УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2025 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Уравнения математической физики**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 16.03.01 «Техническая физика»
физтех-школы: **физики и исследований им. Ландау, ФАКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 5

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу составил
д. ф.-м. н., профессор В. И. Зубов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 10 апреля 2025 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Введение**

   Вывод некоторых уравнений математической физики. Приведение к каноническому виду в точке дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка от n независимых переменных с линейной старшей частью. Классификация уравнений. Понятие о задаче Коши и характеристической поверхности. Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду на плоскости. Понятие о методе характеристик.

2. **Волновое уравнение в $\mathbb{R}^1$**

   Общее решение однородного волнового уравнения. Постановка и решение задачи Коши, формула Даламбера. Область зависимости решения задачи Коши от начальных данных. Корректность задачи. Пример Адамара некорректной задачи (задача Коши для уравнения Лапласа). Понятие об обобщённом (сильном) решении как пределе гладких решений. Постановка и решение смешанной задачи для полубесконечной струны с закреплённым концом. Условия согласования начальных и граничного данных.

   Нелинейное уравнение Хопфа. Задача Коши для этого уравнения и ее решение. Законы сохранения. Понятие о слабом решении.

3. **Волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$**

   Формулы Пуассона–Кирхгофа решения задачи Коши для однородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$. Принцип Гюйгенса. Метод Дюамеля решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$. Общая формула Кирхгофа.

   Задача Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$. Метод спуска, формула Пуассона. Диффузия волн в $\mathbb{R}^2$. Единственность классического решения задачи Коши (метод интеграла энергии).

4. **Задача Коши для уравнения теплопроводности**

   Постановка задачи Коши. Формула Пуассона решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^1$ и в $\mathbb{R}^n$, бесконечная дифференцируемость решений. Фундаментальное решение. Применение метода Дюамеля при решении задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности. Принцип максимума. Единственность решения в классе Тихонова.

   Нелинейное уравнение Бюргерса. Преобразование Хопфа–Коула и его применение для сведения уравнения Бюргерса к линейному уравнению теплопроводности.

5. **Начальные сведения об операторе Лапласа и о задаче на собственные значения при однородных краевых условиях**

   Формулы Грина для оператора Лапласа. Постановка краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Необходимое условие разрешимости задачи Неймана.

Симметричность и положительность оператора $-\Delta$ с однородными условиями Дирихле. Задача на собственные значения. Вещественность и положительность собственных значений. Ортогональность собственных функций.

6. **Задача Дирихле для уравнения Лапласа–Пуассона в круге**
   Построение формального решения задачи Дирихле методом Фурье. Бесконечная дифференцируемость решения в области, разложение решения по гармоническим многочленам в случае уравнения Лапласа. Интеграл Пуассона. Существование классического решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге при непрерывной граничной функции.

Литература

Основная

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — Москва : Изд-во МГУ, 2004.
2. *Уроев В. М.* Уравнения математической физики. — Москва : Яуза, 1998.
3. Сборник задач по уравнениям математической физики. *Владимиров В. С., Михайлов В. П., Михайлова Т. В., Шабунин М. И.* — Москва : Физматлит, 2016.

Дополнительная

4. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — Москва : Наука, 1988.
5. *Михайлов В. П.* Лекции по уравнениям математической физики. — Москва : Физматлит, 2001.
6. *Шубин М. А.* Лекции об уравнениях математической физики. — Москва : МЦНМО, 2003.
7. Сферические функции: учеб.-метод. пособие. *Пальцев Б. В.* — Москва : МФТИ, 2000.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге [3].

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 20–25 октября)

I. Классификация уравнений 2-го порядка, приведение к каноническому виду

1. Определить тип уравнения и указать те множества плоскости (x, y), на которых он сохраняется:

а) $yu_{xx} + 2u_{xy} + xu_{yy} - u_y = 5x$;

б) $(x^2 + y^2 - 1)u_{xx} + xyu_{yy} - u_x = 0$.

2. Определить при различных вещественных значениях α, β тип уравнения

$$u_{xx} + 2\alpha u_{xz} + u_{yy} + 4\beta u_{yz} + 4u_{zz} = 0.$$

3. 2.1(5); 2.2(7).

II. Метод характеристик, решение краевых задач на плоскости

4. Найти общие решения уравнений:

а) $u_{xy} = x^2 - y^2$; б) $u_{xy} + xu_y = 2xy$; в) 2.3(6); 2.11(4).

5. Решить задачу Коши и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно:

а) 12.3;

б) $yu_{xx} + (x - y)u_{xy} - xu_{yy} - u_x + u_y = 0$,
$u|_{y=0} = 2x^2, \quad u_y|_{y=0} = 2x, \quad 1 < x < 4$;

в) $u_{xx} + \cos x \cdot u_{xy} + (\cos x - 1)u_{yy} = \frac{\sin x}{(2-\cos x)}(u_x + u_y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$u|_{x=0} = 3y, \quad u_{x|_{x=0}} = -2, \quad 1 < y < 3$;

г) $x^2u_{xx} - 4y^2u_{yy} + xu_x - 4yu_y = 16x^4$,
$u|_{y=1} = 3x^4, \quad u_y|_{y=1} = 0, \quad 1 < x < 2$;

д) $yu_{xx} + (1 + y)u_{xy} + u_{yy} + \frac{(u_x+u_y)}{(1-y)} = 0, \quad y < 1$,
$u|_{y=0} = x^2 + 2x, \quad u_y|_{y=0} = -2x, \quad 0 < x < \frac{3}{2}$.
Принадлежит ли точка с координатами $(1, 2)$ области, в которой решение задачи определено однозначно?

6. Решить задачу Гурса: 14.43; 14.57(7).

7. Решить задачу, указав наибольшую область, в которой решение определено единственным образом:

$u_{yy} - 4u_{xx} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = 8x, \quad -2 < x \leq 0$,
$u|_{y=x} = 8x^2 + 9x^3, \quad 0 \leq x < 1$.

III. Волновое уравнение

8. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx} + 4t^2 \cos 2x, & (t, x) \in \mathbb{R}^2, \\ u|_{t=0} = e^x, \quad u_t|_{t=0} = x^2, & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

9. 12.41.

10. Решить смешанные задачи для полубесконечной струны:

а) 21.14; 21.17; 21.21;

б) $9u_{tt} = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$
$u|_{t=0} = 6x, \quad u_{t|_{t=0}} = 4e^{-3x} + 2, \quad x \geq 0,$
$u_{x|x=0} = -6t + 6e^{-t}, \quad t \geq 0;$

в) $4u_{tt} = u_{xx} - 4te^{2x}, \quad t > 0, \quad x > 0,$
$u|_{t=0} = 2 + e^{2x}, \quad u_{t|_{t=0}} = 0, \quad x \geq 0,$
$(u_x + 2u)|_{x=0} = 8, \quad t \geq 0;$

г) $2xu_{tt} + (1-2x)u_{xt} - u_{xx} + \frac{2}{(2x+1)}(u_x - u_t) = 0, \quad t > 0, \quad x > 0,$
$u|_{t=0} = \sin x^2, \quad u_{t|_{t=0}} = -\cos x^2, \quad x \geq 0,$
$(u - u_x)|_{x=0} = -t, \quad t > 0;$

д) $u_{tt} = u_{xx} - \frac{8(x+t)}{1+(x+t)^2}, \quad t > 0 \quad x > 0,$
$u|_{t=0} = 2x\ln(1+x^2) + x\operatorname{ch} x, \quad x \geq 0,$
$u_{t|_{t=0}} = \frac{4x^2}{1+x^2} - x\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x, \quad x \geq 0,$
$(u - u_x)|_{x=0} = -1 - t - 2\ln(1+t^2), \quad t \geq 0.$

Проверить, что решение $u(t,x) \in C^2(t > 0, x > 0)$. Ответ обосновать.

Указание. Частное решение уравнения искать, перейдя к характеристическим переменным $\xi = x + t, \quad \eta = x - t.$

11. Решить задачи Коши:

а) 12.38; 12.43(3,7); 12.44(3,7);

б) $u_{tt} = a^2\Delta u, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$
$u|_{t=0} = u_0(x) \equiv \alpha(r), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x) \equiv \beta(r), \quad x \in \mathbb{R}^3,$
$u_0(x) \in C^3(\mathbb{R}^3), \quad u_1(x) \in C^2(\mathbb{R}^3), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$

Указание. Искать решение в виде $u(t,x) = \dfrac{v(t,r)}{r}$;

в) $u_{tt} = \Delta u + (\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4})\cos t, \quad t > 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$
$u|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2)(\operatorname{sh}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3,$
$u_{t|_{t=0}} = e^{-(x-y)^2}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;$

г) $u_{tt} = 3\Delta u + 18e^{3t}\cos(x - y + z), \quad t > 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$
$u|_{t=0} = xy^2z, \quad u_{t|_{t=0}} = 3\cos(x - y + z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;$

д) $u_{tt} = \frac{1}{5}\Delta u + 2t^2\cos(x + 2y), \quad t > 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$
$u|_{t=0} = yz^3, \quad u_{t|_{t=0}} = \frac{1}{1+(x-2z)^2}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;$

е) $u_{tt} = \Delta u, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$
$u|_{t=0} = e^{-x^2}(y^2 - z^2), \quad u_{t|_{t=0}} = 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$

12. Найти $u(t,0,0,0)$, $t > 0$, где $u(t,x,y,z)$ — решения задач Коши:

а) $4u_{tt} = \Delta u, \quad t > 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$

$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \begin{cases} \ln(1+x^2+y^2+z^2), & (x,y,z) \in G, \\ 0, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus G, \end{cases}$

где $G = \{(x,y,z) : y > 0,\ 0 < x < z\}$;

<u>б)</u> $u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad t > 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$

$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \begin{cases} b = \mathrm{const} > 0, & (x,y,z) \in G, \\ 0, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus G, \end{cases}$

где $G = \{(x,y,z) : (x-1)^2 + y^2 + z^2 < R^2\}, \quad 0 < R < 1.$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 8–13 декабря)

I. Уравнение теплопроводности. Задача Коши

1. <u>13.5(6,8)</u>; 13.2; 13.6(2,4); <u>13.7(4)</u>.

2. Решить задачи Коши:

а) $10u_t = \Delta u + 2x\cos(x+y), \quad t > 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$
$u|_{t=0} = (3x+y)^3, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2;$

б) $u_t = \Delta u + (x^2 + y^2 - 2z^2)\cos t, \quad t > 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$
$u|_{t=0} = x\cos(x+y), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;$

<u>в)</u> $u_t = \Delta u + 27(t^2 - 1)\cos(x+y+z), \quad t > 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$
$u|_{t=0} = (x-y+z)\sin z - (z-1)^3 e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$

<u>**3**</u>. Найти $u(t,0,0)$, $t > 0$, где $u(t,x,y)$ — решение задачи Коши:

$$4u_t = \Delta u, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = \begin{cases} xy(1-x^2-y^2), & (x,y) \in G = \{x > 0,\ y > 0,\ \sqrt{x^2+y^2} < 1\}, \\ 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus G. \end{cases}$$

4. Найти при каждом $x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{t\to\infty} u(t,x)$, где $u(t,x)$ — решение задачи Коши:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u_0(x) \in C(\mathbb{R}), \qquad \lim_{x\to-\infty} u_0(x) = A, \qquad \lim_{x\to+\infty} u_0(x) = B.$$

II. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце. Метод Фурье

<u>**5**</u>. 16.1(2) (решить и внешнюю задачу с тем же граничным условием).

<u>**6**</u>. Выяснить, при каких $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет решение задача Неймана:

$$\Delta u = y, \quad r = \sqrt{x^2+y^2} < 2,$$

$$u_r|_{r=2} = \sin^3\varphi + \alpha\cos^2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

и решить задачу при таких α.

7. Решить задачи ($r = \sqrt{x^2+y^2}$):

а) $\Delta u = 12y^2 - 2, \quad r < 1, \quad (u_r + u)|_{r=1} = 5y^4$;

б) $\Delta u = 3\frac{x}{r}, \quad 1 < r < 2, \quad u_r|_{r=1} = 2xy, \quad u|_{r=2} = x\left(\frac{5}{2} + y\right)$;

в) $\Delta u = 15r^2\sin\varphi, \quad \frac{1}{2} < r < 1,$
$u_r|_{r=1/2} = 2\sin^2\varphi, \quad u_r|_{r=1} = \cos^2\varphi$;

г) $\Delta u = 0, \quad (x,y) \in D = \{0 < r < R, \quad 0 < \varphi < \alpha\}, \quad \pi < \alpha < 2\pi,$ $(x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi),$
$u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\alpha} = 0, \quad 0 \le r \le R, \quad u|_{r=R} = f(\varphi)$. Найти необходимое и достаточное условие на функцию $f(\varphi) \in C^1([0,\alpha]), f(0) = f(\alpha) = 0$, обеспечивающее ограниченность первых производных решения в окрестности точки $(0,0)$;

д) $\Delta u(r,\varphi) = -\frac{9}{r^2}\cos 3\varphi, \quad r > 1, \quad (u + u_r)|_{r=1} = \cos^3\varphi.$

III. Сферические функции

8. 16.27(3,5); 16.28(1); <u>16.29(1)</u>; 16.30(6); 16.31(1); 16.24.

Составитель задания д. ф.-м. н., профессор В. И. Зубов