

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2025 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: Дифференциальные уравнения

по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладная математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
11.03.04 «Электроника и нанoeлектроника»,
16.03.01 «Техническая физика»

физтех-школы: ФАКТ, ФЭФМ, ФПМИ, ФБМФ, ФРКТ, ПИИ, ФАЛТ

кафедра: высшей математики

курс: 2

семестр: 3

лекции — 30 часов

практические (семинарские)

занятия — 30 часов

лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу составили:

д. ф.-м. н., профессор А. М. Бишаев
д. ф.-м. н., профессор С. Е. Жуковский
к. ф.-м. н., доцент В. Ю. Дубинская
к. ф.-м. н., доцент С. Д. Животов
к. ф.-м. н., доцент О. А. Пыркова
д. ф.-м. н., доцент И. В. Козицин

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 10 апреля 2025 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

Программа (годовой курс)

1. **Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнения Бернулли и Риккати. Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Использование однопараметрических групп преобразований для понижения порядка дифференциальных уравнений (по усмотрению лектора).
2. **Задача Коши.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения n -го порядка в нормальном виде. Теоремы о продолжении решения. Характер зависимости решения задачи Коши от параметров и начальных данных: непрерывность, дифференцируемость (без доказательства). Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение.
3. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Формула общего решения линейного однородного уравнения n -го порядка. Отыскание решения линейного неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части. Уравнение Эйлера. Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы системы. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме (без доказательства). Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы системы. Отыскание решения линейной неоднородной системы уравнений в случае, когда неоднородность представлена квазимногочленом (без доказательства). Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем уравнений. Преобразование Лапласа и его применение для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (по усмотрению лектора). Исследование краевых задач для линейных уравнений второго порядка при наличии малого параметра при старшей производной (по усмотрению лектора).
4. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши

для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n -го порядка в нормальном виде.

Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем. Определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Метод вариации постоянных и формула Коши для линейной неоднородной системы уравнений. Следствия для линейных уравнений n -го порядка.

Теорема Штурма и следствия из нее. Теорема Кнезера (по усмотрению лектора).

Уравнение Бесселя и некоторые свойства его решений (по усмотрению лектора). Асимптотическое поведение решений при больших значениях аргумента (по усмотрению лектора).

5. **Автономные системы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Свойства решений и фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейных автономных систем второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерных автономных нелинейных систем. Теорема о выпрямлении траекторий (*доказательство по усмотрению лектора*).

Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Достаточные условия асимптотической устойчивости.

Поток А.М. Бишаева: групповое свойство автономных систем дифференциальных уравнений. Понятие фазового объема. Формула Лиувилля. Теорема Пуанкаре (*без доказательства*).

6. **Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.** Первые интегралы автономных систем. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов.

Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

7. **Элементы вариационного исчисления.** Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Задача со свободными концами, задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, задача для функционалов, содержащих производные высших порядков. Условный экстремум: изопериметрическая задача, задача Лагранжа (*без доказательства*).

Литература

Основная

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 1982, 2001.
2. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — Москва : УрСС, 2004; — Москва : КомКнига, 2007, 2010, <http://bookfi.org/book/791964>.
3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — Москва : ЛКИ, 2008.
4. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — Москва : Лаборатория знаний, 2024.
5. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Санкт-Петербург : Лань, 2003.
6. *Умнов А. Е., Умнов Е. А.* Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : МФТИ, 2021, <http://www.umnov.ru>.

Дополнительная

7. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — Москва : Физматгиз, 1961, <http://techlibrary.ru/bookpage.htm>.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — УрСС, 2003; — Москва : Физматлит, 2009.
9. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — Москва : Наука, 1985.
10. *Купцов Л. П., Николаев В. С.* Курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2015.
11. *Ипатова В. М., Пыркова О. А., Седов В. Н.* Дифференциальные уравнения. Методы решений. — Москва : МФТИ, 2007, 2012.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. Романко В. К. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2020. (цитируется — С.)
2. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва : Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2003, 2004, 2005; — Москва : ЛИБРОКОМ, 2011, 2013; — Москва : ЛКИ, 2008. (цитируется — Ф.)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 13–18 октября)

I. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

С. 1: 2.

С. 2: 5; 10; 16; 35; 46; 60; 75.

С. 3: 20; 31; 35; 58; 91; **Ф.** 181*.

С. 4: 9; 22; 25; 56.

II. Уравнения, допускающие понижение порядка

С. 7: 10; 18; 35; 42; 59; 66.

1. Решить уравнение $y''e^y + (y')^2e^y = 2x$.

III. Задача Коши для уравнений в нормальной форме

Ф. 225(б, в); 228(в, е); 229; 230; 231; 234.

2. Решить уравнение, построить интегральные кривые, указать особые решения, найти непродолжаемое решение, удовлетворяющее условиям:

а) $y' = -y^2$, $y(1) = -1$;

б) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, $y(-4) = -1$, $y(2) = 1$.

Указать область определения решений. Объяснить с точки зрения теоремы существования и единственности, почему в случае а) решение уравнения однозначно определяется одним условием, а в случае б) – нет.

3*. Доказать, что решение задачи Коши $y' = x - y^2$, $y(1) = 0$, можно продолжить на промежуток $[1, +\infty)$.

IV. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

Ф. 278; 287 (в этих задачах решить уравнение, исследовать особые решения, построить интегральные кривые); 289.

С. 6: 18; 55.

4. В задаче **Ф.** 287 найти решения, удовлетворяющие условиям:

а) $y(0) = -1$, $y(5) = 6$;

б) $y(0) = -1$, $y(4) = 4$.

5. Решить уравнение $(y')^2 = 4y^3(1 - y)$, исследовать особые решения, построить интегральные кривые.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 8–13 декабря)

I. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

С. 8: 3; 12; 19; 35; 40; 43; 71; 82; 154; 160; 196; 204.

Ф. 613; 616; 617.

1. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ уравнение $y'' + ay = \sin x$

а) имеет хотя бы одно ограниченное решение;

б) имеет ровно одно периодическое решение?

II. Линейные системы с постоянными коэффициентами

С. 11: 2; 8; 11; 18; 29; 39; 56; 74; 88; 152; 159; 184.

III. Матричная экспонента

С. 11: 118; 122; 130 (также для каждой системы найти решение, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = y(0) = 1$).

2. а) Записать (в векторном виде) общее решение системы $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если

матрица A в базисе $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \overline{h_3}, \overline{h_4}, \overline{h_5}$ имеет вид $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

б) Найти матрицу $e^{A'}$.

3*. Доказать формулу: $\det e^A = e^{\text{tr} A}$.

IV. Операционный метод

С. 8: 173; 182.

С. 11: 189; 194.

$36+1^*$
