УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2024 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Кратные интегралы и теория поля**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 10.05.01 «Компьютерная безопасность», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника», 16.03.01 «Техническая физика»
физтех-школы: **все кроме ФПМИ, ФБВТ, ВШПИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 18 часов

Программу составили:
д. ф.-м. н., профессор С. А. Гриценко
к. ф.-м. н., доцент А. Ю. Петрович
д. ф.-м. н., профессор В. Ж. Сакбаев
к. ф.-м. н., доцент Г. Б. Сизых

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 11 апреля 2024 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением. Непрерывно дифференцируемые отображения конечномерных пространств, их якобиан. Теорема о системе неявных функций (без доказательства). Локальная обратимость отображения с ненулевым якобианом.
2. Экстремумы функций многих переменных: необходимое условие, достаточное условие. Условный экстремум функции многих переменных при наличии связей: исследование при помощи функции Лагранжа. Необходимые условия. Достаточные условия.
3. Кратный интеграл Римана. Суммы Римана и суммы Дарбу. Критерии интегрируемости. Интегрируемость функции, непрерывной на измеримом компакте. Свойства интегрируемых функций: линейность интеграла, аддитивность интеграла по множествам, интегрирование неравенств, теоремы о среднем, непрерывность интеграла по множеству. Сведение кратного интеграла к повторному.
4. Формула Грина. Потенциальные векторные поля. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.
5. Геометрический смысл модуля и знака якобиана отображения двумерных пространств. Теорема о замене переменных в кратном интеграле (доказательство для двумерного случая).
6. Простая гладкая поверхность. Поверхностный интеграл первого рода. Независимость интеграла от параметризации поверхности при допустимой замене параметров. Площадь поверхности. Ориентация простой гладкой поверхности. Поверхностный интеграл второго рода, выражение через параметризацию поверхности. Кусочно-гладкие поверхности, их ориентация и интегралы по ним.
7. Формула Гаусса–Остроградского. Дивергенция векторного поля, ее геометрический смысл. Соленоидальные векторные поля. Связь соленоидальности с обращением в нуль дивергенции поля.
8. Формула Стокса. Ротор векторного поля, его геометрический смысл. Потенциальные векторные поля. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Связь потенциальности с обращением в нуль ротора поля.
9. Оператор «набла» и действия с ним. Основные соотношения, содержащие вектор «набла».

Литература

<u>*Основная*</u>

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2020.
2. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. — Москва : МФТИ, 2011.

3. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. — 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2009.
4. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 3. Кратные интегралы. Гармонический анализ. — Москва : МФТИ, 2013, 2018.
5. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : Физматлит, 2007.
6. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. — Москва : Физматлит, 2004.

Дополнительная

7. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 2. — Москва : Дрофа, 2004.
8. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1, 2. — 5-е изд. — Москва : Физматлит, 2000.
9. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. — 2-е изд. — Москва : Высш. шк., 2000.
10. *Зорич В. А.* Математический анализ. — Москва : МЦНМО, 2007.
11. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Т3. Функции нескольких переменных: учеб. пособие / под ред. Л. Д. Кудрявцева. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2003.

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 21–26 октября)

I. Неявные функции

<u>Т.1</u>. Дано уравнение $x^2 = y^2$.

а) Сколько функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению?

б) Сколько непрерывных функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению?

в) Сколько непрерывных функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению и условию $y(1) = 1$?

г) Сколько непрерывных функций $y : [1; 2] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению и условию $y(1) = 1$?

§3: 61(2); <u>64(2)</u>; 69; <u>75</u>.
§4: 43(5); <u>46(1)</u>.

T.2*. Рассмотрим уравнение $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — множество всех $a = (a_1, \ldots, a_n)$ таких, что данное уравнение имеет n различных (действительных) корней $x_1, \ldots, x_n$. Доказать, что множество U открыто. Доказать, что для каждой точки $a \in U$ найдётся такая окрестность, в которой зависимость $x_i = x_i(a_1, \ldots, a_n)$ от коэффициентов a_i является гладкой.

II. Дифференцируемые отображения, замена переменных

§3: 105.

<u>T.3</u>. Для отображения $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного координатными функциями

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y,$$

показать, что якобиан отображения всюду в $\mathbb{R}^2$ отличен от нуля, но отображение не является взаимно-однозначным. Найти множество значений отображения f.

<u>T.4</u>. Отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задано координатными функциями

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, r > 0.$$

Выразить частные производные r и φ по переменным x и y как функции от r и φ.

§3: <u>86</u>; 88(1); <u>91</u>.
§4: 51(2); <u>52(1)</u>.

III. Экстремумы функций многих переменных

<u>T.5</u>. В стационарной точке квадратичная форма второго дифференциала положительно полуопределена.

а) Может ли эта точка быть точкой строгого локального минимума?
б) Может ли эта точка быть точкой строгого локального максимума?
в) Может ли эта точка не быть точкой локального экстремума (даже нестрогого)?

§5: 2(2); <u>9</u>; 10*; 13(1); 18(1).
§5: 19(1), <u>21(2)</u>; 25(6); <u>31(3)</u>; 36*.

IV. Кратные интегралы

§8: 23; <u>34</u>.

<u>Т.6</u>. Пусть функция f двух переменных определена на прямоугольнике $P = [a, b] \times [c, d]$.

а) Верно ли, что если функция $f(x, \cdot)$ интегрируема на $[c, d]$ при всех $x \in [a, b]$, а функция $I(x) = \int\limits_c^d f(x, y)dy$ интегрируема на $[a, b]$, то функция f интегрируема на P?

б) Верно ли, если функция f интегрируема на P, то функция $f(x, \cdot)$ интегрируема на $[c, d]$ при всех $x \in [a, b]$?

§8: 79(1); 83(15); <u>85(3)</u>; 90(1, 8); 133(2); 139(2); 175(2); <u>176(2)</u>.
§8: 106(3); 107(2); <u>110(3)</u>; 124(1, 5); <u>144(6)</u>; 145(1); 146(3); <u>147</u>; 148(2).
§9: 6(2); <u>8(6)</u>; <u>10</u>; 13(5); 16(3); 21; 63(4).

(59+3*)

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 9–14 декабря)

I. Криволинейные интегралы. Формула Грина

§10: 1(4); 9; 29(4); 85(4); 110(1, 2); <u>46</u>, <u>100</u>, 59.

<u>Т.1</u>. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, где γ — простая замкнутая гладкая кривая, не проходящая через точку $(0; 0)$, ориентированная против хода часовой стрелки.

II. Поверхностные интегралы

§9: 37, <u>51</u>.

Т.2. Вычислить площадь части сферы, заключенной между двумя параллельными плоскостями. Можно рассматривать сферу, заданную уравнением $x^2+y^2+z^2=R^2$, и плоскости $z=c,\ z=c+h, c, c+h \in [-R,R]$. Зависит ли ответ от каких-либо параметров, кроме радиуса сферы R и расстояния между плоскостями h (при условии, что обе плоскости пересекают сферу)?

§11: 1(1), 18(1), <u>37(1)</u>, 38, 42.

III. Элементы теории поля

§3: 44(1); <u>48(1)</u>.
§12: <u>13</u>; <u>19</u>; 15(3, <u>5</u>, 6); <u>37(2)</u>; <u>39</u>; 40(1); 41(3, 6, <u>7</u>); 49(3, <u>5</u>, <u>6</u>) (проверять векторные равенства в координатной форме не обязательно); 50(5); <u>54(2)</u>.

IV. Формулы Гаусса-Остроградского и Стокса

§11: 45(2, 3); 52(3); 57(2)*; 62; <u>63(2)</u>.

<u>Т.3</u>. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S (2x+3y)dydz + (x+y+z)dzdx + (x+2y+3z)dxdy,$$

где S — часть внешней стороны поверхности эллипсоида $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}+z^2=1$, $x \geq 0$.

§12: 68(4); 94(4); <u>104(1, 2)</u>; <u>112(1)</u> (солениодальность исследовать для областей $r>0$ и $z>0$); 115*.

(47+2*)

Составитель задания к. ф.-м. н., ст. преп. А. Ю. Головко