УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2024 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Дифференциальные уравнения**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
10.05.01 «Компьютерная безопасность»,
11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»,
16.03.01 «Техническая физика»,
27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школы: **ФАКТ, ФЭФМ, ФПМИ, ФБМФ, ФРКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу составили:
д. ф.-м. н., профессор А. М. Бишаев
д. ф.-м. н., профессор С. Е. Жуковский
к. ф.-м. н., доцент В. Ю. Дубинская
к. ф.-м. н., доцент С. Д. Животов
к. ф.-м. н., доцент О. А. Пыркова
к. ф.-м. н., доцент А. Ю. Семенов

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 11 апреля 2024 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Программа (годовой курс)

1. **Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнения Бернулли и Риккати. Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.
   Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Использование однопараметрических групп преобразований для понижения порядка дифференциальных уравнений (по усмотрению лектора).
2. **Задача Коши.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения n-го порядка в нормальном виде. Теоремы о продолжении решения. Характер зависимости решения задачи Коши от параметров и начальных данных: непрерывность, дифференцируемость (без доказательства). Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение.
3. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Формула общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка. Отыскание решения линейного неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части. Уравнение Эйлера.
   Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы системы. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме (без доказательства). Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы системы. Отыскание решения линейной неоднородной системы уравнений в случае, когда неоднородность представлена квазимногочленом (без доказательства).
   Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем уравнений. Преобразование Лапласа и его применение для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (по усмотрению лектора). Исследование краевых задач для линейных уравнений второго порядка при наличии малого параметра при старшей производной (по усмотрению лектора).
4. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши

для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n-го порядка в нормальном виде.

Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем. Определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Метод вариации постоянных и формула Коши для линейной неоднородной системы уравнений. Следствия для линейных уравнений n-го порядка.

Теорема Штурма и следствия из нее.

Уравнение Бесселя и некоторые свойства его решений (по усмотрению лектора). Асимптотическое поведение решений при больших значениях аргумента (по усмотрению лектора).

5. **Автономные системы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Свойства решений и фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейных автономных систем второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерных автономных нелинейных систем. Теорема о выпрямлении траекторий (*доказательство по усмотрению лектора*).

   Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Достаточные условия асимптотической устойчивости.

   Поток А.М. Бишаева: групповое свойство автономных систем дифференциальных уравнений. Понятие фазового объема. Формула Лиувилля. Теорема Пуанкаре (*без доказательства*).

6. **Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.** Первые интегралы автономных систем. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов.

   Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

7. **Элементы вариационного исчисления.** Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Задача со свободными концами, задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, задача для функционалов, содержащих производные высших порядков. Условный экстремум: изопериметрическая задача, задача Лагранжа (без доказательства).

Литература

Основная

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамики, 2001.
2. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — Москва : УрСС, 2004, 2007; — Москва : КомКнига, 2007, 2010. http://bookfi.org/book/791964.
3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — Москва : ЛКИ, 2008.
4. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — Москва : Лаборатория базовых знаний, 2000–2011.
5. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Санкт-Петербург : Лань, 2003.
6. *Умнов А. Е., Умнов Е. А.* Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : МФТИ, 2022, 2016. http://www.umnov.ru.

Дополнительная

7. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — Москва : Физматгиз, 1961, http://techlibrary.ru/bookpage.htm.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — УрСС, 2003; — Москва : Физматлит, 2009.
9. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — Москва : Физматгиз, 1985.
10. *Купцов Л. П., Николаев В. С.* Курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2003.
11. *Ипатова В. М., Пыркова О. А., Седов В. Н.* Дифференциальные уравнения. Методы решений. — Москва : МФТИ, 2007, 2012.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. Романко В. К. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С.)
2. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва : Ижевск: 2005; Москва : МГУ, 2011; Москва : ЛКИ, 2008. (цитируется — Ф.)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные «*», являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 14–19 октября)

I. Простейшие уравнения 1–го порядка

С. 1: 13.

С. 2: 7; <u>10</u>; 39*; 44.

Ф. 55; 62.
С. 2: 59; 73; 80.
С. 3: 25; 59; 68; 94.
Ф. 146; 181*.
С. 4: 4; 20; 59.

1. Решить уравнение: $y' = \dfrac{y^2}{x^4} - 2\dfrac{y}{x} + 4x^2$.

II. Уравнения, допускающие понижение порядка

С. 7: 1; 5; 28; 46; 65(а).
Ф. 505.

2. Решить задачу Коши:

$$xy^2y'' + x^2y'^3 - xyy'^2 - 15y^2y' = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 4.$$

III. Задача Коши для уравнений в нормальной форме

Ф. 225 (а, г); 228 (в, г); 229; 230; 231; 233.

3. Решить уравнение, построить интегральные кривые, указать особые решения, найти (непродолжаемое) решение, удовлетворяющее условиям:
а) $y' = -y^2, \quad y(1) = -1;$
б) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(-4) = -1, \quad y(2) = 1.$
Указать область определения решений. Объяснить с точки зрения теоремы существования и единственности, почему в случае а) решение уравнения однозначно определяется одним условием, а в случае б) – нет.

4.* Доказать, что любое решение задачи Коши $y' = x - y^2$, $y(1) = 0$ можно продолжить на интервал $(1, +\infty)$.

IV. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

Ф. 278; 287; 288 (во всех задачах решить уравнения, исследовать особые решения, построить интегральные кривые).
С. 6: 7.

5. В задаче **Ф.** 287 найти решения, удовлетворяющие условиям:
а) $y(0) = -1, y(5) = 6;$
б) $y(0) = -1, y(4) = 4.$

6. Решить уравнение $(y')^2 = 4y^3(1 - y)$, исследовать особые решения, построить интегральные кривые.

7.* Для уравнения $(2(y'+\alpha)^2+2(y'+\alpha)+1)e^{2y'}-4y=0$:

а) при произвольном $\alpha\in\mathbb{R}$ найти дискриминантное множество;

б) выяснить, при каких α дискриминантное множество содержит решение уравнения.

V. (для ФБМФ(ПМФ) и ФЭФМ) Элементы вариационного исчисления

С. 19: 5; 19; 36.

8. Решить простейшую вариационную задачу:

$$J(y)=\int_0^1((y')^2-8xy'y)dx,\ y(0)=1, y(1)=\operatorname{ch}(2).$$

$\boxed{38+4^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 09–14 декабря)

I. Уравнения с постоянными коэффициентами

С. 8: 3; 7; 12; <u>23</u>; 31; 35; <u>47</u>; 56; 107; 131; <u>153</u>.

Ф. 593; 598; 610*; 613; 615; 617.

1. Решить уравнение $y''-ay+2y=e^x\cos x$, где $a\in\mathbb{R}$ – действительный параметр.

II. Линейные системы с постоянными коэффициентами

С. 11: 1; 5; 12; 23; 31; 46; <u>68</u>; 79; 88; 154; <u>159</u>; 183.

Ф. 824*.

III. Матричная экспонента

С. 11: 117; 124; <u>128</u> (для каждой системы найти решение, удовлетворяющее начальному условию $x(0)=y(0)=2$).

2. Решить задачу Коши: $\dot{\bar{x}}=A\bar{x}$, $\bar{x}(0)=\bar{x}_0$, где $A=\begin{pmatrix}0&0&-a\\0&0&a\\a&a&0\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, и $\bar{x}_0\in\mathbb{R}^3$ — заданные число и столбец, $\bar{x}(t)=(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))^T$ — искомая вектор-функция.

3. а) Записать (в векторном виде) общее решение системы $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A в базисе $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \overline{h_3}, \overline{h_4}, \overline{h_5}$ имеет вид $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

б) Найти матрицу $e^{A'}$.

4.* Доказать формулу: $\det e^A = e^{\mathrm{tr} A}$.

IV. Операционный метод

С. 8: 172; <u>182</u>.

С. 11: <u>189</u>; 194.

$\boxed{38+3^*}$

Составитель задания ассистент Ю. С. Резниченко