического критерия сходимости (лемма 2.1.1), геометрических критериев (леммы 2.1.2 и 2.1.3) и критериев сходимости в терминах частичных пределов (теоремы 3.4.1 и 3.4.2), критерий Коши существования предела НЕ использует сам предел.

Определение 3.5.1. Последовательность $\{a_n\}$ называется **фундаментальной**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N\ \ \forall p \in \mathbb{N}\ \hookrightarrow\ |a_n - a_{n+p}| < \varepsilon.\ \boxtimes$$

Обсуждение 3.5.1. Понятие фундаментальности оценивает *близость элементов последовательности друг к другу*, а не к пределу. ⊟

Важнейшую роль в математическом анализе играет

Теорема 3.5.1 (критерий Коши)**.** *Последовательность является сходящейся тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. Необходимость вытекает из неравенства треугольника: если $a = \lim\ a_n$, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N\ \wedge\ \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow$$

$$|a_n - a_{n+p}| \leq |a_n - a| + |a - a_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность доказывается в несколько шагов.

1) Из фундаментальности последовательности следует ее *ограниченность*: по $\varepsilon = 1$ найдется номер $N \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geq N$ верно $a_N - 1 < a_n < a_N + 1$; значит, множество всех значений последовательности, *начиная с номера* N, ограничено; поскольку множество $\{a_1, \ldots, a_{N-1}\}$ конечно, то последовательность ограничена.

2) Из ограниченности последовательности следует *существование конечного частичного предела* a (теорема 3.3.1 Больцано-Вейерштрасса).

3) Покажем, что a – *единственный* частичный предел последовательности. От противного: существует частичный предел $a' \neq a$. Возьмем такие фиксированные *непересекающиеся* ε-окрестности точек a и a', чтобы между ними существовал положительный зазор. Например, можно взять $\varepsilon = |a-a'|/3$. Согласно определению частичного предела, существуют две сходящиеся подпоследовательности:

$$a_{n_k} \to a \text{ при } k \to \infty, \quad a_{n_m} \to a' \text{ при } m \to \infty.$$

Поскольку $n_k \geq k,\ n_m \geq m$, то $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$ и $n_m \to \infty$ при $m \to \infty$. Значит, существуют элементы последовательности со сколь угодно большими номерами n_k и n_m, для которых расстояние $|a_{n_k} - a_{n_m}| > |a-a'|/3 = const > 0$. Последнее противоречит фундаментальности. Следовательно, a – единственный частичный предел.

4) Теперь из теоремы 3.4.1 следует, что a – предел последовательности. ■

Примеры 3.5.1. 1) Докажем, что последовательность

$$S_n = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \ldots + \frac{\cos n}{3^n}$$

сходится. Пусть выбрано произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+p}} < \frac{1}{2 \cdot 3^n} < \frac{1}{n},$$

то для всех $n > [1/\varepsilon]$ верно неравенство $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Значит, последовательность S_n фундаментальна и, согласно критерию Коши, сходится.

2) Докажем расходимость последовательности

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Убедимся, что для исследуемой последовательности имеет место *отрицание* критерия Коши, т. е. проверим отрицание (см. стр. 15) определения фундаментальности :

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \quad \forall N \in \mathbb{N} \ \hookrightarrow \ \exists n \geq N \ \ \exists p \in \mathbb{N}: \ |S_n - S_{n+p}| \geq \varepsilon_0.$$

Возьмем $\varepsilon_0 = 1/2,\ p = n$. Какое бы $N \in \mathbb{N}$ мы ни взяли, для *любого* $n \geq N$ (а это сильнее, чем $\exists n$) выполняется

$$S_{n+n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Завершая тему, покажем, что перестановка кванторов влияет на определяемое понятие. Назовем последовательность $\{a_n\}$ **квази**фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N \quad \hookrightarrow \ |a_n - a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Вопрос: эквивалентна ли квазифундаментальность определению 3.5.1 фундаментальности?

Ответ отрицательный. В определении фундаментальности номер $N = N(\varepsilon)$ зависит только от параметра ε, который выбирается произвольно ДО выбора параметра p. В определении квазифундаментальности номер $N = N(\varepsilon, p)$ зависит от двух параметров ε и p, которые выбираются произвольно ДО выбора параметра N. Поэтому при выполнении условия фундаментальности условие квазифундаментальности тем более выполняется. Однако из квазифундаментальности фундаментальность в общем случае не следует. Возьмем в примере 2) номер $N(\varepsilon, p) := \left[\frac{p}{\varepsilon} + 1\right]$. Тогда для всех $n > N$ выполняется

$$S_{n+p} - S_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p} < \frac{p}{n} < \frac{p}{\left[\frac{p}{\varepsilon} + 1\right]} \leq \varepsilon.$$

Значит, квазифундаментальность наличествует. Но данная последовательность фундаментальной НЕ является, что доказано выше.

Глава 4

Предел функции

4.1. Понятие числовой функции

Функция – основной объект изучения математического анализа. Традиционно функцией называют отображение, заданное на некотором подмножестве действительных чисел, значения которого суть действительные числа.

Определение 4.1.1. Пусть каждому числу x (**аргумент, независимая переменная**) из некоторого подмножества $Def(f) = D(f) \subset \mathbb{R}$ поставлено в соответствие *единственное* число $y = f(x)$ (**значение функции, зависимая переменная**). Тогда мы говорим, что задана **функция** f с **областью определения** $D(f)$. Подмножество $Im(f) := \{y = f(x),\ x \in D(f)\} \subset \mathbb{R}$ называется **образом** функции. ⊠

Замечание 4.1.1. Область определения неотделима от определения функции. Например, функции, определяемые общей формулой $f(x) = x^2$ на $\mathbb{R}$ и на $\mathbb{R}_0^+ := [0, +\infty)$ – это разные функции. Нас интересуют прежде всего функции, определенные на промежутках. Однако $D(f)$ может быть любым подмножеством; например, если $D(f) = \mathbb{N}$, то f – числовая последовательность. ⊟

Способы задания функции. "Школьные": 1) формулой, 2) табличный, 3) геометрический, 4) графический. В дальнейшем мы изучим новые конструкции: 1) сложная функция, 2) обратная функция, 3) неявная функция, 4) функция заданная параметрически. У каждого способа задания имеются свои "достоинства" и "недостатки". Надо понимать, что конкретное нахождение значения функции для любого аргумента, как правило, невозможно. Исследовать функцию означает знать как можно больше ее *свойств* и уметь построить достоверный график.

Напомним первоначальные понятия теории функций.

Определение 4.1.2. **Сужением функции** f на подмножество $X \subset D(f)$ называется функция, порожденная тем же соответствием f на подмножестве X. Обозначается сужение так $f|_X$. ⊠

Определение 4.1.3.

1) **Образом подмножества** $X \subset D(f)$ называется множество $f(X) := \{y = f(x),\ x \in X\}$.

2) **Прообразом числа (точки)** $y \in \mathbb{R}$ для функции f называется множество $f^{-1}(y) := \{x \in D(f) :\ f(x) = y\}$. Если $y \notin Im(f)$, то $f^{-1}(y) = \varnothing$.

3) **Полным прообразом подмножества** $Y \subset \mathbb{R}$ для функции f называется множество $f^{-1}(Y) := \{x \in D(f) :\ f(x) \in Y\}$. ⊠

Задача 4.1.1. Для функции $y = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ найдите $Im(f)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(Y_1)$, где $Y_1 = (1, 4)$, $f^{-1}(Y_2)$, где $Y_2 = (-1, 1)$.

Определение 4.1.4. **Графиком** функции f называется подмножество пар координатной плоскости: $Gr(f) := \{(x, f(x)) \in D(f) \times \times Im(f)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. ⊠

Замечание 4.1.2. С помощью графика многим аналитическим понятиям можно придать наглядную геометрическую трактовку. Например, график $Gr(f|_X)$ сужения $f|_X$ функции f является подмножеством графика $Gr(f)$ данной функции: $Gr(f|_X) \subset Gr(f)$. И наоборот, любое подмножество $M \subset Gr(f)$ графика данной функции является графиком ее сужения $f|_X$ на некоторое подмножество $X \subset D(f)$. ⊟

Задача 4.1.2. Как найти область определения $X \subset D(f)$ по множеству $M \subset Gr(f)$?

Определение 4.1.5. Пусть даны две функции f и g, причем $Im(f) \subset D(g)$. **Сложной функцией (суперпозицией, композицией, произведением)** называется функция $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, где $x \in D(f)$.

Обозначения: $D(f) \xrightarrow{f} Im(f) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ или $x \to f(x) \to g(f(x))$. ⊠

Замечание 4.1.3. В тех случаях, когда $Im(f) \not\subset D(g)$, определяют такое сужение $f|_X$, чтобы $Im(f|_X) \subset D(g)$ и рассматривают сложную функцию $g \circ f|_X$. Очевидно, что всегда $Im(g \circ f) \subset Im(g)$. $\boxminus$

Примеры 4.1.1. 1) Подпоследовательность $\{b_k = a_{n_k}\}$ является суперпозицией: $\mathbb{N} \ni k \to n_k \to a_{n_k} \in \mathbb{R}$. 2) Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) := = 2^x$, тогда $(g \circ f)(x) = 2^{\sin x}$, $(f \circ g)(x) = \sin 2^x$.

Задача 4.1.3. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = \ln x$. Найдите $D(f \circ g)$, $Im(f \circ g)$, $D(g \circ f)$, $Im(g \circ f)$. Постройте графики всех функций, указанных в примере и задаче.

Прежде всего мы будем иметь дело с **основными элементарными** функциями. К ним относятся степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, гиперболические и обратные к ним функции (строгие определения будут даны позже). **Элементарными** мы называем функции, полученные из указанных с помощью арифметических операций и их суперпозиции.

Замечание 4.1.4. Чтобы сложить (вычесть, умножить, разделить) две функции, нужно осуществить эту операцию “поточечно” на одной и той же области определения, т. е.

$$(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x), \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Это определение столь естественно, что мы пользуемся им не задумываясь. $\boxminus$

Замечание 4.1.5. . Хотя математический анализ дает нам мощнейшие средства исследования функций и построения их графиков, умение строить графики функций с помощью *преобразований графиков* уже исследованных функций является основополагающим. $\boxminus$

4.2. Понятие предела функции

удобно вводить и применять на так называемой «проколотой окрестности» точки.

Определение 4.2.1. Проколотой ε-окрестностью точки $x_0 \in \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$ называется ε-окрестность этой точки без нее самой: $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) := U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$. $\boxtimes$

Замечание 4.2.1. Определения окрестностей точек $\pm\infty$, ∞ уже являются проколотыми поскольку не включают эти точки. $\boxminus$

Дадим два эквивалентных определения предела.

Определение 4.2.2 (по Коши)**.** Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \subset D(f)$ точки $x_0 \in \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$. Точка $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$ называется **пределом** функции f при $x \to x_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0): \; \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \;\hookrightarrow\; f(x) \in U_\varepsilon(y_0).$$

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ или $f(x) \to y_0$ при $x \to x_0$. $\boxtimes$

Определение 4.2.3. Последовательностью Гейне точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$ для функции f мы называем последовательность $\{x_n\} \subset \subset \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \subset D(f)$, которая сходится к точке x_0: $x_n \to x_0$. $\boxtimes$

Определение 4.2.4. (Эдуард Гейне, 1821–1881) Точка $y_0 \in \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$ называется **пределом** функции f при $x \to x_0$, если для *любой* последовательности Гейне $\{x_n\}$ точки x_0 выполнено: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = = y_0$. $\boxtimes$

Замечание 4.2.2. Последовательность $\{f(x_n)\}$ есть сложная функция: $n \to x_n \to f(x_n)$. $\boxminus$

Теорема 4.2.1. *Определения 4.2.2 и 4.2.4 эквивалентны.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\{x_n\}$ – произвольная последовательность Гейне. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$, для которого выполняется определение Коши 4.2.2. Но по δ, в силу определения 4.2.3 последовательности Гейне, найдется такой номер N, что для всех больших номеров $n > N$ справедливо: $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$. Но тогда (опять же в силу определения Коши!) верно: $f(x_n) \in U_\varepsilon(y_0)$.

($\Leftarrow$) Допустим, от противного, что определение по Коши не выполнено. Мы покажем, что в этом случае найдется последовательность Гейне, для которой определение Гейне не выполняется. Отрицание определения Коши есть:

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \;\; \forall \delta \in (0, \delta_0) \;\hookrightarrow\; \exists x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0): \; f(x) \notin U_{\varepsilon_0}(y_0). \tag{4.1}$$

Пусть x_1 – произвольная точка, удовлетворяющая (4.1) при произвольном выбранном $\delta = \delta_1$. Теперь возьмем $\delta_2 = |x_1 - x_0|/2$. В проколотой

δ_2-окрестности точки x_0 найдется точка x_2, удовлетворяющая (4.1). Затем возьмем $\delta_3 = |x_2 - x_0|/2$ и выберем точку x_3, удовлетворяющую (4.1). И т. д. Мы получили последовательность Гейне $\{x_n\}$ точки x_0, для которой $f(x_n) \not\to y_0$. Противоречие. ■

Оба подхода к определению предела имеют свои преимущества, которыми мы будем пользоваться.

Замечание 4.2.3. Ни сама точка x_0, ни значение функции в точке x_0 в определении предела не используется. Более того, не исключено, что в точке x_0 функция f не определена. ⊟

Задача 4.2.1. Докажите, что предел функции, если он существует, единственный.

Примеры 4.2.1. 1) Функция всюду равна нулю, кроме $f(0) = 1$. В каждой точке у нее есть предел, равный нулю.

2) **Функция Дирихле** в рациональных точках равна единице и равна нулю в иррациональных точках:

$$D(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{J}. \end{cases} \tag{4.2}$$

У этой функции ни в одной точке нет предела. Докажем это утверждение с помощью определения предела по Гейне. Возьмем две последовательности сходящиеся к точке x_0, причем одна принимает рациональные значения, а другая иррациональные: $x'_n \in \mathbb{Q}$, $x'_n \to x_0$, $x''_n \in \mathbb{J}$, $x''_n \to x_0$. Тогда $D(x'_n) \to 1$, а $D(x''_n) \to 0$.

3) **Функция Римана** определяется правилом

$$R(x) := \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \text{ где m и n взаимно просты}, \\ 0, & x \in \mathbb{J}. \end{cases}$$

У этой функции в каждой точке есть предел, равный нулю.

Задача 4.2.2. Докажите предыдущее утверждение.

Замечание 4.2.4. Определение 4.2.2 предела функции, как и определение 2.1.2 предела последовательности, не является конструктивным. ⊟

Проверить гипотезу «число a является пределом» помогает

Лемма 4.2.1 (аналитический критерий существования предела функции)**.** *Число $a \in \mathbb{R}$ является пределом функции при $x \to x_0$ только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$* ***относительно неизвестного*** *$x \in \mathbb{R}$ истинно для* ***всех*** *чисел из достаточно малой проколотой окрестности числа x_0.*

Задача 4.2.3. Докажите лемму 4.2.1.

4.3. Свойства пределов функции

являются аналогами свойств пределов последовательностей.

Теорема 4.3.1. *Пусть функции f и g определены в некоторой проколотой окрестности точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$, пусть существуют* ***конечные*** *пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}$. Тогда имеют место утверждения:*

1) *О переносе неравенства с пределов на значения функций: пусть $a < b$, тогда существует такая проколотая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta (x_0)$ верно $f(x) < g(x)$.*

2) *О переносе неравенства со значений функций на их пределы: если для всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta (x_0)$ верно $f(x) \le g(x)$ $(<)$, то $a \le b$.*

3) *О трех функциях: пусть 1) функция h определена в той же проколотой окрестности, что и функции f и g, 2) в ней выполняется двусторонняя оценка $f(x) \le h(x) \le g(x)$ $(<)$,
3) указанные пределы совпадают: $a = b$; тогда $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$.*

4) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |a|$.

5) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$.

6) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$.

7) *Если предел $b \ne 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)/g(x)) = a/b$.*

Обсуждение 4.3.1. Утверждения 1-3 связывают порядок на $\mathbb{R}$ и предельные свойства функций. Утверждения 5-7 переносят арифметические операции с функций на их пределы. $\boxminus$

Доказательство. Все утверждения доказываются единообразно с помощью определения предела по Гейне и ссылкой на аналогичное утверждение о пределах последовательностей (теоремы 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, 2.4.1). Докажем п. 1 теоремы для случая конечной точки $x_0 \in$ $\in \mathbb{R}$ рассуждением «от противного». Тогда в проколотой окрестности точки x_0, где определены функции f и g, найдется точка x_1 в которой $f(x_1) \geq g(x_1)$. На втором шаге возьмем проколотую окрестность $\overset{\circ}{U}_{\delta_2}(x_0)$, где $\delta_2 = |x_1 - x_0|/2$. По допущению, найдется точка x_2, в которой $f(x_2) \geq g(x_2)$. Пусть определены n-я окрестность $\overset{\circ}{U}_{\delta_n}(x_0)$ и точка x_n ей принадлежащая, в которой $f(x_n) \geq g(x_n)$. На $(n+1)$-ом шаге возьмем $\delta_{n+1} := |x_n - x_0|/2$ и в окрестности $\overset{\circ}{U}_{\delta_{n+1}}(x_0)$ найдется точка x_{n+1}, в которой, в силу допущения, $f(x_{n+1}) \geq g(x_{n+1})$. Заметим, что последовательность радиусов окрестностей допускает оценку

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ \delta_{n+1} < \delta_n/2 \ \Rightarrow \ \delta_n < \delta_1/2^n \ \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ 0.$$

Значит, последовательность x_n является последовательностью Гейне точки x_0. Поэтому числовые последовательности $a_n := f(x_n)$ и $b_n := g(x_n)$ являются сходящимися к a и b соответственно и к ним применима теорема 2.2.1: существует такой номер N, начиная с которого выполняется *строгое* неравенство $f(x_n) = a_n < b_n = g(x_n)$. Получили противоречие. ■

При исследовании функции $1/f(x)$ полезным является очевидное

Следствие 4.3.1. *(об отделении от нуля) Если* $\mathbb{R} \ni \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \neq 0$, *то существует такая проколотая δ-окрестность точки x_0, что для всех x из нее $|f(x)| > |a|/2$ и $sign(f(x)) = sign(a)$.*

Задача 4.3.1. Докажите остальные утверждений теоремы 4.3.1. Опираясь на п. 1 теоремы 4.3.1, докажите следствие 4.3.1.

4.4. Критерий Коши для конечного предела функции

является аналогом критерия для предела последовательности.

Теорема 4.4.1. *Пусть функция f определена в $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$, где $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$. Функция f имеет конечный предел в т. x_0 только тогда и только тогда, когда выполнено* ***условие Коши:***

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0, \delta_0) : \ \forall x', x'' \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \ \hookrightarrow \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \quad (4.3)$$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, тогда, в силу неравенства треугольника,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta \in (0, \delta_0) : \ \forall x', x'' \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \ \hookrightarrow$$

$$|f(x')-a|<\frac{\varepsilon}{2}\ \wedge\ |f(x'')-a|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\Rightarrow$$

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta\in(0,\delta_0):\ \forall x',x''\in\overset{\circ}{U}_\delta\ (x_0)\ \hookrightarrow$$

$$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-a|+|f(x'')-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

($\Leftarrow$) 1) Пусть $\{x_n\}$ – произвольная последовательность Гейне точки x_0. Она порождает последовательность значений $\{f(x_n)\}$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. По нему найдем $\delta=\delta(\varepsilon)$ из условия (4.3) Коши. Поскольку $x_n\to x_0$, то, начиная с какого-то номера $N=N(\delta)$, значения всех элементов последовательности $\{x_n\}$ окажутся в $\overset{\circ}{U}_\delta\ (x_0)$. Тогда из условия Коши следует, что $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$ для любых $n,m>N$. Значит, последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальна.

2) Из критерия Коши для последовательностей (теорема 3.5.1) следует, что существует число a, к которому сходится последовательность $\{f(x_n)\}$.

3) Если мы возьмем любую другую последовательность Гейне $\{x'_n\}$, то опять получим предел $f(x'_n)\to a'$. Покажем, что на самом деле $a'=a$. Возьмем последовательность, полученную в результате *чередования* элементов двух последовательностей: $x''_1:=x_1,\ x''_2:=x'_1,\ x''_3:=$ $=x_2,\ x''_4:=x'_2\dots$. Эта последовательность также является последовательностью Гейне и для нее последовательность значений сходится: $f(x''_n)\to a''\in\mathbb{R}$. Значит, пределы равны: $a=a'=a''$.

4) Вывод: для произвольной последовательности Гейне $\{x_n\}$ последовательность $f(x_n)\to a$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$. ■

4.5. Предел функции по множеству

Не всегда область определения функции содержит проколотую окрестность точки x_0. Поэтому понятие предела полезно расширить на множества более общей природы.

Определение 4.5.1. Точка $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ ($\mathbb{R}P^1$) называется **предельной** для подмножества $X\subset\mathbb{R}$, если существует по крайней мере одна последовательность Гейне точки x_0, значения которой принадлежат X. ⊠

Замечание 4.5.1. Предельная точка для множества не обязана ему принадлежать. ⊟

Примеры 4.5.1. 1) У множества $\mathbb{N}$ единственная предельная точка $+\infty \notin \mathbb{N}$; 2) у множества $\mathbb{Q}$ множество предельных точек вся расширенная числовая прямая $\overline{\mathbb{R}} \supset \mathbb{Q}$.

Определение 4.5.2. Пусть $X \subset D(f)$ и точка x_0 является предельной для X. Мы называем точку $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$ **пределом функции** f при $x \to x_0$ **по множеству** X, если

1) по Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon):\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta\ (x_0) \cap X\ \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(y_0)$;

2) по Гейне: для любой последовательности Гейне $\{x_n\} \subset X$ справедливо $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$. $\boxtimes$

Как и для определений 4.2.2 и 4.2.4, оба определения эквивалентны. Доказательство не меняется.

Очевидно, если функция имеет в точке "обычный" предел, то по любому множеству ее предел в этой точке существует и совпадает с обычным. Обратное неверно.

Пример 4.5.1. Для функции Дирихле (4.2) в каждой точке предел по $X = \mathbb{Q}$ равен 1, а предел по $X = \mathbb{J}$ равен 0. В то время как обычный предел отсутствует.

Среди пределов по множеству наиболее важны так называемые **односторонние** пределы.

Определение 4.5.3. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Предел функции f при $x \to x_0$ по множеству $X = (a, x_0)$ называют **пределом слева** и обозначают $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$. Предел функции f при $x \to x_0$ по множеству $X = (x_0, b)$ называют **пределом справа** и обозначают $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$. $\boxtimes$

Пример 4.5.2. Рассмотрим функцию "ступенька":

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ 1, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Односторонними пределами в точке $x_0 = 0$ для нее являются
$f(-0) := f(0 - 0) = 0$, $f(+0) := f(0 + 0) = 1$.

В терминах односторонних пределов формулируется

Лемма 4.5.1 (критерий существования предела функции). *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$ существует тогда и только тогда, когда существуют и совпадают односторонние пределы: $f(x_0-0) = f(x_0+0)$; при этом условии обычный предел совпадает с односторонними.*

Доказательство. (⇒) Очевидно.

(⇐) По любому $\varepsilon > 0$ найдутся односторонние окрестности $(x_0 - \delta_1, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta_2)$, в которых $f(x) \in U_\varepsilon(y_0)$. Возьмем из двух положительных чисел δ_i $(i = 1, 2)$ меньшее, обозначим его δ. Тогда $f(x) \in U_\varepsilon(y_0)$ как только $x \in \overset{\circ}{U}_\delta (x_0)$. ■

4.6. Монотонные функции

переносят *порядок* с области определения $D(f)$ в образ $Im(f)$ – или сохраняют порядок, или меняют на противоположный. Поэтому монотонность тесно связана с арифметическими операциями, точными гранями и предельным переходом.

Определение 4.6.1. Функция f называется нестрого (строго) **возрастающей (убывающей)** на $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall x_1, x_2 \in X: \; x_1 < x_2 \; \hookrightarrow f(x_1) \le f(x_2) \; (<, \; \ge, \; >).$$

Терминология: нестрого (строго) убывающая или возрастающая функция называется нестрого (строго) **монотонной**; нестрого убывающую функцию называют **невозрастающей**, нестрого возрастающую – **неубывающей**. ⊠

Примеры 4.6.1. 1) Показательная $f(x) = a^x$ и логарифмическая $f(x) = \log_a x$ функции строго монотонны на всей области определения. 2) Степенная функция $f(x) = x^n$, где $n \in \mathbb{N}$, строго возрастающая на неотрицательной полуоси $\mathbb{R}_0^+$, и строго возрастающая на всей оси, если $n = 2k+1$ нечетное число. 3) Функция $\sin$ строго возрастает на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ и строго убывает на $[\pi/2, 3\pi/2]$. 4) Функция $f(x) = \sin(1/x)$ строго возрастает на отрезке $[1/\pi, 2/\pi]$ и строго убывает на $[2/\pi, +\infty)$.

Задача 4.6.1. 1) Уточните характер монотонности показательной и логарифмической функций в зависимости от основания a.

2) Опишите все отрезки возрастания и убывания функций $\sin x$ и $\sin(1/x)$; нарисуйте эскиз графика функции $\sin(1/x)$.

Лемма 4.6.1 (монотонность и операции). *Пусть на некотором множестве X функции f и g однотипно монотонны. Тогда на X:*

1) *их сумма $f + g$ монотонна того же типа;*

2) *если – дополнительно – функции неотрицательны, то их произведение $f \cdot g$ монотонно того же типа;*

3) *если – дополнительно – функция f знакопостоянная, то функция $1/f$ монотонна противоположного типа;*

4) *противоположная функция $(-f)$ монотонна противоположного типа.*

5) *Если $Im(f) \subset D(g)$ и функции f и g однотипно монотонны, то их суперпозиция $g \circ f$ монотонна того же типа.*

Доказательство. Пусть (для определенности) функции неубывающие на X. Пусть $x_1,\ x_2 \in X$ и $x_1 < x_2$. Тогда:

$$\text{п. } 1: \quad (f+g)(x_2) - (f+g)(x_1) = f(x_2) + g(x_2) - (f(x_1) + g(x_1)) =$$
$$(f(x_2) - f(x_1)) + (g(x_2) - g(x_1)) \geq 0 + 0 = 0.$$
$$\text{п. } 2: \quad (f \cdot g)(x_2) - (f \cdot g)(x_1) = f(x_2) \cdot g(x_2) - f(x_1) \cdot g(x_1)) =$$
$$f(x_2) \cdot g(x_2) - f(x_2) \cdot g(x_1) + f(x_2) \cdot g(x_1) - f(x_1) \cdot g(x_1) =$$
$$f(x_2)(g(x_2) - g(x_1)) + g(x_1)(f(x_2) - f(x_1)) \geq 0 + 0 = 0.$$
$$\text{п. } 3: \quad \left(\frac{1}{f}\right)(x_2) - \left(\frac{1}{f}\right)(x_1) = \frac{1}{f(x_2)} - \frac{1}{f(x_1)} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_2)f(x_1)} \leq 0.$$
$$\text{п. } 4: \quad (-f)(x_2) - (-f)(x_1) = -f(x_2) + f(x_1) \leq 0.$$

Доказательство п. 5. Пусть $f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2$. В силу неубывания функции f, справедливо $y_2 \geq y_1$. Следовательно

$$(g \circ f)(x_2) - (g \circ f)(x_1) = g(f(x_2)) - g(f(x_1)) = g(y_2) - g(y_1) \geq 0. \ \blacksquare$$

Дадим определение точных граней функции:

Определение 4.6.2. Инфимумом (супремумом) функции f на подмножестве $X \subset D(f)$ называют инфимум (супремум) *образа* $f(X)$:

$$\inf_X(f) = \inf f(X), \quad \sup_X(f) = \sup f(X). \ \boxtimes$$

Заодно напомним

Определение 4.6.3. Минимумом (максимумом) функции f на подмножестве $X \subset D(f)$ называют наименьшее (наибольшее) *значение* функции, которого она *достигает* на X. Т. е.

$$\min_X(f) = y: \ y \in f(X) \ \wedge \ y = \inf_X(f),$$

$$\max_X(f) = y: \ y \in f(X) \ \wedge \ y = \sup_X(f). \ \boxtimes$$

Принципиальное отличие инфимума (супремума) от минимума (максимума) в том, что первый, в отличие от второго, всегда существует.

Примеры 4.6.2. Функция $f(x) = 1/x$ имеет: 1) $\inf\limits_{(0,2)} f = 1/2$ и $\sup\limits_{(0,2)} f = +\infty$, максимум и минимум отсутствуют; 2) $\min\limits_{(1,2]} f = \inf\limits_{(1,2]} f = 1/2$ и $\sup\limits_{(1,2)} f = 1$, максимум отсутствует; 3) $\min\limits_{[1,2]} f = \inf\limits_{[1,2]} f = 1/2$ и $\max\limits_{[1,2]} f = \sup\limits_{[1,2]} f = 1$. Функция $\sin$ имеет на $[0, 2\pi]$ минимум в точке $3\pi/2$ и максимум в точке $\pi/2$. Обратите внимание, что для *монотонной* функции $1/x$ точные грани связаны с концами промежутка.

Аналогом теоремы 2.6.1 Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности является

Теорема 4.6.1 (об односторонних пределах монотонной функции). *Если функция монотонна на $(a, b) \subset \overline{\mathbb{R}}$, то у нее существуют правый предел в точке a и левый предел в точке b. Если функция неубывающая, то*

$$f(a+0) = \inf_{x\in(a,b)} f(x), \quad f(b-0) = \sup_{x\in(a,b)} f(x).$$

Если функция невозрастающая, то

$$f(a+0) = \sup_{x\in(a,b)} f(x), \quad f(b-0) = \inf_{x\in(a,b)} f(x).$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда функция неубывающая и $b \in \mathbb{R}$. Пусть $M = \sup\limits_{x\in(a,b)} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Напомним, что супремум (конечный или $+\infty$) всегда существует. Рассмотрим случай конечного супремума. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению супремума, для любого числа $M' = M - \varepsilon < M$ найдется такое число $x' \in (a, b)$, что $M - \varepsilon < f(x') \leq M$. В силу неубывания функции, $\forall x \in (x', b)$ тем более будет выполняться двусторонняя оценка $M - \varepsilon < f(x) \leq M$. Таким образом, по ε предложено такое $\delta = b - x'$, что из $x \in (b - \delta, b)$ следует $f(x) \in U_\varepsilon(M)$. ■

Задача 4.6.2. Рассмотрите хотя бы один из случаев, когда b или (и) M равны $+\infty$.

4.7. Замена переменной под знаком предела

«Замена переменной» широко применяемый метод математического анализа. Результатом “замены” является сложная функция $g \circ f$.

Теорема 4.7.1. *Пусть функции f и g удовлетворяют требованиям:*

1) $f : \overset{\circ}{U}_\delta (x_0) \to \mathbb{R}$, *где* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$,

2) *существует* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$,

3) $y_0 \notin f(\overset{\circ}{U}_\delta (x_0))$,

4) $f(\overset{\circ}{U}_\delta (x_0)) \subset D(g)$,

5) *существует* $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = u_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R}P^1)$.

Тогда существует $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim\limits_{y \to y_0} g(y) = u_0$ *(рис. 4.1). Т.е. при сформулированных условиях предел сложной функции совпадает с пределом внешней функции.*

Замечание 4.7.1. “Странное” требование 3 убрать нельзя. Пусть $f(x) \equiv 0$, а функция $g(y) = 0$ всюду, кроме $g(0) := 1$. Тогда $\lim\limits_{x \to 0} g(f(x)) = 1$, но $\lim\limits_{y \to 0} g(y) = 0$. Несовпадение пределов есть следствие “скачка” функции g в точке $y_0 = 0$. $\boxminus$

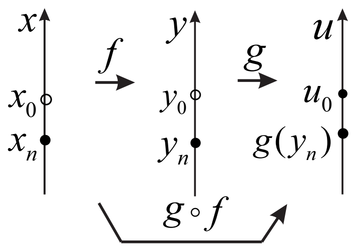

Рис. 4.1

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность Гейне $\{x_n\}$ точки x_0. Тогда $\{y_n = f(x_n)\}$ есть какая-то последовательность Гейне точки y_0 (вот где нужно условие 3). Поэтому $g(f(x_n)) = g(y_n) \to u_0$. Поскольку исходная последовательность может быть выбрана произвольно, мы получили для сложной функции $g \circ f$ существование предела в точке x_0. $\blacksquare$

Примеры применения теоремы 4.7.1 будут приведены позже.

Глава 5

Непрерывность функции в точке

Я приближался к месту
моего назначения.

А. С. Пушкин Капитанская дочка

Свойство непрерывности функции является настолько естественным и постоянно используемым в математическом анализе, что его часто принимают за обязательное. На самом деле, оно "ожидаемое" и "желательное" свойство функции, но, как оказалось, на самом деле изысканное. Сейчас мы изучим его в точке, т. е. **локально**.

5.1. Определение непрерывности в точке

Определение 5.1.1 (непрерывности в точке по Коши)**.** Функция f, определенная в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$, называется **непрерывной в точке** x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0). \ \boxtimes \tag{5.1}$$

Учитывая определение 4.2.2 предела функции в точке, получаем определение непрерывности на языке "$\varepsilon - \delta$":

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \ \forall x \in U_\delta(x_0) \ \hookrightarrow \ f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)).$$

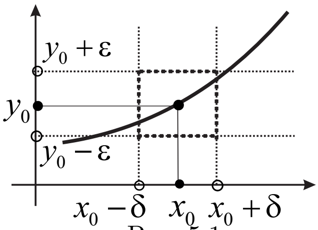

Рис. 5.1

Геометрический смысл. В точке непрерывности по $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что график сужения функции $f|_{U_\delta(x_0)}$ целиком принадлежит внутренности прямоугольника $U_\delta(x_0) \times U_\varepsilon(y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$ (рис. 5.1).

Обсуждение 5.1.1. Определение предъявляет к функции "жесткие" требования в точке x_0: 1) функция определена в некоторой окрестности точки, *включая* саму точку; 2) существует *конечный* предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$; 3) этот предел *совпадает* со значением функции в исследуемой точке (т. е. число, к которому *стремятся* значения $f(x)$ функции при $x \to x_0$, как раз и есть само значение функции в x_0 – в этом "желательность" непрерывности); 4) равенство (5.1) означает, что действие функции f и предельный переход в т. x_0 *перестановочны.* ⊟

Определение 5.1.2 (непрерывности в точке по Гейне)**.** Пусть функция определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Функция f называется **непрерывной в точке** x_0, если для *любой* последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, справедливо: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = f(x_0)$. ⊠

Поскольку эквивалентны понятия предела функции по Коши и по Гейне (теорема 4.2.1), то очевидна

Лемма 5.1.1. *Определения 5.1.1 и 5.1.2 эквивалентны.*

Замечание 5.1.1. В определениях 5.1.1 и 5.1.2 условие $x_n \neq x_0$ является лишним. ⊟

Аналогично определению 4.5.3 одностороннего предела мы дадим

Определение 5.1.3 (односторонней непрерывности).

1) Функция f, определенная слева от точки $x_0 \in \mathbb{R}$, т. е. $x \in (a, x_0]$, называется **непрерывной слева в точке** x_0, если $f(x_0 - 0) = f(x_0)$.

2) Функция f, определенная справа от точки $x_0 \in \mathbb{R}$, т. е. $x \in [x_0, b)$, называется **непрерывной справа в точке** x_0, если $f(x_0 + 0) = f(x_0)$. ⊠

Из леммы 4.5.1 сразу получаем:

Лемма 5.1.2 (критерий непрерывности)**.** *Функция непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда*

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Перейдем к определению и классификации противоположного понятия – точки **разрыва функции**. В этом случае не выполнено хотя бы одно из требований определения 5.1.1 (см. обсуждение 5.1.1).

Определение 5.1.4 (классификация точек разрыва)**.**

1) Если существует *конечный* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, но в точке x_0 функция либо не определена, либо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то x_0 называется точкой **устранимого разрыва** ; в первом случае функцию можно **доопределить**, во втором – **переопределить**.

2) Если существуют *конечные* односторонние пределы $f(x_0 \pm 0) \in \in \mathbb{R}$, но $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то x_0 называется точкой **разрыва первого рода**. Разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется **скачком** в точке x_0.

3) Если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$ не существует или бесконечен, то x_0 называется точкой **разрыва второго рода**. ⊠

Задача 5.1.1. Докажите, что других типов разрывов нет.

Примеры 5.1.1.

1) (а) Функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

имеет устранимый разрыв в точке $x_0 = 0$: *переопределение* $f(0) := 0$ (рис. 5.2).

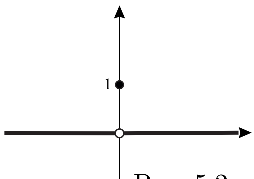

Рис. 5.2

(б) Функция

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x} \text{ при } x \neq 0$$

имеет устранимый разрыв в точке $x_0 = 0$: *доопределение* $f(0) := 0$ (рис. 5.3).

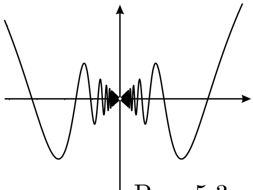
Рис. 5.3

(в) Функция Римана (см. п. 4.2) непрерывна в иррациональных точках и имеет устранимые разрывы в рациональных точках. После переопределения получается функция тождественно равная нулю.

2) (а) Функция **знак числа**

$$\mathsf{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

имеет разрыв первого рода в нуле: скачок равен 2 (рис. 5.4).

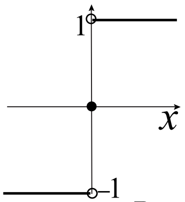

Рис. 5.4

(б) Функция «целая часть числа» $f(x) = [x]$ имеет разрывы первого рода в целочисленных точках $x_n = n \in \mathbb{Z}$; скачки равны 1. Она разрывна слева: $f(n-0) = n-1 \neq n = f(n)$, но непрерывна справа:
$f(n+0) = f(n) = n$ (рис. 5.5).

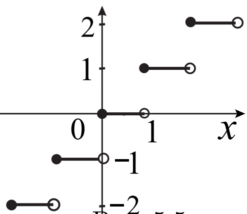

Рис. 5.5

3) (а) Функция $f(x) = 1/x$ имеет в нуле разрыв второго рода: бесконечные односторонние пределы разных знаков (рис. 5.6).

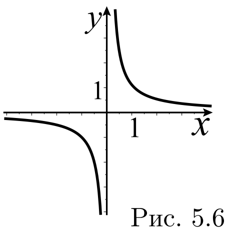

Рис. 5.6

(б) Функция «перевернутый синус»

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

имеет в нуле разрыв второго рода: отсутствуют односторонние пределы (рис. 5.7).

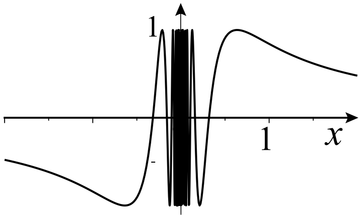

Рис. 5.7

(в) Функция (4.2) Дирихле имеет разрывы второго рода в каждой точке: отсутствуют односторонние пределы.

5.2. Свойства функций непрерывных в точке

Связь между непрерывностью в точке и арифметическими операциями описывает

Теорема 5.2.1 (о непрерывности арифметических операций)**.** *Пусть функции f и g непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x) \pm \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ непрерывны в точке x_0. Если, дополнительно, верно неравенство $g(x_0) \neq 0$, то функция $f(x)/g(x)$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство сразу следует из пп. 5-7 теоремы 4.3.1 о связи между пределом функции и арифметическими операциями. ■

Задача 5.2.1. Оформите доказательство теоремы 5.2.1.

Теперь обсудим связь непрерывности и операции суперпозиции функций.

Теорема 5.2.2 (о переходе к пределу под знаком непрерывной функции)**.** *Пусть функции f и g удовлетворяют требованиям:*

1) $f : \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$,

2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$,

3) $f(\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)) \subset D(g)$,

4) функция g непрерывна в точке y_0.

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$. *Иначе* $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim\limits_{x \to x_0} f(x))$, *т. е. знак предела и знак непрерывной функции перестановочны.*

Доказательство. Возьмем *произвольную* последовательность Гейне $\{x_n\}$ точки x_0. Тогда последовательность $y_n = f(x_n) \to y_0$. В силу определения непрерывности по Гейне, $g(f(x_n)) = g(y_n) \to g(y_0)$. Поскольку исходная последовательность выбрана произвольно, мы получили для сложной функции $g(f(x)) \to g(y_0)$ при $x \to x_0$. ■

Замечание 5.2.1. Теорема 5.2.2 аналогична теореме 4.7.1 о существовании предела сложной функции. Отличие в том, что отсутствует требование $f(x) \neq y_0$ при $x \neq x_0$. Однако оно заменено более жестким требованием непрерывности "внешней" функции g в точке y_0. В результате формулировка теоремы упрощается. $\boxminus$

Из предыдущей теоремы следует

Теорема 5.2.3 (о непрерывности сложной функции)**.** *Если функция f непрерывна в точке x_0, а функция g непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $g \circ f$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Функция $g \circ f$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (докажите). В силу теоремы 5.2.2 и непрерывности f в точке x_0,

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) = g(y_0) = g(f(x_0)). \blacksquare$$

Замечание 5.2.2. Теорема 5.2.3 дает только достаточные условия непрерывности функции. $\boxminus$

Примеры 5.2.1. 1) Функция (4.2) Дирихле $D(x)$ разрывна в каждой точке, постоянная функция $id(x) \equiv 0$ – непрерывна всюду. Их суперпозиции $D(id(x)) \equiv 1$, $id(D(x)) \equiv 0$ всюду непрерывны.

2) Функция "высокая ступенька вверх"

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

разрывна в нуле: скачок равен двум. Функция $g(x) = x^2$ – всюду непрерывна. Но суперпозиция $f^2(x) \equiv 1$ всюду непрерывна, а суперпозиция

$$f(x^2) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

разрывна в нуле.

3) Функции "ступенька вверх" и "ступенька вниз"

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

обе имеют в нуле разрывы: скачки равны 1 и -1 соответственно. Но суперпозиция $g(f(x)) \equiv 0$ всюду непрерывна, а суперпозиция $f(g(x)) \equiv g(x)$ разрывна в нуле.

5.3. Разрывы монотонных функций

В общем случае точки разрыва могут быть устроены весьма сложно (см. функцию Дирихле). Но разрывы монотонных функций допускают полное описание.

Теорема 5.3.1 (о разрывах монотонных функций). *Если функция монотонна на интервале (a, b) (конечном или бесконечном), тогда*

1) она имеет только разрывы первого рода;

2) множество точек разрыва не более, чем счетно.

Доказательство. Пусть x_0 – точка разрыва неубывающей функции f. По теореме 4.6.1 и в силу неубывания функции, существуют *конечные односторонние пределы*

$$f(x_0 - 0) = \sup_{x \in (a, x_0)} f(x) \leq f(x_0) \leq \inf_{x \in (x_0, b)} f(x) = f(x_0 + 0).$$

Если оба знака "$\leq$" внутри оценки есть равенства, то, в силу леммы 5.1.2, f непрерывна в x_0. Значит, $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$, т. е. x_0 – точка разрыва первого рода.

С каждой точкой разрыва связан интервал $(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$; причем (в силу монотонности функции) интервалы, отвечающие разным точкам разрыва, *не пересекаются*: если $x_0 < x_1$, то

$$f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0) = \inf_{(x_0, x_1)} f(x) \leq \sup_{(x_0, x_1)} f(x) = f(x_1 - 0) < f(x_1 + 0)$$

(равенство внутри не исключено, см. рис. 5.5). Возьмем в каждом интервале по одному произвольному *рациональному* числу. Эти числа заведомо не совпадают, а их множество не более, чем счетно. ■

Замечание 5.3.1. Если монотонная на *отрезке* функция имеет разрывы в концах, то они устранимы. ⊟

Задача 5.3.1. Пусть неубывающая на $[a, b]$ функция разрывна в точке a. Как следует ее переопределить в a, чтобы устранить разрыв?

Глава 6

Свойства функций непрерывных на отрезке

Именно на отрезке проявляются преимущества свойства непрерывности функции.

6.1. Ограниченность и достижение точных граней

Достиг я высшей власти

А. С. Пушкин «Борис Годунов»

Определение 6.1.1. Функция называется **непрерывной на отрезке**, если она непрерывна в каждой его внутренней точке, а на концах имеет место односторонняя непрерывность. ⊠

Теорема 6.1.1 (первая теорема Вейерштрасса об ограниченности)**.** *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на нем.*

Доказательство. В противном случае существует последовательность значений функции $\{y_n\} \subset f([a, b])$, для которой $|y_n| \geq n$. Для каждого значения функции выберем его произвольный прообраз x_n, т.е. $f(x_n) = y_n$, где $\{x_n\} \subset [a, b]$ Из теоремы 3.3.1 Больцано-

Вейерштрасса следует, что существует сходящаяся подпоследовательность: $x_{n_k} \to x_0$ при $k \to \infty$. В силу двусторонней оценки $a \le x_n \le$ $\le b$ и следствия 2.2.1, справедливо: $x_0 \in [a,b]$ (это существенный момент в доказательстве). Поскольку функция непрерывна в точке x_0, то $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \in \mathbb{R}$. С другой стороны: $|f(x_{n_k})| = |y_{n_k}| \ge n_k \ge$ $\ge k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$. Противоречие. ■

Замечание 6.1.1. Оба условия в теореме ($D(f) = [a,b]$ и непрерывность f на $[a,b]$) являются существенными. ⊟

Примеры 6.1.1 (нарушения требований теоремы 6.1.1)**.** 1) Функция задана формулой $f(x) = 1/x$ на $(0,1)$; 2) функция, заданная той же формулой на $[-1,1]$ с доопределением $f(0) = 0$.

Теорему 6.1.1 усиливает

Теорема 6.1.2 (вторая теорема Вейерштрасса о достижении точных граней)**.** *Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существуют точки $x_1, x_2 \in [a,b]$, в которых $f(x_1) = \inf\limits_{[a,b]} f(x) = \min\limits_{[a,b]} f(x)$, $f(x_2) = \sup\limits_{[a,b]} f(x) = \max\limits_{[a,b]} f(x)$. Т.е., непрерывная на отрезке функция достигает своих точных граней (см. рис. 6.1).*

Доказательство осуществим для супремума. Согласно предыдущей теореме точная верхняя грань образа $f([a,b])$ *конечна*, т. е. существует число $M =$ $= \sup_{[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$. Из определения супремума следует, что $\forall n \in$ $\in \mathbb{N}$ найдется такое число $y_n \in$ $\in f([a,b])$, что $M - 1/n < y_n \le$ $\le M$. Как и в доказательстве теоремы 6.1.1, получаем ограниченную последовательность прообразов: $\{x_n\} \subset [a,b]$, где $f(x_n) = y_n$. Рассуждая как в доказательстве теоремы 6.1.1, из последовательности $\{x_n\}$ выделяем сходящуюся в $[a,b]$ подпоследовательность: $x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$ при $k \to \infty$. Таким образом:

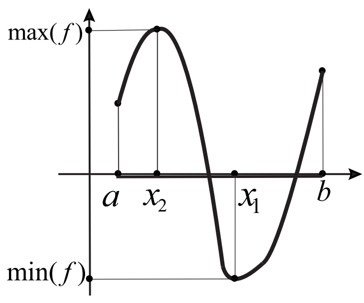

Рис. 6.1

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \le M, \quad x_{n_k} \to x_0 \in [a,b] \text{ при } k \to \infty.$$

Переходя в двусторонней оценке к пределу, в силу непрерывности функции в точке x_0, получаем $f(x_0) = M$. ■

Замечание 6.1.2. Оба условия в теореме ($Def(f) = [a, b]$ и непрерывность f на $[a, b]$) являются существенными. ⊟

Примеры 6.1.2. 1) Функция $f(x) = x$ на $(0, 1)$ не достигает ни нижней, ни верхней граней. 2) Функция задана на $[0, 1]$ так: $f(x) = x$ на $(0, 1)$ и $f(0) = f(1) = 1/2$. И эта функция не достигает ни нижней, ни верхней граней, но у нее разрывы в концах отрезка.

6.2. Промежуточные значения непрерывной функции

Живя, умей всё пережить

Ф. И. Тютчев

Теорема 6.2.1 (Больцано-Коши о нуле знакопеременной функции). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает в его концах значения разных знаков, то существует точка $c \in (a, b)$, в которой функция обнуляется: $f(c) = 0$ (см. рис. 6.2).*

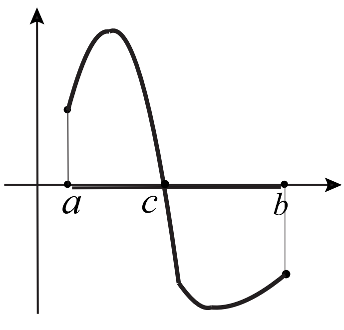

Рис. 6.2

Доказательство осуществляется методом дихотомии, который уже применялся (теорема Больцано-Вейерштрасса о частичном пределе). Возьмем середину отрезка $x_1 = (a + b)/2$. Если $f(x_1) = 0$, то $c = x_1$ и доказательство завершено. Если $f(x_1) \neq 0$, то из двух "половинок" $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$ выберем ту, на концах которой функция принимает значения разных знаков. Переобозначим концы выбранного отрезка на $[a_1, b_1]$. Полученный отрезок делим пополам, возникает точка $x_2 = (a_1 + b_1)/2$. Или $f(x_2) = 0$, или из двух "половинок" $[a_1, x_2]$ и $[x_2, b_1]$ выберем ту, на концах которой функция принимает значения разных знаков. В результате, или на n-ом шаге $f(x_n) = 0$ (и тогда теорема доказана), или возникает последовательность вложенных стягивающихся отрезков: $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$, длина $(a-b)/2^n \to 0$ при $n \to \infty$. По теореме 3.2.1 Кантора существует *единственная* точка $c \in [a, b]$, принадлежащая пересечению всех отрезков последовательности. Покажем, что $f(c) = 0$. Пусть, от противного, $f(c) \neq 0$, например, $f(c) > 0$. Поскольку функция непрерывна в точке c, то $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$. Согласно следствию 4.3.1 об отделении от нуля, найдется такая δ-окрестность точки c, что для всех точек x из нее $f(x) > f(c)/2 > 0$. Теперь выберем номер n настолько большим, чтобы выполнялась оценка $(a-b)/2^n < \delta$. Тогда отрезок $[a_n, b_n]$ (и все последующие) окажется целиком в выбранной δ-окрестности. Для концов этого отрезка выполняются оценки: $f(a_n) > 0$ и $f(b_n) > 0$. А это противоречит тому, что на концах отрезка $[a_n, b_n]$ функция принимает значения разных знаков. Итак, $f(c) = 0$. При этом $c \in (a, b)$, поскольку (по условию) на концах функция отлична от нуля. ■

Замечание 6.2.1. Для разрывных функций теорема, очевидно, неверна. Приведите контрпример. ⊟

Задача 6.2.1. Точка $c \in [a, b]$, которую мы получили методом дихотомии в доказательстве теоремы 6.2.1, единственная. Означает ли это, что на (a, b) функция f имеет единожды обнуляется? Если нет, то приведите пример.

Теорема 6.2.2 (о промежуточных значениях). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого промежуточного значения y_0, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, существует число $c \in$ $\in [a, b]$, для которого $f(c) = y_0$ (см. рис. 6.3).*

Доказательство. Если $f(a) = y_0$ или $f(b) = y_0$, то утверждение верно. В противном случае рассмотрим функцию $g(x) :=$ $= f(x) - y_0$. Из условия теоремы следует, что непрерывная на $[a, b]$ функция g принимает на концах значения разных знаков. Следовательно (по теореме 6.2.1), существует точка $c \in [a, b]$, в которой $g(c) = 0$, что равносильно $f(c) = y_0$. ■

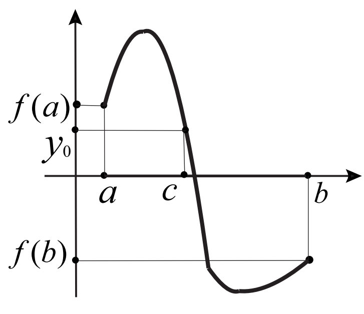

Рис. 6.3

Теорема 6.2.3 (о непрерывном образе отрезка)**.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то ее образом является отрезок $[m, M]$, где $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$ (см. рис. 6.1).*

Доказательство. Из теоремы 6.1.2 (второй Вейерштрасса) следует, что существуют такие точки $x_1,\ x_2 \in [a, b]$, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$. Нам надо доказать, что $f([a, b]) = [m, M]$. Из определения инфимума и супремума следует, что образ $f([a, b]) \subset [m, M]$. Если $m = M$, то функция есть константа $f(x) \equiv m$, ее образом является вырожденный отрезок – точка, и теорема доказана. Если $m < M$, то $x_1 \neq x_2$. Пусть, для определенности, $x_1 < x_2$. Рассмотрим функцию f на отрезке $[x_1, x_2]$. По предыдущей теореме для любого $y_0 \in [m, M]$ найдется такая точка $x_0 \in [x_1, x_2]$, что $f(x_0) = y_0$. Следовательно, $[m, M] \subset f([x_1, x_2]) \subset f([a, b])$. ■

6.3. Теорема об обратной функции

Необходимо понять, кто от кого зависит:
Минотавр от Миноса, или Минос от Минотавра.

М. И. Цветаева «Сводные тетради»

Не всегда удается задать функцию явно. Поэтому важны “косвенные” способы задания: 1) обратная функция, 2) функция, заданная неявно, 3) функция, заданная параметрически.

Определение 6.3.1. Пусть функция f является ***биекцией*** (взаимно-однозначным соответствием) между $D(f)$ и $Im(f)$. Обратное соответствие (тоже биекция!) между $Im(f)$ и $D(f)$ называется **обратной функцией**, которую обозначают f^{-1}. ⊠

Напомним, что функция $f : D(f) \to Y$ называется ***инъективной***, если разные числа из области определения отображаются в разные: $\forall x_1, x_2 :\ \ x_1 \neq x_2 \ \ \hookrightarrow\ \ f(x_1) \neq f(x_2)$. Сужая область значений до образа функции, мы получаем биективную функцию

$$\widehat{f} :\ D(f) \to Im(f),\ \widehat{f}(x) := f(x).$$

Пример 6.3.1. Показательная функция $f(x) = 2^x$ $(x \in \mathbb{R})$ является инъективной как действующая в $\mathbb{R}$, но биективной как действующая в $\mathbb{R}^+ := (0, +\infty)$.

Очевидна

Лемма 6.3.1 (свойства обратной функции)**.**

1) $D(f^{-1}) = Im(f)$, $Im(f^{-1}) = D(f)$;

2) $(f^{-1})^{-1} = f$;

3) $\forall x \in D(f) \hookrightarrow f^{-1}(f(x)) \equiv x,\ \ \forall y \in D(f^{-1}) \hookrightarrow f(f^{-1}(y)) \equiv y.$

График "прямой" функции f служит одновременно графиком обратной, если в качестве оси аргументов обратной функции взять ось Oy. Если же мы хотим получить область определения обратной функции на оси Ox, следует график функции f отразить относительно биссектрисы первого-третьего координатных углов (см. рис. 6.4).

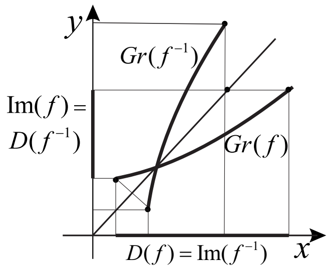

Рис. 6.4

Если данная функция не является биекцией, область ее определения пытаются сузить так, чтобы добиться биективности.

Примеры 6.3.1. Биективны сужения: 1) $f(x) = x^2$ на $[0, +\infty)$; 2) $f(x) = \sin x$ на $[-\pi/2, \pi/2]$; 3) $f(x) = \cos x$ на $[0, \pi]$. Заметим, что на суженной области определения данная функция является монотонной.

Теорема 6.3.1 (об обратной функции на отрезке)**.** *Пусть функция f строго возрастает (убывает) на отрезке $[a, b]$ и непрерывна на нем. Тогда существует обратная функция, определенная на отрезке $[f(a), f(b)]$ ($[f(b), f(a)]$), строго возрастающая (убывающая) и непрерывная на нем.*

Доказательство. Проведем доказательство для строго возрастающей функции. Во-первых, строго возрастающая функция является *биекцией на свой образ* (иначе нарушается условие строгого возрастания). Во-вторых, в силу непрерывности, из теоремы 6.2.3 следует, что образом функции является отрезок $[m, M]$, где $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Опять же в силу строгого возрастания, $m = f(a)$, $M = f(b)$. Таким образом, f – строго возрастающая биекция между отрезками

$[a, b]$ и $[m, M]$. Очевидно, что обратная биекция f^{-1} также строго возрастает.

Остается доказать непрерывность обратной функции. Пусть, от противного, $y_0 \in (m, M)$ – точка разрыва для f^{-1}. Тогда, в силу монотонности f^{-1} и теоремы 5.3.1, это точка разрыва первого рода: $f^{-1}(y_0 - 0) < f^{-1}(y_0 + 0)$ и

$$\forall y < y_0 \ \hookrightarrow \ f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 - 0), \ \ \forall y > y_0 \ \hookrightarrow \ f^{-1}(y) > f^{-1}(y_0 + 0).$$

Следовательно, единственная точка y_0 отображается функцией f^{-1} в невырожденный отрезок $[f^{-1}(y_0 - 0), f^{-1}(y_0 + 0)]$, что противоречит биективности этой функции.

Если же точка разрыва – конец отрезка (для определенности $y_0 = m$), то получаем, что только точка m отображается в отрезок $[a, f^{-1}(m + 0)]$. ■

Теорема 6.3.1 обобщается для случая, когда область определения промежуток (конечный или бесконечный).

Теорема 6.3.2 (об обратной функции на промежутке)**.** *Пусть функция f строго возрастает (убывает) на промежутке с концами a и b (конечными или бесконечными) и непрерывна на нем. Тогда существует обратная функция, определенная на промежутке с концами $f(a + 0)$ и $f(b - 0)$ $(f(b - 0),\ f(a + 0))$, строго возрастающая (убывающая) и непрерывная на нем.*

Доказательство для случая конечного интервала. Пусть f строго возрастает. Рассмотрим счетное объединение отрезков, которое **исчерпывает** весь интервал:

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + 10^{-n}, b - 10^{-n}].$$

Сужение функции f на указанные отрезки обозначим через f_n. На каждом отрезке, в силу теоремы 6.3.1, существует обратная функция f_n^{-1}. Для любого $x \in (a, b)$ существует номер N, начиная с которого $x \in [a + 10^{-n}, b - 10^{-n}]$, где $n > N$. Причем для всех указанных номеров в окрестности точки x функции f_n, а в окрестности точки $f_n(x)$ функции f_n^{-1} не меняются (происходит *стабилизация* в окрестности любой точки $x \in (a, b)$). В результате определяется обратная функция на образе $Im(f) = (f(a + 0), f(b - 0))$. ■

Задача 6.3.1. Докажите теорему 6.3.2 для случая неограниченного интервала (полуинтервала).

Замечание 6.3.1. Не следует думать, что обратимы только монотонные функции. Проиллюстрируем это утверждение примером. Для $x \in [-1, 1]$ положим

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & x \in \mathbb{J} \end{cases} \tag{6.1}$$

Очевидно, $Im(f) = D(f) = [-1, 1]$. Т. к. суперпозиция $(f \circ f)(x) \equiv \equiv x$ на $[-1, 1]$, то функция f биективна и совпадает со своей обратной: $f = f^{-1}$. Функция f непрерывна в единственной точке $x_0 = 0$ и имеет разрывы второго рода во всех остальных точках. Заметим, что эта функция не является монотонной ни на каком подотрезке, принадлежащем $[-1, 1]$.

Однако для монотонных функций, отображающих промежуток в промежуток, имеет место равносильность обратимости и непрерывности, см. задачу 6.3.4. $\boxminus$

Задача 6.3.2. Обоснуйте свойства функции (6.1). Что собой представляет ее график?

Терминология. Функция обладающая свойством $f = f^{-1}$ называется **инволютивной** или **инволюцией**.

Задача 6.3.3. Приведите примеры инволюций. Как расположен график инволютивной функции?

Задача 6.3.4. Пусть функция определена и монотонна на промежутке и множество ее значений — промежуток. Доказать, что эта функция непрерывна.

6.4. Компактификация и промежутки

Понятие компактности является одним из основных в современном анализе.

Определение 6.4.1. Подмножество числовой прямой называется **(секвенциально) компактным**, если из любой принадлежащей ему последовательности можно выделить *сходящуюся в нем же* подпоследовательность. $\boxtimes$

Из теоремы 3.3.1 Больцано-Вейерштрасса и следствия 2.2.1 (о переходе к пределу в неравенстве) следует, что отрезок является компактным. Контрпримеры показывают, что интервал или полуинтервал не являются таковыми (приведите контрпримеры). Компактность отрезка существенна в теоремах 6.1.1 и 6.1.2 Вейерштрасса.

Если интервал (или полуинтервал) ограниченный, то, включив в него его концы (т. е. превратив в отрезок), мы **компактифицируем** его. Компактифицируя всю числовую прямую, мы приходим к понятию расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}}$ или к понятию проективной прямой $\mathbb{R}P^1$ (см. п. 1.5). На $\overline{\mathbb{R}}$ справедлива теорема 3.4.2 Больцано-Вейерштрасса; на ней любой промежуток можно компактифицировать (например, компактификацией луча $(-\infty, 0)$ является $[-\infty, 0]$). В некоторых случаях удобно рассматривать функции с $D(f) \subset \overline{\mathbb{R}}$ и со значениями в $Im(f) \subset \overline{\mathbb{R}}$. Поскольку для символов $\pm\infty$ введены понятия ε-окрестности и порядок, то понятия предела и непрерывности функции в точках $\pm\infty$ полностью определены как односторонние. Такой подход позволяет, например, дать другое доказательство теоремы об обратной функции. Поступим так: 1) на любом промежутке – конечном или бесконечном – компактифицируем область определения данной функции и повторим доказательство теоремы 6.3.1 без изменений; 2) исключим из рассмотрения дополнительно введенные концы в области определения и их образы.

Пример 6.4.1. Забегая вперед, рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$ на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. После компактификации получим функцию $\overline{\operatorname{tg}} : [-\pi/2, \pi/2] \to [-\infty, +\infty]$. Обратная функция $\overline{\operatorname{arctg}} : [-\infty, +\infty] \to \to [-\pi/2, \pi/2]$.

Замечание 6.4.1. На $\overline{\mathbb{R}}$ мы пользуемся только порядком и окрестностями точек; арифметические операции с символами $\pm\infty$ не определяем. ⊟

Глава 7

Непрерывность элементарных функций

– Иван Арнольдович, это элементарно ...
весь ужас в том, что у него уж не собачье,
а именно человеческое сердце.

М. А. Булгаков «Собачье сердце»

Нам нужно корректно определить основные элементарные функции и исследовать их основные свойства.

7.1. Тригонометрические функции

Применять радианную меру угла пока некорректно, поскольку она опирается на понятие длины дуги окружности. Мы будем ею пользоваться "незаконно". Также мы будем использовать понятие площади для треугольника и круга.

Лемма 7.1.1. *Для $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ справедлива двусторонняя оценка*

$$|\sin x| \le |x| \le |\operatorname{tg} x|. \tag{7.1}$$

Если $x \ne 0$, то оценка строгая (рис. 7.1).

Доказательство следует из двусторонней оценки площадей (рис. 7.2): $S_{trOAB} < S_{sectOAB} < S_{trOAD} \;\Leftrightarrow\; \sin x < x < \operatorname{tg} x.$ ■

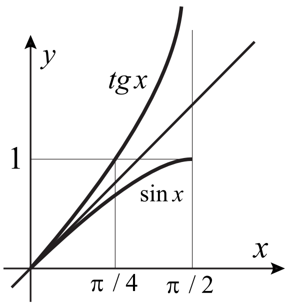

Рис. 7.1

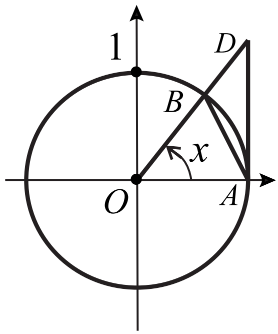

Рис. 7.2

Теорема 7.1.1. *Функции* sin, cos, tg, ctg *непрерывны всюду, где определены.*

Доказательство непрерывности функции sin следует из оценки

$$|\sin x-\sin x_0|=2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\le|x-x_0|\to 0 \text{ при } x\to x_0.$$

Теперь функцию $\cos x=\sin(\pi/2-x)$ следует рассмотреть как сложную, а функции $\operatorname{tg} x=\sin x/\cos x$, $\operatorname{ctg} x=\cos x/\sin x$ рассмотреть как частное. ■

Теорема 7.1.2. ***Первый замечательный предел:***

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{7.2}$$

Доказательство следует из оценки (7.1) и непрерывности функции cos:

$$1<\frac{|x|}{|\sin x|}=\frac{x}{\sin x}<\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}=\frac{1}{\cos x}\ \to\ 1 \text{ при } x\to 0. \ ■$$

Замечание 7.1.1. Из равенства (7.2) следует, что функцию $f(x)=\sin x/x$ можно *доопределить* в т. $x_0=0$ по непрерывности: $f(0):=1$ (рис. 7.3). ⊟

Из определений следует, что функция sin строго возрастает на $[-\pi/2,\pi/2]$, а функция cos строго убывает на $[0,\pi]$, причем образами указанных отрезков является отрезок $[-1,1]$. Функции $\arcsin$, $\arccos$ определяются как *обратные на отрезке* $[-1,1]$; они строго монотонны и непрерывны на $[-1,1]$.

Из определений следует, что функция tg строго возрастает на $(-\pi/2, \pi/2)$, а функция ctg строго убывает на $(0, \pi)$, причем образами указанных интервалов является вся числовая ось $\mathbb{R}$. Функции arctg, arcctg определяются как обратные на $\mathbb{R}$; они строго монотонны и всюду непрерывны.

Замечание 7.1.2. Обратите внимание на расположение графиков функций $\sin$, $\arcsin$, tg, arctg относительно биссектрисы $y = x$, а графиков функций $\cos$, $\arccos$, ctg, arcctg относительно биссектрисы $y = x$ и относительно прямой $y = \pi/2 - x$. $\boxminus$

Пример 7.1.1. суперпозиции взаимно-обратных функций. Функция $\sin(\arcsin x) \equiv x$ определена на $[-1,1]$; ее графиком является отрезок биссектрисы первой и третьей координатных четвертей. Функция $\arcsin(\sin x)$ определена на $\mathbb{R}$, ее графиком является “пила” (рис. 7.4).

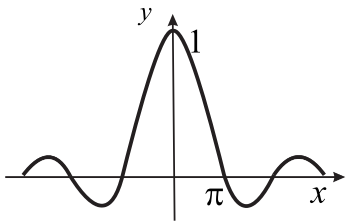

Рис. 7.3

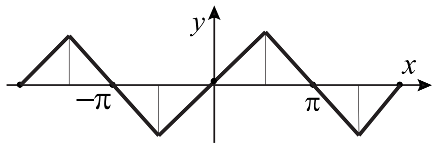

Рис. 7.4

Следствие 7.1.1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1. \tag{7.3}$$

Доказательство первого равенства опирается на непрерывность произведения и первый замечательный предел (7.2):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Доказательство второго равенства мы получим применяя теорему 4.7.1: после замены $y = \arcsin x$

$$1 = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\arcsin x)}{\arcsin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1. \;\blacksquare$$

Задача 7.1.1. Докажите третье равенство в (7.3).

7.2. Степень с натуральным показателем

В п. 1.7 дано определение, а в п. 1.8 свойства арифметических операций. Из этих свойств следует, что функции $f(x) = a + x$, $f(x) = ax$, $f(x) = a/x$ непрерывны всюду, где определены. (Докажите непрерывность функции $f(x) = 1/x$).

Теорема 7.2.1. *Функция* ***степень с натуральным показателем*** $f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$ *обладает следующими свойствами:*

1) *определена и непрерывна на всей числовой оси* $\mathbb{R}$*;*

2) *четна (нечетна) при четном (нечетном)* n*;*

3) *ее сужение на* $\mathbb{R}_0^+ := [0, +\infty)$ *является строго возрастающей функцией;*

4) *образ* $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$.

Задача 7.2.1. Нарисуйте графики функций $f(x) = x^n$ для $n = 1, 2, 3, 4, 5$ и сравните их расположение относительно биссектрисы $y = x$.

Доказательство. Поскольку умножение определено для любых чисел, то $D(f) = \mathbb{R}$. Непрерывность доказывается индукцией и ссылкой на теорему 5.2.1 о непрерывности арифметических операций.

П. 3 доказывается индукцией и ссылкой на п. 2 леммы 4.6.1.

При $x > 1$ верно $x^n \geq x$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$. Поскольку $f(0) = 0$, то (в силу п. 1 и теоремы 6.3.2) $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$. ■

Задача 7.2.2. Пункт 2 докажите самостоятельно.

Функция **арифметический корень** n-й степени $f(x) = \sqrt[n]{x} \quad (n \in \mathbb{N})$, определяется как функция *обратная* к степенной $f(x) = x^n$ на $\mathbb{R}_0^+$. Отсюда сразу (см. теорему 6.3.1) следует

Теорема 7.2.2 (свойства арифметического корня)**.** *Функция* $f(x) = \sqrt[n]{x}$ *определена на* $\mathbb{R}_0^+$*, всюду строго возрастает, всюду непрерывна и* $Im(f) = \mathbb{R}_0^+$.

Задача 7.2.3. Сравните взаимное расположение графиков функций $f(x) = x^n$ и $f(x) = \sqrt[n]{x}$ с возрастанием $n \in \mathbb{N}$.

7.3. Степень с действительным показателем

Наша задача – определить степень a^{α}, где $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Нам потребуются вспомогательные утверждения о степени с рациональным показателем.

Лемма 7.3.1 (неравенство Бернулли для корней)**.** *Пусть* $a > 1$, $n \in \mathbb{N}$, *тогда*

$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}. \tag{7.4}$$

Доказательство. Поскольку $\sqrt[n]{a} > 1$ (докажите), то (по неравенству Бернулли, лемма 2.6.1)

$$a = (1 + (\sqrt[n]{a} - 1))^n \geq 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}. \;\blacksquare$$

Следствие 7.3.1. *При всех* $a > 0$ *справедливо*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1. \tag{7.5}$$

Доказательство. При $a = 1$ утверждение очевидно, при $a > 1$ – следует из (7.4). При $0 < a < 1$ справедливо

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{1} = 1. \quad \blacksquare$$

Учитывая равенство (7.5), для произвольного действительного числа $a > 0$ и произвольных натуральных чисел $m, n \in \mathbb{N}$ дадим следующее

Определение 7.3.1. Для произвольных натуральных $m,\ n \in \mathbb{N}$ полагаем:

$$a^0 := 1,\; a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a},\; a^{\frac{m}{n}} := \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m,\; a^{\frac{-m}{n}} := \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}. \quad \boxtimes$$

Тем самым определена **степень с рациональным показателем** $r \in \mathbb{Q}$, обладающая следующими свойствами:

1) при перемножении степеней с общим основанием показатели складываются: $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$ $(a > 0)$;

2) степень произведения равна произведению степеней: $(ab)^r = a^r b^r$ $(a, b > 0)$.

3) при возведении степени в степень показатели перемножаются: $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2} \quad (a > 0)$;

4) возведение в степень строго монотонно как функция показателя: $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ r_1 < r_2$ верно: если $a > 1$, то $a^{r_1} < a^{r_2}$, если $0 < a < 1$, то $a^{r_1} > a^{r_2}$;

5) возведение в степень строго монотонно как функция основания: $\forall r \in \mathbb{Q},\ \forall\, 0 < a < b \ \Rightarrow\ a^r < b^r$.

Доказательство свойств 1-5 – школьное упражнение.

Теперь мы можем уточнить оценку (7.4).

Лемма 7.3.2 (сильное неравенство Бернулли)**.** *Пусть* $a > 1$, $r \in \mathbb{Q}$, $|r| \le 1$. *Тогда*

$$|a^r - 1| \le 2|r|(a-1). \tag{7.6}$$

Обсуждение 7.3.1. Важность неравенства (7.6) в том, что оно оценивает рост степени сразу по двум параметрам: в точке $(a_0, r_0) = (1, 0)$ степень растет не быстрее произведения приращения параметров. $\boxminus$

Доказательство. При $r = 0$ утверждение очевидно.

Если $0 < r \le 1$, то при некотором $n \in \mathbb{N}$ справедливо $\frac{1}{n+1} < r \le \frac{1}{n}$. Из оценки (7.4), монотонности степени относительно показателя (свойство 4) и выбора натурального n получаем:

$$a^r - 1 \le a^{\frac{1}{n}} - 1 \le \frac{a-1}{n} \le 2\frac{a-1}{n+1} \le 2r(a-1).$$

Пусть $-1 \le r < 0$. Учитывая, что $0 < a^r < 1$, получаем:

$$|a^r - 1| = a^r |a^{-r} - 1| \le 2a^r(-r)(a-1) \ \le 2(-r)(a-1). \quad \blacksquare$$

Теперь дадим основное

Определение 7.3.2. Пусть: $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, последовательность $\{r_n\} \subset \mathbb{Q}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \alpha$. Положим по определению

$$a^\alpha := \lim_{n\to+\infty} a^{r_n}. \quad \boxtimes$$

Теорема 7.3.1 (корректность определения степени)**.** *Справедливы утверждения:*

1) степень существует: $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{r_n}$ *существует и конечен;*

2) степень единственна: $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{r_n}$ *не зависит от выбора последовательности* $r_n \to \alpha$*;*

3) преемственность: при $\alpha \in \mathbb{Q}$ *определение совпадает со старым.*

Доказательство. Пусть $a > 1$ и $r_n \to \alpha$ при $n \to +\infty$. Тогда последовательность r_n ограничена рациональными числами $\gamma,\ \beta \in \mathbb{Q}$: для любого натурального n верна двусторонняя оценка $\gamma < r_n < \beta$. В силу свойства 4 степени с рациональным показателем, получаем:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ \exists M > 0:\ \frac{1}{M} \le a^{\gamma} < a^{r_n} < a^{\beta} \le M. \tag{7.7}$$

Последовательность r_n сходящаяся, поэтому (критерий Коши 3.5.1) она фундаментальна:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall n > n(\varepsilon)\ \ \forall p \in \mathbb{N}\ \hookrightarrow\ |r_n - r_{n+p}| < \varepsilon. \tag{7.8}$$

Докажем фундаментальность последовательности a^{r_n}. Из (7.6), (7.7) и (7.8):

$$|a^{r_{n+p}} - a^{r_n}| = a^{r_p}|a^{r_{n+p}-r_p} - 1| \le M2(a-1)|r_{n+p} - r_p| \le 2M(a-1)\varepsilon$$

как только $n > n(\varepsilon)$. Из произвольности ε следует фундаментальность a^{r_n}. Значит, предел $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{r_n}$ существует.

Если же $0 < a < 1$, то, благодаря *нижней* оценке (7.7), законен переход к пределу

$$\lim_{n\to+\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}}.$$

Случай $a = 1$ тривиален.

Докажем единственность. Пусть $a > 1$ и $r_n, r'_n \to \alpha$. Тогда $r_n - r'_n \to 0$ и с помощью (7.6), (7.7) получаем

$$|a^{r_n} - a^{r'_n}| = a^{r'_n}|a^{r_n - r'_n} - 1| \le M2|r_n - r'_n|(a-1) \to 0.$$

Случай $0 < a < 1$ сводится к предыдущему: $a^{r_n} = 1/\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}$.

Для доказательства преемственности достаточно взять $r_n \equiv r$. ■

Замечание 7.3.1. Доказательство теоремы 7.3.1 демонстрирует ценность критерия Коши – мы доказываем *существование* конечного предела не имея в распоряжении возможный результат. ⊟

7.4. Показательная функция

Так называется функция $f(x) = a^x$, где $a > 0,\ x \in \mathbb{R}$.

Теорема 7.4.1 (свойства показательной функции)**.**

1) Строгая монотонность: при $a > 1$ *– строго возрастает, при* $0 < a < 1$ *– строго убывает.*

2) Положительность: $a^x > 0$.

3) $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$;

4) $(ab)^x = a^x b^x \quad (b > 0)$;

5) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$.

6) Функция непрерывна на $\mathbb{R}$.

7) $D(f) = \mathbb{R},\ Im(f) = (0, +\infty)$.

Доказательство. П.1. Пусть $a > 1$, $x_1 < x_2$. Возьмем рациональные числа $x < r < R < y$ и последовательности $r_n \to x_1,\ r_n \le r$, $R_n \to x_2,\ R_n \ge R$:

$$x_1 \leftarrow r_n \le r < R \le R_n \to x_2 \text{ при } n \to \infty.$$

Используя монотонность показательной функции с рациональным показателем (свойство 4) и переходя к пределу, получаем

$$a^{x_1} = \lim_{n \to +\infty} a^{r_n} \le a^r < a^R \le \lim_{n \to +\infty} a^{r_n} = a^{x_2} \ \Rightarrow\ a^{x_1} < a^{x_2}.$$

Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

П.2 следует из положительности $a^r > 0$ и доказанной монотонности п.1.

П.3 получается из определения, свойства 1 степени с рациональным показателем и предельного перехода:

$$a^{x_1} a^{x_2} = \lim_{n \to +\infty} a^{r_n} \lim_{n \to +\infty} a^{R_n} = \lim_{n \to +\infty} (a^{r_n} a^{R_n}) =$$

$$\lim_{n \to +\infty} a^{r_n + R_n} = a^{x_1 + x_2}.$$

П.4 получается аналогично п.3.

Задача 7.4.1. Обоснуйте каждое равенство в доказательстве п. 3. Докажите п. 4.

П.5. Не существует единого правила перехода к пределу в показательно-степенном выражении, поэтому в общем случае предел $\lim\limits_{n\to+\infty}(a^{r_n})^{R_n}$ нельзя вычислять, переходя отдельно к пределу в основании и показателе. Мы докажем п. 5 с помощью *двухсторонних* оценок, воспользовавшись п. 2 теоремы 7.3.1. Пусть: $a > 1$, $x_1, x_2 > > 0$, $r'_n \uparrow x_1$, $r''_n \downarrow x_1$, $R'_n \uparrow x_2$, $R''_n \downarrow x_2$ (стрелки указывают тип монотонности предельного перехода). Тогда из свойства 3 степени с рациональным показателем, п. 1 данной теоремы и свойства 5 степени с рациональным показателем получаем:

$$a^{x_1x_2} \uparrow a^{r'_nR'_n} = (a^{r'_n})^{R'_n} \leq (a^{x_1})^{R'_n} \leq (a^{x_1})^{x_2} \leq$$

$$(a^{x_1})^{R''_n} \leq (a^{r''_n})^{R''_n} = a^{r''_nR''_n} \downarrow a^{x_1x_2}.$$

Применяя теорему 2.2.3 к трем последовательностям $a_n := a^{r'_nR'_n}$, $b_n := (a^{x_1})^{x_2}$ (ее значения постоянны!) и $c_n := a^{r''_nR''_n}$, получаем утверждение п. 5.

Задача 7.4.2. Докажите случай $a > 1,\ x_1 > 0,\ x_2 < 0$.

П.6. Во-первых, заметим, что неравенство Бернулли (7.6) справедливо для действительного показателя:

$$|a^x - 1| \leq 2|x|(a-1),\ a > 1,\ x \in \mathbb{R},\ |x| < 1.$$

Для доказательства нужно в (7.6) заменить r на $r_n \to x$ и перейти к пределу, что допустимо, учитывая теорему 7.3.1. Теперь при $a > 1$ получаем:

$$|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^{x-x_0} - 1| \leq a^{x_0}2|x - x_0|(a-1) \to 0,\ \text{при}\ x \to x_0.$$

Случай $0 < a < 1$ рассмотрите самостоятельно.

П.7 следует из монотонности показательной функции и того, что при $a > 1$ верны предельные равенства:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0. \tag{7.9}$$

Задача 7.4.3. Докажите равенства (7.9) и завершите доказательство п. 7. ■

Задача 7.4.4. Проследите графики показательной функции с ростом оснований; обратите внимание на случаи $0 < a < 1$ и $a > 1$.

Терминология. Показательная функция $y = e^x$ называется **экспонентой**.

7.5. Логарифмическая и степенная функции

Доказанные свойства показательной функции позволяют дать

Определение 7.5.1. Логарифмической называется функция, обратная к показательной $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. Обозначение $f^{-1}(x) = \log_a x$. По договоренности $\log_e x = \ln x$. ⊠

Задача 7.5.1. Постройте графики взаимно обратных функций показательной и логарифмической для разных оснований; обратите внимание на случаи $0 < a < 1$ и $a > 1$.

Поскольку логарифмическая функция является обратной к показательной, ее основные свойства – "перевертыши" свойств показательной функции (теорема 7.4.1).

Теорема 7.5.1 (свойства логарифмической функции)**.**

1) Обратное к 7: $Def(\log) = \mathbb{R}^+,\ \ Im(\log) = \mathbb{R}$.

2) Взаимно-обратные функции:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \ \hookrightarrow\ a^{\log_a x} \equiv x; \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \hookrightarrow\ \log_a(a^x) \equiv x.$$

3) Обратное к 1 и 6: логарифмическая функция всюду непрерывна и строго монотонна: при $a > 1$ *– возрастает, при* $0 < a < 1$ *– убывает.*

4) Обратное к определению $a^0 := 1$*:* $\forall a\ (a > 0,\ a \neq 1) \ \hookrightarrow\ \log_a 1 = 0$

5) Обратное к 3:

$$\forall x, y > 0 \ \hookrightarrow\ \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

6) Обратное к 5:

$$\forall x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R} \ \hookrightarrow\ \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x.$$

Задача 7.5.2. Докажите все свойства, опираясь на определение и указанные исходные свойства показательной функции.

Специфические свойства логарифма сформулированы ниже:

Лемма 7.5.1. *Справедливы равенства:*

1) Замена основания: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

2) “Коммутативность” крайних чисел: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

Задача 7.5.3. Докажите лемму 7.5.1.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ – произвольное фиксированные число. **Степенная** функция с показателем α определяется формулой $f(x) = x^{\alpha}$, где $x \in \in \mathbb{R}^{+}$.

Теорема 7.5.2. *Степенная функция обладает такими свойствами:*

1) *непрерывна в области определения;*

2) *строго возрастает, если показатель $\alpha > 0$, строго убывает, если показатель $\alpha < 0$;*

3) *при $\alpha > 0$ верны предельные равенства $\lim\limits_{x\to+0} x^{\alpha} = +0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = = +\infty$;*

   при $\alpha < 0$ верны предельные равенства $\lim\limits_{x\to+0} x^{\alpha} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +0$.

4) *$Def(f) = Im(f) = \mathbb{R}^{+}$.*

Доказательство немедленно следует из тождества $x^{\alpha} := (e^{\ln x})^{\alpha}$ и уже доказанных свойств экспоненты и логарифма. ■

Замечание 7.5.1. При положительных α степенную функцию по непрерывности доопределяют в нуле: $\alpha > 0 \hookrightarrow 0^{\alpha} := 0$. Для целых отрицательных α степенную функцию рассматривают на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, для натуральных α степенную функцию рассматривают на $\mathbb{R}$. ⊟

Задача 7.5.4. Почему операция возведения в степень порождает две обратных: извлечение корня и логарифмирование? Между тем, сложение и умножение порождает по одной обратной операции (вычитание и деление соответственно).

7.6. Замечательные пределы

Теорема 7.6.1. ***Второй замечательный предел:***

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Доказательство. Мы знаем, что

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{7.10}$$

Чтобы доказать теорему, нужно убедиться, что для любой последовательности Гейне $x_n \to 0$ (а не только для последовательности $x_n = 1/n$) справедливо: $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+x_n)^{1/x_n} = e$.

Пусть последовательность $\mathbb{N} \ni n_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ не обязательно монотонно по k. Тогда существуют три способа получения числа e:

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e; \tag{7.11}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1} : \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)\right) = e; \tag{7.12}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \lim_{k\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\cdot\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\right) = e. \tag{7.13}$$

Доказательство равенства (7.11) осуществляется по определению предела последовательности на языке “$\varepsilon - k$”. Доказательства (7.12) и (7.13) осуществляется переходом к пределу в частном и произведении соответственно.

Пусть $\{x_k\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю. Обозначим

$$n_k := \left[\frac{1}{x_k}\right] \le \frac{1}{x_k} < \left[\frac{1}{x_k}\right] + 1.$$

В силу определения, $n_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Поэтому

$$e \leftarrow \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < (1+x_k)^{1/x_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} \to e.$$

Вывод: односторонний предел $\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{1/x} = e$.

Случай $x \to -0$ можно исследовать с помощью замены:

$$(1+x)^{1/x} = \frac{1}{(1-(-x))^{1/(-x)}} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{1/y} = \left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{1/y} =$$

$$= \left(1 + \frac{y}{1-y}\right)^{1/y} = (1+z)^{(1/z)+1},$$

где $-1 < x < 0$ и $z = -x/(1+x)$. При $x \to -0$ переменная $z \to +0$. Поэтому

$$\lim_{x\to -0}(1+x)^{1/x} = \lim_{z\to +0}(1+z)^{(1/z)+1} =$$

$$= \lim_{z\to +0}\left((1+z)^{1/z}(1+z)\right) = e. \blacksquare$$

Из второго замечательного предела следуют важные в теории дифференцирования предельные соотношения.

Лемма 7.6.1. *Справедливы предельные равенства:*

1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \text{ где } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Доказательство первого равенства следует из теоремы 5.2.2 о пределе под знаком непрерывной функции – в данном случае логарифмической функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}) = \ln e = 1.$$

Во втором пределе сделаем замену $y = e^x - 1$. Тогда $x = \ln(1+y)$ и, в силу теоремы 4.7.1,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{1}{1} = 1. \quad \blacksquare$$

Задача 7.6.1. Докажите третий предел.

Глава 8

Сравнение величин

Все познается в сравнении

Не сравнивай: живущий несравним.

О. Э. Мандельштам

Сравнение величин (последовательностей, функций) является распространенной задачей математического анализа. Для ее решения выработана специальная техника, изучению которой посвящена глава.

8.1. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 8.1.1. Функция f называется **ограниченной** на множестве $X \subset D(f)$, если образ $f(X)$ – ограниченное числовое множество. $\boxtimes$

Определение 8.1.2. Функция называется **бесконечно малой** (**бесконечно большой**) при $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\mathbb{R}P^1$), если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ (∞). $\boxtimes$

Пример 8.1.1. Функция $y = 1/x$ является бесконечно большой при $x \to 0$ и бесконечно малой при $x \to \infty$.

Лемма 8.1.1. *Справедливы следующие свойства ограниченных, бесконечно больших и бесконечно малых функций.*

1) *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$, *то существует некоторая проколотая окрестность точки* x_0, *в которой функция* f *ограничена.*

2) *Если функция бесконечно большая в точке* x_0, *то она неограничена в любой окрестности этой точки. Обратное утверждение в общем случае не верно.*

3) *Пусть функция* f *ограничена в некоторой проколотой окрестности точки* x_0, *а функция* g *бесконечно малая при* $x \to x_0$. *Тогда произведение функций* $h(x) = f(x)g(x)$ *есть бесконечно малая при* $x \to x_0$.

4) *Если функция* f *бесконечно большая при* $x \to x_0$, *то функция* $g(x) := 1/f(x)$ *бесконечно малая при* $x \to x_0$.

5) *Если функция* f *бесконечно малая при* $x \to x_0$ *и* $f(x) \neq 0$ *в некоторой проколотой окрестности точки* x_0, *то функция* $g(x) := = 1/f(x)$ *бесконечно большая при* $x \to x_0$.

Доказательство. Первое и второе утверждения следуют непосредственно из определения предела функции. Остальные доказательства осуществляются с помощью последовательностей Гейне и ссылкой на соответствующее утверждение для последовательностей. ■

Пример 8.1.2. Функция $f(x) := (1/x) \cdot \sin(1/x)$ неограничена в любой окрестности точки $x_0 = 0$, но не является в ней бесконечно большой.

Задача 8.1.1. Постройте эскиз графика функции $f(x) = (1/x) \cdot \sin(1/x)$.

8.2. Отношения o, O и другие

Дадим основное

Определение 8.2.1. Пусть функции f, g, h определены в некоторой проколотой окрестности точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\mathbb{R}P^1$). Говорят, что

1) f есть o-**малое** от g при $x \to x_0$, если $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 0$: $f(x) \in o(g(x))$ при $x \to x_0$;

2) f есть O-**большое** от g при $x \to x_0$, если $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, где $h(x)$ – ограниченная функция в некоторой проколотой окрестности точки x_0: $f(x) \in O(g(x))$ при $x \to x_0$;

3) f есть O^*-**большое** от g при $x \to x_0$, если $f(x) \in O(g(x))$ и $g(x) \in O(f(x))$ одновременно: $f(x) \in O^*(g(x))$ при $x \to x_0$;

4) f **эквивалентно** g при $x \to x_0$, если $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 1$: $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$. ⊠

Примеры 8.2.1. 1) При $x \to 0$ верно $x^2 \in o(x)$. Но при $x \to \infty$ верно $x \in o(x^2)$.

2) При $x \to 0$ верно $\sin x \cdot x \in o(x)$. Но при $x \to \infty$ верно $\sin x \cdot x \in$ $\in O(x)$.

3) При $x \to 0$ верно $\sin x \sim x$. Но при $x \to \infty$ верно $\sin x \in o(x)$.

4) При $x \to \infty$ верно $x \in O^*(2x + \ln x)$.

Обсуждение 8.2.1. Возникает естественный вопрос: что такое $o(g(x))$ ($O(g(x))$) в точке x_0 само по себе? Ответ: $o(g(x))$ это множество (**класс**) всех таких функций f, что

1) каждая из функций f определена в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}_\varepsilon (x_0)$, где ε зависит от f,

2) найдется такая функция h, определенная на $\overset{\circ}{U}_\varepsilon (x_0)$, что $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0$ и $f(x) = g(x) \cdot h(x)$.

По сложившейся традиции вместо знаков принадлежности и включения используют знак равенства. Например, пишут $x^2 = o(x)$, $O(x^2) =$ $= o(x)$ при $x \to 0$, что выглядит бессмысленно. Подразумевают: $x^2 \in$ $\in o(x)$, $O(x^2) \subset o(x)$. Но если читать подобные записи *только слева направо*, то ошибок не будет. В дальнейшем мы будем использовать общепринятую запись с равенством.

Задача 8.2.1. Дайте определение класса $O(g(x))$ в x_0.

Функции f и g в точке x_0 могут вести себя как угодно (иметь произвольный конечный или бесконечный предел, или вовсе не иметь предела), но введенные понятия полезны прежде всего в случаях, когда эти функции являются бесконечно малыми или бесконечно большими при $x \to x_0$. Если $g(x)$ есть бесконечно малая при $x \to x_0$, а $f(x)$ есть о-малое от $g(x)$, то говорят, что функция f – бесконечно малая **высшего порядка по сравнению с** g при $x \to x_0$; если $f(x)$ есть O^* от

$g(x)$, то о функциях f и g говорят, что они бесконечно малые **одного порядка**. Аналогичным образом производится сравнение бесконечно больших величин. Если $g(x)$ есть бесконечно большая при $x \to x_0$, а $f(x)$ есть о-малое от $g(x)$, то говорят, что функция g – бесконечно большая высшего порядка по сравнению с f при $x \to x_0$; если $f(x)$ есть O^* от $g(x)$, то о функциях f и g говорят, что они бесконечно большие одного порядка. $\boxminus$

Определение 8.2.1 часто формулируют в виде отношений двух функций:

Лемма 8.2.1. *Если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 функция $g(x) \neq 0$, то:*

1) $f(x) = o(g(x))$ *при* $x \to 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f(x)/g(x)) = 0$.

2) $f(x) = O(g(x))$ *при* $x \to 0 \Leftrightarrow \exists C > 0 : \ |f(x)/g(x)| \leq C$ *в некоторой проколотой окрестности точки* x_0.

3) $f(x) = O^*(g(x))$ *при* $x \to 0 \Leftrightarrow \exists C_1, C_2 > 0 : \ C_1 \leq |f(x)/g(x)| \leq C_2$ *в некоторой проколотой окрестности точки* x_0.

4) $f(x) \sim g(x)$ *при* $x \to 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f(x)/g(x)) = 1$.

Доказательство очевидно, если положить $h(x) := f(x)/g(x)$.

Изучим основные свойства введенных отношений и их применение.

Лемма 8.2.2. *Отношения «O^*» и «$\sim$» являются отношениями эквивалентности. Т. е. они*

1) рефлексивны: $f(x) \sim f(x)$, $\ f(x) = O^*(f(x))$ *при* $x \to 0$;

2) симметричны: $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow g(x) \sim f(x)$, $\ f(x) = O^*(g(x)) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(x) = O^*(f(x))$ *при* $x \to 0$;

3) транзитивны: $f(x) \sim g(x) \wedge g(x) \sim h(x) \Rightarrow f(x) \sim h(x)$, $\ f(x) =$ $= O^*(g(x)) \ \wedge \ g(x) = O^*(h(x)) \Rightarrow f(x) = O^*(h(x))$ *при* $x \to 0$.

Задача 8.2.2. Докажите лемму.

Из леммы 8.2.2 следует, что все функции, определенные в некоторой проколотой окрестности точки x_0 (причем каждая функция определена в своей окрестности), разбиваются на непересекающиеся *классы эквивалентности* по введенным отношениям O^* и $\sim$.

Примеры 8.2.2. Нами доказана цепочка эквивалентностей при $x \to 0$:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \exp x - 1 \sim \ln(1+x) \sim \operatorname{sh} x \sim \operatorname{th} x.$$

Отношения «O» и «O^*» применяются для доказательства неравенств (односторонних или двусторонних «оценок»). Отношение «$\sim$» упрощает нахождение пределов. Его применение основано на следующих утверждениях.

Лемма 8.2.3. *Справедливо:*

1) *Если $f_1(x) \sim f_2(x)$ и $g_1(x) \sim g_2(x)$ при $x \to x_0$ то*

$$f_1(x)g_1(x) \sim f_2(x)g_2(x).$$

Если дополнительно в некоторой проколотой окрестности точки x_0 функции $g_1(x), g_2(x)$ не обращаются в ноль, то

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \frac{f_2(x)}{g_2(x)}.$$

2) *Пусть $y(x) \to y_0$ при $x \to x_0$ и $y(x) \neq y_0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0; пусть $f(y) \sim g(y)$ при $y \to y_0$. Тогда $f(y(x)) \sim g(y(x))$ при $x \to 0$.*

3) *Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$ то: или пределы функций одновременно существуют и тогда они совпадают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$; или же оба предела не существуют.*

Доказательство пунктов 1 и 3 следует из определения эквивалентности и свойств предела. Второй пункт вытекает из теоремы 4.7.1 о пределе сложной функции. ■

Из леммы 8.2.3 получаем полезное

Следствие 8.2.1. *При вычислении предела дроби сомножители в числителе и знаменателе можно заменять на эквивалентные.*

Замечание 8.2.1. Замена на эквивалентности в суммах или при возведении в степень в общем случае недопустима. Например, $\cos x \sim 1$ при $x \to 0$, но $\lim\limits_{x\to 0}((1-\cos x)/x^2) = 1/2 \neq \lim\limits_{x \to 0}(0/x^2) = 0$. Или $1 + x \sim 1$ при $x \to 0$, но $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{1/x} = e \neq \lim\limits_{x\to 0}(1^{1/x}) = 1$. ⊟

Между понятиями «$\sim$» и «o» имеется следующая связь.

Лемма 8.2.4. $f(x) \sim g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) - g(x) = o(f(x)) = o(g(x))$.

Доказательство следует из определения.

Пример 8.2.1. При $x \to 0$ справедливы "равенства"

$$\sin x = x + o(x),\ \operatorname{tg} x = x + o(x),\ \arcsin x = x + o(x),\ \arctan x = x + o(x),$$

$$\exp x - 1 = x + o(x),\ \ln(1+x) = x + o(x),\ \operatorname{sh} x = x + o(x),\ \operatorname{th} x = x + o(x).$$

Еще раз напоминаем, что "равенства" означают принадлежность и мы читаем их только слева на право! Например, из равенств $\sin x = x + o(x)$ и $\operatorname{tg} x = x + o(x)$ при $x \to 0$, конечно, не следует, что $\sin x = \operatorname{tg} x$. Равенства означают, что **две** функции принадлежат **одному** классу: $\sin x - x,\ \operatorname{tg} x - x \in o(x)$ при $x \to 0$. Во избежание ошибок рекомендуется вводить промежуточные обозначения: $\sin x = x + \mu(x)$ и $\operatorname{tg} x = x + \nu(x)$, где $\mu(x) = o(x)$ и $\nu(x) = o(x)$ при $x \to 0$.

Сформулируем некоторые свойства понятий $o(f)$ и $O(f)$.

Лемма 8.2.5. *При $x \to x_0$ справедливы равенства:*

1) $o(f) \pm o(f) = o(f),\ O(f) \pm O(f) = O(f)$;

2) $o(O(f)) = o(f),\ O(o(f)) = o(f),\ O(O(f)) = O(f)$;

3) $o(f) \cdot O(g) = o(fg),\ \ o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g),\ \ O(f) \cdot O(g) = O(fg)$;

4) если $f = o(g)$, *то* $o(f) + o(g) = o(g)$;

5) $\forall \alpha > 0$ *при* $f(x) > 0$ *верно* $|o(f)|^\alpha = o(f^\alpha),\ \ |O(f)|^\alpha = O(f^\alpha)$.

Докажем, например, первое свойство в п. 3. Пусть $h_1(x) = o(f(x))$ и $h_2(x) = O(g(x))$. Тогда $h_1(x) = f(x)p(x),\ h_2(x) = g(x)q(x)$, где $p(x) \to 0$ при $x \to x_0$, а функция $q(x)$ ограничена. Поэтому $h_1(x)h_2(x) = (f(x)g(x)) \cdot (p(x)q(x))$. Но $p(x)q(x) \to 0$ при $x \to x_0$. ■

Пример 8.2.2. Упростить выражение, содержащее $o(x^n)$ $(n \in \mathbb{N})$ при $x \to 0$:

$$(x + x^2 - 2x^3 + x^5 + o(x^5))(x^3 + o(x^3)) + o(x^6) =$$

$$x^4 + x^5 - 2x^6 + x^8 + o(x^8) + o(x^4) + o(x^5) + o(x^6) + o(x^8) + o(x^8) + o(x^6) =$$

$$= x^4 + o(x^4).$$

Заметим, что бессмысленно приписывать $o(f)$ знак минус.

Глава 9

Производная функции одной переменной

С помощью производной исследуют основные свойства функции – промежутки монотонности, точки минимума и максимума. В терминах производной формулируются основные законы физики. Это обстоятельство естественно нас приводит к теории дифференциальных уравнений.

9.1. Определение производной

Мы предполагаем, что функция f определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Разность $\Delta x := x - x_0$ называется **приращением аргумента** в данной точке, а разность $\Delta f(x_0) := f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется **приращением функции** в точке x_0

Определение 9.1.1. **Производной** функции f в точке x_0 называется конечный предел

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \in \mathbb{R}. \boxtimes \tag{9.1}$$

Замечание 9.1.1. Поскольку знаменатель в определении (9.1) стремится к нулю, наличие *конечной* производной связано с раскрытием неопределенности типа $\frac{0}{0}$ и не является тривиальным. ⊟

Физический смысл производной: если $s = f(t)$ есть зависимость пути от времени, то отношение $\Delta s/\Delta t$ – средняя скорость, а производная $f'(t_0)$ – **мгновенная скорость** в момент времени t_0.

Определение 9.1.2. Функция f называется **дифференцируемой** в точке x_0, если существует такое число $k \in \mathbb{R}$, что в некоторой окрестности точки x_0 имеет место равенство

$$f(x) = f(x_0) + k \cdot (x - x_0) + \varepsilon(x - x_0) \ \Leftrightarrow \ \Delta f = k\Delta x + \varepsilon(\Delta x), \quad (9.2)$$

где $\varepsilon(\Delta x) = o(\Delta x)$. $\boxtimes$

Теорема 9.1.1 (эквивалентность производной и дифференцируемости)**.** *Функция дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует конечная производная в этой точке, при этом $k = f'(x_0)$. В частности, число k, если оно существует, единственно.*

Доказательство следует из цепочки эквивалентностей:

$$\Delta f = k\Delta x + \varepsilon(\Delta x) \ \Leftrightarrow \ \Delta f - k\Delta x = o(\Delta x) \ \Leftrightarrow \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - k\Delta x}{\Delta x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = k \ \Leftrightarrow \ k = f'(x_0). \quad \blacksquare$$

Обсуждение 9.1.1. Определение (9.1) конструктивно – с его помощью *находят* производную. Определение (9.2) удобно для *применения* производной. Кроме того, последнее можно обобщить на функции нескольких переменных, отображения конечномерных и бесконечномерных пространств, отображения конечномерных и бесконечномерных поверхностей. $\boxminus$

Замечание 9.1.2. Определение (9.1) мы будем использовать и в том случае, когда предел равен $\pm\infty$. Такие производные назовем **бесконечными**. $\boxminus$

Примеры 9.1.1. 1) Функция знак числа $sign(x)$ имеет в нуле производную $sign'(0) = +\infty$, а в остальных точках ее производная равна нулю (докажите). 2) Функция $f(x) = x^{1/3}$ имеет в нуле производную $+\infty$ (докажите).

Определение 9.1.3 (**односторонних** производных)**.** Если функция f определена в левой (правой) полуокрестности $(x_0 - \delta, x_0]$ ($[x_0, x_0 + \delta)$) точки x_0, то **левой** (**правой**) производной называется односторонний предел

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_+(x_0) := \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \ \boxtimes$$

Из леммы 4.5.1 об односторонних пределах сразу следует

Лемма 9.1.1. *Производная $f'(x_0)$ существует тогда и только тогда, когда $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. В этом случае $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.*

Дифференцируемость является более жестким требованием, чем непрерывность:

Теорема 9.1.2 (необходимое условие дифференцируемости)**.** *Если функция дифференцируема в данной точке, то она в ней непрерывна. Обратное в общем случае не верно.*

Доказательство. Из определения (9.2) и теоремы 9.1.1 следует, что

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0) \;\Rightarrow\; \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \blacksquare$$

Примеры 9.1.2. 1) Функция $y = |x|$ непрерывна и имеет различные односторонние производные в точке $x_0 = 0$ (какие?), значит, она не дифференцируема в нуле.

2) Функция, заданная формулой $f(x) := x \cdot \sin \frac{1}{x}$, где $x \neq 0$, с доопределением $f(0) = 0$ является непрерывной в точке ноль, но не имеет даже односторонних производных.

3) Функция $sign(x)$ имеет в нуле бесконечную производную, но испытывает в нуле скачок.

4) Функция, заданная формулой $f(x) := sign(x)x^2$ дифференцируема в нуле. Найдите $f'(0)$.

9.2. Дифференциал и геометрический смысл производной

Именно понятие дифференциала объясняет, в чем ценность понятия производной в исследовании функции. В дальнейшем мы проявится роль дифференциала в теории интегрирования.

Определение 9.2.1. Дифференциалом независимой переменной в точке x_0 называется ее приращение: $dx = \Delta x = x - x_0$.

Дифференциалом функции f в точке x_0 называется линейная функция переменного dx: $df(x_0) := f'(x_0) \cdot dx$. ⊠

Обозначения: из-за определения 9.2.1 в анализе и особенно в физике прижились обозначения производной

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{d}{dx}f(x)\Big|_{x=x_0} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}.$$

Из определения (9.2) вытекает, что приращение функции

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \varepsilon(\Delta x), \text{ где } \varepsilon(\Delta x) = o(\Delta x), \tag{9.3}$$

т. е. дифференциал есть **линейная часть приращения** функции. Если $f'(x_0) \neq 0$, его называют **главной** частью приращения. Заметим, что только с коэффициентом $k = f'(x_0)$ линейная часть приращения является главной: с любым другим коэффициентом остаточная часть не будет о-малое приращения аргумента Δx. Также заметим, что дифференциал определен на $\mathbb{R}$, хотя приращение Δf определено только для тех Δx, для которых $x_0 + \Delta x \in Def(f)$. Ценность дифференциала (и одновременно производной) в том, что он, во-первых, устроен очень просто (линейная функция) и, во-вторых, при определенных естественных условиях характеризует поведение функции в некоторой окрестности точки x_0.

Геометрический смысл определения (9.1) и равенства (9.3). Рассмотрим две точки на графике $Gr(f)$: фиксированную точку $M_0 = (x_0, f(x_0))$ и переменную $M = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, положение которой зависит от приращения Δx. Прямая M_0M заведомо не является вертикальной. Ее угловой коэффициент $k(\Delta x) := \Delta f/\Delta x = \operatorname{tg}\varphi$. Эта прямая называется **секущей**.

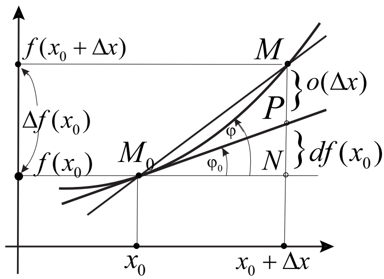

Рис. 9.1

Определение 9.2.2. Если существует конечный предел

$$k := \lim_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi_0,$$

то прямая с угловым коэффициентом k, проходящая через точку M_0, называется **касательной** к графику в точке M_0. ⊠

Таким образом, существование касательной равносильно существованию конечной производной. Если $k \neq 0$, то приращение функции

(9.3) определяется двумя ориентированными расстояниями: $df(x_0) = NP = k \cdot \Delta x$ и $\varepsilon(\Delta x) = PM = o(\Delta x)$. Именно касание обеспечивает малость более высокого порядка отрезка PM по сравнению с NP (рис. 9.1). Если производная и, автоматически, линейная часть приращения обнуляются, то касательная горизонтальна, а приращение состоит из одного слагаемого PM.

Замечание 9.2.1. Если производная равна $\pm\infty$, и в точке x_0 функция непрерывна, то вертикальная прямая $x = x_0$ по-прежнему называется касательной. $\boxminus$

Примеры 9.2.1. 1) Функция $sign(x)$ в нуле разрывна – в точке $O(0,0)$ у ее графика нет касательной. 2) Функция $f(x) = x^{1/3}$ непрерывна в нуле, поэтому прямая $x = 0$ является касательной к ее графику.

9.3. Производная суммы, произведения и частного

Найдем связи между арифметическими операциями и нахождением производной (дифференцированием).

Теорема 9.3.1. *Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то имеют место*

1) линейность дифференцирования:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \quad \forall C \in \mathbb{R} \hookrightarrow (Cf)'(x_0) = Cf'(x_0);$$

2) формула дифференцирования произведения (Вильгельм Лейбниц, 1646-1716):

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$

3) дифференцирование частного: если дополнительно $g(x_0) \neq 0$, то

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Доказательство п. 2. Согласно определению (9.1) и в силу непрерывности функции g в точке x_0, получаем:

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)(g(x_0+\Delta x)-g(x_0))}{\Delta x}$$

$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

Найдем производную

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{g(x_0+\Delta x)}-\frac{1}{g(x_0)}\right)\right)=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)}\right)=-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \quad \blacksquare$$

Задача 9.3.1. Докажите п. 1 теоремы 9.3.1 и завершите доказательство пункта 3.

Замечание 9.3.1. Перечисленные свойства дифференцирования могут быть записаны в терминах дифференциалов:

$$d(f+g)=df+dg,\quad d(C\cdot f)=C\cdot df,$$

$$d(f\cdot g)=df\cdot g+f\cdot dg,\quad d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{df\cdot g-f\cdot dg}{g^2}.\ \boxminus$$

Замечание 9.3.2. Утверждения теорем остаются справедливыми для односторонних производных. $\boxminus$

Замечание 9.3.3. В теореме 9.3.1 сформулированы достаточные условия дифференцируемости произведения и частного. Однако они не являются необходимыми. $\boxminus$

Примеры 9.3.1. 1) Функция $f(x)=|x|$ не дифференцируема в нуле, функция $g(x)=x$ дифференцируема в нуле. Их произведение $y=x|x|$ дифференцируемо в нуле, квадрат $f^2(x)=|x|^2=x^2$ – дифференцируемая в нуле функция. 2) Функция $f(x)=x/(1+|x|)$ дифференцируема в нуле, хотя знаменатель не дифференцируем в нуле.

Задача 9.3.2. Найдите производную $(x/(1+|x|))'|_{x_0=0}$ двумя способами: по определению и с помощью леммы 9.1.1.

9.4. Производная сложной и обратной функций

Теорема 9.4.1 (о производной сложной функции)**.** *Пусть функция f дифференцируема в т. x_0, а функция g дифференцируема в т. $y_0 = f(x_0)$. Тогда в некоторой окрестности т. x_0 определена сложная функция $h(x) = (g \circ f)(x) := g(f(x))$, которая дифференцируема в т. x_0 по правилу*

$$h'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Т. е., производная суперпозиции равна произведению производных.

Доказательство. Дифференцируемость функции g в т. y_0 предполагает, что она определена в некоторой ее окрестности $U_\varepsilon(y_0)$. Поскольку функция f дифференцируема в т. x_0, то она непрерывна в ней. Поэтому существует такая окрестность $U_\delta(x_0)$, что образ $f(U_\delta(x_0)) \subset \subset U_\varepsilon(y_0) \subset Def(g)$. Значит, сложная функция определена в $U_\delta(x_0)$.

Из определения (9.2) дифференцируемости следует, что

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\Delta x,$$

$$\text{где } \Delta x \in U_\delta(0), \ \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1(\Delta x) = 0,$$

$$g(y_0 + \Delta y) = g(y_0) + g'(y_0)\Delta y + \varepsilon_2(\Delta y)\Delta y,$$

$$\text{где } \Delta y \in U_\varepsilon(0), \ \lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon_2(\Delta y) = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\Delta x) - g(f(x_0))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left(g'(y_0)(f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\Delta x) + \right.$$

$$\left. +\varepsilon_2(f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\Delta x)(f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\Delta x)\right) =$$

$$= g'(y_0)f'(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(g'(y_0)\varepsilon_1(\Delta x) + \right.$$

$$\left. +\varepsilon_2(f'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\Delta x)(f'(x_0) + \varepsilon_1(\Delta x))\right) = g'(y_0)f'(x_0). \ \blacksquare$$

Замечание 9.4.1. В теореме 9.4.1 сформулированы достаточные условия дифференцируемости сложной функции. Однако они не являются необходимыми.

Примеры 9.4.1. 1) $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$, $x_0 = y_0 = 0$. Функция f не дифференцируема в x_0, g дифференцируема в y_0; обе сложные функции $g(f(x)) = f(g(x)) = x^2$ дифференцируемы в нуле.

2) Функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 0, \\ x \text{ при } x > 0. \end{cases}$$

Функция $g(x) := -f(-x)$. Обе функции не дифференцируемы в нуле. Но $g(f(x)) \equiv f(g(x)) \equiv 0$, обе суперпозиции дифференцируемы. $\boxminus$

Следствие 9.4.1 (инвариантность формы первого дифференциала)**.** *В условиях теоремы 9.4.1 дифференциал "внешней" функции $g(y)$ в т. y_0 и дифференциал сложной функции $(g \circ f)(x)$ в т. x_0 имеют одну и ту же (**инвариантную**) форму:*

$$dg(y_0) = g'(y_0)dy, \qquad d(g \circ f)(x_0) = d(g(f(x_0))) = g'(y_0)dy,$$

где первом случае $dy = \Delta y$ – приращение независимой переменной y, а во втором случае $dy = f'(x_0)dx$ – дифференциал зависимой от x переменной y.

Доказательство. Из теоремы 9.4.1 следует, что

$$d(g(f(x_0))) = (g'(y_0) \cdot f'(x_0))dx = g'(y_0)(f'(x_0)dx) = g'(y_0)dy. \blacksquare$$

Теорема 9.4.2 (производная обратной функции)**.** *Пусть функция f строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности т. x_0. Пусть существует конечная, отличная от нуля производная $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция дифференцируема в т. $y_0 = f(x_0)$ и $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$. Т. е., производная обратной функции в т. y_0 есть число, обратное производной прямой функции, взятой в т. x_0.*

Геометрическая интерпретация. Поскольку график прямой функции $y = f(x)$ является одновременно графиком обратной $x = f^{-1}(y)$, утверждение теоремы означает, что в т. (x_0, y_0) касательная прямая к графику обратной функции совпадает с касательной прямой к графику прямой функции. Поэтому углы наклона касательной к осям координат связаны соотношением $\operatorname{arctg} f'(x_0) + \operatorname{arctg}(f^{-1})'(y_0) = = \varphi + \psi = \pi/2$ (см. рис. 9.2).

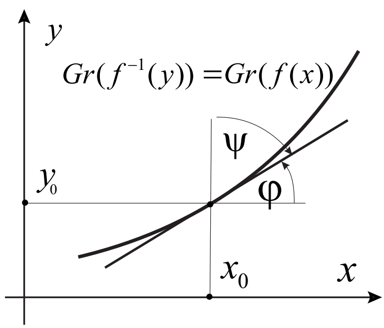

Рис. 9.2

Доказательство. Из теоремы 6.3.2 следует существование, монотонность того же типа и непрерывность обратной функции. Остается доказать ее дифференцируемость и найти производную. Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = y_0 = 0$. Нас интересует предел $\lim\limits_{y\to 0}(f^{-1}(y)/y)$. Заметим, что $f^{-1}(y) \neq 0$ при $y \neq 0$. Из определения обратной функции, монотонности и дифференцируемости прямой функции мы получаем в некоторой *проколотой* окрестности точки $y_0 = 0$ цепочку эквивалентных утверждений:

$$f(f^{-1}(y)) \equiv y \;\Leftrightarrow\; f'(0)f^{-1}(y) + o(f^{-1}(y)) \equiv y \;\Leftrightarrow$$

$$f'(0)\frac{f^{-1}(y)}{y} + \frac{o(f^{-1}(y))}{y} \equiv 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{f^{-1}(y)}{y}\left(f'(0) + \frac{o(f^{-1}(y))}{f^{-1}(y)}\right) \equiv 1 \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{f^{-1}(y)}{y} \equiv \left(f'(0) + \frac{o(f^{-1}(y))}{f^{-1}(y)}\right)^{-1}. \tag{9.4}$$

Переходя к пределу в обеих частях тождества при $y \to 0$, получаем

$$(f^{-1})'(0) := \lim_{y\to 0}\frac{f^{-1}(y)}{y} = \frac{1}{f'(0)}. \blacksquare$$

Задача 9.4.1. Обоснуйте предельный переход в правой части тождества (9.4) с помощью теоремы 4.7.1.

9.5. Производные основных элементарных функций

На практике мы как правило имеем дело с элементарными функциями. Поэтому важно затабулировать их производные.

Теорема 9.5.1. *Таблица производных:*

1) $C' = 0$;

2) $(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0,\ x \in \mathbb{R}$;

3) $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \neq 0$;

4) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},\ \alpha \in \mathbb{R},\ x > 0;\ (x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$;

5) $(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x$;

6) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$*;*

7) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$*;*

8) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$*;*

9) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$*;*

10) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Доказательство. П. 2 докажем сначала для основания e. Воспользовавшись п. 2 из леммы 7.6.1, получаем:

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x. \tag{9.5}$$

В общем случае перейдем к основанию e и применим формулу дифференцирования сложной функции (теорема 9.4.1):

$$(a^x)' = ((e^{\ln a})^x)' = (e^{x \cdot \ln a})' = (e^{x \cdot \ln a}) \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

Доказательство п. 3 при условии $x > 0$ опирается на правило дифференцирования обратной функции (теорема 9.4.2):

$$(\log_a x)' = \left.\frac{1}{(a^y)'}\right|_{y=\log_a x} = \left.\frac{1}{a^y \ln a}\right|_{y=\log_a x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Задача 9.5.1. 1) Докажите п. 3 для случая $x < 0$; 2) докажите п. 3 с помощью п. 1 леммы 7.6.1.

Доказательство п. 4 при $\alpha \neq 1$:

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = (e^{\alpha \ln x}) \cdot (\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Задача 9.5.2. Докажите п. 4 с помощью п. 3 леммы 7.6.1.

Задача 9.5.3. Докажите, что $(x^n)' = nx^{n-1}$, где $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство п. 5 основано на первом замечательном пределе (теорема 7.2):

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin(\Delta x/2) \cos(x + \Delta x/2)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Доказательства остальных пунктов вытекают из свойств производных, теоремы 9.6 и уже полученных производных. ■

Задача 9.5.4. Докажите п. 6-10.

Замечание 9.5.1. Если функция f дифференцируема в каждой точке интервала (a, b), то возникает новая функция f', определенная на (a, b). Значит, дифференцирование есть отображение, действующее на множестве дифференцируемых на (a, b) функций. Формула (9.5) означает, что образом экспоненты при дифференцировании является она же. Оказывается, этим свойством *инвариантности* при дифференцировании обладают только функции $f(x) = ke^x$ $(k \in \mathbb{R})$, что обусловливает исключительно важное место экспоненты в математическом анализе и теории дифференциальных уравнений. ⊟

Замечание 9.5.2. Из доказанных выше свойств дифференцирования и таблицы производных следует, что производная элементарной функции является элементарной. Значит, дифференцирование на множестве элементарных функций является преобразованием *в себя.* ⊟

9.6. Задание функции неявно и параметрически

Пока без обоснования дадим понятие о неявной функции и опишем процедуру ее дифференцирования. Затем определим функцию, которая задана параметрически и получим формулу ее дифференцирования.

Определение 9.6.1. Пусть $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция и пусть $f(x_0) = y_0$. Говорят, что функция f задана **неявно** в окрестности точки (x_0, y_0) уравнением $F(x, y) = 0$, если *тождество* $F(x, f(x)) \equiv 0$ выполняется в некоторой окрестности точки x_0. ⊠

Пример 9.6.1. Функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ неявно задана уравнением $x^2 + y^2 - 1 = 0$ в окрестности точки $(0, 1)$.

Если мы заранее знаем, что неявная функция существует и дифференцируема, то ее производную можно найти дифференцируя тождество $F(x, f(x)) \equiv 0$. При этом обязательно получится линейное уравнение относительно неизвестной производной $f'(x)$. Если коэффициент перед производной оказался отличным от нуля, мы получим искомую производную. Поскольку мы пока не умеем дифференцировать функцию $F(x,y)$, зависящую от *двух* переменных, то ограничимся конкретным примером:

Пример 9.6.2. $x^2+f^2(x)-1\equiv 0 \Rightarrow 2x+2f(x)f'(x)\equiv 0 \Rightarrow f'(x) = -x/f(x)$. Полученное выражение имеет смысл, если знаменатель отличен от нуля. В частности, $f'(0)=0/1=0$. При $x=1$ процедура нахождения производной не работает поскольку $f(1)=0$.

Задача 9.6.1. Дайте геометрическое объяснение, почему не удалось найти $f'(1)$.

Определение 9.6.2. Пусть на некотором интервале (t_1,t_2) заданы функции $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$. Пусть функция φ обратима, т. е. существует обратная функция $t=\varphi^{-1}(x)$, заданная на некотором интервале (a,b). Тогда функция $f(x):=\psi(\varphi^{-1}(x))$, где $x\in(a,b)$, называется заданной **параметрически**. ⊠

Пример 9.6.3. Функции $x=\cos t$, $y=\sin t$ в окрестности точки $t_0=\pi/2$ задают функцию $y=\sin(\arccos(x))=\sqrt{1-x^2}$ в окрестности точки $x_0=0$.

Лемма 9.6.1. *Если функция ψ дифференцируема в точке t_0, а для функции φ в некоторой окрестности точки t_0 выполнены условия теоремы 9.4.2, то справедлива формула дифференцирования функции заданной параметрически в точке $x_0=\varphi(t_0)$:*

$$f'(x_0)=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}. \tag{9.6}$$

Доказательство основано на применении теорем 9.4.1 и 9.4.2:

$$f'(x_0)=(\psi(\varphi^{-1}(x)))'\big|_{x=x_0}=\psi'(\varphi^{-1}(x_0))\cdot(\varphi^{-1})'(x_0)=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}. \ \blacksquare$$

Замечание 9.6.1. Ценность формулы (9.6) в том, что нет необходимости переходить к обратной функции $t=\varphi^{-1}(x)$. ⊟

Пример 9.6.4. Учитывая пример 9.6.3, найдем производную функции, заданной явно, через ее параметрическое задание с помощью формулы (9.6):

$$(\sqrt{1-x^2})'=\frac{\sin'(t)}{\cos'(t)}\Big|_{t=\arccos(x)}=\frac{\cos(\arccos(x))}{-\sin(\arccos(x))}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Глава 10

Производные высших порядков

Производные и дифференциалы высших порядков помогают уточнить свойства функции. Особую роль играет производная второго порядка, позволяющая исследовать выпуклость функции. Кроме того, фундаментальные законы классической и квантовой механики представляют собой дифференциальные уравнения именно второго порядка, это второй закон Ньютона и уравнение Шредингера.

10.1. Производные высших порядков и формула Лейбница

В пп. 0.4 и 0.5 приведены сведения о биномиальных коэффициентах C_n^k, где $k, n \in \mathbb{N}_0$ и $k \leq n$. Ниже нам понадобятся **обобщенные биномиальные** коэффициенты: для произвольных $\alpha \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$ полагаем

$$C_\alpha^0 := 1,\ C_\alpha^k := \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Заметим, что в этом случае условие $k \leq \alpha$ *отсутствует.* Это обстоятельство приводит к неожиданным равенствам. Если $\alpha \in \mathbb{N}_0$, то $C_\alpha^k = 0$ при $k > \alpha$ (в числителе обнуляется сомножитель с $k = \alpha + 1$). В остальных случаях коэффициенты C_α^k образуют бесконечную последовательность чисел отличных от нуля. Полезно помнить, что $C_{-1}^k = (-1)^k$ и $C_{-2}^k = (-1)^k(k+1)$.

Определение 10.1.1. Производная n-го порядка ($n \in \mathbb{N}_0$) в точке x_0 определяется рекуррентно:

$$f^{(0)}(x_0) := f(x_0),\ f^{(1)}(x_0) := f'(x_0),\ f^{(n)}(x_0) := (f^{(n-1)})'(x_0)$$

в предположении, что производная $f^{(n-1)}$ определена и конечна в некоторой *окрестности* точки x_0. $\boxtimes$

Примеры 10.1.1. 1) $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n \quad x \in \mathbb{R}$.

2) При $\alpha \in \mathbb{R}$ и $x > 0$ верно $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$. Если $\alpha \in \mathbb{Z}$, то формула верна для $x \neq 0$. Если же $\alpha \in \mathbb{N}_0$, то верна для $x \in \mathbb{R}$, при этом $(x^\alpha)^{(n)} = 0$ при $n > \alpha$ (появляется множитель $\alpha - m + 1 = 0$). В предыдущих обозначениях $(x^\alpha)^{(n)} = n!\ C_\alpha^n\ x^{\alpha-n}$.

3) Производные функций $\sin x$ и $\cos x$ повторяются через четыре дифференцирования. Однако их можно записать одной формулой:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi}{2}n), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi}{2}n).$$

Т. е. дифференцирование функций $\sin x$ и $\cos x$ – это увеличение аргумента на $\pi/2$.

Задача 10.1.1. Докажите формулу n-й производной логарифмической функции: $(\ln|x|)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)! \cdot x^{-n} \quad (x \neq 0)$.

Операция нахождения производной любого порядка *линейна*:

$$(f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x); \quad (Cf(x))^{(n)} = Cf^{(n)}(x).$$

Формула n-й производной *произведения* существенно усложняется:

Теорема 10.1.1 (формула Лейбница)**.** *Пусть существуют производные $u^{(n)}(x_0)$ и $v^{(n)}(x_0)$. Тогда произведение $u(x)v(x)$ имеет производную n-го порядка в точке x_0, которая вычисляется по формуле*

$$(uv)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x_0)v^{(k)}(x_0). \tag{10.1}$$

Замечание 10.1.1. Формула Лейбница аналогична формуле бинома Ньютона (см. п. 0.5). $\boxminus$

Доказательство проводится по индукции. При $n = 1$ имеем правило дифференцирования произведения: $(uv)' = u'v + uv'$. Пусть формула справедлива для некоторого n. Докажем ее справедливость для $n+1$. По предположению индукции получаем

$$(uv)^{(n+1)} = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}\right)' =$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (u^{(n-k)} v^{(k)})' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)}.$$

Во второй сумме осуществим сдвиг индексации: сам индекс уменьшим на единицу с k на $k-1$, но при этом изменение индекса увеличим на единицу (при этом сумма, очевидно, не изменится):

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)} = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} u^{(n-k+1)} v^{(k)}.$$

В результате появляются подобные слагаемые:

$$(uv)^{(n+1)} = C_n^0 u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) u^{(n-k+1)} v^{(k)} + C_n^n u v^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)}.$$

Мы воспользовались свойствами биномиальных коэффициентов из п. 0.4 (симметричность, сумма соседних коэффициентов и формулами крайних коэффициентов). ■

Замечание 10.1.2. Формулой Лейбница удобно пользоваться, если один из сомножителей многочлен степени m; в этом случае при любом n формула содержит $m+1$ слагаемых. ⊟

10.2. Дифференциалы высших порядков

Если функция f дифференцируема на интервале, ее дифференциал $df(x, dx) = f'(x) \cdot dx$ является функцией *двух* переменных x и dx, причем он линеен по второй переменной. Дифференциалы высших порядков определяются по индукции.

Определение 10.2.1. Дифференциал n-го порядка ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) есть дифференциал от предыдущего как функции переменной x: $d^n f(x, dx) = d(d^{n-1} f(x, dx))$. ⊠

Замечание 10.2.1. Из определения следует, что переменная dx при нахождении очередного дифференциала трактуется как постоянный коэффициент (сомножитель). ⊟

Лемма 10.2.1. *Дифференциал порядка n в точке x_0 существует тогда и только тогда, когда существует конечная производная $f^{(n)}(x_0)$, причем* $d^n f(x_0, dx) = f^{(n)}(x_0)(dx)^n = f^{(n)}(x_0)dx^n$. *Дифференциал n-го порядка линеен и справедлива формула Лейбница:*

$$d^n(f+g) = d^n f + d^n g, \quad d^n(Cf) = Cd^n f; \quad d^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \; d^{n-k}u \; d^k v.$$

Доказательство первого утверждения. При $n = 1$ имеем формулу первого дифференциала. Пусть утверждение справедливо для $n-1$, где $n \geq 2$. Чтобы найти следующий дифференциал в точке x_0 необходимо взять от $(n-1)$-го производную по переменной x. Последнее возможно только тогда, когда $(n-1)$-я производная функции f существует в некоторой окрестности точки x_0, и n-я производная – в самой точке x_0:

$$d^n f(x_0, dx) = d(d^{n-1} f(x, dx)) \mid_{x=x_0} = d(f^{(n-1)}(x)(dx)^{n-1}) \mid_{x=x_0} =$$
$$= f^{(n)}(x_0) dx (dx)^{n-1} = f^{(n)}(x_0) \; (dx)^n. \; \blacksquare$$

Дифференциалы порядков второго и выше теряют свойство инвариантности при замене переменной. Покажем, что это означает для второго дифференциала. Если y – независимая переменная, то $d^2 g(y, dy) = g''(y)dy^2$. Пусть теперь $y = f(x)$ и мы ищем дифференциал сложной функции, воспользовавшись инвариантностью первого дифференциала:

$$d^2(g(f)) = d(d(g(f))) = d(g'(y)dy) = d(g'(y))dy + g'(y)d(dy) =$$
$$= (g''(y)dy)dy + g'(y) \; d^2 y = g''(y)dy^2 + g'(y) \; d^2 y.$$

Второе слагаемое $g'(y)d^2y = g'(f(x))f''(x)dx^2$ обращается в нуль только в двух случаях: если $g'(f(x)) = 0$ или $f''(x) = 0$. Таким образом, формулы для вторых дифференциалов “простой” и сложной функций в общем случае не совпадают.

Замечание 10.2.2. Для независимой переменной x имеются три разных выражения:

$$dx^2 = (dx)^2, \; d(x^2) = 2xdx, \; d^2 x \equiv 0. \; \boxminus$$

Обсуждение 10.2.1. Для функции одной переменной роль дифференциалов несущественна, поскольку они тривиально вычисляются через соответствующие производные. Однако для функций многих переменных понятие производной высокого порядка является весьма громоздким и, оказывается, удобнее пользоваться именно дифференциалами. $\boxminus$

Глава 11

Теоремы о среднем

Доблесть в средине лежит

Гораций

Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши связывают свойства функции *на отрезке* со свойствами функции в некоторой *точке* внутри отрезка. Они являются весьма гибким инструментом при исследовании функции, с их помощью можно исследовать *глобальные* свойства функции на отрезке и *локальные* свойства, стягивая отрезок в исследуемую точку.

11.1. Теорема Ферма

Начнем с обсуждения понятия экстремума функции.

Определение 11.1.1. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Точка x_0 называется точкой **локального строгого (нестрогого) максимума (минимума)**, если существует такая ее δ-окрестность, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta (x_0)$ выполняется $f(x_0) > > f(x) \ \ (\geq, <, \leq)$. $\boxtimes$

Терминология. Точки локального максимума и минимума называются точками строгого (нестрогого) **локального экстремума** функции f. Точки строгого экстремума автоматически являются точками нестрогого экстремума. Обратное в общем случае неверно.

Пример 11.1.1. У функции $f(x) \equiv const$ все точки числовой прямой являются точками нестрогого максимума и минимума одновременно.

Теорема 11.1.1 (необходимое условие экстремума, Пьер Ферма, 1601-1665)**.** *Если в точке x_0 нестрогого экстремума функция дифференцируема, то $f'(x_0) = 0$.*

Геометрическая формулировка: в условиях теоремы в точке экстремума касательная параллельна оси абсцисс (рис. 11.1).

Доказательство. Пусть, для определенности, x_0 – точка минимума. Поскольку в ней существует конечная производная, то существуют односторонние и равные между собой производные. Из определения минимума и п. 2 теоремы 4.3.1 (о переносе неравенства со значений функций на их пределы) получаем, что

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

поскольку в обоих случаях числитель неотрицательный, а знаменатель в первом случае положительный, а во втором отрицательный. Следовательно,

$$f'(x_0) \geq 0 \ \wedge \ f'(x_0) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0. \ \blacksquare$$

Замечание 11.1.1. Теорема Ферма дает только *необходимое* условие существования экстремума для функции, имеющей производную. Это условие не является достаточным: контрпример $f(x) = x^3, \ x_0 = 0$ (рис. 11.2). ⊟

Замечание 11.1.2. Точка, в которой производная отсутствует, является подозрительной на локальный экстремум.

Пример 11.1.2. Точка $x_0 = 0$ является точкой строгого минимума функций $f(x) = |x|$ и $g(x) = \sqrt{|x|}$. В обоих случаях существуют левые и правые различные производные: $f'_\pm(0) = \pm 1, \ \ g'_\pm(0) = \pm\infty$. Примеры подсказывают, что в отсутствии дифференцируемости имеет смысл исследовать точку, как подозрительную на экстремум, с помощью односторонних производных. ⊟

Замечание 11.1.3. На концах отрезков теорема Ферма не работает.

Пример 11.1.3. Функция $f(x) := x$, где $x \in D(f) = [0,1]$, на концах имеем минимум и максимум, но $f'(x) \equiv 1$. $\boxminus$

Обсуждение 11.1.1. Точка $x_0 \in D(f)$, в которой $f'(x_0) = 0$, называется **критической**. В критической точке дифференциал обнуляется и, в силу (9.3), приращение функции является бесконечно малой высшего (по сравнению с линейным) порядка: $\Delta f(x_0) = o(\Delta x)$. Понятие критической точки переносится на многомерный и бесконечномерный анализ. Оно является основным в вариационном исчислении и физических теориях, основанных на вариационном принципе (лагранжева и гамильтонова механики). $\boxminus$

Примеры 11.1.1. различного поведения функции в окрестности критической точки $x_0 = 0$: 1) $f(x) = \pm x^2$ – точка экстремума; 2) $f(x) = x^3$ – функция всюду строго возрастающая; 3) $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$, в любой окрестности нуля функция совершает бесконечное количество колебаний, амплитуда которых есть $O^*(x^2)$ (см. рис. 11.1-11.3).

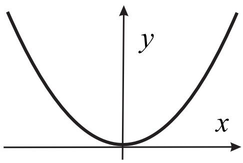

Рис. 11.1

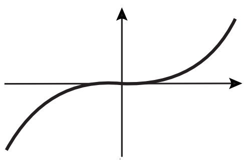

Рис. 11.2

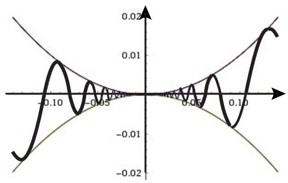

Рис. 11.3

11.2. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

Теорема 11.2.1. *(Мишель Ролль, 1652 - 1719) Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема внутри него. Пусть $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $f'(c) = 0$ (рис. 11.4).*

Доказательство. По второй теореме Вейерштрасса 6.1.2 *непрерывная на отрезке* функция f достигает своего минимального m и максимального M значений в некоторых точках x_1 и x_2 соответственно. Если $m = M$, то функция есть константа. В этом случае в качестве c можно взять произвольную точку отрезка.

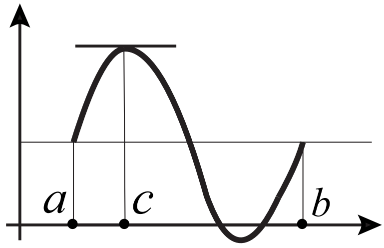

Рис. 11.4

Если $m < M$, то из условия $f(a) = f(b)$ следует, что или минимум, или максимум достигаются *внутри* отрезка. Значит, существует хотя бы одна точка локального экстремума $c \in (a, b)$. Тогда из теоремы Ферма следует, что $f'(c) = 0$. ■

Замечание 11.2.1. Еще раз подчеркиваем, что c – внутренняя точка отрезка $[a, b]$. ⊟

Замечание 11.2.2. Отказаться от условия $f(a) = f(b)$ нельзя, иначе минимум или максимум функции могут достигаться на концах отрезка, где производная не обязана обнулятся. Например, функция $f(x) = x$ на отрезке $[0, 1]$ достигает точных граней на краях. ⊟

Теорема 11.2.2. *(Жозеф-Луи Лагранж, 1736-1813) Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема внутри него. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, для которой справедлива* ***формула конечных приращений****:*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{11.1}$$

Геометрическая интерпретация теоремы состоит в том, что на графике найдется точка, в которой касательная параллельна замыкающей хорде AB, где $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ (рис. 11.5).

Физическая интерпретация состоит в том, что существует момент времени, в котором мгновенная скорость равна средней.

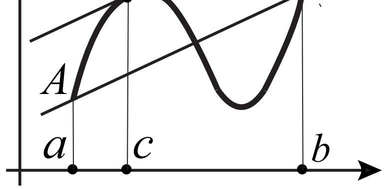

Рис. 11.5

Доказательство сводит условия Лагранжа к условиям Ролля. С этой целью рассмотрим вспомогательную функцию

$$D(\widetilde{f}) = [a, b], \quad \widetilde{f}(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функция $\widetilde{f}$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, в частности, $\widetilde{f}(a) = \widetilde{f}(b) = f(a)$. Поэтому существует точка $c \in (a, b)$, в которой производная обнуляется:

$$0 = \widetilde{f}'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad \blacksquare$$

Задача 11.2.1. Сравните графики функций $y = f(x)$ и $y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. В чем геометрический смысл вспомогательной функции $\widetilde{f}$?

Теорема 11.2.3 (Коши)**.** *Пусть функции $y = f(t)$ и $x = g(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$ и дифференцируемы внутри него. Пусть для любой точки $t \in (\alpha, \beta)$ производная $g'(t) \neq 0$. Тогда существует точка $\xi \in (\alpha, \beta)$, для которой справедлива формула:*

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{11.2}$$

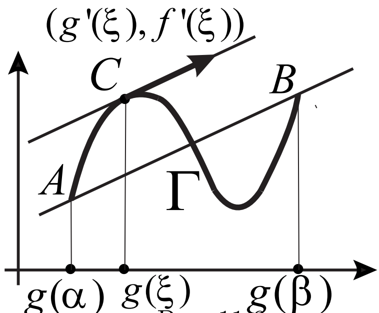

Рис. 11.6

Геометрическая интерпретация. Теорему Коши можно доказать с помощью функции $h(x) = (f \circ g^{-1})(x)$, заданной параметрически (см. лемму 9.6.1). Однако для этого предварительно нужно доказать строгую монотонность функции $x = g(t)$. Множество $\Gamma := \{x = g(t), y = f(t)\}$ представляет собой *график* функции h, в каждой внутренней точке которого существует касательная прямая. Из теоремы следует, что существует такая внутренняя точка $C(g(\xi), f(\xi)) \in \Gamma$, в которой касательная параллельна замыкающей хорде AB, где $A = (g(\alpha), f(\alpha))$, $B = (g(\beta), f(\beta))$ (рис. 11.6).

Физическая интерпретация состоит в том, что существует момент времени ξ, в котором вектор $(g'(\xi), f'(\xi))$ мгновенной скорости движения по кривой (**траектории**) Γ параллелен вектору $\overrightarrow{AB}$ замыкающей хорды (рис. 11.6).

Доказательство. Во-первых, заметим, что $g(\alpha) \neq g(\beta)$ (в противном случае из теоремы Ролля следует, что найдется точка $t_0 \in (\alpha, \beta)$, в которой $g'(t_0) = 0$). Следовательно, формулировка теоремы корректна.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$Def(\varphi) = [\alpha, \beta], \quad \varphi(t) := f(t) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)}(g(t) - g(\alpha)).$$

Функция φ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, поэтому существует точка $\xi \in (a, b)$, для которой

$$0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} g'(\xi) \;\Rightarrow\; \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \blacksquare$$

Замечание 11.2.3. Теорема Лагранжа является частным случаем и следствием теоремы Коши: возьмите в формуле (11.2) функцию $g(t) := t$. Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа: возьмите в формуле (11.1) конечных приращений $f(a) - f(b) = 0$. Однако в нашей схеме доказательств теорема Ролля не следует из теоремы Лагранжа. $\boxminus$

11.3. Следствия из теоремы Лагранжа

До конца параграфа мы знакомимся с утверждениями, в доказательствах которых применяются теоремы о среднем. Начнем с утверждения, которое сыграет ключевую роль в исследовании понятия неопределенного интеграла.

Теорема 11.3.1. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и во всех внутренних точках существует производная, равная нулю $f'(x) \equiv 0$, то f есть постоянная величина.*

Доказательство. Возьмем две произвольные точки отрезка x_1, x_2. К функции f на отрезке $[x_1, x_2]$ применим теорему Лагранжа. Получим: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$ поскольку точка $c \in$ $\in (x_1, x_2) \subset (a, b)$. Так как точки выбраны произвольно, то значения функции во всех точках совпадают. $\blacksquare$

Следствие 11.3.1. *Пусть функции f и g непрерывны на отрезке и дифференцируемы внутри его причем $f'(x) = g'(x)$ для любой* *внутренней точки. Тогда функции различаются на постоянную величину:* $f(x) \equiv g(x) + C$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(x) := f(x) - g(x)$ и применим к ней теорему 11.3.1. $\blacksquare$

11.4. Глобальные и локальные свойства производной

Если функция f дифференцируема на интервале, она порождает на нем новую функцию f'. Принципиальным для всего математического анализа является вопрос обратного преобразования: дана функция g; существует ли функция f, для которой данная является производной (т.е. $f' = g$)? Позже будет доказано, что если функция g непрерывна, то f существует. Сейчас мы опишем те свойства функции g, которыми она с необходимостью обладает, если является производной.

Теорема 11.4.1 (о промежуточных значениях производной, Жан Гастон Дарбу, 1842-1917)**.** *Пусть функция f(x) дифференцируема на некотором промежутке, содержащем точки a и b* $(a < b)$*. Тогда производная* $f'(x)$ *принимает на интервале* $(a; b)$ *все значения между* $f'(a)$ *и* $f'(b)$.

Замечание 11.4.1. По своей формулировке теорема 11.4.1 аналогична теореме 6.2.2 о промежуточных значениях *непрерывной* на отрезке функции. Однако производная f' не обязательно непрерывная функция! Причина, по которой f' принимает все промежуточные значения, совсем другая – к этому её "принуждают" свойства функции f, от которой она "произошла". $\boxminus$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда производные $f'(a)$ и $f'(b)$ имеют разные знаки (для определенности, $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$). Покажем, что найдется точка $c \in (a, b)$, для которой $f'(c) = 0$. Так как дифференцируемая функция непрерывна, функция $f(x)$ достигает минимума на отрезке $[a; b]$.

Мы утверждаем, что точка минимума НЕ совпадает с концами отрезка, так как и в некоторой проколотой правой полуокрестности точки a значения функции $f(x)$ строго меньше $f(a)$, и в некоторой проколотой левой полуокрестности точки b значения функции $f(x)$ строго меньше $f(b)$ (рис. 11.7). Это утверждение – ключевой момент в доказательстве. Поясним его подробно для точки a. Из предельного равенства

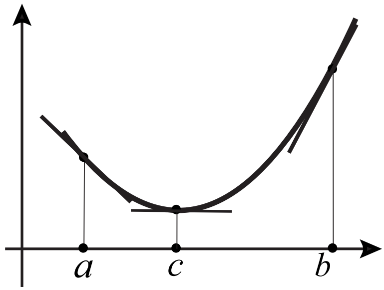

Рис. 11.7

$$f'(a) = f'_+(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$$

(в силу п. 1 теоремы 4.3.1 о переносе неравенства с пределов на значения функций) следует, что для всех достаточно малых приращений $x - a > 0$ дробь $(f(x) - f(a))/(x - a)$ строго отрицательна. Поскольку знаменатель дроби положителен, значит, числитель дроби строго отрицателен: $f(x) < f(a)$. Аналогично $f(x) < f(b)$ для всех достаточно малых приращений $x - b < 0$. Следовательно, минимум достигается в некоторой промежуточной точке $c \in (a, b)$. По теореме 11.1.1 Ферма $f'(c) = 0$.

Рассмотрим общий случай. Пусть, к примеру, $f'(a) < k < f'(b)$. Применим предыдущее предложение к функции $g(x) = f(x) - kx$. Мы имеем $g'(a) = f'(a) - k < 0$, $g'(b) = f'(b) - k > 0$. Следовательно, найдется точка $c \in (a; b)$ такая, что $g'(c) = f'(c) - k = 0$, то есть $f'(c) = k$. ■

Задача 11.4.1. Докажите, что в условиях теоремы 11.2.3 Коши производная $g'(t)$ знакопостоянная. Дайте доказательство теоремы Коши, применив к функции $h(x) = f(g^{-1}(x))$ теорему Лагранжа о среднем.

Из теоремы 11.4.1 вытекает

Следствие 11.4.1. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале, то ее производная $y = f'(x)$ не может иметь на этом интервале разрывов первого рода.*

Доказательство. Допустим, от противного, что в точке x_0 существуют односторонние пределы производной $f'(x)$, которые не совпадают; пусть для определенности

$$m := \lim_{x\to x_0-0} f'(x) < \lim_{x\to x_0+0} f'(x) =: M.$$

Из п. 1 теоремы 4.3.1 следует, что в некоторой левой полуокрестности выполнено неравенство

$$f'(x) < m + \frac{M-m}{3} = \frac{2m+M}{3}, \text{ при } x \in (x_0-\varepsilon, x_0).$$

Аналогично справа получаем:

$$f'(x) > M - \frac{M-m}{3} = \frac{m+2M}{3}, \text{ при } x \in (x_0, x_0+\varepsilon).$$

Заметим, что интервал $((2m+M)/3, (m+2M)/3)$ невырожденный – его длина равна $(M-m)/3$.

Функция f' определена на интервале $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ и для всех точек $x \neq x_0$ заведомо $f'(x) \notin [(2m+M)/3, (m+2M)/3]$. Значит, отрезок $[(2m+M)/3, (m+2M)/3]$ (кроме, быть может, одной своей точки) не принадлежит образу $Im(f')$, где область определения $Def(f') = (x_0 - \varepsilon, x_0+\varepsilon)$. Но существуют точки $x_1 \in (x_0-\varepsilon, x_0)$ и $x_2 \in (x_0, x_0+\varepsilon)$, в которых

$$f'(x_1) < \frac{2m+M}{3}, \quad f'(x_2) > \frac{m+2M}{3}.$$

Последнее противоречит теореме 11.4.1. ■

Мы знаем, что у функции может существовать конечный предел (обычный или односторонний) в точке $x_0 \in Def(f)$, но при этом значение предела не совпадает со значением функции. Оказывается для производной такого несовпадения не бывает:

Теорема 11.4.2 (о пределе производной)**.** *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[x_0, x_0+\delta]$ (или $[x_0-\delta, x_0]$) и дифференцируема на интервале $(x_0, x_0+\delta)$ $((x_0-\delta, x_0))$. Пусть существует (конечный или бесконечный) односторонний предел производной $f'(x_0+0)$ $(f'(x_0-0))$. Тогда существует односторонняя производная, совпадающая с одноименным пределом:*

$$f'_+(x_0) = f'(x_0+0) \qquad (f'_-(x_0) = f'(x_0-0)).$$

Аналогичное утверждение справедливо для обычной производной.

Другими словами, если у непрерывной функции существует предел (односторонний или обычный) ее производной $f'(x)$ при $x \to x_0$, то существует и сама производная $f'(x_0)$ (односторонняя или обычная), равная этому пределу.

Обсуждение 11.4.1. Для каждого $x \in \overset{\circ}{U}_\delta\ (x_0)$ производная $f'(x)$ уже есть предел отношения приращений $\Delta f(x)/\Delta x$ при $\Delta x \to$ $\to 0$. Следовательно, утверждение теоремы означает, что при указанных условиях в *повторном пределе* предельные переходы перестановочны:

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \overset{?}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Утверждения о перестановочности пределов типичны и важны для математического анализа. ⊟

Доказательство Из теоремы Лагранжа следует, что для любой точки $x \in (x_0, x_0+\delta)$ найдется такое число $c \in (x_0, x)$, что $f'(c) =$ $= (f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$. Для каждого $x \in (x_0, x_0+\delta)$ определим указанное число c произвольным *единственным* способом. Значит, мы определили в правой полуокрестности *функцию* $c = c(x)$ (возможно, разрывную), у которой:

1) $c(x) \to x_0 + 0$ при $x \to x_0 + 0$,
2) $c(x) \in (x_0, x)$ (рис. 11.8)

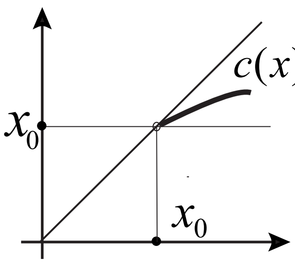

Рис. 11.8

Итак, выполнены условия теоремы 4.7.1 о замене переменной в предельном переходе:

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(c(x)) = \lim_{c\to x_0+0} f'(c) = f'(x_0+0).$$

Следовательно, существует предел

$$f'_+(x_0) := \lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0+0} f'(c(x)) = f'(x_0+0). \quad \blacksquare$$

Из теоремы 11.4.2 сразу вытекает

Следствие 11.4.2. *Если функция f дифференцируема на промежутке, то ее производная f' не имеет на нем устранимых разрывов.*

Из следствий 11.4.1 и 11.4.2 вытекает, что производная f' дифференцируемой на интервале функции может иметь разве что разрывы второго рода.

Пример 11.4.1 (разрыва производной второго рода)**.** Определим функцию формулой $f(x) = x^2\sin(1/x)$ при $x \neq 0$, и $f(0) := 0$

(рис. 11.3). При $x \neq 0$ производная существует и вычисляется по известным правилам:

$$f'(x) = 2x \cdot \sin(1/x) + x^2 \cos(1/x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \cdot \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Из определения производной получаем, что

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} = 0.$$

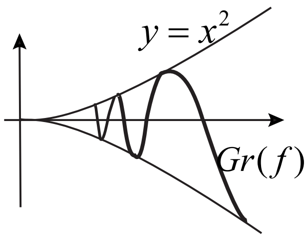

Рис. 11.9

Но предела производной $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ нет (докажите). Объяснение (не доказательство!) в том, что в окрестности нуля у графика функции $f(x)$ имеются всплески *убывающей амплитуды*, но *НЕубывающего наклона* (рис. 11.9).

11.5. Правило Лопиталя нахождения неопределенностей

Правило Лопиталя позволяет находить неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, заменяя функции в числителе и знаменателе их производными. Обоснование правила опирается на теорему Коши о среднем. Но предварительно (для сравнения) мы докажем утверждение, вытекающее из определения производной.

Лемма 11.5.1. *Если функции f и g дифференцируемы в точке a, $f(a) = g(a) = 0$, и $g'(a) \neq 0$, то*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Доказательство. Из определения производной получаем

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(a)(x-a) + o(x-a)}{g'(a)(x-a) + o(x-a)} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f'(a) + o(x-a)/(x-a)}{g'(a) + o(x-a)/(x-a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \ \blacksquare$$

Теорема 11.5.1. *(Гийом Франсуа Лопиталь, 1661-1704) Пусть: функции f и g дифференцируемы в некоторой проколотой полуокрестности точки $a \in \overline{\mathbb{R}}$, причем в указанной полуокрестности $g'(x) \neq 0$; пусть*

или $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = \lim\limits_{x\to a\pm 0} g(x) = 0$, *или* $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = \lim\limits_{x\to a\pm 0} g(x) = \pm\infty$.

Если существует $\lim\limits_{x\to a\pm 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \overline{\mathbb{R}}$, *тогда существует* $\lim\limits_{x\to a\pm 0} \frac{f(x)}{g(x)} = C$.

Обсуждение 11.5.1. Кажется, что в лемме 11.5.1 требования к функции в точке a менее жесткие, чем в теореме 11.5.1: требуется дифференцируемость только в точке a, а не в окрестности. Однако теорема Лопиталя ценнее: 1) предъявляет требования к *проколотой* окрестности точки a, 2) требуется существование предела *дроби* $f'(x)/g'(x)$, а не пределов числителя и знаменателя в отдельности. $\boxminus$

Предварительно рассмотрим частный случай

Лемма 11.5.2. *Пусть функция h дифференцируема в левой полуокрестности точки $a \in \{0, +\infty\}$; пусть или* $\lim\limits_{y\to -0} h(y) = 0$, *или* $\lim\limits_{y\to +\infty} h(y) = \pm\infty$. *Если существует (соответственно) или* $\lim\limits_{y\to -0} h'(y) = C \in \overline{\mathbb{R}}$, *или* $\lim\limits_{y\to +\infty} h'(y) = C \in \overline{\mathbb{R}}$, *то*

$$\text{или } \exists \lim_{y\to -0} \frac{h(y)}{y} = C, \qquad \text{или } \exists \lim_{y\to +\infty} \frac{h(y)}{y} = C.$$

Доказательство. В первом случае доопределим *по непрерывности* $h(0) := 0$. В силу теоремы Коши 11.2.3, для любого $y < 0$ из области определения функции h найдется такое число $c \in (y, 0)$, что

$$\frac{h(y)}{y} = \frac{h(y) - h(0)}{y - 0} = \frac{h'(c)}{1}.$$

Определим для каждого $y < 0$ указанное число c произвольным единственным способом. Тем самым мы определили *функцию* $c = c(y)$ (возможно, разрывную), обладающую свойствами: $\lim\limits_{y\to -0} c(y) \to -0$, но $c(y) \neq 0$. Поэтому из теоремы 4.7.1 о замене переменной под знаком предела следует, что

$$\lim_{y\to -0} \frac{h(y)}{y} = \lim_{y\to -0} h'(c(y)) = \lim_{c\to -0} h'(c) = C.$$

Во втором случае будем доказывать по определению предела. Пусть, для определенности, $\lim\limits_{y\to+\infty} h(y) \to +\infty$.

Если $C \in \mathbb{R}$, по $\varepsilon > 0$ найдется такой $Y = Y(\varepsilon)$, что $\forall y > Y \;\hookrightarrow h'(y) \in (C-\varepsilon, C+\varepsilon)$. Для произвольного $y > Y$, в силу теоремы Коши,

$$\frac{h(y)-h(Y)}{y-Y} = \frac{h'(c)}{1} \in (C-\varepsilon, C+\varepsilon),$$

поскольку $c \in (Y, y)$. Домножая двустороннюю оценку на положительную дробь $(y-Y)/y$, получаем:

$$(C-\varepsilon)(1-\frac{Y}{y}) < \frac{h(y)}{y} - \frac{h(Y)}{y} < (C+\varepsilon)(1-\frac{Y}{y}) \;\Leftrightarrow$$

$$(C-\varepsilon)(1-\frac{Y}{y}) + \frac{h(Y)}{y} < \frac{h(y)}{y} < (C+\varepsilon)(1-\frac{Y}{y}) + \frac{h(Y)}{y}.$$

При $y \to +\infty$ выражения слева и справа стремятся к $C-\varepsilon$ и $C+{}$ $+\varepsilon$ соответственно. Значит, для всех достаточно больших значений y справедлива двусторонняя оценка $h(y)/y \in (C-2\varepsilon, C+2\varepsilon)$, что доказывает лемму для конечного C.

Если же $C = +\infty$, то по $\varepsilon > 0$ найдется такой $Y = Y(\varepsilon)$, что $\forall y >$ $> Y \;\hookrightarrow\; h'(y) > 1/\varepsilon$. Для произвольного $y > Y$, в силу теоремы Коши,

$$\frac{h(y)-h(Y)}{y-Y} = \frac{h'(c)}{1} > \frac{1}{\varepsilon},$$

поскольку $c \in (Y, y)$. Домножая неравенство на $(y-Y)/y$, получаем:

$$\frac{h(y)}{y} - \frac{h(Y)}{y} > \frac{1}{\varepsilon}(1-\frac{Y}{y}) \;\Leftrightarrow\; \frac{h(y)}{y} > \frac{h(Y)}{y} + \frac{1}{\varepsilon}(1-\frac{Y}{y}).$$

При $y \to +\infty$ выражение справа стремится к $1/\varepsilon$. Значит, для всех достаточно больших значений y справедлива оценка $h(y)/y > 1/(2\varepsilon)$. ■

Доказательство теоремы. Поскольку на всей полуокрестности $g'(x) \neq 0$, то, в силу теоремы Дарбу 11.4.1, производная g' не меняет знак. Пусть, для определенности, $g'(x) > 0$. Следовательно, функция $y = g(x)$ имеет обратную $x = g^{-1}(y)$, которая дифференцируема, строго растет и либо $\lim\limits_{y\to-0} g^{-1}(y) = a-0$, либо $\lim\limits_{y\to+\infty} g^{-1}(y) = a-0$. Значит, допустима замена $x = g^{-1}(y)$.

Определим функцию $h(y) := f(g^{-1}(y))$. Теперь нам нужно доказать существование предела дроби $h(y)/y$. Заметим, что для функции

h выполнено первое условие леммы 11.5.2. Остается проверить второе условие. Из теорем о производной сложной функции и обратной функции следует, что

$$h'(y) = f'(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1})'(y) = \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{где } x = g^{-1}(y).$$

Поэтому искомые пределы равны:

$$\lim_{y \to -0} h'(y) = \lim_{x \to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C, \quad \lim_{y \to +\infty} h'(y) = \lim_{x \to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C$$

(мы еще раз воспользовались теоремой 4.7.1 о замене переменной под знаком предела, но теперь в обратную сторону). ■

Замечание 11.5.1. Правило Лопиталя – это *достаточное* условие существования предела. Предел отношения производных может отсутствовать, а предел отношения функций существовать. ⊟

Пример 11.5.1. Очевидно, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+\cos x}{2x+\sin x} = 1$. Но отношение производных $\frac{2-\sin x}{2+\cos x}$ предела при $x \to +\infty$ не имеет.

Замечание 11.5.2. В некоторых случаях применять правило приходится несколько раз. ⊟

Задача 11.5.1. Дважды применяя правило Лопиталя, найдите предел

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi x - \pi \ln x \cdot \cos \pi x}{\ln x \cdot \sin \pi x}.$$

Примеры 11.5.1. применения правила Лопиталя.

1) Для любого $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

2) Для любого $\alpha > 0$ и $a > 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{(a^{1/\alpha})^x} \right)^\alpha = \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(a^{1/\alpha})^x \ln a^{1/\alpha}} \right)^\alpha = 0$$

поскольку $a^{1/\alpha} > 1$.

Значит, на бесконечности степенная функция растет быстрее логарифмической, а показательная – быстрее степенной: $\ln x = o(x^\alpha)$ и $x^\alpha = o(a^x)$ при $x \to +\infty$ $(\alpha > 0,\ a > 1)$.

Задача 11.5.2. Пусть $\alpha > 0$. Докажите, что $\lim\limits_{x \to +0} (x^\alpha \cdot \ln x) = 0$.

Глава 12

Формула Тейлора

Формула Брука Тейлора (1685–1731) является обобщением представления функции с помощью первого дифференциала. Она позволяет уточнить поведение функции в окрестности исследуемой точки.

12.1. Мотивация и основные определения

Наша цель, используя *производные высшего порядка*, получить в окрестности точки x_0 представление функции f виде суммы *многочлена* по приращениям $x - x_0$ и остаточного члена. Для упрощения вычислений возьмем $x_0 = 0$ и поэкспериментируем с многочленом

$$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Найдем его коэффициенты a_k с помощью производных в точке ноль:

$$a_0 = P_n(0),\ a_1 = P_n'(0),\ a_2 = \frac{1}{2!}P_n''(0),\ \ldots\ ,\ a_k = \frac{1}{k!}P_n^{(k)}(0),\ \ldots$$

Значит,

$$P_n(x) = P_n(0) + \frac{1}{1!}P_n'(0)x + \ldots + \frac{1}{k!}P_n^{(k)}(0)x^k\ + \ldots\ + \frac{1}{n!}P_n^{(n)}(0)x^n.$$

Теперь нетрудно убедиться, что *тот же* многочлен по переменной x равен

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{1}{1!}P_n'(x_0)(x - x_0) + \ \ldots$$

$$+\frac{1}{k!}P_n^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k\ + \ldots + \frac{1}{n!}P_n^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n = Q_n(x-x_0), \quad (12.1)$$

где $Q_n(x-x_0)$ – многочлен степени n по переменной $x-x_0$.

Замечание 12.1.1. Как функции по переменной x многочлены $P_n(x) \equiv Q_n(x-x_0)$ совпадают, но $P_n(t) \neq Q_n(t)$, т. е. это *разные многочлены.* $\boxminus$

Полученное представление мотивирует следующее

Определение 12.1.1. Пусть существует конечная производная $f^{(n)}(x_0)$. **Многочленом Тейлора** n-го порядка функции f в точке x_0 называется многочлен

$$P_n(f;x-x_0) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \ \dots$$

$$\dots \ + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \ + \dots \ + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

Остаточным членом n-го порядка функции f в точке x_0 называется разность

$$r_n(f;x-x_0) := f(x) - P_n(f;x-x_0) = f(x_0+(x-x_0)) - P_n(f;x-x_0). \ \boxtimes$$

Замечание 12.1.2. Существование конечной производной $f^{(n)}(x_0)$ влечет дифференцируемость f до порядка $(n-1)$ включительно в некоторой *окрестности* точки x_0. $\boxminus$

Замечание 12.1.3. Многочлен Тейлора определен на всей числовой оси и всюду бесконечно дифференцируем; остаточный член определен и дифференцируем там же и так же, как f (обоснуйте). $\boxminus$

Замечание 12.1.4. Функция $p(x) := P_n(f;x-x_0)$ по переменной x является сложной функцией: $p(x) = P_n(f;l(x))$, где $l(x) := x-x_0$. Поэтому

$$(P_n(f;x-x_0))'_x \equiv P'_n(f;x-x_0)\cdot(x-x_0)' \equiv P'_n(f;x-x_0). \ \boxminus$$

Задача 12.1.1. Докажите формулу (12.1). Как выглядит многочлен Тейлора n-го порядка и остаточный член для многочлена m-й степени в точке x_0? Рассмотрите случаи $m<n$, $m=n$, $m>n$.

Определение 12.1.2. Представление функции f в виде

$$f(x) = P_n(f,x-x_0) + r_n(f,x-x_0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + r_n(f;x-x_0) \tag{12.2}$$

называется **формулой Тейлора** в точке x_0. $\boxtimes$

Замечание 12.1.5. Поскольку в точке x_0 верно $dx = x - x_0$, то формулу (12.2) можно записать через дифференциалы высших порядков (лемма 10.2.1):

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(x_0) + r_n(f; x - x_0). \quad \boxminus \tag{12.3}$$

Представление (12.2) не несет никакой информации о функции f, пока мы не оценим остаточный член. Для этой цели нам понадобится

Лемма 12.1.1. *Пусть существует конечная производная $f^{(n)}(x_0)$. Тогда:*

1) На всей числовой оси

$$(P_n(f; x - x_0))' \equiv P_n'(f; x - x_0) \equiv P_{n-1}(f'; x - x_0),$$

т. е. производная многочлена Тейлора функции f равна многочлену Тейлора на единицу меньшего порядка от производной f'.

2) Для $k = 0, 1, \ldots, n$ справедливо $f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(f; 0)$. Т. е. производные (до порядка n включительно) многочлена Тейлора по переменной *$t = x - x_0$ в точке $t_0 = 0$ совпадают с соответствующими производными функции f в точке x_0.*

3) В некоторой окрестности точки x_0

$$(r_n(f; x - x_0))' \equiv r_n'(f; x - x_0) \equiv r_{n-1}(f'; x - x_0),$$

т. е. производная остаточного члена n-го порядка равна остаточному члену на единицу меньшего порядка от производной.

4) Для $k = 0, 1, \ldots, n$ справедливо $r_n^{(k)}(f; 0) = 0$. Т. е. производные (до порядка n включительно) остаточного члена по переменной $t = x - x_0$ в точке $t_0 = 0$ равны нулю.

Доказательство п. 1.:

$$(P_n(f; x - x_0))' = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \right)' =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(f')^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k = P_{n-1}(f'; x-x_0).$$

Доказательство п. 2. Во-первых, для любой функции g, имеющей в точке x_0 производную порядка m, очевидно справедливо равенство $P_m(g;0) = g(x_0)$. Во-вторых, применяя утверждение п. 1 k раз ($k \leq n$), получаем $P_n^{(k)}(f; x-x_0) = P_{n-k}(f^{(k)}; x-x_0)$. Поэтому $P_n^{(k)}(f;0) = P_{n-k}(f^{(k)}; 0) = f^{(k)}(x_0)$.

Доказательство п. 3. В силу замечаний 12.1.2 и 12.1.3, мы можем продифференцировать остаточный член и воспользоваться п. 1:

$$r_n'(f; x-x_0) = (f(x) - P_n(f; x-x_0))' = f'(x) - P_n'(f; x-x_0) =$$

$$= f'(x) - P_{n-1}(f'; x-x_0) = r_{n-1}(f'; x-x_0).$$

Доказательство п. 4. Применим k раз утверждение п. 3 к остаточному члену $r_n(f; x-x_0)$; к полученному выражению применим определение 12.1.1; к полученному выражению k раз применим утверждение п. 1 – в результате:

$$r_n^{(k)}(f; x-x_0) = r_{n-k}(f^{(k)}; x-x_0) =$$

$$= f^{(k)}(x) - P_{n-k}(f^{(k)}; x-x_0) = f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(f; x-x_0).$$

Теперь подставим $x = x_0$ и воспользуемся п. 2. ■

12.2. Формулы Тейлора

Теорема 12.2.1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано; Джузеппе Пеано, 1858-1932)**.** *Пусть в точке x_0 существует конечная производная $f^{(n)}(x_0)$. Тогда в формуле (12.2) остаточный член $r_n(f; x-x_0) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$.*

Доказательство индукцией по n *для любой функции.* При $n = 1$ это определение 9.2 дифференцируемости с учетом теоремы 9.1.1 об эквивалентности существования конечной производной и дифференцируемости. Пусть утверждение верно при $n-1$ для любой функции. Применяя формулу (11.1) Лагранжа конечных приращений и пп. 3, 4 леммы 12.1.1, имеем:

$$\frac{r_n(f; x-x_0)}{(x-x_0)^n} \overset{\text{п. 4}}{=} \frac{r_n(f; x-x_0) - r_n(f;0)}{(x-x_0)^n} \overset{\text{Лагранж}}{=}$$

$$= \frac{r_n'(f; c(x-x_0))(x-x_0)}{(x-x_0)^n} \overset{\text{п. 3}}{=} \frac{r_{n-1}(f'; c(x-x_0))}{(x-x_0)^{n-1}} \overset{\text{индукция}}{=}$$

$$= \frac{o((c(x-x_0))^{n-1})}{(x-x_0)^{n-1}},$$

где $c = c(x - x_0)$ – произвольная функция, определяемая теоремой Лагранжа, значения которой находятся строго между нулем и $x - x_0$. Переходя к пределу, получаем

$$\frac{o((c(x-x_0))^{n-1})}{(x-x_0)^{n-1}} = \frac{o((c(x-x_0))^{n-1})}{(c(x-x_0))^{n-1}} \cdot \frac{(c(x-x_0))^{n-1}}{(x-x_0)^{n-1}} \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0, \quad (12.4)$$

поскольку первая дробь в (12.4) имеет пределом ноль, а модуль второй ограничен единицей. Следовательно, $r_n(f; x - x_0) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$. ■

Наличие дополнительной производной позволяет уточнить вид остаточного члена.

Теорема 12.2.2 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)**.** *Пусть в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 существует конечная производная $f^{(n+1)}(x)$. Тогда в этой окрестности справедлива формула (12.2), в которой*

$$r_n(f; x-x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где ξ – некоторое число строго между нулем и $x - x_0$, если $x \neq x_0$, и ξ – любое достаточно малое число при $x = x_0$.

Доказательство индукцией по n, начиная с нуля. При $n = 0$ получаем формулу (11.1) Лагранжа. Пусть утверждение верно при $n - 1$ для любой функции. Применяя формулу (11.2) Коши и пп. 3, 4 леммы 12.1.1, имеем

$$\frac{r_n(f; x-x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} \overset{\text{п. 4}}{=} \frac{r_n(f; x-x_0) - r_n(f; 0)}{(x-x_0)^{n+1} - (x_0-x_0)^{n+1}} \overset{\text{Коши}}{=}$$

$$= \frac{r_n'(f; \eta(x-x_0))}{(n+1)(\eta(x-x_0))^n} \overset{\text{п. 3}}{=} \frac{r_{n-1}(f'; \eta(x-x_0))}{(n+1)(\eta(x-x_0))^n} \overset{\text{индукция}}{=}$$

$$= \frac{(f')^n(x_0+\xi(\eta))(\eta(x-x_0))^n}{(n+1)n!(\eta(x-x_0))^n} = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\xi(\eta))}{(n+1)!},$$

где $\eta(x - x_0)$ строго между нулем и $x - x_0$, а $\xi(\eta)$ строго между нулем и η. (Например, если $x > x_0$, то $0 < \xi < \eta < x - x_0$.) При $x = x_0$ получаем $r_n(f; 0) = 0$ независимо от выбора ξ. ■

Обсуждение 12.2.1 (теорем 12.2.1 и 12.2.2). В первой теореме требуется существование n-й производной *в точке*; во второй – существование следующей $(n+1)$-й производной *в окрестности* исследуемой точки. Зато появляется возможность использовать свойства $(n+1)$-й производной на *всей окрестности* точки x_0. $\boxminus$

Следствие 12.2.1. *Если, кроме условий теоремы 12.2.2, известно, что в некоторой окрестности точки x_0 производная $f^{(n+1)}(x)$ ограничена, то остаточный член $r_n(f; x-x_0) = O((x-x_0)^{n+1})$ при $x \to x_0$. Т. е. $|r_n(f; x-x_0)| \le C|x-x_0|^{n+1}$, где $C > 0$ – некоторая постоянная.*

Возникает вопрос о *единственности* представления функции в виде суммы многочлена с “малым” остаточным членом.

Теорема 12.2.3 (единственность разложения по формуле Тейлора). *Пусть существует конечная производная $f^{(n)}(x_0)$. Пусть в некоторой окрестности точки x_0 справедливо представление функции f в виде*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \text{ при } x \to x_0.$$

Тогда все коэффициенты есть коэффициенты формулы Тейлора: $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Доказательство. В силу теоремы 12.2.1, справедлива формула Тейлора (12.2) с остаточным членом в форме Пеано. Приравняем оба выражения:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

Взяв $x = x_0$, получаем $a_0 = f(x_0)$. Уничтожим одинаковые слагаемые слева и справа и, в предположении, что $x \ne x_0$, разделим обе части на $x - x_0$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (x-x_0)^{k-1} + o((x-x_0)^{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k-1} + o((x-x_0)^{n-1}).$$

Теперь, перейдя к пределу, получаем $a_1 = f'(x_0)$. Рассуждая таким образом, за конечное число шагов получим требуемое. ■

Замечание 12.2.1. В условиях теоремы 12.2.3 нельзя отказаться от условия существования производной $f^{(n)}(x_0)$. Чтобы разобраться в этом условии, предлагается

Задача 12.2.1. Пусть в некоторой окрестности точки x_0 функция имеет вид $f(x) \equiv a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$. Правда ли, что: 1) $a_0 = f(x_0)$, 2) $a_1 = f'(x_0)$, 3) $a_2 = f''(x_0)/2$? (Ответ: равенства 1) и 2) справедливы; равенство 3) в общем случае неверно, производная $f''(x_0)$ не обязана существовать.) $\boxminus$

12.3. Формулы Тейлора основных элементарных функций

Теперь видно, что формула Тейлора позволяет существенно уточнить наши сведения о локальных свойствах функции. Поэтому желательно знать коэффициенты этой формулы хотя бы для основных элементарных функций. Это возможно, поскольку мы знаем их производные до любого порядка.

Формула Тейлора при $x_0 = 0$ называется **формулой Маклорена** (Ко́лин Маклоре́н, 1698-1746). Поскольку $f(x) = f(x_0 + (x - x_0))$, формулу Тейлора в точке x_0 для функции f можно трактовать как формулу Маклорена для функции $f_1(x) := f(x_0 + x)$ (см. ниже формулы Маклорена логарифмической и степенной функций).

Важными классами функций являются четные и нечетные функции. Отметим, что произвольную функцию f с симметричной относительно нуля областью определения можно единственным образом представить в виде суммы четной функции φ и нечетной функций ψ:

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x), \text{ где}$$

$$\varphi(x) := \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \; \psi(x) := \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Задача 12.3.1. Проверьте, что функция φ четная, а функция ψ нечетная. Докажите, что представление функции в виде суммы четной и нечетной функций единственно.

Лемма 12.3.1 (четность и нечетность производных)**.** *Если функция f – четная, то f' – нечетная. Если функция f – нечетная, то f' – четная.*

Доказательство. Если f – четная, то $f(-x) = f(x)$. Поэтому

$$f'(-x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-x + \Delta x) - f(-x)}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + (-\Delta x)) - f(x)}{-\Delta x} = -f'(x).$$

Доказательство второго утверждения аналогично. ■

Задача 12.3.2. Справедливы ли обратные утверждения: если функция f' – четная, то f – нечетная; если функция f' – нечетная, то f – четная? Сформулируйте и докажите правильные утверждения.

Из леммы 12.3.1 следует

Лемма 12.3.2 (о формулах Маклорена для четной и нечетной функций)**.**

1) *Пусть функция f четная и пусть существует производная $f^{(2n+1)}(0)$. Тогда*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(0) x^{2k} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0.$$

2) *Пусть функция f нечетная и пусть существует производная $f^{(2n+2)}(0)$. Тогда*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(0) x^{2k+1} + o(x^{2n+2}),\ x \to 0.$$

Доказательство. Так как функция f четная, то f' – нечетная, а f'' – четная и т. д. Но нечетная функция в нуле равна нулю. Следовательно, в формуле Маклорена остаются только слагаемые с четными номерами. Последняя производная $f^{(2n+1)}(0)$ имеет нечетный порядок, следовательно $f^{(2n+1)}(0) = 0$ и соответствующий член многочлена Маклорена равен нулю. Однако он существует, поэтому, согласно теореме 12.2.1 Пеано, остаточный член имеет порядок малости выше, чем $2n+1$ при $x \to 0$.

Второй пункт доказывается аналогично. ■

До конца параграфа мы не указываем, что разложение имеет место при $x \to 0$.

Найдем **формулу Маклорена экспоненты** $f(x) = e^x$. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$ очевидно $f^{(n)}(0) = 1$, поэтому

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Из определения гиперболических функций следует, что sinh – нечетная функция, cosh – четная, а значения производных этих функций в нуле либо равны нулю, либо единице. Поэтому **формулы Маклорена гиперболических функций** есть

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

Формулы Маклорена для тригонометрических функций отличаются от предыдущих появлением коэффициента $(-1)^k$:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

Для **логарифмической функции** удобно строить формулу Маклорена от точки $x_0 = 1$, поскольку $(\ln(1+x))^{(k)}|_{x=0} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}|_{x=0} = (-1)^{k-1}(k-1)!$. Получаем:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n).$$

Степенную функцию также удобно раскладывать от значения единица: $f(x) = (1+x)^\alpha$. В этом случае $f^{(k)}(0) = k! C_\alpha^k (1+x)^{\alpha-k}|_{x=0} = k! C_\alpha^k$. Поэтому

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k \, x^k + o(x^n).$$

При $\alpha = \mathbb{N}_0$ получим формулу бинома Ньютона – в этих случаях остаточный член обнуляется. Если $\alpha = -1$, получаем

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n). \tag{12.5}$$

После замены x на $-x$ получим

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n). \tag{12.6}$$

Заметим, что слагаемые в сумме – это первые n членов убывающей геометрической прогрессии.

Замечание 12.3.1 (о замене переменной)**.** Подставив всюду в формуле Маклорена вместо переменной x функцию $g(x) \to 0$ при $x \to \to 0$, мы получим верную формулу с остаточным членом $o((g(x))^n)$, которая в общем случае НЕ является формулой Маклорена. Однако замены $g(x) = kx^m$, где $k \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, порождают новые формулы Маклорена, поскольку получаем разложение функции по степеням переменной x с остаточным членом $r_n(f; kx^m)$, который имеет порядок малости $o(x^{mn})$. Применение указанной замены см. ниже. $\boxminus$

Найдем **формулы Маклорена обратных тригонометрических функций**. Для функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ мы не будем искать формулу для производной произвольного порядка. Поступим по-другому: продифференцируем функцию и найдем ее формулу Маклорена, затем восстановим формулу Маклорена исходной функции. Для производной справедливо

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

(мы воспользовались формулой (12.5), подставили x^2 вместо x и учли, что функция $f'(x)$ четная). Мы получили многочлен Маклорена порядка $2n$ для производной f'. В силу п. 1 леммы 12.1.1, он является производной многочлена Маклорена степени $2n+1$ для функции f:

$$P_{2n}(f'; x) = P'_{2n+1}(f; x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}.$$

Нетрудно "отгадать" многочлен

$$Q_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

степени $2n+1$, производная которого равна $P'_{2n+1}(f;x)$. В силу следствия 11.3.1, искомый многочлен $P_{2n+1}(f;x)$ отличается от предложенного на константу C, которую найдем из условия $0 = f(0) = P_{2n+1}(f;0) = C$. Окончательно:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

Для нахождения формулы Маклорена функции $f(x) = \arcsin x$ поступим аналогично:

$$(\arcsin x)' = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{n} C_{-1/2}^{k}(-x^2)^k + o(x^{2n+1})$$

(мы воспользовались формулой (12.6) и подстановкой x^2). Учитывая, что $\arcsin 0 = 0$, получаем

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} C_{-1/2}^{k} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6).$$

В предложенных выше примерах удается сразу выписать коэффициенты при любых степенях приращения аргумента. В общем случае это невозможно, однако, зная n-ый коэффициент, можно найти следующий $(n+1)$-ый. Найдем разложение функции $\operatorname{tg} x$ с $o(x^6)$. Поскольку функция нечетная, искомое разложение имеет вид:

$$\operatorname{tg} x = x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^6).$$

Из определения тангенса и формул Маклорена для синуса и косинуса следует уравнение

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) = (x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^6))(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)).$$

Приравнивая коэффициенты при x^3 и x^5, получаем

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + a_3, \quad \frac{1}{5!} = \frac{1}{4!} - \frac{a_3}{2!} + a_5.$$

Сначала находим коэффициент a_3, потом коэффициент a_5. Ответ:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6).$$

Приведем еще несколько часто встречающихся разложений, которые полезны для вычисления пределов.

$$\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \pm \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = 1 \mp \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} \mp \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} + o(x^4),$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6).$$

Замечание 12.3.2 (о повышении точности формул Маклорена элементарных функций)**.** Учитывая следствие 12.2.1, мы можем во всех указанных формулах вместо добавочного члена $o(x^n)$ поставить $O(x^{n+1})$. $\boxminus$

12.4. Нахождение формулы Тейлора

Во-первых, следует помнить, что формула Тейлора в точке x_0 – это представление функции в виде суммы *одного многочлена* (по переменной $(x - x_0)$) и остаточного члена, порядок малости которого выше, чем степень многочлена. Поэтому, работая с произведениями и суммами многочленов, следует в конце раскрыть все скобки и привести подобные слагаемые (последнее преобразование – нетривиальная обработка индексов суммирования).

Во-вторых, следует различать поиск формулы Тейлора произвольного порядка n и фиксированного (например, $n = 3$). В первом случае, как правило, бессмысленно выводить общую формулу для $f^{(k)}(x_0)$. Рекомендуется осуществить специальные тождественные преобразования данного выражения и представить его как *сложную функцию* $f(x) = g(k(x-x_0)^m)$, где $k \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, а формула Маклорена функции $g(y)$ известна. Опыт показывает, что безнадежно искать ответ, исходя из сложной функции $f(x) = g(h(x - x_0))$, где функция h не является одночленом вида $k(x - x_0)^m$. Как было показано выше, эффективным является *метод дифференцирования* данной функции. Напомним, что возвращаясь к исходной функции следует не забывать о “константе интегрирования”, которую находят по значению $f(x_0)$.

При нахождении формулы Тейлора невысокого порядка можно: 1) искать все производные $f^{(k)}(x_0)$ вручную, 2) подставлять в формулу Тейлора в качестве аргумента другую формулу Тейлора, 3) умножать и делить формулы Тейлора, 4) применять метод неопределенных коэффициентов. Трудность в том, что необходимо добиться требуемой малости остаточного члена. Здесь пригодятся сформулированные в лемме 8.2.5 свойства отношений о-малое и О-большое.

Напомним, что многочлен Маклорена четной функции содержит слагаемые только четной степени, а нечетной функции – только нечетной степени. При этом порядок малости остаточного члена в формуле Пеано увеличивается на единицу по сравнению с записанной степенью многочлена, а в формуле Лагранжа – на два.

12.5. Нахождение пределов с помощью формулы Тейлора

Формула Тейлора применяется для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ при $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ в условиях, когда числитель и знаменатель достаточно гладкие функции. Допустим, что дробь исследуется в окрестности нуля, т. е. $x_0 = 0$. После разложения числителя и знаменателя по формуле Маклорена (см. рекомендации предыдущего пункта) получаем для некоторых $p, q \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{C_1x^p + o(x^p)}{C_2x^q + o(x^q)} = \lim_{x\to 0}\frac{C_1x^p}{C_2x^q},$$

где $C_1C_2 \neq 0$. Если $p > q$, то предел равен нулю, если $p < q$, то предел равен $sign(C_1C_2)\infty$. Если же $p = q$, то предел равен C_1/C_2. Трудность применения метода в том, что заранее неясно, до какого порядка нужно раскладывать числитель и знаменатель, чтобы получить *первые отличные от нуля* коэффициенты (следующие коэффициенты роли не играют). Начинать определение показателей p и q надо с того случая, который проще. Если, например, уже известно, что $C_1 \neq 0$, то в знаменателе заведомо достаточно знать, отличны ли от нуля коэффициенты при степенях не выше, чем p.

Остальные случаи раскрытия неопределенностей требуют специальных технических приемов. Так, при $x \to \infty$ применяют замену $x = 1/t$. Неопределенность вида $0 \cdot \infty$ можно преобразовать к виду $\frac{0}{(1/\infty)} = \frac{0}{0}$. Неопределенность типа 1^∞ раскрывают с помощью преобразования "потенцирования": $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$. После чего достаточно сосредоточиться на показателе. Напомним, что в степенно-показательном выражении переходить к пределу отдельно в основании и в показателе в общем случае нельзя.

Пример 12.5.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}-e^x+x^2}{\arcsin x-\sin x}=\ldots$$

Знаменатель проще, поэтому начнем с него и определим порядок разложения:

$$\arcsin x-\sin x=\frac{x^3}{3}+o(x^4)\text{ при }x\to 0.$$

Искомый порядок равен 3. Так как $\operatorname{tg}x\sim x$ в нуле, то корень в числителе и тангенс под корнем следует раскладывать до порядка 3 включительно:

$$\sqrt{1+u}=1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+\frac{u^3}{16}+o(u^3),\text{ где }u=2\operatorname{tg}x=2(x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)).$$

Подставляя второе выражение в первое и приводя подобные, получаем

$$\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}=1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+o(x^3).$$

Окончательно, в числителе:

$$\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}-e^x+x^2=\frac{2x^3}{3}+o(x^3).$$

Итак, искомый предел

$$\ldots=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3/3+o(x^3)}{x^3/3+o(x^4)}=2.$$

Глава 13

Исследование функции с помощью производных

Сейчас мы обсудим, как именно применяются производные (прежде всего первого и второго порядка) для исследования функции.

13.1. Условия монотонности

Теорема 13.1.1 (критерий нестрогой монотонности функции). *Пусть функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема внутри него. Она нестрого возрастает (убывает) на отрезке тогда и только тогда, когда ее производная неотрицательна (неположительна).*

Геометрический смысл. Дифференцируемая функция нестрого возрастает только в том случае, когда угол наклона касательной в каждой внутренней точке графика неотрицательный.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Из условия следует, что

$$sign\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right) \geq 0 \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

($\Leftarrow$) При условии $x_2 > x_1$ из теоремы Лагранжа следует, что

$$sign(f(x_2)-f(x_1)) = sign(f'(\xi)(x_2-x_1)) = sign f'(\xi) \geq 0. \blacksquare$$

Теорема 13.1.2 (достаточные условия строгой монотонности функции). *Пусть функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема внутри него. Если ее производная всюду положительна (отрицательна), то функция строго возрастает (убывает) на отрезке. В символах:*

$$\forall x \in (a, b) \hookrightarrow f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; \forall x_1, x_2 : \; a \le x_1 < x_2 \le b \hookrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Доказательство. При условии $x_2 > x_1$ из теоремы Лагранжа следует, что

$$sign(f(x_2) - f(x_1)) = sign(f'(\xi)(x_2 - x_1)) = sign f'(\xi) > 0. \blacksquare$$

Замечание 13.1.1. В условиях теорем 13.1.1 и 13.1.2 отрезок можно заменить промежутком в том числе и с бесконечными концами. ⊟

Замечание 13.1.2. В теореме 13.1.2 сформулированы именно достаточные условия строгой монотонности. ⊟

Пример 13.1.1. Функция $y = x^3$ строго возрастает на всей оси, однако в точке $x = 0$ ее производная равна нулю.

13.2. Условия локального экстремума

Если функция дифференцируема, теорема 11.1.1 Ферма дает *необходимые* условия локального экстремума (обнуление производной).

Теорема 13.2.1 (достаточные условия строгого локального экстремума). *Пусть функция f непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности. Пусть слева от x_0 производная строго положительна (отрицательна), а справа – строго отрицательна (положительна). Тогда точка x_0 является точкой строгого максимума (минимума). Другими словами: если знак производной меняется с плюса (минуса) на минус (плюс), то x_0 – точка строгого максимума (минимума)*

Доказательство. Из теоремы 13.1.2 следует, что на полуинтервале $(x_0 - \delta, x_0]$ функция строго возрастает, на полуинтервале $[x_0, x_0 + \delta)$ – строго убывает. $\blacksquare$

Замечание 13.2.1. Ценность теоремы в том, что не требуется существование производной в исследуемой точке x_0. ⊟

Примеры 13.2.1. $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = \sqrt{|x|}$ – в обоих случаях точка $x_0 = 0$ является строгим минимумом, в которой производная отсутствует (рис. 13.1, 13.2)

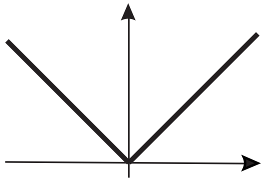

Рис. 13.1

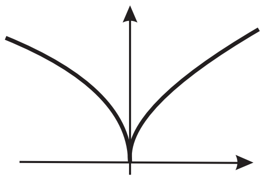

Рис. 13.2

Если первая и несколько следующих производных обнуляются в точке x_0, то знак первой отличной от нуля производной характеризует поведение функции в точке x_0:

Теорема 13.2.2 (достаточные условия строгого экстремума в терминах производных высших порядков)**.** *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ имеют место условия*

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда:

1) *если $n = 2m$ четно ($m \in \mathbb{N}$), то точка x_0 является точкой локального экстремума: при $f^{(2m)}(x_0) > 0$ точкой строгого локального минимума, при $f^{(2m)}(x_0) < 0$ точкой строгого локального максимума;*

2) *если $n = 2m + 1$ нечетно, то точка x_0 НЕ является точкой нестрогого локального экстремума.*

Доказательство. Из условия теоремы и формулы Тейлора следует, что

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon(x - x_0) \right),$$

где функция $\varepsilon(x - x_0) \to 0$ при $x \to x_0$. При всех x достаточно близких к x_0 знак выражения в скобках совпадает со знаком производной.

При четном n все выражение в малой проколотой окрестности имеет знак производной и обнуляется только в точке x_0. Следовательно, это точка строгого экстремума. При нечетном n выражение меняет меняет знак при переходе через точку x_0. Следовательно, это не есть точка экстремума. ■

Замечание 13.2.2. Теоремы 13.2.1 и 13.2.2 дают достаточные условия строгого экстремума, однако в первой предъявляются требования к функции в *проколотой* окрестности точки, а во второй – в *самой точке* x_0. Подчеркнем, что условия теорем 13.2.1 и 13.2.2 именно достаточные для существования локального экстремума. Приведем

Пример 13.2.1. Функция

$$f(x) = x^2\left(2 + \cos\frac{1}{x}\right) \text{ при } x \neq 0, \quad f(x) = 0 \text{ при } x = 0$$

имеет в точке $x_0 = 0$ строгий минимум, поскольку $f(0) = 0$ и $f(x) > 0$, если $x \neq 0$ (рис. 13.3). Но, во-первых, ни в каком интервале $(-\delta, 0)$ она не является убывающей, и ни в каком интервале $(0, \delta)$ не является возрастающей. Во-вторых, в нуле функция имеет только производную первого порядка, которая (теорема Ферма) обнуляется: $f'(0) = 0$. Итак, условия теорем 13.2.1 и 13.2.2 не выполняются. ⊟

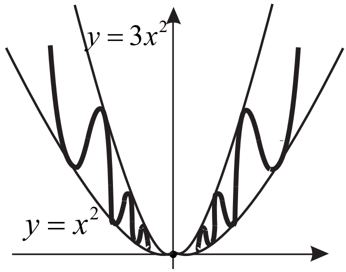

Рис. 13.3

Задача 13.2.1. Докажите, что в предыдущем примере $f'(0) = 0$, но $f''(0)$ не существует.

13.3. Выпуклость

Выпуклость является “жестким” свойством функции, из которого вытекают ее непрерывность и – в ослабленном понимании – дифференцируемость. Удобно исследовать выпуклость при дополнительном условии существования второй производной.

Определение 13.3.1 (выпуклости функции). Функция f называется **нестрого (строго) выпуклой вниз (вверх)** на промежутке

$\langle a, b\rangle$, если для двух произвольных различных точек $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ и произвольного $t \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \quad (<, \geq, >). \;\boxtimes \tag{13.1}$$

Геометрический смысл. Соединим точки $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$ графика функции f хордой AB. Параметрическое задание хорды имеет вид:

$$C(t): \quad x(t) = (1-t)x_1 + tx_2, \quad y(t) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \quad t \in [0, 1].$$

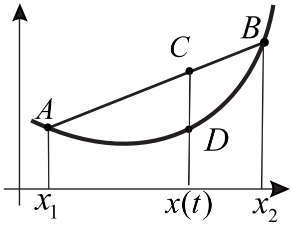

Рис. 13.4

Точка $D((1-t)x_1 + tx_2, f((1-t)x_1 + tx_2))$, принадлежащая графику, имеет ту же абсциссу, что и точка C. Следовательно, неравенство (13.1) означает, что каждая точка C любой хорды AB графика нестрого (строго) выпуклой вниз функции находится не ниже (выше) соответствующей точки D дуги $\smile{AB}$ графика (рис. 13.4).

Замечание 13.3.1. Выпуклость и монотонность – независимые между собой свойства функции. Выпуклость и экстремум связаны: строго выпуклая вниз функция может иметь только строгий минимум, строго выпуклая вверх – только строгий максимум. $\boxminus$

Задача 13.3.1. 1) Возможны четыре сочетания строгой монотонности и строгой выпуклости. Нарисуйте графики четырех функций, которые дают примеры всех сочетаний. 2) Докажите утверждение о возможных сочетаниях выпуклости и экстремальности, сформулированное в предыдущем замечании.

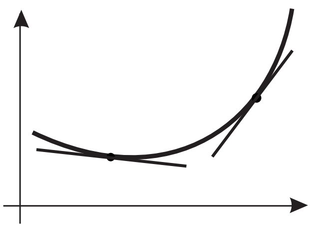

Рис. 13.5

Физический смысл. Если $y = f(x)$ есть дифференцируемая функция положения материальной точки на оси в зависимости от времени, то выпуклость вверх означает торможение, а выпуклость вниз – ускоренное движение: у выпуклой вверх функции тангенс угла наклона касательной (т. е. скорость движения) с ростом x уменьшается, а у выпуклой вниз – увеличивается (рис. 13.5).

Оказывается, понятие выпуклости проявляет себя через *односторонние производные*:

Теорема 13.3.1. *Функция f нестрого выпукла вниз на интервале (a, b) тогда и т. т., когда выполнены два условия:*

1) в каждой точке $x \in (a, b)$ существуют конечные односторонние производные $f'_{\pm}(x)$, причем левая не больше правой:

$$\forall x \in (a, b) \;\hookrightarrow\; -\infty < f'_{-}(x) \le f'_{+}(x) < +\infty;$$

2) для любых двух разных точек правая производная в левой точке не больше левой производной в правой точке:

$$\forall x_1, x_2 : \; a < x_1 < x_2 < b \;\hookrightarrow\; f'_{+}(x_1) \le f'_{-}(x_2).$$

Из теоремы 13.3.1 следует

Теорема 13.3.2 (основные свойства выпуклых функций)**.** *Если функция нестрого выпукла вниз на интервале, то она на нем:*

1) всюду непрерывна;

2) всюду имеет конечные односторонние производные, которые нестрого возрастают;

3) за исключением, возможно, счетного множества функция дифференцируема, причем если в точках $x_1 < x_2$ функция дифференцируема, то $f'(x_1) \le f'(x_2)$.

Задача 13.3.2. Сформулируйте основные свойства функции, которая нестрого выпукла вверх на интервале.

Замечание 13.3.2. Утверждения теоремы 13.3.2 показывают, что выпуклость сильнее, чем непрерывность и (с точностью до счетного множества) дифференцируемость. $\boxminus$

Замечание 13.3.3. Определение выпуклости сохраняет свой смысл и на (полу)отрезке. Однако свойство непрерывности может в концах отрезка исчезнуть, а односторонние производные стать бесконечными. $\boxminus$

Примеры 13.3.1. 1) Функция $f(x) \equiv 0$ на $(0, 1)$ и $f(0) = f(1) := 1$ нестрого выпукла вниз. Она непрерывна внутри отрезка и разрывна в его концах (рис. 13.6). 2) Функция $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ строго выпукла вверх на $[-1, 1]$, и $g'_{+}(-1) = +\infty$, а $g'_{-}(1) = -\infty$. Заметим, что функции f и g *нельзя доопределить вне* указанных отрезков с сохранением выпуклости (рис. 13.7).

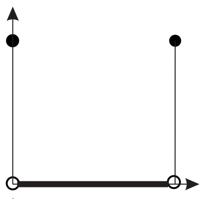

Рис. 13.6

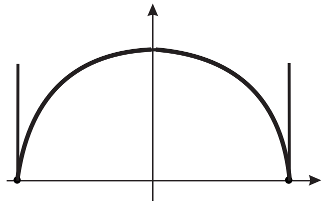

Рис. 13.7

Опираясь на теорему 13.3.1, дадим сразу

Доказательство теоремы 13.3.2. П.1. В силу существования конечных односторонних производных (первое условие теоремы 13.3.1), в каждой точке функция непрерывна и слева, и справа; следовательно, она непрерывна (см. теорему 9.1.2 и лемму 5.1.2).

П. 2. Из обоих условий теоремы 13.3.1 следует, что

$$\forall x_1, x_2 : \ a < x_1 < x_2 < b \ \hookrightarrow$$

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2). \tag{13.2}$$

П. 3. Из доказанного п. 2 и теоремы 5.3.1 о разрывах монотонных функций следует, что односторонние производные имеют не более, чем счетное множество разрывов первого рода. Покажем, что разрывы могут происходить только одновременно в обеих односторонних производных. Пусть x_0 – точка непрерывности функции f'_+. Согласно оценкам (13.2), в произвольных точках $x_1 < x_2 < x_0 < x_3 < x_4$ справедливо

$$f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \leq f'_+(x_0) \leq f'_-(x_3) \leq f'_+(x_4).$$

Воспользовавшись непрерывностью функции f'_+ в точке x_0, осуществим предельный переход при $x_1 \to x_0 - 0$ и $x_4 \to x_0 + 0$. Получим, что $\lim\limits_{x_2 \to x_0 - 0} f'_-(x_2) = f'_+(x_0) = \lim\limits_{x_3 \to x_0 + 0} f'_-(x_3)$. Последнее означает непрерывность функции f'_- в точке x_0 и *совпадение* $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Аналогично доказывается, что непрерывность функции f'_- влечет непрерывность f'_+ и их совпадение.

Итак, обе односторонние производные разрываются одновременно не более, чем на счетном множестве точек. Значит, во всех остальных точках односторонние производные совпадают и равны производной: $f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x)$ (см. лемму 9.1.1). ■

13.4. Доказательство теоремы 13.3.1 (необходимость)

опирается на свойства выражения (функции двух переменных)

$$\operatorname{tg}(f; x_1, x_2) := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ где } x_1 \neq x_2.$$

Геометрический смысл этого выражения – тангенс угла наклона секущей AB (рис. 13.8).

Лемма 13.4.1 (свойства тангенса наклона секущей)**.** *Если функция f нестрого выпукла вниз на (a, b), то ее функция тангенса*

1) симметрична: $\operatorname{tg}(x_1, x_2) = \operatorname{tg}(x_2, x_1)$*;*

2) нестрого возрастает по каждой переменной в каждом допустимом интервале; например, при $x_1 < x_2 < x_2'$ верно $\operatorname{tg}(x_1, x_2) \leq$ $\leq \operatorname{tg}(x_1, x_2')$*;*

3) справедливо "неравенство трех точек": для любых $x_1 < x < x_2$ верно

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \tag{13.3}$$

См. рис. 13.8 и 13.9.

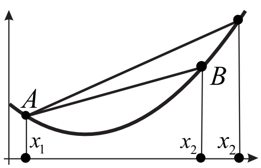

Рис. 13.8

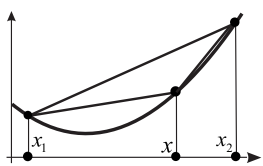

Рис. 13.9

Доказательство. П. 1 следует из определения функции $\operatorname{tg}(x_1, x_2)$. П. 2 следует из определения (13.1) после специальных преобразований. Пусть $x_2 = x_1 + \delta$, $x_2' = x_1 + \Delta$, где $0 < \delta < \Delta$. Тогда

$$f(x_2) = f(x_1 + \delta) = f\left(\left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right) x_1 + \frac{\delta}{\Delta}(x_1 + \Delta)\right) \overset{(13.1)}{\leq}$$

$$\leq \left(1-\frac{\delta}{\Delta}\right) f(x_1)+\frac{\delta}{\Delta}f(x_1+\Delta) = \left(1-\frac{x_2-x_1}{x_2'-x_1}\right) f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_2'-x_1}f(x_2') \Leftrightarrow$$

$$f(x_2) \leq f(x_1) + \frac{x_2-x_1}{x_2'-x_1}(f(x_2')-f(x_1)) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2')-f(x_1)}{x_2'-x_1}.$$

Первое неравенство в (13.3) есть следствие п. 2 по второй переменной, второе неравенство в (13.3) – следствие п. 2 по первой переменной. ■

Доказательство теоремы 13.3.1 (необходимость). Зафиксируем точку x. В неравенстве (13.3) рассмотрим крайние дроби как неубывающие функции по переменным $x_1 < x$ и $x_2 > x$ соответственно:

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Указанная монотонность позволяет в неравенстве перейти к пределу:

$$-\infty < f'_-(x) = \sup_{x_1<x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \leq \inf_{x_2>x}\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'_+(x) < +\infty.$$

П. 1 теоремы доказан.

Зафиксируем точки x_1, x_2, а точку x понимаем как переменную. Учитывая, что существование конечных односторонних производных уже обосновано, из левого и правого неравенств в (13.3) получаем:

$$f'_+(x_1) = \inf_{x>x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1};$$

$$f'_-(x_2) = \sup_{x<x_2}\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} \geq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

что доказывает п. 2. ■

Задача 13.4.1. 1) Доказательство достаточности в теореме 13.3.1 опирается на теорему Лагранжа о среднем для односторонних производных: пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет на (a, b) конечную правую производную $f'_+(x)$. Докажите, что: или существует точка $c \in (a, b)$, в которой имеет место формула конечных приращений $f(b) - f(a) = f'_+(c)(b - a)$, или существуют две разные точки $c_1, c_2 \in (a, b)$, в которых $f(b) - f(a) < f'_+(c_1)(b - a)$ и $f(b) - f(a) > f'_+(c_2)(b - a)$.

2) Опираясь на предыдущее утверждение, докажите достаточность в теореме 13.3.1.

13.5. Выпуклость в условиях второй производной

Теперь, когда мы увидели, что выпуклость связана с монотонностью первой производной, естественно исследовать ее в предположении существования второй производной. Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 13.5.1. *Если в точке x_0 существует конечная вторая производная, то ее можно вычислить по формуле*

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) - 2f(x_0)}{(\Delta x)^2}. \qquad (13.4)$$

Замечание 13.5.1. Предложенная формула не эквивалентна определению второй производной, поскольку указанный предел может существовать и в том случае, когда вторая производная отсутствует.

Ценность формулы (13.4) в том, что она позволяет вычислять *вторую* производную не через первую производную (как требует определение), а непосредственно через функцию. ⊟

Доказательство. Выпишем формулу Тейлора для двух видов приращений аргумента:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}(\Delta x)^2 + o((\Delta x)^2),$$

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}(\Delta x)^2 + o((\Delta x)^2).$$

Сложим равенства, разделим полученное равенство на квадрат приращения и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. Получим требуемое. ■

Теорема 13.5.1 (критерий нестрогой выпуклости в условиях существования второй производной)**.** *Пусть функция f дважды дифференцируема на интервале (a, b). Тогда функция f нестрого выпукла вниз (вверх) на (a, b) $\Leftrightarrow$ $\forall x \in (a, b) \hookrightarrow f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$).*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть функция выпукла вверх. Тогда в любой точке интервала x и для произвольного достаточно малого приращения Δx точки $x \pm \Delta x \in (a, b)$, в силу определения выпуклости, получаем при $t = 1/2$:

$$f(x) = f\left(\frac{(x + \Delta x) + (x - \Delta x)}{2}\right) \geq \frac{f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x)}{2}.$$

Следовательно,

$$f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)-2f(x)\le 0.$$

Разделим полученное неравенство на $(\Delta x)^2$ и перейдем к пределу при условии $\Delta x\to 0$. Из равенства (13.4) получаем, что $f''(x)\le 0$.

($\Leftarrow$) Проверим условие выпуклости вверх. Обозначим $x(t):=(1-t)x_1+tx_2$. Исследуем разность

$$(1-t)f(x_1)+tf(x_2)-f(x(t))=(1-t)(f(x_1)-f(x(t)))+t(f(x_2)-f(x(t)))\dots$$

Применим формулу Тейлора в форме Лагранжа к полуинтервалам $(x_1,x(t)]$ и $[x(t),x_2)$ $(t\in(0,1))$:

$$\dots=(1-t)(f'(x(t))(x_1-x(t))+\frac{1}{2}f''(c_1)(x_1-x(t))^2)+$$

$$+\ t(f'(x(t))(x_2-x(t))+\frac{1}{2}f''(c_2)(x_2-x(t))^2)\dots$$

Поскольку вторые производные неположительны, отбрасывая слагаемые с ними, мы не уменьшаем выражение. Поэтому

$$\dots\le f'(x(t))((1-t)x_1-(1-t)x(t)+tx_2-tx(t))=$$

$$=f'(x(t))((1-t)x_1+tx_2-x(t))=0. \quad \blacksquare$$

Теорема 13.5.2 (достаточные условия строгой выпуклости при существовании второй производной)**.** *Пусть функция f дважды дифференцируема на интервале (a,b). Если вторая производная всюду строго положительна (отрицательна), то функция f строго выпукла вниз (вверх) на (a,b).*

Задача 13.5.1. Докажите теорему 13.5.2.

Замечание 13.5.2. В теореме 13.5.2 сформулированы именно достаточные условия строгой выпуклости.

Пример 13.5.1. Функция $f(x)=x^4$ строго выпукла вниз на всей оси, однако в точке $x=0$ ее вторая производная равна нулю. $\boxminus$

Замечание 13.5.3. Обращаем внимание, что теоремы 13.1.1 и 13.1.2 о монотонности и теоремы 13.5.1 и 13.5.2 о выпуклости имеют аналогичные логические конструкции. $\boxminus$

Покажем, как выпуклость функции влияет на взаимное расположение графика функции и касательных прямых к нему.

Теорема 13.5.3 (выпуклость и касательные прямые)**.** *Пусть на интервале (a, b) существует конечная вторая производная $f''(x)$. Если на (a, b) функция f нестрого выпукла вниз (вверх), то график функции лежит не ниже (не выше) касательной к нему в произвольной точке $C \in Gr(f)$.*

Замечание 13.5.4. Таким образом, произвольная дуга $\smile{AB}$ графика дважды дифференцируемой выпуклой функции находится *между* хордой AB и касательной к графику в любой точке C дуги AB (рис.13.10). $\boxminus$

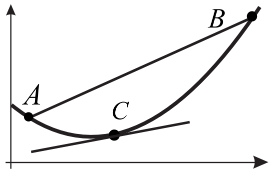

Рис. 13.10

Доказательство. Пусть функция выпукла вверх. Из теоремы 13.5.1 следует, что на (a, b) вторая производная неположительна: $f''(x) \leq 0$. Запишем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа в произвольной фиксированной точке $c \in (a, b)$:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - c)^2,$$

где $x \in (a, b)$ – произвольная точка, а ξ – некоторая точка строго между c и x. Т. к. уравнение касательной есть $l(x) := f(c) + f'(c)(x - c)$, то всюду на (a, b) разность между ординатами точек на графике функции и на касательной есть $f(x) - l(x) = (f''(\xi)/2)(x - c)^2 \leq 0$. $\blacksquare$

Замечание 13.5.5. В доказательстве мы воспользовались возможностями остатка формулы Тейлора в форме Лагранжа (см. обсуждение после доказательства теоремы 12.2.2). $\boxminus$

В общей ситуации функция выпукла вверх на одних интервалах и выпукла вниз на других. Охарактеризуем *изменение типа выпуклости*:

Определение 13.5.1. Точка x_0 называется **точкой перегиба** функции f, если в этой точке: 1) функция непрерывна, 2) существует производная $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$ и 3) найдется такое $\delta > 0$, что на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ функция нестрого выпукла вверх (вниз), а на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$ – нестрого выпукла вниз (вверх) (рис. 13.11, 13.12). $\boxtimes$

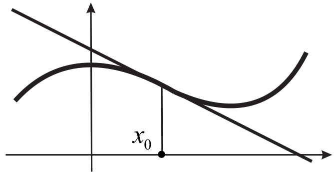

Рис. 13.11

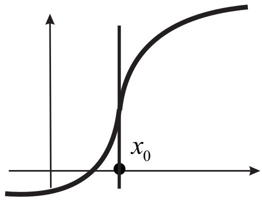

Рис. 13.12

Обсуждение 13.5.1. Другими словами, в точке перегиба график имеет касательную прямую и при переходе через эту точку меняется тип выпуклости. В силу теоремы 13.5.3, по разные сторона от точки перегиба график находится по разные стороны от касательной (в широком смысле). Заметим, что на рис. 13.13 в точке $x_0 = 0$ происходит изменение характера выпуклости, но такую точку мы не трактуем как точку перегиба, поскольку в ней отсутствует касательная к графику. Точку *разрыва*, в которой существует бесконечная производная (рис. 13.14) мы также не трактуем как точку перегиба. Не следует думать, что точка перегиба обязательно изолирована: если график содержит отрезок, то все его точки являются точками перегиба. ⊟

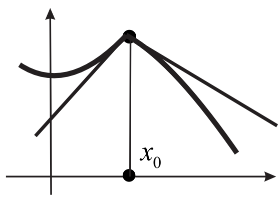

Рис. 13.13

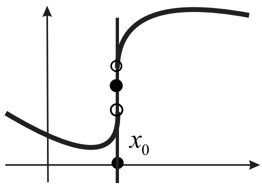

Рис. 13.14

Физический смысл точки перегиба. Если x – время, а $f(x)$ – перемещение точечной массы под действием силы, то в точке перегиба сила и ускорение отсутствуют.

Теорема 13.5.4 (критерий точки перегиба в условиях существования второй производной). *Пусть: 1) функция f непрерывна в точке x_0, 2) существует $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$, 3) в проколотой окрестности существует конечная вторая производная $f''(x)$. Тогда точка x_0 является точкой перегиба в том и только том случае, если найдется такое*

$\delta > 0$, *что одновременно выполняются два условия:*

$$\begin{cases} \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \ \hookrightarrow \ f''(x) \le 0 \quad (\ge 0), \\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \ \hookrightarrow \ f''(x) \ge 0 \quad (\le 0). \end{cases}$$

Т. е. вторая производная нестрого меняет знак при переходе через точку x_0.

Доказательство немедленно вытекает из теоремы 13.5.1.

Задача 13.5.2. Пусть $f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$. Докажите, что точка x_0 является точкой перегиба.

13.6. Асимптоты

На бесконечности и в точке разрыва второго рода график функции может стремиться к некоторым прямым:

Определение 13.6.1. Говорят, что

1) прямая $x = x_0$ является **вертикальной асимптотой** графика функции f, если выполняется хотя бы одно из двух условий

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty;$$

2) прямая $y = kx + b$ называется **асимптотой** графика функции f, если $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx - b) = 0$. Если $k \neq 0$, асимптота называется **наклонной**, если $k = 0$, называется **горизонтальной**. ⊠

Геометрический смысл. Асимптота – это такая прямая, что расстояние от точки на графике до этой прямой стремится к нулю при удалении точки вдоль ветви графика в бесконечность. Асимптоту можно трактовать как "касательную" к кривой на бесконечности.

Примеры 13.6.1. различного расположения графика функции и асимптот см. на рис. 13.15-13.20

Замечание 13.6.1. Если в определении вертикальной асимптоты заменить $\pm\infty$ на ∞, то допустимы "экзотические" случаи. Например, функция $f(x) := d(x)/x \quad (x \neq 0)$, где $d(x) = 1$ при $x \in \mathbb{Q}$ и $d(x) = -1$ при $x \in \mathbb{J}$, имеет вертикальную асимптоту $x = 0$. ⊟

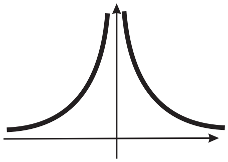

Рис. 13.15

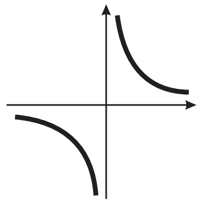

Рис. 13.16

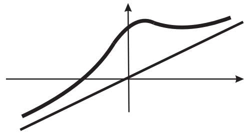

Рис. 13.17

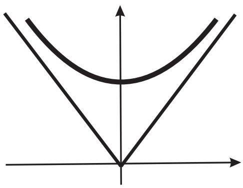

Рис. 13.18

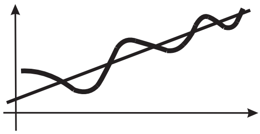

Рис. 13.19

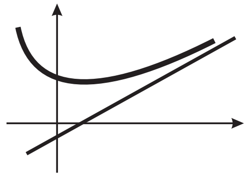

Рис. 13.20

Лемма 13.6.1 (о логических связях между параметрами асимптоты)**.** *Рассмотрим три утверждения:*

1) *Прямая $y = kx + b$ является асимптотой графика функции f при $x \to \pm\infty$, т. е.* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx - b) = 0$;

2) $\exists \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}$;

3) $\exists \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = b \in \mathbb{R}$.

Указанные утверждения логически связаны так: $\begin{array}{ccc} (1) & \Leftrightarrow & (3) \\ \searrow & & \swarrow \\ & (2) & \end{array}$.

Доказательство. Равносильность утверждений (1) и (3) очевидна.

(3) $\Rightarrow$ (2):

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{f(x) - kx}{x} + k\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x) - kx}{x} + k = k.$$

Из равносильности (1) $\Leftrightarrow$ (3) следует, что (1) $\Rightarrow$ (2). ■

Из леммы 13.6.1 вытекает

Следствие 13.6.1 (о нахождении параметров асимптоты)**.** *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}$ *и конечный предел* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)-kx) = b \in \mathbb{R}$*, то прямая* $y = kx+b$ *является асимптотой графика функции* f *при* $x \to \pm\infty$*.*

Замечание 13.6.2. В некоторых случаях асимптоту проще "выделить" преобразуя выражение, задающее функцию.

Примеры 13.6.2. Найдем асимптоты функций:

$$1) \quad f(x) = \frac{3x^2+x-1}{x-2} = 3x+7+\frac{13}{x-2}.$$

Следовательно, график имеет вертикальную асимптоту $x = 2$ и общую наклонную асимптоту $y = 3x + 7$ при $x \to \pm\infty$, причем при $x \to +\infty$ график функции выше асимптоты, а при $x \to -\infty$ – ниже.

$$2) \;\; f(x) = \sqrt{x^2+2} = |x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} =$$

$$|x|\left(1+\frac{1}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = |x| + \frac{1}{|x|} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

при $x \to \infty$ (мы воспользовались подстановкой $t = 2/(x^2)$ и формулой Маклорена степенной функции). Следовательно, график имеет асимптоты $y = \pm x$ при $x \to \pm\infty$, причем график функции выше обеих асимптот. $\boxminus$

13.7. Построение графиков функций

Построение графиков – одна из стандартных задач, где применяются методы математического анализа. Конечно, производные являются самым мощным инструментом исследования свойств функции. Однако не следует думать, что найти интервалы монотонности и выпуклости, точки экстремумов и точки перегибов всегда проще как решения неравенств и уравнений типа $f' > 0$ $(<)$, $f'' > 0$ $(<)$, $f' = 0$, $f'' = 0$. Производные не столько способ нахождения свойств функции, сколько способ их обоснования. Следует уделять пристальное внимание *специфическим* свойствам именно данной функции, обращать внимание на *особые точки* (точки разрыва и потери гладкости, пересечения с осями и асимптотами, поведение функции на бесконечности, которая всегда является особой точкой), на *симметрии графика* (которые, в частности, могут быть порождены четностью, нечетностью и периодичностью функции). Преобразование выражения, задающего функцию, к более простому для построения графика виду является универсальным и очень мощным методом исследования функции. Следует иметь в виду, что одно и то же выражение может быть преобразовано по-разному в окрестностях различных точек. Не следует забывать "школьные" методы элементарных *преобразований графиков*. Оказывается, часто элементарных методов достаточно, чтобы построить *достоверный эскиз графика*, который затем *уточняется и обосновывается* с помощью производных.

Перечень **свойств функции**, которые подлежат обнаружению, и **методов исследования**:

1) *Область определения* находят в самом начале; нахождение обычно сводится к решению неравенств;

   множество значений – *образ функции*, как правило, находят в самом конце исследования, анализируя построенный график.

2) Специфические свойства функции (четность, нечетность, периодичность и другие свойства), приводящие к *симметрии графика*, доказывают по определению и с помощью преобразований данного выражения.

3) *Особые точки* (точки разрыва и точки потери дифференцируемости). Их локальное исследование осуществляется с помощью нахождения пределов (как правило, односторонних).

4) *Асимптоты* и точки пересечения графика с асимптотами. При нахождении асимптоты полезно, кроме теоремы 13.6.1, применять преобразования и формулу Маклорена по "малой" переменной $1/x$.

5) Точки *пересечения* с осями координат и интервалы *знакопостоянства* функции обнаруживают, решая уравнение $f(x) = 0$ и неравенства $f(x) > 0$ ($<$) и вычисляя значение $y = f(0)$.

6) Уже на этом этапе можно построить *эскиз* графика.

7) Нахождение первой и второй производных $f'(x), f''(x)$.

8) Нахождение нулей производных $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$ и особых точек производных. Нахождение интервалов знакопостоянства производных $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ ($<$).

9) Нахождение интервалов монотонности и выпуклости функции.

10) Нахождение точек экстремумов и экстремальных значений функции. Исследование поведения функции в окрестностях остальных критических точек.

11) Нахождение точек перегибов графика и касательных прямых в точках перегибов.

12) Окончательная редакция графика функции.

Пример 13.7.1. Построим график функции

$$f(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 2x - 3)\ e^{1/x}.$$

Область определения $Def(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Особя точка $x_0 = 0$. Нули функции суть корни уравнения $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 1$. Знаки функции чередуются, поскольку корни числителя и знаменателя простые (рис. 13.21).

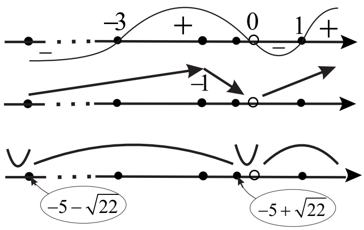

Рис. 13.21

Чтобы найти асимптоту, разложим экспоненту по малому параметру $1/x$, где $x \to \infty$:

$$f(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 2x - 3)\left(1 + \frac{1}{x} + O(\frac{1}{x^2})\right) = x + 3 - \frac{1}{2x} + O(\frac{1}{x^2}).$$

Значит, график имеет наклонную асимптоту $y = x + 3$, причем график ниже асимптоты при $x \to +\infty$ и выше асимптоты при $x \to -\infty$.

Исследуем поведение функции при $x \to +0$. Поскольку при $x \to +0$ функция $e^{1/x} \to +\infty$, функция $1/x \to +\infty$, а $x^2 + 2x - 3 \to -3$, то $\lim f(x)_{x \to +0} = -\infty$. Следовательно, ось Oy является вертикальной асимптотой. Нарисуем эскиз графика для $x > 0$ (рис. 13.22, масштабы на осях разные).

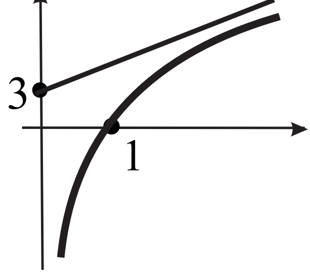

Рис. 13.22

Исследуем поведение функции f при $x \to -0$. Заметим, что при этом условии функция $1/x \to -\infty$, функция $e^{-1/x} \to +\infty$, а $x^2 + 2x - 3 \to -3$. С помощью правила Лопиталя получаем:

$$\lim_{x \to -0} f(x) = -3 \lim_{x \to -0} \frac{1/x}{e^{-1/x}} = -3 \lim_{x \to -0} \frac{-1/x^2}{e^{-1/x} \cdot (1/x^2)} = +0. \qquad (13.5)$$

Теперь мы знаем, что на интервале $(-3, 0)$ функция имеет хотя бы один максимум. Однако собранной информации недостаточно, чтобы построить эскиз графика при $x < 0$. В частности, нужно уточнить: 1) как график слева "входит" в начало координат; 2) заметим, что точка $A(-3, 0)$ *общая* для графика и асимптоты; каково их взаимное расположение в этой точке.

Находим производную:

$$f'(x) = \left(x + 2 - \frac{3}{x}\right) \cdot e^{1/x} \cdot \frac{-1}{x^2} + \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) e^{1/x} = \frac{x^3 - x^2 + x + 3}{x^3} e^{1/x}.$$

Нули производной суть корни уравнения

$$(x^3 - x^2 + x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x_3 = -1.$$

Знаки производной чередуются, поскольку корни числителя и знаменателя имеют нечетную кратность. На рис. 13.21 изображены интервалы знакопостоянства производной – они же интервалы монотонности. Функция имеет один строгий максимум $y_{\max} = f(-1) = 4/e \approx 1,5$.

Чтобы найти левую производную в нуле, *доопределяем* функцию по непрерывности $f(0) := 0$ (см. (13.5)) и опять применим правило Лопиталя:

$$f'_-(0) = \lim_{x \to -0} \frac{f(x) - 0}{x} = -3 \lim_{x \to -0} \frac{1/x^2}{e^{-1/x}} = -3 \lim_{x \to -0} \frac{-2/x^3}{e^{-1/x} \cdot (1/x^2)} = -0$$

(мы воспользовались ранее найденным пределом (13.5)). Значит, слева от начала координат, график *касается* оси Ox сверху.

В точке $x_1 = -3$ производная $f'(-3) = 4/(3\sqrt[3]{e})$. Сравним полученное значение с наклоном асимптоты. Поскольку тангенс угла наклона асимптоты равен единице, нужно сравнить куб $(f'(-3))^3$ с единицей:

$$(f'(-3))^3 = \frac{64}{27e} < \frac{64}{27 \cdot 2.7} < 1.$$

Следовательно, в окрестности точки $A(-3, 0)$ график и касательная находятся *между* осью Ox и асимптотой.

Находим вторую производную:

$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) \cdot e^{1/x} \cdot \frac{-1}{x^2} + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{9}{x^4}\right) \ e^{1/x} =$$

$$= -\frac{x^2 + 10x + 3}{x^5} \ e^{1/x}.$$

Нули второй производной суть корни уравнения

$$x^2 + 10x + 3 = 0 \ \Leftrightarrow \ x_{4,5} = -5 \mp \sqrt{22}, \quad x_4 \approx -9,7, \quad x_5 \approx -0,3.$$

На рис. 13.21 изображены интервалы знакопостоянства второй производной – они же интервалы выпуклости. Точки $x_{4,5}$ являются точками перегиба, поскольку в них вторая производная меняет знак.

Остается построит график функции. Наш эскиз графика в правой полуплоскости (рис. 13.22) оказался верным. Чтобы были видны детали графика в левой полуплоскости (рис. 13.23), строим его с нарушением масштаба.

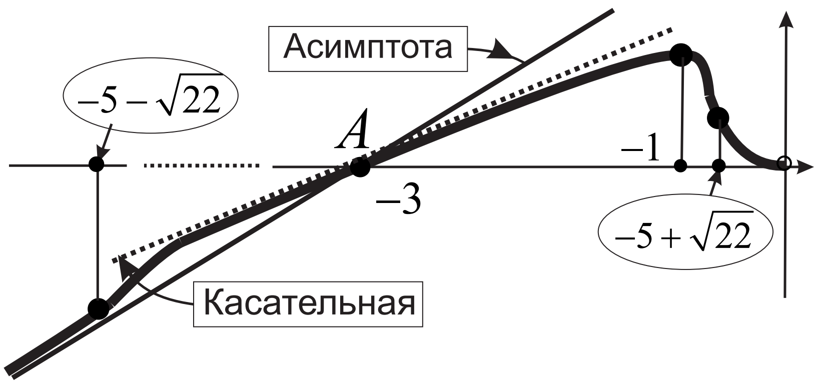

Рис. 13.23

Глава 14

Комплексные числа

Хотя мы изучаем действительный математический анализ, но без расширения понятия действительного числа невозможно изложить теорию интегрирования и теорию степенных рядов. Вводя комплексные числа, мы следим за “преемственностью” – сохранением операций и их алгебраических свойств.

14.1. Понятие комплексного числа

Определение 14.1.1. Введем следующие понятия:

1) **Комплексным числом** мы называем запись вида $a + ib$, где $a, b \in \mathbb{R}$, а i – новый символ, называемый **мнимой единицей**. Действительное число a называют **действительной частью** числа z, действительное число b называют **мнимой частью** числа z: $Re(z) := a$, $Im(z) := b$. Запись $a + ib$ называется **алгебраической формой** комплексного числа.

2) Два комплексных числа равны только в том случае, когда равны их одноименные части. Множество всех комплексных чисел обозначают через $\mathbb{C}$.

3) **Сложение** комплексных чисел определяется “покомпонентно”: $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) := (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.

   Умножение определяется по правилу:
   $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) := a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$.

4) **Вычитание** и **деление** (где делитель отличен от нуля!) определяются как операции обратные к сложению и умножению соответственно. ⊠

Справедлива

Лемма 14.1.1 (о преемственности)**.**

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ *– коммутативность сложения;*

2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ *– ассоциативность сложения;*

3) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ *– коммутативность умножения;*

4) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ *– ассоциативность умножения;*

5) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ *– дистрибутивность умножения относительно сложения;*

6) $0 := 0 + i0$ *– нейтральный элемент, т. е.* $\forall z \in \mathbb{C} \ \hookrightarrow \ 0 + z = z;$

7) $1 := 1 + i0$ *– единичный элемент, т. е.* $\forall z \in \mathbb{C} \ \hookrightarrow \ 1 \cdot z = z;$

8) вычитание комплексных чисел осуществляются "покомпонентно":
$(a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) := (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2);$

9) деление комплексных чисел вычисляется по правилу:

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_2^2 + b_2^2};$$

10) сужение операций на ***чисто действительные*** *числа* $a := a + {}$ $+ i0$ *совпадает с действиями в* $\mathbb{R}$*, т. е. действительные числа естественным образом* вложены *в комплексные:* $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$*;*

11) квадрат мнимой единицы равен $i^2 = -1$.

Задача 14.1.1. Докажите лемму 14.1.1.

Определение 14.1.2. 1) **Модулем** числа $z = a + ib$ называют неотрицательное число $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$.

2) **Сопряженным** к данному называют число $\overline{z} := a - ib$. ⊠

Лемма 14.1.2 (свойства модуля и сопряжения)**.**

1) Свойства модуля:

$$|z|^2 = z\overline{z}, \quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

2) Сопряжение перестановочно со всеми операциями:

$$\overline{(\overline{z})} = z, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad \overline{|z|} = |\overline{z}|.$$

3) Частное, действительная и мнимая части:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}, \quad Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Задача 14.1.2. Докажите лемму 14.1.2.

14.2. Тригонометрическая форма комплексного числа

Поставим в соответствие комплексному числу $z = a + ib$ точку $A(a, b)$, принадлежащую действительной координатной плоскости $\mathbb{R}^2$, и двумерный радиус-вектор $\overrightarrow{OA} = (a, b)^T$. В результате между множествами $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$ возникает биекция. По этой причине множество $\mathbb{C}$ называют **комплексной плоскостью**, а оси координат на ней – **действительной** и **мнимой**.

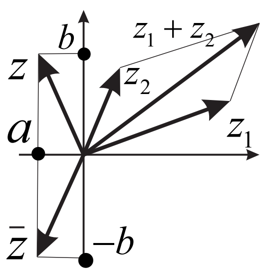

Рис. 14.1

Сложение и вычитание комплексных чисел совпадает со сложением и вычитанием соответствующих радиус-векторов; модуль числа равен модулю его радиус-вектора; операция сопряжения есть симметрия относительно действительной оси (рис. 14.1). Таким образом, определена **геометрическая интерпретация** комплексного числа.

Замечание 14.2.1. В комплексной геометрии принято называть $\mathbb{C}$ комплексной прямой, а прямое произведение $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ – комплексной плоскостью. ⊟

Чтобы проинтерпретировать умножение и деление введем следующее понятие:

Определение 14.2.1. Аргументом ненулевого комплексного числа называют угол φ, который отсчитывают от положительного направления действительной оси к радиус-вектору числа (рис. 14.2). Аргумент определяется с точностью до 2π: $Arg(z) = \varphi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. ⊠

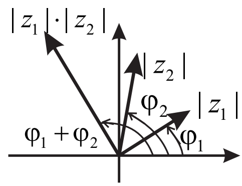

Рис. 14.2

Из определения 14.2.1 следует, что

$$a = |z|\cos\varphi,\ \ b = |z|\sin\varphi.$$

Отсюда

Определение 14.2.2. Запись комплексного числа в виде $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется его **тригонометрической формой**. ⊠

Задача 14.2.1. Как связаны аргументы пары взаимно-сопряженных чисел?

Лемма 14.2.1 (равенство двух комплексных чисел в тригонометрической форме). *Отличные от нуля числа $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ равны в том и только том случае, когда их модули совпадают, а аргументы различаются на величину кратную 2π:*

$$z_1 = z_2 \ \Leftrightarrow\ |z_1| = |z_2| \ \wedge\ \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi k \ (k \in \mathbb{Z}). \qquad (14.1)$$

Доказательство следует непосредственно из определения 14.2.2.

Замечание 14.2.2. Таким образом, задание комплексного числа в тригонометрической форме *неоднозначно*: одно и то же число имеет счетное количество представлений:

$$z = |z|(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)),\ \ k \in \mathbb{Z}. \ ⊟ \qquad (14.2)$$

Лемма 14.2.2 (умножение и деление в тригонометрической форме)**.** *При умножении (делении) комплексных чисел их модули перемножаются (делятся), а аргументы складываются (вычитаются, рис. 14.2):*

$$z_1 z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Доказательство формулы умножения следует из тригонометрических формул сложения аргументов:

$$z_1 z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= |z_1||z_2|((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) =$$

$$= |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \blacksquare$$

Задача 14.2.2. Докажите правило деления из леммы 14.2.2 (указание: воспользуйтесь формулой $z_1/z_2 = z_1\overline{z}_2/|z_2|^2$).

Следствие 14.2.1. *Формула Абрахама де Муавра (1667—1754) возведения в целую степень:*

$$(|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z},$$

т. е. модуль возводится в степень, а аргумент на нее умножается.

С помощью формулы Муавра легко получить формулы тригонометрических функций кратного аргумента: в левой части раскрывают скобки с помощью бинома Ньютона и приравнивают действительные и мнимые части.

Определение 14.2.3. Корнем натуральной степени n из комплексного числа w называется *множество* всех решений уравнения $z^n = w$ относительно неизвестного z. ⊠

Т. е. корень определяется как операция обратная к возведению в натуральную степень. В отличие от арифметического корня, извлечение корня из комплексного числа является *неоднозначной* операцией.

Лемма 14.2.3. *Для отличного от нуля числа $w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ корень состоит в точности из n чисел, модули которых равны $\rho = \sqrt[n]{|w|}$, а аргумента равны $\phi = (\varphi + 2\pi k)/n$, где $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. В частности, все корни образуют вершины правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром в начале координат радиуса $\sqrt[n]{|w|}$ (рис. 14.3).*

Если $w = 0$, то геометрический корень единственный $\sqrt[n]{0} = 0$. Алгебраических корней n – это n совпавших нулей.

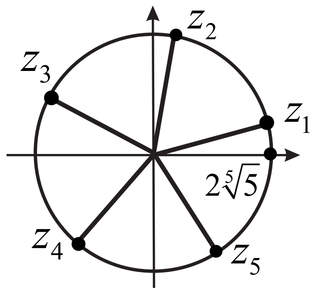

Рис. 14.3

Доказательство следует из решения уравнения $z^n = w$, равенств (14.2), (14.1) и формулы Муавра:

$$z^n = w \;\Leftrightarrow\; (|z|(\cos\phi + i\sin\phi))^n = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \;\Leftrightarrow$$

$$|z|^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |z|^n = |w|, \\ n\phi = \varphi + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|w|}, \\ \phi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \; k = 0, \ldots, n-1. \end{cases} \quad \blacksquare \qquad (14.3)$$

14.3. Экспонента комплексного числа

Определение 14.3.1. Экспонента с комплексным показателем $\alpha = \beta + i\varphi$ определяется так: $e^\alpha = e^{\beta + i\varphi} := e^\beta \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$. $\boxtimes$

Это определение согласовано с действительной экспонентой и со свойством “сложение показателей приводит к умножению степеней”. В результате действительная часть показателя формирует модуль степени по определению действительной экспоненты, а мнимая часть показателя становится аргументом степени. Если $\beta = 0$, получаем знаменитую **формулу Эйлера**

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

и ее частный случай $e^{i\pi} + 1 = 0$, известный как “самая красивая математическая формула” (в ней “встретились” пять главных констант: $0,\ 1,\ e,\ i,\ \pi$).

Сравнивая тригонометрическую форму комплексного числа с формулой Эйлера, получаем

Определение 14.3.2. Запись комплексного числа в виде

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

называется **показательной формой** комплексного числа. ⊠

Из леммы 14.2.2 сразу получаем

Следствие 14.3.1 (свойства экспоненты)**.** *Для любых* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ *справедливо*

$$e^{\alpha_1+\alpha_2} = e^{\alpha_1}e^{\alpha_2}, \quad e^{\alpha_1-\alpha_2} = \frac{e^{\alpha_1}}{e^{\alpha_2}}.$$

Задача 14.3.1. Запишите решения (14.3) уравнения $z^n = w$ в показательной форме.

Дадим определения гиперболических и тригонометрических функций комплексного аргумента:

Определение 14.3.3. Для произвольного $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \ \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2};$$

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cosh iz, \ \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{\sinh iz}{i} = -i \sinh iz.$$ ⊠

Определение 14.3.3 тригонометрических функций согласовано с действительным случаем, причем сохраняются все тригонометрические формулы, т. е. принцип преемственности выполняется. Более того, теперь понятно, почему тригонометрические и гиперболические синус и косинус имеют аналогичные свойства.

14.4. Разложение многочлена на множители

Определение 14.4.1. Многочленом степени $n \in \mathbb{N}$ называется функция

$$P_n(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$$

комплексного переменного $z \in \mathbb{C}$, где коэффициенты $a_k \in \mathbb{C}$ и *старший* коэффициент $a_n \neq 0$. **Корнем** многочлена называется такое комплексное число z_0, что $P_n(z_0) = 0$. ⊠

Многочлен n-й степени допускает тройное понимание – как *упорядоченный* набор из $(n+1)$ коэффициентов $(a_0, \ldots, a_n)$, как функция, определенная на $\mathbb{C}$, и как функция, определенная на $\mathbb{R}$.

Многочлен делится с остатком на линейный двучлен $z - z_0$:

Лемма 14.4.1. *Для любого $z_0 \in \mathbb{C}$ имеет место единственное представление*

$$P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0) + r, \tag{14.4}$$

где ***частное*** *Q_{n-1} имеет степень $n-1$, а* ***остаток*** *$r = P_n(z_0) \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Подставим в выражение $P_n(z)$ тождество $z = (z - z_0) + z_0$ и раскроем скобки по формуле бинома Ньютона:

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k((z - z_0) + z_0)^k = \sum_{k=1}^{n} b_k(z - z_0)^k + P_n(z_0) =$$

$$= (z - z_0) \sum_{k=1}^{n} b_k(z - z_0)^{k-1} + P_n(z_0),$$

где, в частности, $b_n = a_n \neq 0$.

Доказательство единственности представления (14.4) оставляем в качестве задачи. ■

Теперь очевидна

Теорема 14.4.1. *(Этьен Безу, 1730 — 1783) Число z_0 является корнем многочлена P_n тогда и т. т., когда в разложении (14.4) остаток $r = 0$, т. е. $P_n(z)$ делится на $z - z_0$ без остатка: $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0)$.*

Частное Q_{n-1} также может делиться на $z - z_0$ без остатка, и т. д. В результате мы приходим к представлению

$$P_n(z) \equiv Q_{n-k}(z)(z - z_0)^k, \text{ где } Q_{n-k}(z_0) \neq 0. \tag{14.5}$$

В этом случае число z_0 называют корнем многочлена P_n **кратности** $k \in \mathbb{N}$. Если $k = 1$, то z_0 называют **простым** корнем. Таким образом, корень многочлена обладает двумя характеристиками: своим значением $z_0 \in \mathbb{C}$ и кратностью $k \in \mathbb{N}$.

Обсуждение 14.4.1. Корню z_0 функции f общего вида приписать кратность не представляется возможным. Но если в точке z_0 функция f обладает достаточным запасом производных, то кратность определится с помощью формулы Тейлора. Пока мы можем реализовать этот подход для функции $\mathbb{R} \supset U_\varepsilon(x_0) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Если $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, а $f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, то мы скажем, что корень x_0 имеет кратность k. $\boxminus$

Задача 14.4.1. Докажите, что: 1) на $U_\varepsilon(x_0)$ имеет место единственное представление $f(x) \equiv (x - x_0)^k \cdot g(x)$, где $g(x_0) \neq 0$; 2) для действительного многочлена указанный подход совпадает с исходным определением (т. е. выполнен принцип преемственности). (Указание: воспользуйтесь формулой Тейлора).

Фундаментальным фактом теории многочленов на $\mathbb{C}$ является

Теорема 14.4.2 («основная теорема алгебры»). *Всякий многочлен степени $n \geq 1$ имеет по крайней мере один комплексный корень.*

Теорему принимаем без доказательства, которое требует дополнительных сведений из алгебры или из топологии.

Из теоремы 14.4.2 и разложения (14.5) следует

Теорема 14.4.3. *Многочлен имеет единственное (с точностью до порядка сомножителей) разложение на* ***линейные множители****:*

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2}...(z - z_p)^{k_p}, \quad k_1 + ... + k_p = n, \qquad (14.6)$$

где $z_1, \ldots, z_p$ – различные корни многочлена, кратности которых $k_1, \ldots, k_p$.

Замечание 14.4.1. Лемма 14.2.3 о корнях является частным случаем разложения (14.6): если $w = |w|e^{i\varphi}$, то

$$z^n - w = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$(z - \sqrt[n]{|w|}\; e^{i\varphi/n}) \cdot (z - \sqrt[n]{|w|}\; e^{i(\varphi+2\pi)/n}) \cdot \ldots \cdot (z - \sqrt[n]{|w|}\; e^{i(\varphi+2\pi(n-1))/n}) = 0.$$

Решение тривиального уравнения $z^n = 0$ правильно трактовать как набор из n одинаковых корней $z_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. $\boxminus$

Замечание 14.4.2. . Из разложения (14.6) следует, что многочлен однозначно определяется коэффициентом a_n и набором корней z_i $(i = 1, \ldots n)$, в котором учтены их кратности. $\boxminus$

Задача 14.4.2. Пусть $a_n = 1$. Выразите коэффициенты a_{n-1} и a_0 через корни многочлена. Иначе говоря, выведите первую и последнюю из формул Франсуа Виета (1540 — 1603).

Поскольку мы будем иметь дело с многочленами с действительными коэффициентами, нас интересует специфика их корней.

Лемма 14.4.2 (сопряженные корни действительного многочлена). *Если число z_0 – корень кратности k многочлена P_n с действительными коэффициентами, то сопряженное число $\overline{z}_0$ также является его корнем той же кратности. Т. е. комплексные корни вещественного многочлена существуют парами взаимно-сопряженных чисел.*

Доказательство. Применяя к обеим частям тождества (14.5) операцию сопряжения, получаем

$$P_n(\overline{z}) \equiv \overline{Q}_{n-k}(\overline{z})(\overline{z} - \overline{z}_0)^k,$$

где коэффициенты многочлена $\overline{Q}_{n-k}$ являются сопряженными к коэффициентам многочлена Q_{n-k}, а коэффициенты многочлена P_n не изменились будучи действительными. Поскольку в тождестве (14.5) число z – произвольное, то и сопряжение $\overline{z}$ – произвольное число. Поэтому получаем тождество

$$P(z) \equiv \overline{Q}_{n-k}(z)(z - \overline{z}_0)^k.$$

Последнее означает, что число $\overline{z}_0$ – корень многочлена P_n кратности *не меньшей*, чем k. Допустим, что кратность корня $\overline{z}_0$ выше. Тогда имеет место тождество

$$P_n(z) \equiv \overline{Q}_{n-(k+l)}(z)(z - \overline{z}_0)^{k+l}, \quad l \geq 1.$$

Применив еще раз сопряжение, получим, что кратность корня $z_0 = \overline{(\overline{z_0})}$ не меньше, чем $k+l$. Значит, кратности корней z_0 и $\overline{z}_0$ совпадают. ■

Полученное уточнение о комплексных корнях действительного многочлена позволяет разложить его на вещественные множители самого простого вида.

Лемма 14.4.3 (о разложении действительного многочлена). *Многочлен степени $n \geq 1$ с действительными коэффициентами раскладывается в произведение линейных и* ***неприводимых*** *квадратичных множителей, дискриминант которых отрицателен:*

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_r)^{k_r}(x^2 + b_1 x + c_1)^{m_1} \dots (x^2 + b_s x + c_s)^{m_s},$$

где сумма натуральных показателей $k_1 + ... + k_r + 2(m_1 + ...m_s) = n$, коэффициенты b_j, c_j вещественны и дискриминанты $b_j^2 - 4c_j < 0$ $(j = 1, ..., s)$.

Доказательство. Оставим в разложении (14.6) только линейные сомножители с действительными корнями $z_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, ..., r)$. Остальные сомножители сгруппируем сопряженными парами. Для каждой пары

$$(z-z_j)(z-\overline{z}_j) = (z-(u+vi))(z-(u-vi)) = z^2-2uz+u^2+v^2,\ u, v \in \mathbb{R}.$$

Поэтому дискриминант $D/4 = u^2 - (u^2 + v^2) = -v^2 < 0$. В полученном разложении только переменная $z \in \mathbb{C}$, остальные константы действительные. Заменим обозначение z на традиционное x – получим требуемое. ■

14.5. Разложение правильной дроби в сумму элементарных

Разложение дроби в сумму элементарных понадобится нам при интегрировании. Мы рассматриваем действительную **рациональную дробь**, т. е. частное $P(x)/Q(x)$ двух многочленов с действительными коэффициентами. Дробь называется **правильной**, если степень числителя меньше степени знаменателя. Неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби, деля числитель на знаменатель.

Лемма 14.5.1 (случай действительного корня). *Пусть* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – *действительная правильная рациональная дробь. Пусть* $a \in \mathbb{R}$ – *действительный корень кратности* k *многочлена* Q*, т. е.*

$$Q(x) = (x-a)^k Q_1(x), \quad Q_1(a) \neq 0, \tag{14.7}$$

где $Q_1(x)$ – *действительный многочлен. Тогда данная дробь единственным образом представима в виде*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}, \tag{14.8}$$

где $A \in \mathbb{R}$, $P_1(x)$ – *действительный многочлен и рациональная дробь* $P_1(x)/((x-a)^{k-1}Q_1(x))$ *является правильной.*

Доказательство. Мы ищем число A. Учитывая (14.7), рассмотрим разность

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^k Q_1(x)}.$$

Полученная дробь правильная поскольку и степень P, и степень Q_1 меньше степени Q, а в знаменателе стоит многочлен Q. Выберем A так, чтобы число $a \in \mathbb{R}$ стало корнем числителя: $A = P(a)/Q_1(a)$. Тогда по лемме 14.4.3 существует такой единственный действительный многочлен P_1, что $P(x) - AQ_1(x) = (x-a)P_1(x)$. Подставляя полученное выражение в числитель дроби и сокращая на $x - a$, мы получаем представление (14.8).

Если же (14.8) верно, то для всех $x \in \mathbb{R}$, кроме корней многочлена Q, верно тождество

$$\frac{P(x)}{(x-a)^k Q_1(x)} = \frac{AQ_1(x) + P_1(x)(x-a)}{(x-a)^k Q_1(x)}.$$

Следовательно, по непрерывности многочленов, числители дробей совпадают на $\mathbb{R}$ без каких-либо ограничений. В частности, $P(a) = AQ_1(a) + 0$. Значит, найденное ранее значение A единственно. При таком A и многочлен P_1 единственный. ■

Лемма 14.5.2 (случай комплексного корня). *Пусть* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *– действительная правильная рациональная дробь,* $z_0 = a + ib \in \mathbb{C}$ *– его комплексный корень (*$b \neq 0$*) кратности* m*, т. е. существует такой действительный многочлен* $Q_1(x)$*, что*

$$Q(x) = (x^2 + px + q)Q_1(x), \quad \text{где}$$

$$(x - z_0)(x - \overline{z}_0) = x^2 + px + q, \quad Q_1(z_0) \neq 0. \tag{14.9}$$

Тогда данная дробь единственным образом представима в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x)}, \tag{14.10}$$

где $B, C \in \mathbb{R}$*,* $P_1(x)$ *– действительный многочлен и рациональная дробь* $P_1(x)/((x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x))$ *является правильной.*

Доказательство существования представления. Мы ищем числа B, C. Учитывая (14.9), рассмотрим разность

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} = \frac{P(x) - (Bx + C)Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)}.$$

Полученная дробь правильная поскольку и степень P, и степень $x \cdot Q_1$ меньше степени Q, а в знаменателе стоит многочлен Q. Выберем B, C

так, чтобы числитель полученной дроби делился на (x^2+px+q); в силу леммы 14.4.2, достаточно, чтобы число $a+ib$ стало корнем числителя:

$$P(a+bi)-(B\cdot(a+ib)+C)Q_1(a+ib)=0 \Leftrightarrow B\cdot(a+ib)+C=\frac{P(a+ib)}{Q_1(a+ib)}.$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$B=\frac{1}{b}Im\left(\frac{P(a+ib)}{Q_1(a+ib)}\right), \quad C=Re\left(\frac{P(a+ib)}{Q_1(a+ib)}-Ba\right).$$

Теперь, в силу леммы 14.4.3, существует такой единственный многочлен P_1, что $P(x)-(Bx+C)Q_1(x)=(x^2+px+q)P_1(x)$. Подставляя полученное произведение в числитель дроби и сокращая на $(x^2+px+$ $+q)$, получаем представление (14.10). ■

Задача 14.5.1. Докажите единственность представления (14.10).

Из доказанных лемм следует

Теорема 14.5.1 (о разложении дроби в сумму элементарных). *Пусть* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *есть действительная правильная рациональная дробь. Пусть разложение знаменателя имеет вид*

$$Q(x)=q_n(x-a_1)^{k_1}...(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}...(x^2+p_sx+q_s)^{m_s},$$

где $a_1,...a_r$ *– различные действительные корни* Q, $x^2+p_jx+q_j=(x-z_j)(x-\overline{z}_j)$, *где* $j=1,\ldots,s$ *и* $z_1,...,z_s$ *– различные комплексные корни* Q. *Тогда*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(k_1)}}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{A_1^{(k_1-1)}}{(x-a_1)^{k_1-1}}+...+\frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)}+$$

$$+\frac{A_2^{(k_2)}}{(x-a_2)^{k_2}}+\frac{A_2^{(k_2-1)}}{(x-a_2)^{k_2-1}}+...+\frac{A_2^{(1)}}{(x-a_2)}+\ ...\ +$$

$$+\frac{A_r^{(k_r)}}{(x-a_r)^{k_r}}+\frac{A_r^{(k_r-1)}}{(x-a_r)^{k_r-1}}+...+\frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)}+$$

$$+\frac{B_1^{(m_1)}x+C_1^{(m_1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}}+\frac{B_1^{(m_1-1)}x+C_1^{(m_1-1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1}}+...+\frac{B_1^{(1)}x+C_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)}+$$

$$+\frac{B_2^{(m_2)}x+C_2^{(m_2)}}{(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}}+\frac{B_2^{(m_2-1)}x+C_2^{(m_2-1)}}{(x^2+p_2x+q_2)^{m_2-1}}+...+\frac{B_2^{(1)}x+C_2^{(1)}}{(x^2+p_2x+q_2)}+\ ...\ +$$

$$+\frac{B_s^{(m_s)}x+C_s^{(m_s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}}+\frac{B_s^{(m_s-1)}x+C_s^{(m_s-1)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{m_s-1}}+\ldots+\frac{B_s^{(1)}x+C_s^{(1)}}{(x^2+p_sx+q_s)}, \tag{14.11}$$

где $A_1^{(k_1)},\ldots,A_r^{(1)}$, $B_1^{(m_1)},\ldots,B_s^{(1)}$, $C_s^{(m_1)},\ldots,C_s^{(1)}$ *– некоторые действительные числа, определяемые единственным образом.*

Доказательство. Из доказанных представлений (14.8) и (14.10) следует, что искомые коэффициенты можно получить, причем единственным образом, начиная с самых больших верхних индексов. Т. е. сначала найти $A_1^{(k_1)}$, затем, опираясь на разложение (14.8), найти $A_1^{(k_1-1)}$, и т. д. до $A_1^{(1)}$. После чего перейти к коэффициентам $A_2^{(k_2-i)}$, где $i=0,\ldots,(k_2-1)$. И т. д. вплоть до последнего коэффициента $C_s^{(1)}$. ■

Замечание 14.5.1. Количество коэффициентов $k_1+\ldots+k_r+$ $+\,2(m_1+\ldots+m_s)=n$ равно степени многочлена Q, стоящего в знаменателе, и не зависит от степени многочлена в числителе. ⊟

Замечание 14.5.2. Искомые коэффициенты находят методом **неопределенных коэффициентов**: приводят правую часть к общему знаменателю и приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа. Поскольку разложение (14.11) является тождеством, можно фиксировать значения переменного x, получая уравнения, которым удовлетворяют искомые коэффициенты. На практике комбинируют оба метода, избегая громоздких вычислений. ⊟

Глава 15

Первообразная и неопределенный интеграл

Нахождение первообразной, т. е. интегрирование, является задачей, обратной дифференцированию. Поскольку законы физики, экономики, социологии и т. д. формулируются в терминах производной, интегрирование (в том или ином смысле) является важнейшим способом их исследования.

15.1. Определение неопределенного интеграла

Определение 15.1.1. Функция F называется **первообразной** функции f на промежутке $\langle a, b\rangle$, если $F' = f$ на $\langle a, b\rangle$. (Если концы промежутка принадлежат ему, производные понимаются как односторонние.) $\boxtimes$

Из следствия 11.3.1 вытекает

Теорема 15.1.1 (о структуре множества первообразных)**.** *Пусть функция F является первообразной функции f на $\langle a, b\rangle$. Тогда любая другая первообразная F_1 функции f отличается от данной на постоянную величину: $F_1(x) = F(x) + C$, $x \in \langle a, b\rangle$, $C \in \mathbb{R}$.*

Определение 15.1.2. Неопределенным интегралом $\int f(x)dx$ на промежутке $\langle a, b\rangle$ называется множество *всех* первообразных функции f на этом промежутке. $\boxtimes$

В предыдущих обозначениях

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{15.1}$$

где C обозначает не одну фиксированную константу, а параметр, изменяющийся на $\mathbb{R}$.

Обсуждение 15.1.1. 1) Хотя понятие неопределенного интеграла является обратным к понятию производной, полной симметрии в них нет. Так, функция f может иметь производную в одной точке $x_0 \in D(f)$; говорить о неопределенном интеграле в одной точке бессмысленно. Производная, если она существует, единственна; неопределенный интеграл – это бесконечное множество функций, отличающихся между собой на константу.

2) Осуществляя преобразования выражения, содержащего знак неопределенного интеграла, мы каждый раз имеем дело с бесконечным множеством функций, которые различаются на константу. Если в конце преобразований знак «$\int$» отсутствует, то обязательно нужно дописать слагаемое-константу, как это сделано в равенстве (15.1).

3) Конечно, принципиальным является вопрос существования неопределенного интеграла. Необходимым условием существования неопределенного интеграла является свойство Дарбу (теорема 11.4.1) и следствия из него. Позже будет доказано, что достаточным условием существования неопределенного интеграла является непрерывность подынтегральной функции.

4) Один и тот же неопределенный интеграл может быть записан с помощью разных первообразных. Из формул

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\arccos x + C$$

не следует, что функции arcsin и $-\arccos$ совпадают. Но следует, что они отличаются на постоянную величину: $\arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$.

5) Фиксация постоянной C в равенстве (15.1) относится только к промежутку. В формуле

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \ x \neq 0$$

для $x < 0$ подразумевается какая-то постоянная C_1, а для $x > 0$ – в общем случае другая C_2.

6) Знак дифференциала в обозначении неопределенного интеграла выглядит лишним. В самом деле, можно обойтись обозначением $\int f$;

иногда так и пишут. Ниже мы увидим, что знак дифференциала удобен при интегрировании сложной функции и интегрировании по частям. Это связано с инвариантностью первого дифференциала. Мы будем пользоваться исключительно полным обозначением. ⊟

Теорема 15.1.2 (о взаимной обратности дифференцирования и интегрирования). *Операции нахождения производной и неопределенного интеграла являются взаимно обратными:*

1) если функция f имеет первообразную, то

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

т. е. производная каждой первообразной одна и та же функция, именно $y = f(x)$;

2) если функция F дифференцируема, то

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Доказательство. Оба утверждения следуют из определения неопределенного интеграла и формулы (15.1). ■

15.2. Свойства неопределенного интеграла

Все свойства неопределенного интеграла являются переформулированными свойствами дифференцирования.

Лемма 15.2.1 (линейность неопределенного интеграла). *Если функции f_1, f_2 имеют на промежутке первообразные, то неопределенный интеграл их линейной комбинации есть та же линейная комбинация их неопределенных интегралов: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ верно*

$$\int (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))dx = \alpha \int f_1(x)dx + \beta \int f_2(x)dx.$$

Доказательство сразу следует из утверждения 1 теоремы 15.1.2 и линейности дифференцирования.

Лемма 15.2.2 (интегрирование сложной функции=интегрирование подстановкой). *Пусть на промежутке $\langle a, b\rangle$*

существует $\int f(x)dx = F(x) + C$. *Пусть функция* $\varphi(t)$ *дифференцируема на промежутке* $\langle t_1, t_2\rangle$, *причем образ* $\varphi(\langle t_1, t_2\rangle) \subset \langle a, b\rangle$. *Тогда на* $\langle t_1, t_2\rangle$

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C. \tag{15.2}$$

Доказательство сразу следует из определения и формулы дифференцирования сложной функции:

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t). \blacksquare$$

Замечание 15.2.1. Формула (15.2) применяется при нахождении неопределенных интегралов как слева направо, так и справа налево. В первом случае выражение под знаком интеграла мы трактуем как дифференциал сложной функции и используем его инвариантность. Во втором случае мы изобретаем такую *обратимую* подстановку $x = \varphi(t)$, чтобы функция $\psi(t) := f(\varphi(t))\varphi'(t)$ (от переменной t) оказалась "проще", чем $f(x)$. После применения подстановки необходимо вернуться к переменной x с помощью обратной функции $t = \varphi^{-1}(x)$. $\boxminus$

Пример 15.2.1. применения формулы (15.2) "слева направо":

$$\int e^{\sin x}\cos x\ dx = \int e^{\sin x}\sin' x\ dx = \int e^{\sin x}\ d(\sin x) = e^{\sin x} + C.$$

Пример применения "справа налево" будет приведен в п. 3.

Лемма 15.2.3 (формула интегрирования по частям)**.** *Пусть функции* u *и* v *дифференцируемы на промежутке и существует интеграл* $\int u'(x)v(x)\ dx$. *Тогда существует интеграл* $\int u(x)v'(x)\ dx$ *и*

$$\int u(x)v'(x)\ dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\ dx. \tag{15.3}$$

Доказательство. Формула вытекает из правила дифференцирования произведения $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, п. 2 теоремы 15.1.2 и свойства линейности интеграла (лемма 15.2.1).

Пример 15.2.2.

$$\int \ln x\ dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x\ dx = x\ln x - x + C.$$

Мы взяли $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$.

Замечание 15.2.2. Формулы (15.2) и (15.3) постоянно применяются в математической физике. Интеграл в формуле (15.2) понимается как *действие*, а формула означает его инвариантность (неизменность) относительно замены переменной. Формула (15.3) лежит в основе фундаментального понятия *обобщенного решения* дифференциального уравнения. ⊟

Замечание 15.2.3. Учитывая инвариантность формы первого дифференциала (следствие 9.4.1), формулы (15.2) и (15.3) можно записать в дифференциалах:

$$\int f(x(t))dx(t) = F(x(t)) + C, \quad \int u(x)\ dv = u(x)v(x) - \int v(x)\ du. \ \boxminus$$

Замечание 15.2.4. При нахождении конкретного неопределенного интеграла приходится применять и формулу (15.2), и формулу (15.3). ⊟

15.3. Таблица интегралов

Каждый раз находить неопределенный интеграл опираясь на его определение крайне неудобно. Проще использовать уже найденные неопределенные интегралы. Наиболее ходовые из них записаны ниже. Первые девять формул фактически являются "перевернутыми" формулами из таблицы производных элементарных функций (теорема 9.5.1). Формулы до одиннадцатой включительно рекомендуется помнить наизусть.

1)
$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1,\ x > 0;$$

2)
$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C,\ x \neq -a;$$

3)
$$\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1;$$

4)
$$\int \sin x\ dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x\ dx = \sin x + C;$$

5)

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,\ x \neq \pi k;$$

6)

$$\int \sinh x\ dx = \cosh x + C, \quad \int \cosh x\ dx = \sinh x + C;$$

7)

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C, \quad \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C,\ x \neq 0;$$

8)

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx = \arcsin \frac{x}{a} + C,\ |x| < a,\ a > 0;$$

9)

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C,\ a \neq 0;$$

10) “высокий логарифм”:

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C,\ x \neq \pm a;$$

11) “длинный логарифм”:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\ dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

(для случая $\sqrt{x^2 - a^2}$ выполняется $|x| > |a|$);

12)

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\ dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

(для случая $\sqrt{x^2 - a^2}$ выполняется $|x| > |a|$);

13)

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

где $|x| < a,\ a > 0$;

14)
$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C,\ x > 0.$$

Доказательство готовых формул не представляет труда – достаточно продифференцировать обе части тождеств. Интереснее вывести из левой части правую, пользуясь доказанными свойствами неопределенных интегралов. Докажем формулу 12(+). Без ограничения общности можно считать, что $a > 0$. Сделаем замену $x = a \sinh t,\ dx = a \cosh t\, dt$. Учитывая, что $\cosh t = \sqrt{1 + \sinh^2 t}$ и $\cosh^2 t = (1/2)(1 + \cosh 2t)$, получаем интеграл

$$a^2 \int \cosh^2 t\, dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cosh 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sinh 2t \right) + C. \quad (15.4)$$

Теперь надо вернуться к переменной x. Для этого выразим t через x. Воспользуемся определением гиперболического синуса:

$$\frac{x}{a} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{e^{2t} - 1}{2e^t} \Rightarrow \left(e^t\right)^2 - 2\frac{x}{a} e^t - 1 = 0 \Rightarrow e^t = \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \Rightarrow$$

$$t = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + \ln a.$$

Подставляя эту формулу в (15.4), получаем ответ.

Замечание 15.3.1. Все табличные интегралы берутся в элементарных функциях. Однако это не означает, что неопределенный интеграл от элементарной функции является элементарной функцией. Например, $\int e^{-x^2} dx$ не берется в элементарных функциях. Поэтому в конкретных вычислениях важную роль играют классы таких элементарных функций, неопределенные интегралы которых элементарны. $\boxminus$

Задача 15.3.1. Неопределенные интегралы от *основных* элементарных функций является элементарными функциями. Дополните таблицу интегралами $\int \operatorname{tg} x\, dx$, $\int \arcsin x\, dx$, $\int \operatorname{arctg} x\, dx$.

15.4. Интегрирование рациональных дробей

Пусть $P(x), Q(x)$ – многочлены. Поскольку неправильная дробь $P(x)/Q(x)$ есть сумма многочлена и правильной дроби, а правильную дробь можно разложить в сумму элементарных (теорема 14.5.1), то нам нужно научиться интегрировать элементарные дроби только двух видов:

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x-a)^k}, \quad I_2 = \int \frac{x+b}{(x^2+px+q)^k} dx, \quad \text{где} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Интегралы первого вида являются табличными:

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k}$$

(при $k=1$ это интеграл под номером два, в остальных случаях – под номером один).

Чтобы найти I_2, выделим в числителе дифференциал квадратичной функции, стоящей в знаменателе:

$$I_2 = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} + \left(b - \frac{p}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

Первый интеграл в полученной сумме – табличный (сравните с I_1). Остается взять второй интеграл. Поскольку квадратичная функция в знаменателе не имеет вещественных корней, ее дискриминант отрицательный:

$$p^2 - 4q < 0 \;\Leftrightarrow\; r^2 := q - \frac{p^2}{4} > 0.$$

Это обстоятельство позволяет осуществить следующую замену:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) := t^2 + r^2, \text{ где } t = x + \frac{p}{2}.$$

Получен интеграл

$$J_k(t) := \int \frac{dt}{(t^2+r^2)^k}, \; k \in \mathbb{N}.$$

При $k=1$ это девятый табличный интеграл. Для $k \geq 2$ выведем рекуррентную формулу. Интегрируя J_k по частям, получаем

$$J_k(t) = \frac{t}{(t^2+r^2)^k} + 2k \int \frac{t^2 dt}{(t^2+r^2)^{k+1}} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+r^2)^k} + 2k \int \frac{(t^2+r^2)dt}{(t^2+r^2)^{k+1}} - 2kr^2 \int \frac{dt}{(t^2+r^2)^{k+1}} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+r^2)^k} + 2kJ_k - 2r^2kJ_{k+1}.$$

Поэтому

$$J_{k+1}(t) = \frac{1}{2r^2k}\left((2k-1)J_k(t) + \frac{t}{(t^2+r^2)^k}\right).$$

15.5. Некоторые подстановки

Выражение $R(x_1,...,x_n) = \frac{P(x_1,...,x_n)}{Q(x_1,...,x_n)}$, где P и Q есть линейные комбинации одночленов вида $x_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{k_n}$ $(k_i \in \mathbb{N}_0)$, называют **рациональной функцией**. При $n = 1$ получается рациональная дробь. Если вместо переменных x_i подставлять функции от переменной x, содержащие корни, то получаются иррациональные выражения. Некоторые из них удается проинтегрировать в явном виде.

1) Интеграл вида

$$\int R(x^{1/n})\,dx, \text{ где } n \in \mathbb{N}, \tag{15.5}$$

сводится к интегралу от рациональной дроби подстановкой $t = x^{1/n}$:

$$\int R(x^{1/n})\,dx = n\int R(t)t^{n-1}dt.$$

2) Интеграл

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}\right)dx, \text{ где } n \in \mathbb{N}, \tag{15.6}$$

сводится к интегралу вида (15.5) подстановкой $u = \frac{ax+b}{cx+d}$. Следовательно, еще одна подстановка $t = u^{1/n}$ сводит данный интеграл к интегралу от рациональной дроби.

3) Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx. \tag{15.7}$$

Если подкоренная квадратичная функция имеет вещественные корни x_1, x_2, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = |x-x_2|\sqrt{a\frac{x-x_1}{x-x_2}}.$$

Следовательно, интеграл (15.7) является интегралом вида (15.6).

Если же подкоренная квадратичная функция не имеет вещественных корней, то заведомо $a > 0$. В этом случае применяют **подстановку Эйлера**

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t \;\Rightarrow\; x = \frac{t^2-c}{b\mp 2\sqrt{a}t},$$

которая сводит интеграл (15.7) к интегралу от рациональной дроби.

Замечание 15.5.1. Ценность подстановки Эйлера в том, что после возведения в квадрат исходного равенства исчезает x^2. ⊟

4) Дифференциал вида $x^s(ax^q+b)^p dx$, где s, q, p – рациональные числа, называют **дифференциальным биномом**. Согласно теореме Пафнутия Львовича Чебышёва (1821-1894) интеграл

$$\int x^s(ax^q+b)^p dx \tag{15.8}$$

от дифференциального бинома выражается через элементарные функции только в трех случаях.

Случай 1. $p \in \mathbb{Z}$. Пусть n – общий знаменатель дробей s и q. Интеграл (15.8) имеет вид (15.5) и подстановка $t = x^{1/n}$ приводит его к интегралу от рациональной дроби.

Случай 2. $\frac{s+1}{q} \in \mathbb{Z}$. В этом случае подстановка $t = (ax^q+b)^{1/m}$, где m есть знаменатель дроби p, приводит интеграл (15.8) к интегралу от рациональной дроби.

Задача 15.5.1. Осуществите указанную подстановку и убедитесь, что все показатели степени переменной t становятся целыми числами.

Случай 3. $\frac{s+1}{q}+p \in \mathbb{Z}$. В этом случае подстановка $t = (a+bx^{-q})^{1/m}$, где m – знаменатель дроби p, приводит интеграл (15.8) к интегралу от рациональной дроби.

5) Чтобы избавиться от иррациональности вида $\sqrt{a^2-x^2}$ применяют подстановку $x = a\sin t$ или $x = a\cos t$.

6) Чтобы избавиться от иррациональности вида $\sqrt{a^2+x^2}$ применяют подстановку $x = a\sinh t$ (выше мы применили ее к формуле 12(+)).

Для интегрирования тригонометрических и гиперболических выражений применяют следующие подстановки.

1) Универсальная тригонометрическая подстановка $t = \operatorname{tg}(x/2)$ сводит интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \tag{15.9}$$

к интегралу от рациональной дроби.

Универсальная тригонометрическая подстановка часто приводит к громоздким вычислениям.

2) Если функция $R(\sin x, \cos x)$ имеет период π, то в интеграле (15.9) следует использовать подстановку $t = \operatorname{tg} x$.

3) В интегралах

$$\int R(\cos x)\sin x dx = -\int R(\cos x)d(\cos x),$$

$$\int R(\sin x)\cos x dx = \int R(\sin x)d(\sin x)$$

применяются подстановки $t = \cos x$ и $t = \sin x$ соответственно.

4) Универсальная гиперболическая подстановка $t = \operatorname{th}(x/2)$ сводит интеграл $\int R(\sinh x, \cosh x)dx$ к интегралу от рациональной дроби.

Глава 16

Элементы теории кривых

Применение методов математического анализа к геометрическим задачам приводит нас к новой дисциплине – дифференциальной геометрии. Здесь рассмотрены первые факты, относящиеся к теории кривых.

16.1. Векторнозначные функции

Понятия прямая, плоскость и пространство понимаются в этом параграфе как геометрические объекты. Множества принадлежащих им *точек* будем обозначать через $E^{(1)}, E^{(2)}, E^{(3)}$. Мы знаем, что в пространстве (на прямой, на плоскости), кроме точек, имеются *векторы*, т. е. свободные направленные отрезки. Множества векторов на прямой, плоскости и в пространстве обозначим через $\boldsymbol{V}^{(1)}$, $\boldsymbol{V}^{(2)}$, $\boldsymbol{V}^{(3)}$ соответственно. Преимущество применения векторов в том, что с ними можно выполнять алгебраические операции (умножение на число, сложение векторов, скалярное, векторное и смешанное произведения). Связь между точками и векторами устанавливает операция **разность точек**: упорядоченная пара точек (A, B) порождает единственный вектор $\overrightarrow{AB}$. Обратной является операция **откладывания вектора**: пара $(A, \boldsymbol{a}) \in E^{(k)} \times \boldsymbol{V}^{(k)}$ $(k = 1, 2, 3)$ порождает единственную точку B, для которой $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$.

Задача 16.1.1. Дайте геометрические определения всех векторных операций, сформулируйте их алгебраические свойства и геометрический смысл.

Возьмем на $E^{(1)}$ две точки O и A. Сопоставим им числа 0 и 1 соответственно. Мы знаем, что это сопоставление порождает единственную биекцию $E^{(1)} \leftrightarrow \mathbb{R}$ на числовую прямую, которая сохраняет порядок и расстояния между точками прямой. Введение на плоскости и в пространстве прямоугольной декартовой системы координат порождает биекции $E^{(2)} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$ и $E^{(3)} \leftrightarrow \mathbb{R}^3$, которые позволяют перейти от геометрических объектов (точек, кривых, поверхностей, тел и т. д.) к аналитическим (упорядоченным наборам чисел, функциям, уравнениям, неравенствам и т. д.) и вернуться назад в геометрию. В этом состоит метод аналитической геометрии.

Сосредоточимся на трехмерном случае. Прямоугольную декартову систему координат можно задать **ортонормированным правым базисом** $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ (векторы единичные, попарно ортогональные, удовлетворяющие *правилу буравчика*) и *началом координат* – точкой O. Произвольный вектор единственным образом раскладывается по базису $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$. В результате между векторами $\boldsymbol{a}$ и упорядоченными тройками $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ устанавливается биекция $\boldsymbol{V}^{(3)} \leftrightarrow \mathbb{R}^3$. Чтобы не путать координаты точки и координаты вектора, будем первые записывать строкой, а вторые – столбцом: $A = (x, y, z)$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, $A = ((x, y, z)^T)^T$ где T обозначает операцию транспонирования матрицы (в данном случае из одной строки или одного столбца).

Теперь заметим, что в системе $\{O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ координаты точки $A(x, y, z)$ численно совпадают с координатами радиус-вектора $\overrightarrow{OA} = (x, y, z)^T$. В результате возникает биекция $E^{(3)} \leftrightarrow \boldsymbol{V}^{(3)}$, которая замыкает **коммутативную (перестановочную) диаграмму**

$$\begin{array}{ccc} E^{(3)} & \leftrightarrows & \boldsymbol{V}^{(3)} \\ \searrow\nwarrow & & \swarrow\nearrow \\ & \mathbb{R}^3 & \end{array}.$$

Коммутативность диаграммы означает, что суперпозиция отображений *по стрелкам* от одного множества к другому не зависит от "пути движения", а зависит только от начального и конечного множеств.

Биекция $\boldsymbol{V}^{(3)} \leftrightarrow \mathbb{R}^3$ позволяет записать все векторные операции и их свойства через координаты векторов. Оказывается, в ортонормированном базисе координатные формулировки часто выглядят проще, чем геометрические. Напомним основные формулы:

1) **Операции векторного (линейного) пространства**:

   сложение

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1, a_2, a_3)^T + (b_1, b_2, b_3)^T = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)^T,$$

умножение на действительное число

$$\alpha\boldsymbol{a} = \alpha(a_1, a_2, a_3)^T = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)^T.$$

2) **Скалярное произведение**:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = (a_1, a_2, a_3)^T \cdot (b_1, b_2, b_3)^T = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Модуль вектора: $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

3) **Векторное произведение** (в правом базисе): $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] =$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)^T.$$

4) **Смешанное произведение** (в правом базисе):

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

5) **Точечно-векторные операции**:

1) **Разность точек** $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ – это вектор

$$\overrightarrow{AB} := (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)^T;$$

2) **Откладывание вектора от точки** – точка

$$A(x, y, z) + \boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)^T := B(x + a_1, y + a_2, z + a_3).$$

3) **Расстояние между точками**:

$$\rho(A, B) = |AB| := |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Задача 16.1.2. Вспомните геометрические определения и алгебраические свойства указанных операций. Проверьте выполнение этих свойств в координатах.

Нас интересует обобщение понятия числовой функции:

Определение 16.1.1. Отображение числового промежутка в трехмерное (двумерное) векторное пространство называют **вектор-функцией**. $\boxtimes$

По геометрической традиции вектор-функцию и ее значения обозначают одной буквой. В координатной записи вектор-функция есть отображение в координатное пространство:

$$\boldsymbol{r} : \langle t_1, t_2 \rangle \to \boldsymbol{V}^{(3)} \ (\boldsymbol{V}^{(2)}) \leftrightarrow \mathbb{R}^3 \ (\mathbb{R}^2),$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T \quad (\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))^T),$$

т. е. задание одной вектор-функции равносильно заданию *системы* из трех (двух) числовых функций. Подчеркнем, что аргумент t в каждой координате один и тот же. В дальнейшем мы будем использовать координатный подход. У него имеется принципиальный недостаток. Возникает вопрос: будут ли выводы, полученные в одной системе координат, справедливы в другой? В конце главы мы обоснуем утвердительный ответ на этот вопрос. Введем основные понятия, связанные с вектор-функцией.

Определение 16.1.2 (предел вектор-функции). Говорят, что $\lim\limits_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0$, если $\lim\limits_{t\to t_0} |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0| = 0$. ⊠

Лемма 16.1.1 (координатное определение предела вектор-функции). $\lim\limits_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ *в том и только том случае, когда существуют покоординатные пределы:*

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t\to t_0} y(t) = y_0, \quad \lim_{t\to t_0} z(t) = z_0.$$

Задача 16.1.3. Докажите лемму.

Определение 16.1.3 (непрерывность вектор-функции). Вектор-функция непрерывна в точке t_0, если существует конечный предел, совпадающий со значением функции в этой точке: $\lim\limits_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0)$. Вектор-функция называется непрерывной на промежутке, если она непрерывна в каждой его точке. ⊠

Определение 16.1.4 (дифференцируемость вектор-функции). Вектор-функция называется дифференцируемой в точке t_0, если в этой точке существует предел

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0} = \boldsymbol{r}'(t_0) \in \boldsymbol{V}^{(3)} \ (\boldsymbol{V}^{(2)}),$$

который мы называем **производной вектор-функции** в точке t_0. ⊠

Из определения предела вектор-функции и определения производной вектор-функции вытекает

Лемма 16.1.2 (координатное определение производной)**.** *Вектор-функция дифференцируема в точке* t_0 *тогда и т. т., когда дифференцируемы ее координаты и при этом* $\boldsymbol{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))^T$.

Задача 16.1.4. Докажите лемму.

Аналогично определяются производные высших порядков. Отметим, что производная n-го порядка в точке есть вектор. Если же вектор-функция n раз дифференцируема на промежутке, то на этом промежутке определены еще n вектор-функций: $\boldsymbol{r}^{(k)}(t) := (x^{(k)}(t), y^{(k)}(t), z^{(k)}(t))^T \quad (k = 1, ..., n)$.

Замечание 16.1.1. Если конец промежутка ему принадлежит, то понятия предела и производной определяются как односторонние. $\boxminus$

Определение 16.1.5. Вектор-функция называется n раз **непрерывно дифференцируемой** на промежутке, если на этом промежутке n-я производная не только существует, но и непрерывна как вектор-функция. При этом все предыдущие производные автоматически непрерывны. О таких функциях говорят, что они принадлежит классу гладкости C^n $(n \in \mathbb{N})$ ($C = continuum$). $\boxtimes$

Из определения векторных операций вытекают утверждения:

Лемма 16.1.3 (непрерывность векторных операций)**.** *Пусть вектор функции* $\boldsymbol{a}(t)$, $\boldsymbol{b}(t)$ *и числовая функция* $\alpha(t)$ *непрерывны в точке (на промежутке). Тогда в этой точке (на этом промежутке) непрерывны вектор-функции и числовые функции, порожденные векторными операциями:*

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(t) := \boldsymbol{a}(t) + \boldsymbol{b}(t), \quad (\alpha\boldsymbol{a})(t) := \alpha(t)\boldsymbol{a}(t);$$

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})(t) := \boldsymbol{a}(t)\boldsymbol{b}(t), \quad |\boldsymbol{a}|(t) := |\boldsymbol{a}(t)|,$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})(t) := \boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{b}(t), \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(t) = (\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c}(t)).$$

Если в точке t_0 *существует предел* $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{a}(t)$, *то предел коммутирует со знаком операции; например*

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{a}(t)| = |\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{a}(t)|. \tag{16.1}$$

Лемма 16.1.4 (дифференцируемость векторных операций)**.** *Пусть вектор функции* $\boldsymbol{a}(t)$*,* $\boldsymbol{b}(t)$ *и числовая функция* $\alpha(t)$ *дифференцируемы в точке (на промежутке). Тогда в этой точке (на этом промежутке) дифференцируемы вектор-функции, порожденные векторными операциями, и справедливы формулы:*

$$(\boldsymbol{a}(t) + \boldsymbol{b}(t))' = \boldsymbol{a}'(t) + \boldsymbol{b}'(t);$$

$$(\alpha(t)\boldsymbol{a}(t))' = \alpha'(t)\boldsymbol{a}(t) + \alpha(t)\boldsymbol{a}'(t);$$

$$(\boldsymbol{a}(t)\boldsymbol{b}(t))' = \boldsymbol{a}'(t)\boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{a}(t)\boldsymbol{b}'(t); \quad |\boldsymbol{a}(t)|' = \frac{\boldsymbol{a}(t)\boldsymbol{a}'(t)}{|\boldsymbol{a}(t)|}, \ \boldsymbol{a}(t) \neq \boldsymbol{0}.$$

$$(\boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{b}(t))' = \boldsymbol{a}'(t) \times \boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{b}'(t),$$

$$(\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c}(t))' = (\boldsymbol{a}'(t), \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c}(t)) + (\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}'(t), \boldsymbol{c}(t)) + (\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c}'(t)).$$

Т. е. для вектор-функций дифференцирование является линейной операцией и выполняется правило Лейбница для любого произведения (на числовую функцию, скалярного, векторного и смешанного).

Доказательство лемм осуществляется переходом к координатам. Отдельно рассмотрим дифференцирование модуля вектор-функции. Здесь мы применим дифференцирование сложной числовой функции и дифференцирование скалярного произведения:

$$|\boldsymbol{a}(t)|' = (\sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}})' = \frac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'}{2\sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}}} = \frac{\boldsymbol{a}(t)\boldsymbol{a}'(t)}{|\boldsymbol{a}(t)|}. \quad \blacksquare$$

Лемма 16.1.5 (производная сложной функции)**.** *Пусть в окрестности точки* s_0 *задана числовая функция* $t(s)$*, а в окрестности точки* $t_0 = t(s_0)$ *задана вектор-функция* $\boldsymbol{r}(t)$*. Пусть существуют производные* $t'(s_0)$ *и* $\boldsymbol{r}'(t_0)$*. Тогда в точке* s_0 *существует производная сложной функции* $\boldsymbol{q}(s) := \boldsymbol{r}(t(s))$*:*

$$\boldsymbol{q}'(s_0) = \boldsymbol{r}'(t_0) \cdot t'(s_0).$$

Доказательство покоординатное. Поскольку

$$\boldsymbol{q}(s) = (x(t(s), y(t(s), z(t(s)))^T,$$

то

$$\boldsymbol{q}'(s_0) = ((x(t(s))', (y(t(s))', (z(t(s))))^T|_{s=s_0} =$$

$$= (x'(t_0)t'(s_0), y'(t_0)t'(s_0), z'(t_0)t'(s_0))^T = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))^T t'(s_0) =$$

$$= \boldsymbol{r}'(t_0) \cdot t'(s_0). \quad \blacksquare$$

Для вектор-функций теорема Лагранжа о среднем в общем случае неверна. Ее аналогом является *оценка сверху* на модуль приращения функции.

Теорема 16.1.1 (теорема Лагранжа для вектор-функций)**.** *Если вектор-функция* $\boldsymbol{r}$ *непрерывна на отрезке* $[t_1, t_2]$ *и дифференцируема внутри него, то существует точка* $\xi \in (t_1, t_2)$ *для которой*

$$|\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)| \leq |\boldsymbol{r}'(\xi)|(t_2 - t_1).$$

Доказательство. *Числовая* функция $\varphi(t) := (\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1))\boldsymbol{r}(t)$, в силу лемм 16.2 и 16.3, непрерывна на $[t_1, t_2]$ и дифференцируема внутри отрезка. Поэтому к ней применима теорема Лагранжа:

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \varphi'(\xi)(t_2 - t_1) \;\Leftrightarrow$$

$$(\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1))(\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)) = (\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1))\boldsymbol{r}'(\xi)(t_2 - t_1).$$

В левой части равенства стоит квадрат модуля вектора, а к правой части применим неравенство Коши $|\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$. В результате получаем

$$|\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)|^2 \leq |\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)||\boldsymbol{r}'(\xi)|(t_2 - t_1).$$

Если $\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{0}$, получаем равенство для любого ξ. Иначе, сокращаем на $|\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)|$ и получаем искомое неравенство. $\blacksquare$

Задача 16.1.5. Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ $(t \in [0, 2\pi])$. Ее образом является единичная окружность. Пусть $t_1 = 0,\ t_2 = 2\pi$, тогда $\boldsymbol{r}(2\pi) - \boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{0}$, но $|\boldsymbol{r}'(t)| \equiv 1$. Значит, равенство в теореме Лагранжа исключено.

Для изучения свойств кривой нам потребуется запас производных хотя бы до второго порядка. Поэтому удобно применять формулу Тейлора.

Лемма 16.1.6 (формула Тейлора для вектор-функции с остаточным членом в форме Пеано)**.** *Пусть вектор-функция определена в некоторой окрестности точки* t_0 *и существует конечная производная* $\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)$. *Тогда в точке* t_0 *имеет место формула*

$$\boldsymbol{r}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\boldsymbol{r}^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k + \boldsymbol{o}((t - t_0)^n).$$

Доказательство осуществляется покоординатно.

16.2. Понятие кривой

Нам понадобятся вектор-функции специального вида.

Определение 16.2.1. Вектор-функция $\boldsymbol{r}$ из класса C^n $(n \in \mathbb{N})$ называется **допустимой**, если она удовлетворяет двум свойствам:

1) имеет **невырожденную производную**, т. е. $\forall t \in \langle a, b\rangle \;\hookrightarrow\; \boldsymbol{r}'(t) \neq \mathbf{0}$;

2) вектор-функция инъективна, т. е. разные аргументы имеют разные образы: $\forall\ t \neq t' \;\hookrightarrow\; \boldsymbol{r}(t) \neq \boldsymbol{r}(t')$. ⊠

Определение 16.2.2. Годографом вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ $(t \in \in \langle a, b\rangle)$ называется множество точек $O + \boldsymbol{r}(t)$, т. е. это множество концов **радиус-векторов**. ⊠

На рис. 16.1-16.3 изображены годографы допустимых вектор-функций, а на рис. 16.4-16.5 – недопустимых.

Определение 16.2.3. Определенная на промежутке числовая функция $t = t(s)$ называется **допустимой заменой параметра**, если она принадлежит классу C^n $(n \in \mathbb{N})$ и ее производная всюду отлична от нуля: $t'(s) \neq 0$. ⊠

Заметим, что допустимая замена обратима: обратная функция (которая существует) порождает также допустимую замену $s = s(t)$ Теперь дадим основное

Определение 16.2.4. Пространственной (плоской) гладкой кривой называется точечное подмножество Γ геометрического пространства (или плоскости), которое является годографом некоторой допустимой вектор-функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Если хотят уточнить, то указывают класс гладкости C^n. Вектор-функцию $\boldsymbol{r}(t)$ называют **параметризацией** кривой, аргумент t – **параметром** кривой. ⊠

Введенную кривую еще называют **простой**, в отличие от **замкнутой**. Последняя задается как годограф **периодической** допустимой вектор-функции $\boldsymbol{r}$ класса C^n. Т. е. условие невырожденности производной не изменяется, добавляется условие периодичности

$$\exists T > 0 : \forall t \in \mathbb{R} \;\hookrightarrow\; \mathbf{r}(t) = \boldsymbol{r}(t + T),$$

а требование инъективности выглядит так:

$$\forall t, t' :\ |t - t'| < T \;\hookrightarrow\; \boldsymbol{r}(t) \neq \boldsymbol{r}(t').$$

Примеры 16.2.1. 1) прямая $\boldsymbol{r}(t) = (x_0 + a_1 t, y_0 + a_2 t, z_0 + a_3 t)^T$, проходящая через точку $A(x_0, y_0, z_0)$ с направляющим вектором $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ $(|\boldsymbol{a}| > 0)$; 2) окружность $\boldsymbol{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)^T$; 3) винтовая линия $\boldsymbol{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, ht)^T$ $(R \cdot h \neq 0)$ (рис. 16.2); 4) спираль на конусе $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)^T$ (рис. 16.3);
5) график непрерывно дифференцируемой числовой функции f: $\boldsymbol{r}(x) = (x, f(x))^T$.

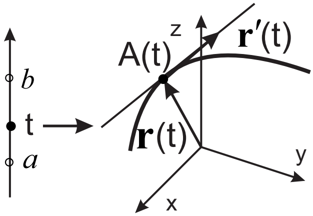

Рис. 16.1

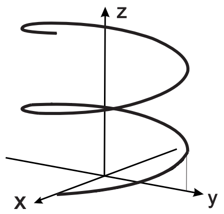

Рис. 16.2

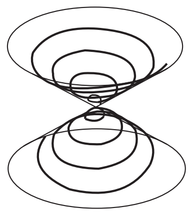

Рис. 16.3

Примеры 16.2.2. кривых с особенностями: 1) “Клюв” $\boldsymbol{r}(t) = (t^3, t^2)^T$; вырождается производная $\boldsymbol{r}'(0) = \boldsymbol{0}$ (рис. 16.4). 2) Кривые Жюля Лиссажу (1822-1880): $\boldsymbol{r}(t) = (\cos mt, \sin nt)^T$; например, при $m = 3, n = 2$ имеются самопересечения (рис. 16.5).

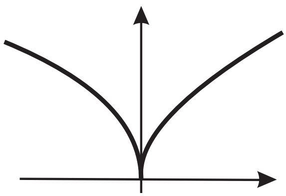

Рис. 16.4

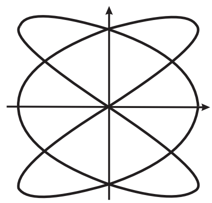

Рис. 16.5

Обозначение. Если точка $A \in \Gamma$ и порождена параметром t, т. е. $A = O + \boldsymbol{r}(t)$, то мы будем писать $A = A(t)$.

Задача 16.2.1. Докажите, что винтовая линия принадлежит цилиндру; найдите конус, которому принадлежит спираль из примера 16.2.1.4.

Поскольку разные вектор-функции могут задавать одну и ту же кривую, целесообразно дать

Определение 16.2.5. Две допустимые вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ и $\boldsymbol{q}(s)$ одинакового класса гладкости называются **эквивалентными** ($\mathbf{r}(t) \simeq \boldsymbol{q}(s)$), если существует такая допустимая замена параметра $t(s)$, что $\boldsymbol{q}(s) = \boldsymbol{r}(t(s))$. ⊠

Пример 16.2.1. Вектор-функции $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t)^T$ $(t \in (0,\pi))$ и $\boldsymbol{q}(x) = (x, \sqrt{1-x^2})^T$ $(x \in (-1,1))$ эквивалентны в силу допустимой замены $x = \cos t$.

Обсуждение 16.2.1. Введенное в определении 16.2.5 отношение в самом деле является эквивалентностью (проверьте). Значит, все допустимые вектор-функции разбиваются на непересекающиеся классы, определяющие одну и ту же кривую. Образно говоря, кривая – это тропинка, а вектор-функции из одного класса – все разрешенные способы хождения по ней (в частности, запрещается останавливаться).

Замечание 16.2.1. Две вектор-функции из одного класса эквивалентности связывает допустимая замена параметра, у которой производная либо строго положительна, либо строго отрицательна. В результате класс эквивалентности разбивается на два подкласса: любые две вектор-функции из одного подкласса связаны заменой параметра с положительной производной, а любые две функции из разных подклассов – заменой параметра с отрицательной производной. Если объявить один из классов **правым**, то тем самым мы введем на кривой **ориентацию**: один и тот же годограф порождает две разные кривые, отличающиеся ориентациями. Другими словами, одна и та же тропинка, соединяющая пункт А с пунктом Б, определяет две кривые: 1) из А в Б, 2) из Б в А. ⊟

16.3. Касательная прямая

Возьмем на гладкой кривой Γ фиксированную точку A_0, которой отвечает параметр t_0, и отличную от нее переменную точку $A = A(t)$, т. е. $\overrightarrow{OA_0} = \boldsymbol{r}(t_0)$, $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{r}(t)$ и $t \neq t_0$. Проведем через эти точки хорду A_0A с направляющим вектором $\overrightarrow{A_0A} = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)$. Пронормируем направляющий вектор и придадим ему направление от меньшего значения параметра к большему:

$$\boldsymbol{e}(t) := sign(t - t_0)\frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)|}.$$

Определение 16.3.1. Пусть существует предел $\lim\limits_{t\to t_0} \boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{e}$ (если A_0 – концевая точка кривой, предел понимается как односторонний). Тогда прямая с единичным направляющим вектором $\boldsymbol{e}$, проходящая через точку A_0, называется **касательной** к кривой Γ в точке A_0. ⊠

Геометрический смысл определения: касательная – это предельное положение секущей прямой A_0A при $A \to A_0$. В отличие от радиус-вектора $\mathbf{r}$, направляющий вектор касательной как направленный отрезок удобно откладывать от точки касания (рис. 16.1).

Теорема 16.3.1 (корректность определения касательной)**.**

1. Существование: кривая класса гладкости C^1 в каждой точке $A_0(t_0)$ имеет касательную прямую, направляющим вектором которой является $\boldsymbol{r}'(t_0)$. Т. е. касательная прямая является годографом вектор-функции $\boldsymbol{l}(u) := \boldsymbol{r}(t_0) + \boldsymbol{r}'(t_0)u$, где $u \in \mathbb{R}$ (рис. 16.1).

2. Касательная прямая не зависит от выбора параметризации.

3. Касательная прямая единственная.

Доказательство. 1. Докажем, что предел направляющего вектора секущей равен пронормированной производной:

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{e}(t) = \lim_{t\to t_0} \left(sign(t-t_0) \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)|} \right) =$$

$$= \lim_{t\to t_0} \left(\frac{\frac{\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{t-t_0}}{\frac{|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(t_0)|}{|t-t_0|}} \right) = \frac{\boldsymbol{r}'(t_0)}{|\boldsymbol{r}'(t_0)|}.$$

При переходе к пределу в знаменателе мы воспользовались свойством (16.1) и условием $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ в определении 16.2.1.

2. После допустимой замены параметра мы получим, согласно теореме 16.3.1 и лемме 16.1.5, направляющий вектор $\boldsymbol{q}'(s) = \boldsymbol{r}'(t)t'(s)$, который отличен от нуля и коллинеарен вектору $\boldsymbol{r}'(t)$. Если, дополнительно, обе вектор-функции одинаковой ориентации (т. е. $t'(s) > 0$), то направляющие векторы сонаправлены.

3. Поскольку существование касательной прямой обеспечивается существованием предела, то она единственная. ■

Обсуждение 16.3.1. Теперь понятно, зачем нам нужна невырожденная производная. В противном случае, “остановившись”, кривая может в точке A_0 резко изменить направление (рис. 16.4). ⊟

Геометрический смысл касательной. В определении вектор-функции $\boldsymbol{l}(u)$, задающей касательную, положим параметр $u := t - t_0$, и сравним $\boldsymbol{l}(t - t_0)$ с формулой Тейлора для вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ в точке t_0. Мы видим, что указанные вектор-функции отличаются на величину $\boldsymbol{o}(t - t_0)$. Это свойство можно взять в качестве определения касательной, поскольку любая другая прямая, проходящая через точку касания A_0, не обладает таким свойством. Получается, что среди всех прямых, проходящих через точку A_0, касательная наилучшим образом аппроксимирует (приближает) кривую.

Если плоская кривая задана как график числовой функции $y = f(x)$, то мы получим касательную прямую к графику:

$$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{r}(x) = (x, f(x))^T \;\hookrightarrow\; \boldsymbol{r}'(x_0) = (1, f'(x_0))^T \;\hookrightarrow$$

$$\boldsymbol{l}(u) = (x_0, f(x_0))^T + (1, f'(x_0))^T u \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = x_0 + u \\ y = f(x_0) + f'(x_0)u \end{cases} \Leftrightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Значит, данное ранее определение касательной к графику согласовано с общим определением касательной к кривой.

16.4. Длина кривой

Пусть Γ – гладкая кривая, заданная вектор-функцией $\boldsymbol{r}(t)$, которая определена на отрезке $[a, b]$. Точки $A = A(a)$ и $B = B(b)$ являются концами **дуги** $\Gamma = \widetilde{AB}$. **Разбиением** τ отрезка $[a, b]$ называется конечное упорядоченное множество его точек: $\tau = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b\}$. Разбиение области определения вектор-функции порождает разбиение кривой $\widetilde{AB}$ на дуги $\widetilde{M(t_{i-1})M(t_i)}$ $(i = 1, ..., k)$. Соединив концы дуг отрезками $[M(t_{i-1}), M(t_i)]$, получим **вписанную ломаную** $\Lambda_\tau(\widetilde{AB})$. Длина ломаной равна $S(\Lambda_\tau(\widetilde{AB})) = \sum_{i=1}^{k} |\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})|$.

Определение 16.4.1. Длиной кривой $\widetilde{AB}$ называется супремум длин вписанных ломаных по всем разбиениям:

$$S(\widetilde{AB}) := \sup_{\tau} S(\Lambda_\tau(\widetilde{AB})).$$

Кривая называется **спрямляемой**, если ее длина **конечна**. ⊠

Обсуждение 16.4.1. Во-первых, отметим, что определение длины кривой не зависит от выбора допустимой вектор-функции $\boldsymbol{r}$

поскольку сформулировано в геометрических терминах. Во-вторых, определение без изменений переносится на **непрерывную кривую**; т. е. в определении 16.2.1 допустимой вектор-функции гладкость ослабляется до ее непрерывности и сохраняется требование инъективности. По определению 16.4.1 любая кривая имеет длину. Вопрос в том, конечна ли длина, т.е. является ли кривая спрямляемой. $\boxminus$

Важнейшим свойством длины является ее **аддитивность**.

Лемма 16.4.1. *Пусть $\widetilde{AB}$ – дуга произвольной непрерывной кривой. Пусть точка $C \in \widetilde{AB}$. Тогда:*

1) *дуга $\widetilde{AB}$ спрямляема тогда и т. т., когда одновременно спрямляемы дуги $\widetilde{AC}$ и $\widetilde{CB}$.*

2) *Если дуга $\widetilde{AB}$ спрямляема, то длина всей дуги равна сумме длин ее составляющих: $S(\widetilde{AB}) = S(\widetilde{AC}) + S(\widetilde{CB})$.*

Доказательство. Обозначим через $\Lambda_{C,\tau}(\widetilde{AB})$ вписанную в $\widetilde{AB}$ ломаную, у которой точка C является вершиной. Сравним супремумы $\sup_\tau S(\Lambda_{C,\tau}(\widetilde{AB}))$ и $\sup_\tau S(\Lambda_\tau(\widetilde{AB}))$. Поскольку множество всех ломаных вида $\Lambda_{C,\tau}(\widetilde{AB})$ является собственным подмножеством вписанных ломаных произвольного вида, то $\sup_\tau S(\Lambda_{C,\tau}(\widetilde{AB})) \le \sup_\tau S(\Lambda_\tau(\widetilde{AB}))$.

С другой стороны, если ломаная не содержит точку $C = C(c)$, то она содержит такую единственную пару соседних вершин $M(t_{i-1})$ и $M(t_i)$, что $t_{i-1} < c < t_i$ (рис. 16.6). Заменив отрезок $[M(t_{i-1}), M(t_i)]$ отрезками $[M(t_{i-1}), C(c)]$ и $[C(c), M(t_i)]$, мы не уменьшим длину исходной ломаной (неравенство треугольника). Следовательно, $\sup_\tau S(\Lambda_{C,\tau}(\widetilde{AB})) \ge$ $\ge \sup_\tau S(\Lambda_\tau(\widetilde{AB}))$. Значит,
$\sup_\tau S(\Lambda_{C,\tau}(\widetilde{AB}))= \sup_\tau S(\Lambda_\tau(\widetilde{AB}))$.

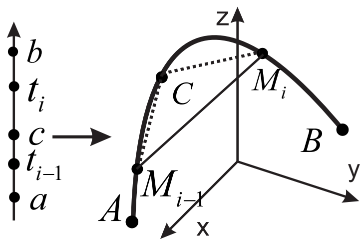

Рис. 16.6

Но $\sup_\tau S(\Lambda_{C,\tau}(\widetilde{AB})) = \sup_\tau S(\Lambda_\tau(\widetilde{AC})) + \sup_\tau S(\Lambda_\tau(\widetilde{CB}))$. (Сумма супремумов имеет смысл даже в том случае, если один из них равен $+\infty$.) ■

Теорема 16.4.1 (спрямляемость гладкой кривой)**.** *Кривая класса гладкости C^1, заданная вектор-функцией $\boldsymbol{r}(t)$ $(t \in [a,b])$, спрямляема* *и ее длина удовлетворяет двусторонней оценке*

$$|\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)| \le S(\Gamma) \le \max_{a \le t \le b} |\boldsymbol{r}'(t)|(b-a).$$

Доказательство. Используя неравенство треугольника и теорему Лагранжа для вектор-функций класса C^1, получаем:

$$|\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)| \le S(\Lambda_\tau(\Gamma)) = \sum_{i=1}^{k} |\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{k} \max_{\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]} |\boldsymbol{r}'(\xi_i)|(t_i - t_{i-1}) \le \max_{t \in [a,b]} |\boldsymbol{r}'(t)| \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \max_{t \in [a,b]} |\boldsymbol{r}'(t)|(b-a)$$

(мы воспользовались тем, что вектор-функция $\boldsymbol{r}'$ непрерывна на $[a,b]$). Полученная двусторонняя оценка длины $S(\Lambda_\tau(\Gamma))$ справедлива для *любой* вписанной ломанной. Поэтому она остается справедливой и для $\sup_\tau S(\Lambda_\tau(\Gamma)) = S(\Gamma)$. ■

Требование гладкости является чрезмерно достаточным для спрямляемости кривой. Его можно ослабить:

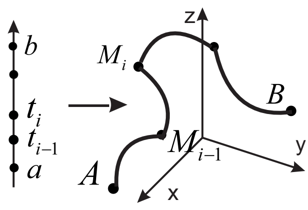

Рис. 16.7

Определение 16.4.2. Кривая называется **кусочно-гладкой**, если она: 1) задается на отрезке $[a,b]$ непрерывной вектор-функцией $\boldsymbol{r}(t)$, 2) существует такое разбиение $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b\}$, что на каждом подотрезке $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, ..., k)$ дуга кривой является C^1-гладкой (рис. 16.7). ⊠

Задача 16.4.1. Докажите, что кусочно-гладкая кривая спрямляема.

Замечание 16.4.1. Согласно определению 16.4.2, в точках t_i не только существуют односторонние производные $\boldsymbol{r}'_\pm(t_i) \ne \boldsymbol{0}$, но имеет место односторонняя их непрерывность: $\lim\limits_{t \to t_i \pm 0} \boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}'_\pm(t_i)$. Отказ от непрерывности производной уже может привести к потере спрямляемости. ⊟

Пример 16.4.1. Рассмотрим функцию: $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Она всюду дифференцируема и принадлежит классу гладкости C^∞ на $\mathbb{R} \setminus 0$. В нуле ее производная терпит разрыв второго рода. Значит, ее график является всюду (кроме начала координат O) гладкой кривой. Но любая ее дуга, содержащая начало координат не является спрямляемой.

Задача 16.4.2. Докажите все сформулированные выше утверждения. (Указание: проверяя спрямляемость, замените дугу $\widetilde{AB}$ графика такой ломаной, что длина ломаной стремиться к бесконечности при $A \to O$).

Проследим за тем, как меняется длина дуги с ростом параметра. Обозначим через $s(t)$ переменную длину дуги $\widetilde{AM} \subset \Gamma$, где точка $A = A(a)$ – начало дуги, а $M = M(t)$ – переменная точка дуги.

Теорема 16.4.2 (о переменной длине дуги). *Пусть* Γ *– кривая класса гладкости* C^n $(n \in \mathbb{N})$*, заданная вектор-функцией* $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$*. Тогда: 1) функция* $s(t) \in C^n$*, 2) она строго возрастающая, 3) ее производная равна*

$$s'(t) = |\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}. \tag{16.2}$$

Доказательство. Исследуем переменную длину дуги в окрестности точки $M_0 = M(t_0)$, где $t_0 \in [a, b]$. Пусть Δt – допустимое приращение параметра, т. е. $t_0 + \Delta t \in (a, b)$. Для определенности считаем, что $\Delta t > 0$. Обозначим через Δs приращение длины дуги, т. е. $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Применим теорему 16.4.1 к отрезку $[t_0, t_0 + \Delta t]$:

$$|\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)| \leq \Delta s \leq \max_{t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t} |\boldsymbol{r}'(t)| \Delta t.$$

Поделим эту двустороннюю оценку на Δt и, воспользовавшись свойством (16.1), перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Получим, что правая производная $s'_+(t_0) = |\boldsymbol{r}'(t_0)|$. Если точка $M(t_0)$ внутренняя, то аналогично устанавливаем, что левая производная $s'_-(t_0) = |\boldsymbol{r}'(t_0)|$. Следовательно, $s'(t_0) = |\boldsymbol{r}'(t_0)| > 0$.

Из равенства (16.2) следует, что числовая функция $s(t)$ имеет тот же класс гладкости, что и вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$. ■

Из теоремы 16.4.2 следует, что **переменная длина дуги** s является допустимым параметром; этот параметр называют **натуральным**. Оказывается, среди всех допустимых параметров натуральный – "самый удобный". И вот почему:

Следствие 16.4.1 (о натуральном параметре). *Допустимый параметр t гладкой кривой является натуральным тогда и т. т., когда $|\boldsymbol{r}'(t)| \equiv 1$ и началу дуги точке A отвечает параметр $t_0 = 0$.*

Доказательство Пусть $t = s$ – натуральный параметр. Тогда, по определению натурального параметра, началу дуги отвечает значение $s_0 = 0$ и, в силу (16.2), $|\boldsymbol{r}'(s)| = s'_s \equiv 1$.

Обратно, пусть $|\boldsymbol{r}'(t)| \equiv 1$. Тогда производная обратной функции $t'(s) \equiv 1/s'(t) \equiv 1$. Поэтому производная разности $(s - t(s))' \equiv 0$. Откуда $t(s) = s + C$. По условию теоремы и по определению натурального параметра, в точке A значения параметров совпадают: $t_0 = s_0 = 0$. Значит, $C = 0$ и $t \equiv s$. ■

Таким образом, в классе всех допустимых параметризаций, **одинаково ориентированных с данной параметризацией**, мы выбрали единственную "самую удобную" – натуральную. (Образно говоря, если кривая – это тропинка, то натуральная параметризация – хождение по тропинке с постоянной единичной скоростью.) Если начальная точка A не является концом исследуемой дуги, то параметр s будет принимать как положительные, так и отрицательные значения. В этом случае можно говорить об **ориентированной длине** дуги.

Понятие первообразной и теорема 16.4.2 открывают возможность нахождения длины дуги.

Теорема 16.4.3 (формула Ньютона-Лейбница). *Пусть $\widetilde{AB}$ – дуга гладкой кривой, заданная вектор-функцией $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$, где $t \in [a, b]$. Пусть $F(t)$ – произвольная первообразная функции $|\boldsymbol{r}'(t)|$. Тогда длина дуги $S(\widetilde{AB}) = F(b) - F(a)$.*

Доказательство. Согласно теореме 16.4.2, функция $s(t)$ переменной длины дуги является какой-то первообразной функции $|\boldsymbol{r}'(t)|$. Поскольку, в силу теоремы 15.1.1, все первообразные отличаются на константу, то $s(t) = F(t) + C$, где C – некоторая постоянная. Но $0 = s(a) = F(a) + C$, следовательно $C = -F(a)$. Теперь получаем, что

$$S(\widetilde{AB}) = s(b) = F(b) + C = F(b) - F(a). \quad ■$$

Пример 16.4.2. Найдем длину дуги винтовой линии $\boldsymbol{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, ht)^T$, заключенной между точками $A(a)$ и $B(b)$ $(b > a)$. В том случае

$$s'(t) = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t + h^2} = \sqrt{R^2 + h^2} = const > 0.$$

Значит, $S(\widetilde{AB}) = \sqrt{R^2 + h^2}(b - a)$.

16.5. Кривизна кривой

Мы выяснили, что касательная прямая дает наилучшее линейное приближение к кривой в исследуемой точке. Чтобы уточнить поведение кривой, естественно проследить за тем, как меняется положение касательной при изменении параметра. Очевидно, при изменении t меняется **точка касания** $M(t)$ и меняется **направление касательной**, определяемое вектором $\boldsymbol{r}'(t)$. Сосредоточимся на второй характеристике. Если мы будем изучать изменения вектора $\boldsymbol{r}'(t)$, то невольно будем следить за изменением его модуля. Эта информация лишняя. Чтобы ее отсечь, воспользуемся натуральным параметром. Традиционно производную по натуральному параметру обозначают не штрихом, а точкой: $\dot{\boldsymbol{r}}(s) := \boldsymbol{r}'(s)$.

Определение 16.5.1. Пусть Γ – кривая класса гладкости C^2, заданная в натуральной параметризации вектор-функцией $\boldsymbol{r}(s)$, где $s \in (0, S)$. Неотрицательное число $k(s) := |\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|$ называется **кривизной** кривой Γ в точке $M(s)$. $\boxtimes$

Геометрический смысл кривизны. Обозначим угол между *единичными* векторами $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ и $\dot{\boldsymbol{r}}(s+\Delta s)$ через $\Delta\varphi$ (рис. 16.8) Тогда

$$k(s_0) = \left|\lim_{\Delta s\to 0} \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(s+\Delta s) - \dot{\boldsymbol{r}}(s)}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0} \left|\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(s+\Delta s) - \dot{\boldsymbol{r}}(s)}{\Delta s}\right| =$$

$$\lim_{\Delta s\to 0} \left|\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0} \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$

(мы воспользовались свойством (16.1)). Значит, кривизна – **это модуль угловой скорости вращения касательной прямой**.

Пример 16.5.1. Найдем кривизну окружности радиуса ρ (рис. 16.9) с помощью геометрического определения:

$$k = \lim_{\Delta s\to 0} \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0} \left|\frac{\Delta s}{\rho} \cdot \frac{1}{\Delta s}\right| = \frac{1}{\rho}. \tag{16.3}$$

В *натуральной* параметризации окружность задается вектор функцией $\mathbf{r}(s) = \rho(\cos(s/\rho), \sin(s/\rho))^T$ (проверьте). Поэтому $\dot{\mathbf{r}}(s) = (-\sin(s/\rho), \cos(s/\rho))^T$, $\ddot{\mathbf{r}}(s) = (-1/\rho)(\cos(s/\rho), \sin(s/\rho))^T$. Следовательно, $\dot{\mathbf{r}}(s) \perp \ddot{\mathbf{r}}(s)$, причем вектор $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ направлен именно к центру окружности. Значит, центр окружности можно найти, двигаясь от произвольной точки $M(s)$ в направлении вектора $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ на расстояние $\rho = 1/k$.

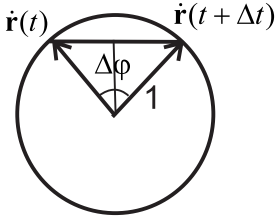

Рис. 16.8

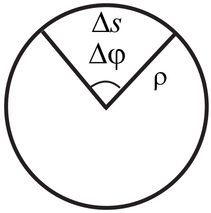

Рис. 16.9

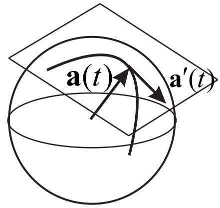

Рис. 16.10

Перейти от данной параметризации к натуральной в явном виде как правило невозможно. Поэтому желательно получить формулу кривизны в произвольной параметризации. Оказывается, эта задача имеет решение в терминах векторных операций. Мы ее решим в три этапа. Первый – вспомогательная

Лемма 16.5.1. *Пусть вектор-функция $\boldsymbol{a}$ принадлежит классу гладкости C^1 на некотором интервале.*

1) *Если вектор-функция удовлетворяет условию постоянства нормы $|\boldsymbol{a}(t)| \equiv C \geq 0$, тогда для каждого значения параметра t вектор-функция ортогональна своей производной, т. е. их скалярное произведение равно нулю: $\boldsymbol{a}(t)\boldsymbol{a}'(t) \equiv 0$.*

2) *Если же модуль вектор-функции тождественно равен единице $|\boldsymbol{a}(t)| \equiv 1$, тогда модуль векторного произведения вектор-функции на ее производную равен модулю производной:* $|\boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{a}'(t)| = |\boldsymbol{a}'(t)|$.

Обсуждение 16.5.1. Геометрический смысл первого утверждения леммы таков: если кривая принадлежит сфере, то в каждой точке кривой касательная прямая принадлежит касательной плоскости к сфере в этой точке (рис. 16.10). ⊟

Доказательство. Постоянство нормы вектор функции эквивалентно постоянству ее скалярного квадрата: $\boldsymbol{a}^2(t) \equiv C^2$. Дифференцируя это тождество (п. 3 леммы 16.1.4), получаем первое утверждение: $2\boldsymbol{a}(t)\mathbf{a}'(t) \equiv 0$.

Поскольку $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})|$, в силу условия и первого утверждения получаем:

$$|\boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{a}'(t)| = 1 \cdot |\boldsymbol{a}'(t)| \sin\frac{\pi}{2} = |\boldsymbol{a}'(t)|. \blacksquare$$

Поскольку $\dot{\mathbf{r}}(s) \equiv 1$ (следствие 16.4.1), то из леммы 16.5.1 получаем

Следствие 16.5.1. *Пусть $\boldsymbol{r}(s)$ – натуральная параметризация гладкой кривой. Тогда: 1) $\dot{\boldsymbol{r}}(s) \perp \ddot{\boldsymbol{r}}(s)$, 2) $|\dot{\boldsymbol{r}}(s) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(s)| = |\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|$.*

На втором этапе мы выразим производные по натуральному параметру через производные по данному параметру.

Лемма 16.5.2. *Пусть Γ – кривая класса гладкости C^2, заданная векторфункцией $\boldsymbol{r}(t)$ на некотором интервале. Тогда производные вектор-функции $\boldsymbol{r}$ по натуральному параметру задаются формулами*

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{s'(t)}, \quad \ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{s'(t)\boldsymbol{r}''(t) - s''(t)\boldsymbol{r}'(t)}{(s'(t))^3} \tag{16.4}$$

Доказательство обеих формул следует из леммы 16.1.5 о дифференцируемости сложной функции и из формулы производной обратной функции. Первая производная:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}'(t) \cdot t'(s) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{s'(t)}.$$

Дифференцируя еще раз получаем:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\dot{\boldsymbol{r}})'_t \cdot t'(s) = \frac{(\dot{\boldsymbol{r}})'_t}{s'(t)} = \frac{\left(\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{s'(t)}\right)'_t}{s'(t)} = \frac{s'(t)\boldsymbol{r}''(t) - s''(t)\boldsymbol{r}'(t)}{(s'(t))^3}. \ \blacksquare$$

Наконец, мы получаем искомую формулу:

Теорема 16.5.1. *Пусть Γ – кривая класса гладкости C^2, заданная векторфункцией $\boldsymbol{r}(t)$ на некотором интервале. Тогда ее кривизна вычисляется по формуле*

$$k = \frac{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}. \tag{16.5}$$

Доказательство. Из второго утверждения следствия 16.5.1 и формул (16.4) следует, что

$$k = |\ddot{\boldsymbol{r}}| = |\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}| = \left| \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{s'(t)} \times \frac{s'(t)\boldsymbol{r}''(t) - s''(t)\boldsymbol{r}'(t)}{(s'(t))^3} \right|.$$

Из дистрибутивности векторного произведения, свойства $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ и формулы (16.2) окончательно получаем:

$$\left| \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{s'(t)} \times \frac{s'(t)\boldsymbol{r}''(t) - s''(t)\boldsymbol{r}'(t)}{(s'(t))^3} \right| = \left| \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{s'(t)} \times \frac{s'(t)\boldsymbol{r}''(t)}{(s'(t))^3} - \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{s'(t)} \times \frac{s''(t)\boldsymbol{r}'(t)}{(s'(t))^3} \right| =$$

$$= \frac{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|}{s'(t)^3} = \frac{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}. \blacksquare$$

Для плоской кривой (т. е. $z(t) \equiv 0$) получаем формулу

$$k = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}}.$$

Если плоская кривая задана как график функции $y = f(x)$, то $x = t, y = f(t)$ и кривизна равна

$$k = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'^2(x))^{3/2}}.$$

Формула (16.3) и следствие 16.5.1 мотивируют следующее

Определение 16.5.2. Пусть Γ – кривая класса гладкости C^2, заданная в натуральной параметризации вектор-функцией $\boldsymbol{r}(s)$. Пусть в точке $A(s) \in \Gamma$ кривизна $k(s) = |\ddot{\boldsymbol{r}}(s)| > 0$. Тогда:

1) **радиусом кривизны** в точке $A(s)$ называется величина, обратная значению кривизны: $\rho(s) = 1/k(s)$;

2) **центром кривизны** в точке $A(s)$ называется точка

$$C(s) = A(s) + \rho(s)\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|};$$

3) окружность с центром в точке $C(s)$ и радиусом $\rho(s)$, которая лежит в плоскости $(A(s), \dot{\boldsymbol{r}}(s), \ddot{\boldsymbol{r}}(s))$, называется **соприкасающейся** окружностью в точке $A(s)$ к кривой Γ. $\boxtimes$

Замечание 16.5.1. Если $k(s) = 0$, полагают $\rho(s) = +\infty$. $\boxminus$

16.6. Сопровождающий трехгранник

Наша цель – исследование кривой $\Gamma \in C^3$ в окрестности точки $A(s) \in \Gamma$ с *положительной кривизной* $k(s) > 0$. Мы воспользуемся методом сопровождающего трехгранника, который содержит три этапа: 1) в каждой точке $A(s)$ выбирается "самая удобная" система координат; 2) изменение этой системы выражается через нее же (рекурсия); 3) формула Тейлора записывается в сопровождающей системе координат.

Естественно в качестве начала координат взять саму точку $A(s)$. В качестве первого базисного вектора возьмем **единичный вектор касательной**: $\overrightarrow{\tau}(s) := \dot{\boldsymbol{r}}(s)$ (см. следствие 16.4.1). Поскольку кривизна положительна, то вектор второй производной $\ddot{\boldsymbol{r}}(s) = \dot{\overrightarrow{\tau}}(s) \neq \mathbf{0}$ (определение 16.5.1) и ортогонален вектору $\overrightarrow{\tau}$ (п. 1 следствия 16.5.1). Поэтому в качестве второго базисного вектора возьмем **единичный вектор главной нормали**, сонаправленный с вектором $\ddot{\boldsymbol{r}}(s)$: $\overrightarrow{\nu} := = \ddot{\mathbf{r}}(s)/|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|$. Третий базисный вектор – **единичный вектор бинормали** – определим с помощью векторного произведения: $\overrightarrow{\beta} := \overrightarrow{\tau} \times \overrightarrow{\nu}$. Окончательно, в произвольной точке $A = A(s)$ определен ортонормированный базис $\boldsymbol{B}(A) = \boldsymbol{B}(s) := \{\overrightarrow{\tau}(s), \overrightarrow{\nu}(s), \overrightarrow{\beta}(s)\}$, который называют **сопровождающим репером Френе** (Жан Фредерик Френе, 1816–1900).

С системой координат $\{A(s), \boldsymbol{B}(s)\}$ связаны три прямые и три плоскости, проходящие через точку A (их названия, направляющие и нормальные векторы приведены в таблицах ниже). Конструкция из трех прямых и трех плоскостей называется **сопровождающим трехгранником** (рис. 16.11). Первый этап завершен.

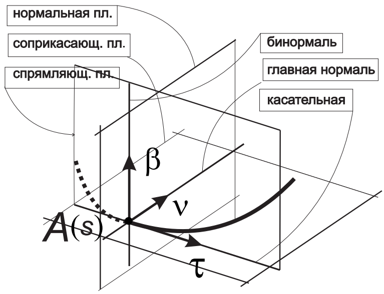

Рис. 16.11

Название прямой	Напр. в-р
Касательная	$\overrightarrow{\tau}$
Главная нормаль	$\overrightarrow{\nu}$
Бинормаль	$\overrightarrow{\beta}$

Название плоскости	Напр. в-ры	В-р нормали
Соприкасающаяся	$\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{\nu}$	$\overrightarrow{\beta}$
Нормальная	$\overrightarrow{\nu}, \overrightarrow{\beta}$	$\overrightarrow{\tau}$
Спрямляющая	$\overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\tau}$	$\overrightarrow{\nu}$

Мы видим, что данная вектор-функция $\boldsymbol{r}(s)$ порождает сопровождающий репер $\boldsymbol{B}(s) = \{\overrightarrow{\tau}(s), \overrightarrow{\nu}(s), \overrightarrow{\beta}(s)\}$, элементы которого, в свою очередь, являются вектор-функциями. Интересуясь тем, *как меняется репер* $\boldsymbol{B}(s)$ в зависимости от точки $M(s)$, мы ищем производные его элементов по натуральному параметру. Естественно определить производную репера покомпонентно: $\dot{\boldsymbol{B}}(s) := \{\dot{\overrightarrow{\tau}}(s), \dot{\overrightarrow{\nu}}(s), \dot{\overrightarrow{\beta}}(s)\}$. Поскольку $\boldsymbol{B}(s)$ это базис в $\boldsymbol{V}^{(3)}$, то производные его элементов *раскладываются по нему* же, т. е. существует такая матрица $\mathbb{M}(s) = (3 \times 3)$, что $(\dot{\boldsymbol{B}}(s))^T \equiv \mathbb{M}(s)(\boldsymbol{B}(s))^T$. Мы найдем элементы этой матрицы.

Из определения 16.5.1 кривизны следует **первая формула Френе** о производной первого базисного вектора:

$$\dot{\overrightarrow{\tau}} = k\overrightarrow{\nu}. \tag{16.6}$$

Значит, первая строка матрицы $M(s)$ есть $(0,\ k,\ 0)$.

Найдем производные бинормали и главной нормали. Напомним, что условие перпендикулярности векторов: $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$; условие параллельности: $\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b} \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. Начнем с бинормали:

$$\dot{\overrightarrow{\beta}} = \frac{d}{ds}(\overrightarrow{\tau} \times \overrightarrow{\nu}) = k(\overrightarrow{\nu} \times \overrightarrow{\nu}) + \overrightarrow{\tau} \times \dot{\overrightarrow{\nu}} = \overrightarrow{\tau} \times \dot{\overrightarrow{\nu}}.$$

Из определения векторного произведения следует, что вектор производной $\dot{\overrightarrow{\beta}}$ ортогонален вектору $\overrightarrow{\tau}$. А из п. 1 леммы 16.5.1 следует, что вектор $\dot{\overrightarrow{\beta}}$ ортогонален вектору $\overrightarrow{\beta}$. Следовательно вектор $\dot{\overrightarrow{\beta}}$ параллелен вектору главной нормали. Коэффициент их пропорциональности обозначают $(-æ)$, где æ называют **кручением** кривой. Мы получили **третью формулу Френе**:

$$\dot{\overrightarrow{\beta}} = -æ\overrightarrow{\nu}. \tag{16.7}$$

Из полученной формулы следует

Геометрический смысл кручения. Поскольку вектор бинормали ортогонален соприкасающейся плоскости, то: 1) соприкасающаяся плоскость испытывает “мгновенное” вращение вокруг касательной прямой (которая ей принадлежит); 2) модуль кручения $|æ|$ есть скорость вращения соприкасающейся плоскости вокруг касательной прямой; 3) знак кручения определяет направление вращения соприкасающейся плоскости: при $æ > 0$ плоскость вращается против часовой стрелки, если смотреть со стороны вектора $\overrightarrow{\tau}$. В частности, кривая является плоской тогда и т. т., когда кручение тождественно равно нулю $æ(s) \equiv 0$; в этом случае она целиком лежит в стационарной соприкасающейся плоскости.

Задача 16.6.1. Докажите, что у плоской кривой кручение тождественно равно нулю.

Теперь заметим, что второй базисный вектор, подобно третьему, можно выразить через векторное произведение: $\overrightarrow{\nu} = \overrightarrow{\beta} \times \overrightarrow{\tau}$. Дифференцируя это равенство и применяя первую и третью формулы Френе, получаем **вторую формулу Френе**

$$\dot{\overrightarrow{\nu}} = -k\overrightarrow{\tau} + æ\overrightarrow{\beta}. \tag{16.8}$$

Задача 16.6.2. Выведите формулу (16.8)

Все **три формулы Френе** в матричной записи выглядят так:

$$(\dot{\boldsymbol{B}}(s))^T = \mathbb{M}(s)(\boldsymbol{B}(s))^T \;\; \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} \dot{\overrightarrow{\tau}} \\ \dot{\overrightarrow{\nu}} \\ \dot{\overrightarrow{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & æ \\ 0 & -æ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{\tau} \\ \overrightarrow{\nu} \\ \overrightarrow{\beta} \end{pmatrix} \tag{16.9}$$

Обсуждение 16.6.1. Матрица $\mathbb{M}(s)$, определяющая формулы Френе, является *антисимметричной*, т. е. ее элементы a_{ij} меняют знак при перестановке индексов: $a_{j,i} = -a_{ij}$. Методами линейной алгебры доказывается, что это свойство равносильно тому, что при изменении параметра s базис $\boldsymbol{B}(s)$ остается ортонормированным. Ценность формул Френе в том, что они *замкнуты*: в них производные базисных векторов выражены через сами векторы. Отсюда, применяя теорию дифференциальных уравнений, можно доказать, что функции кривизны и кручения $k(s) > 0,\ æ(s)$ полностью описывают геометрические свойства кривой. ⊟

Второй этап завершен.

Из формул (16.9) следует, что

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \overrightarrow{\tau}, \quad \ddot{\boldsymbol{r}} = k\overrightarrow{\nu}, \quad \dddot{\boldsymbol{r}} = \dot{k}\overrightarrow{\nu} + k(-k\overrightarrow{\tau} + æ\overrightarrow{\beta}).$$

Подставим полученные выражения в формулу Тейлора при $s = s_0$ и сгруппируем по базисным векторам. Для сокращения записи полагаем, что $s_0 = 0$:

$$\boldsymbol{r}(s) = \boldsymbol{r}(0) + \dot{\boldsymbol{r}}(0)s + \frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{r}}(0)s^2 + \frac{1}{6}\dddot{\boldsymbol{r}}(0)s^3 + \boldsymbol{o}(s^3) =$$

$$= \boldsymbol{r}(0) + \overrightarrow{\tau}s + \frac{1}{2}k\overrightarrow{\nu}s^2 + \frac{1}{6}(\dot{k}\overrightarrow{\nu} - k^2\overrightarrow{\tau} + kæ\overrightarrow{\beta})s^3 + \boldsymbol{o}(s^3) =$$

$$= \boldsymbol{r}(0) + (s - \frac{k^2}{6}s^3)\overrightarrow{\tau} + (\frac{k}{2}s^2 + \frac{\dot{k}}{6}s^3)\overrightarrow{\nu} + \frac{kæ}{6}s^3\overrightarrow{\beta} + \boldsymbol{o}(s^3). \tag{16.10}$$

Обозначим координаты точки кривой в сопровождающей системе координат $\{A(0), \overrightarrow{\tau}(0), \overrightarrow{\nu}(0), \overrightarrow{\beta}(0)\}$ через $A(X, Y, Z)$. Из разложения (16.10) получаем, что

$$X = s - \frac{k^2}{6}s^3 + o(s^3),\ Y = \frac{k}{2}s^2 + \frac{\dot{k}}{6}s^3 + o(s^3),\ Z = \frac{k\text{æ}}{6}s^3 + o(s^3).$$

Следовательно:

1) кривая пересекает нормальную плоскость (Y, Z) под прямым углом;

2) в окрестности точки $A(0)$ кривая лежит в полупространстве $Y > 0$, порожденном спрямляющей плоскостью в направлении вектора $\overrightarrow{\nu}$;

3) если кручение $\text{æ} \neq 0$, то кривая лежит по разные стороны соприкасающейся плоскости (X, Y);

4) расстояние от точки $A(s)$ до плоскости (X, Z) есть бесконечно малая второго порядка, расстояние от точки $A(s)$ до плоскости (X, Y) есть бесконечно малая третьего порядка.

Кривая и ее проекции на координатные оси изображены на рис. 16.11-16.14. Третий этап завершен.

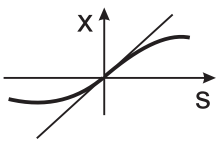

Рис. 16.12

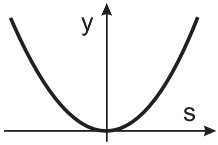

Рис. 16.13

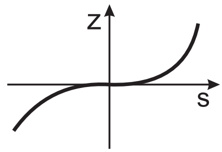

Рис. 16.14

16.7. Нахождение элементов сопровождающего репера

Найдем формулы кручения в натуральной и произвольной параметризациях. Перемножая скалярно первое и третье уравнения Френе, получаем $-k\text{æ} = (\dot{\overrightarrow{\tau}}, \dot{\overrightarrow{\beta}})$. Но $\dot{\overrightarrow{\tau}} = \ddot{\boldsymbol{r}}$, а из определения бинормали, главной нормали, свойств векторного произведения и формулы дифференцирования модуля вектор-функции получаем:

$$\dot{\vec{\beta}} = \frac{d}{ds}(\tau \times \nu) = \ddot{\boldsymbol{r}} \times \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{k} + \dot{\boldsymbol{r}} \times \frac{d}{ds}\left(\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\ddot{\boldsymbol{r}}|}\right) = \dot{\boldsymbol{r}} \times \left(\frac{\dddot{\boldsymbol{r}}}{|\ddot{\boldsymbol{r}}|} - \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\ddot{\boldsymbol{r}}|^2} \cdot \frac{(\ddot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}})}{|\ddot{\boldsymbol{r}}|}\right).$$

Поэтому

$$-k\text{æ} = (\ddot{\boldsymbol{r}}, \dot{\boldsymbol{r}} \times \frac{\dddot{\boldsymbol{r}}}{|\ddot{\boldsymbol{r}}|}) = \frac{1}{k}(\ddot{\boldsymbol{r}}, \dot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}}).$$

Следовательно,

$$\text{æ} = \frac{(\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}})}{k^2}. \tag{16.11}$$

Чтобы найти формулу кручения в произвольной параметризации, найдем $\dddot{\boldsymbol{r}}$ через параметр t с помощью второй формулы из (16.4):

$$\dddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{\boldsymbol{r}})'_t \cdot t'_s = \frac{(\ddot{\boldsymbol{r}})'_t}{s'_t} = \left(\frac{s'(t)\boldsymbol{r}''(t) - s''(t)\boldsymbol{r}'(t)}{(s'(t))^3}\right)'_t \cdot \frac{1}{s'_t} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{r}'''(t)}{(s'(t))^3} + f(t)\boldsymbol{r}'(t) + g(t)\boldsymbol{r}''(t), \tag{16.12}$$

где $f(t), g(t)$ – некоторые числовые функции. Подставляя выражения из (16.4), (16.5) и (16.12) в формулу (16.11), получаем

$$\text{æ} = (\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{s'_t},\ \frac{\boldsymbol{r}''}{(s'_t)^2} - \frac{s''(t)}{(s'(t))^3}\boldsymbol{r}'(t),\ \frac{\boldsymbol{r}'''(t)}{(s'(t))^3} + f(t)\boldsymbol{r}'(t) + g(t)\boldsymbol{r}''(t)) \cdot \frac{1}{k^2} =$$

$$= \frac{(\boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t), \boldsymbol{r}'''(t)) \cdot |\boldsymbol{r}'(t)|^6}{(s'(t))^6 \cdot |\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|^2} = \frac{(\boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t), \boldsymbol{r}'''(t))}{|\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)|^2}$$

(мы воспользовались формулой (16.2) и тем свойством, что параллельные сомножители в смешанном произведении его обнуляют). Искомая формула получена.

В заключение найдем все элементы сопровождающего репера в случае, когда кривая задана в произвольной параметризации. Из формул (16.4) следует, что векторы $\boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t)$ лежат в одной плоскости с векторами $\dot{\boldsymbol{r}}(s), \ddot{\boldsymbol{r}}(s)$. Более того, поскольку коэффициент при векторе $\boldsymbol{r}''(t)$ во второй формуле из (16.4) положителен $(s'(t))^{-2}$ (даже при противоположной ориентации параметров s и t), векторы $\boldsymbol{r}''(t)$ и $\ddot{\boldsymbol{r}}(s)$ лежат в одной полуплоскости по отношению к касательной прямой. Значит, векторы $\boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t)$ порождают соприкасающуюся плоскость. В результате мы получаем следующий порядок нахождения направляющих векторов:

1) $\boldsymbol{r}'(t)$ – направляющий вектор касательной прямой, сонаправленный с $\overrightarrow{\tau}$;

2) $\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)$ – направляющий вектор бинормали, сонаправленный с $\overrightarrow{\beta}$;

3) $(\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t))\times\boldsymbol{r}'(t)$ – направляющий вектор главной нормали, сонаправленный с $\overrightarrow{\nu}$.

При необходимости полученные векторы можно пронормировать.

Замечание 16.7.1. (о геометрической инвариантности) Вернемся к вопросу о влиянии выбора системы координат на полученные выше результаты. Допустим, что мы перешли к другой прямоугольной декартовой системе координат, сохранив ориентацию. Из курса линейной алгебры нам известно, что "новые" координаты $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ точки A выражаются через "старые" (x,y,z) с помощью замены $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})^T = \mathbb{O}\cdot(x,y,z)^T+(\hat{x}_0,\hat{y}_0,\hat{z}_0)^T$, где $(\hat{x}_0,\hat{y}_0,\hat{z}_0)=O_{new}$ – координаты старого начала в новой системе, а $\mathbb{O}$ – ортогональная матрица, определитель которой равен единице.

Если $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ – *натуральная* параметризация гладкой кривой в старой системе, то $\hat{\boldsymbol{r}}=\mathbb{O}\boldsymbol{r}(s)+O_{new}^T$ – ее параметризация в новой. По правилу дифференцирования сложной функции $\frac{d}{ds}\hat{\boldsymbol{r}}=\mathbb{O}\dot{\boldsymbol{r}}$. Откуда, в силу ортогональности матрицы $\mathbb{O}$,

$$|\hat{\boldsymbol{r}}'(s)|=|\mathbb{O}\dot{\boldsymbol{r}}|=\sqrt{(\mathbb{O}\dot{\boldsymbol{r}},\mathbb{O}\dot{\boldsymbol{r}})}=|\dot{\boldsymbol{r}}|\equiv 1.$$

Следовательно, и в новой системе координат параметризация остается натуральной (см. следствие 16.4.1). Значит, *длина дуги кривой инвариантна относительно выбора прямоугольной декартовой системы координат.*

Определения кривизны и кручения мы давали в натуральной параметризации с помощью операций скалярного и векторного произведений. Поскольку эти операции инвариантны относительно замены ортонормированного базиса на ортонормированный той же ориентации, то мы можем сделать вывод, что кривизна и кручение – геометрические понятия. ⊟

Предметный указатель

Список литературы

1. *Бесов О.В.* Лекции по математическому анализу. Москва, Физматлит, 2020.

2. *Иванов Г.Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. Москва: МФТИ, 2011.

3. *Петрович А.Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч.1. Москва: МФТИ, 2017.

4. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. Москва: Наука, 1988.

5. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. 1. Москва: Наука, 1990.

6. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления Т.1. Москва: Наука, 1970.