УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2024 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Введение в математический анализ**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»,
16.03.01 «Техническая физика»,
19.03.01 «Биотехнология»
физтех-школы: **ФАКТ, ФЭФМ, ФБМФ, ФРКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 1

лекции — 60 часов
практические (семинарские) занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
теор. курс — 120 часов

Программу составили:
д. ф.-м. н., профессор Я. М. Дымарский
д. ф.-м. н., профессор Л. Н. Знаменская
к. ф.-м. н., доцент Е. Ю. Редкозубова
к. ф.-м. н., доцент В. П. Ковалев

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 11 апреля 2024 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Действительные числа. Отношения неравенства между действительными числами. Свойство Архимеда. Плотность множества рациональных чисел во множестве действительных чисел.

   (*Для потоков М.О. Голубева и Е.Ю. Редкозубовой*: аксиомы действительных чисел, аксиома непрерывности.)

   Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу). Арифметические операции с действительными числами. Представление действительных чисел бесконечными десятичными дробями. Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.

2. Предел числовой последовательности. Единственность предела. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Число e. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Бесконечно большие последовательности.

3. Подпоследовательности, частичные пределы. Верхний и нижний пределы числовой последовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.

4. Предел функции одной переменной. Определения по Гейне и по Коши, их эквивалентность. Свойства пределов функции. Различные типы пределов. Критерий Коши существования конечного предела функции. Теорема о замене переменной под знаком предела. Существование односторонних пределов у монотонной функции.

5. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций. Односторонняя непрерывность. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Непрерывность сложной функции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.

6. Свойства функций, непрерывных на отрезке (компакте) — ограниченность, достижение точных верхней и нижней граней. Теорема о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции. Теорема об обратной функции.

7. Непрерывность элементарных функций. Определение показательной функции, ее свойства. Тригонометрические функции. Замечательные пределы, следствия из них.

8. Сравнение величин (символы o, O, $\sim$). Вычисление пределов при помощи выделения главной части в числителе и знаменателе дроби.

9. Производная функции одной переменной. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость

функции в точке, дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Дифференцируемость параметрически заданной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменной.

10. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n-й производной произведения. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменной. Дифференциалы высших порядков.

11. Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума). Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$. (*Для потоков Я.М. Дымарского и Е.Ю. Редкозубовой*: теорема о промежуточных значениях производной (теорема Дарбу).)

12. Применение производной к исследованию функций. Необходимые и достаточные условия монотонности, достаточные условия локального экстремума в терминах первой производной. Достаточные условия локального экстремума в терминах второй и высших производных. Выпуклость, точки перегиба. Построение графиков функций — асимптоты, исследование интервалов монотонности и точек локального экстремума, интервалов выпуклости и точек перегиба.

13. Комплексные числа. Модуль и аргумент, тригонометрическая форма. Арифметические операции с комплексными числами. Извлечение корня. Экспонента с комплексным показателем. Формула Эйлера. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и неприводимые квадратичные множители. Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей.

14. Первообразная и неопределенный интеграл. Линейность неопределенного интеграла, интегрирование подстановкой и по частям. Интегрирование рациональных функций. Основные приемы интегрирования иррациональных и трансцендентных функций.

15. (*Для потока М.О. Голубева*: линейное, евклидово, нормированное и метрическое пространства, пространство $\mathbb{R}^n$. Открытые, замкнутые и компактные множества.)

16. Элементы дифференциальной геометрии. Кривые на плоскости и в пространстве. Гладкие кривые, касательная к гладкой кривой. Теорема Лагранжа для вектор-функций. Длина кривой. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой. Формулы Френе.

Литература

Основная

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2014.
2. *Дымарский Я. М.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : МФТИ, 2020.
3. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : МФТИ, 2011.
4. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. Введение в математический анализ. — Москва : МФТИ, 2017.
5. *Редкозубов В. В.* Лекции по математическому анализу. Функции одной переменной. — Москва : МФТИ, 2023.
6. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : МФТИ, 2007.
7. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : Физматлит, 2004.

Дополнительная

8. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. — 5-е изд. — Москва : Дрофа, 2004.
9. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2004.
10. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2000.
11. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Т 1, 2. — Москва : Наука–Физматлит, 1998.
12. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.
13. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. 1. — Москва : Наука, 1981.
14. *Рудин У.* Основы математического анализа. — Москва : Мир, 1976.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Предел, непрерывность, дифференцируемость: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С1)
2. Сборник задач по математическому анализу. Т.2. Интегралы. Ряды: учебное пособие / под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С2)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.

2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 7-12 октября)

I. Производная

С1, §13: 33; 78; 106; 146.

Т.1. Найдите производную функции (ответ не упрощать)

$$y = \left(\frac{\operatorname{tg} \sqrt{1 - \log_3 2x}}{\operatorname{cth}\left(x^3 + 3e^{x^4}\right)} \right)^{\arccos 2x^2}.$$

II. Неопределенный интеграл

С2, §1: 2(16); 12(2); $\underline{13(7)}$; 15(5, 11); 17(4); 23(5); $\underline{24(3)}$.

III. Действительные числа

С1, §3: $\underline{4}$; 8; 10.

Т.2. Найдите сумму $1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n$.

IV. Последовательности. Предел последовательности

С1, §7: 275(4); 276(5); $\underline{279(1)}$; 299(2); $\underline{300(3)}$.

С1, §8: 2(3) (по определению); 13(3); $\underline{25(3)}$; 27*; $\underline{28}$; 39(3); 46; 53(6).

С1, §8: 7; 60 (для всех $a > 0$); 63(4); $\underline{64(3)}$; 67; 71(1); 164(1); 220*.

С1, §8: 141(2); $\underline{143(1)}$; 147(5); $\underline{158}$; 90(3); $\underline{91}$; 100(3); $\underline{119}$; $\underline{120}$; 117(1); 246(1, 2, 3*).

V. Функции. Предел функции. Непрерывность

С1, §7: 218(5); 219(4).

С1, §9: 3; 8(1); 16(2, 3); 18(1, 3); 25(8); $\underline{30(2)}$; 36(1); $\underline{61}$.

С1, §10: $\underline{5(9)}$ (по определению); 14; $\underline{22}$; 41(1); $\underline{42}$; 47(2)*; 56(4); 65; 66*; 76; $\underline{97(2)}$.

Т.3. Пусть функция $f\colon [a, b] \to [a, b]$ непрерывна. Докажите, что найдется такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = c$.

$\underline{\text{Т.4}}$. Приведите пример разрывной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая отображает любой отрезок в отрезок.

Т.5*. Докажите, что множество всех вещественных чисел, которые можно записать в виде десятичной дроби, в которую входят только цифры 4 и 5, несчётно.

Рекомендации по решению
первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**С1, §13:**	33; 78; 106; 146; Т.1.
	С2, §1:	2(16); 12(2); 13(7); 15(5, 11); 17(4); 23(5); 24(3).
2 неделя	**С1, §3:**	4; 8; 10; Т.2.
	С1, §7:	275(4); 276(5); 279(1); 299(2); 300(3).
	С1, §8:	2(3); 13(3); 25(3); 27^*; 28; 39(3); 46; 53(6).
3 неделя	**С1, §8:**	7; 60; 63(4); 64(3); 67; 71(1); 164(1); 220^*.
	С1, §8:	141(2); 143(1); 147(5); 158; 90(3); 91; 100(3); 119; 120; 117(1); $246(1, 2, 3^*)$.
4 неделя	**С1, §7:**	218(5); 219(4).
	С1, §9:	3; 8(1); 16(2, 3); 18(1, 3); 25(8); 30(2); 36(1); 61.
5 неделя	**С1, §10:**	5(9); 14; 22; 41(1); 42; $47(2)^*$; 56(4); 65; 66^*; 76; 97(2); Т.3; Т.4; Т.5*.

$\boxed{68 + 6^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 18–23 ноября)

I. Дифференцируемость. Дифференциал

С1, §13: 179(2); 197(5); 201(3); 214(2); $\underline{173}$.

С1, §14: 10(3).

II. Производные и дифференциалы высших порядков

С1, §15: 1(6); 10(4); $\underline{13(1)}$; 14(7); 22(4); 24(9, 15); $25(3, \underline{7}, 10)$; 26(2).

III. Теоремы о среднем

С1, §16: $\underline{5}$; 15(4); $\underline{19}$; $\underline{33}$; 30; 20^*.

Т.1. Функция f непрерывно дифференцируема на $[2024, 2028]$. Докажите, что существует точка $x \in (2024, 2028)$, для которой $f'(x) < \operatorname{ch}^2 f(x)$.

Т.2. Функция f непрерывна на $[a, b)$ и дифференцируема на (a, b). Покажите, что если существует $\lim\limits_{x \to a+0} f'(x)$, то существует $f'_+(a) = f'(a + 0)$.

IV. Формула Тейлора

С1, §9: $50(\underline{1}, 2)$; 51(1).

Т.3. Докажите, что если при $x \to 0$ верно $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) \sim h(x)$, то $f(x) = o(h(x))$ при $x \to 0$.

$\underline{\text{Т.4}}$. Упростите выражение $(2x - 3x^4 + o(x^4))(1 - x + 2x - x^3 + o(x^3))$ при $x \to 0$.

C1, §18: 2(6); 3(5); 4(7); 5(3); 2(4); 14(3); 20(6); 30(1); 38(6); 39(7).

T.5. Представьте формулой Маклорена до $o(x^6)$ функции:
а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{arctg} x$; в) $y = \arcsin x$; г) $y = \operatorname{th} x$.

T.6*. Пусть функция f строго монотонна и дифференцируема n раз в окрестности нуля. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $f(x) = x + ax^n + o(x^n)$ при $x \to 0$. Верно ли, что $f^{-1}(y) = y - ay^n + o(y^n)$ при $y \to 0$?

V. Вычисление пределов и другие приложения формулы Тейлора

C1, §17: 32; 49; 63; 76; 80*.

C1, §19: 7(3); 9(6); 14(5); 22(2); 29(4); 47(5); 58(3)*.

T.7. Найдите многочлен Тейлора функции e^x в нуле, который позволял бы вычислить значения e^x на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 2$ с абсолютной точностью до 10^{-3}.

C1, §23: 67*.

Рекомендации по решению второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**C1, §13:** 179(2); 197(5); 201(3); 214(2); 173. **C1, §14:** 10(3). **C1, §15:** 1(6); 10(4); 13(1); 14(7); 22(4).
2 неделя	**C1, §15:** 24(9, 15); 25(3, 7, 10); 26(2). **C1, §16:** 5; 15(4); 19; 33; 30; 20*; T.1; T.2.
3 неделя	**C1, §9:** 50(1, 2); 51(1); T.3; T.4. **C1, §18:** 2(6); 3(5); 4(7); 5(3); 2(4); 14(3); 20(6); 30(1).
4 неделя	**C1, §18:** 38(6); 39(7); T.5; T.6*. **C1, §17:** 32; 49; 63; 76; 80*.
5 неделя	**C1, §19:** 7(3); 9(6); 14(5); 22(2); 29(4); 47(5); 58(3)*; T.7. **C1, §23:** 67*.

$\boxed{50 + 5^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 9–14 декабря)

I. Равномерная непрерывность

C1, §12: 4(4)(по определению); 2(1, 2); 1(5); 17; 21; 23; 25; 28*; 29*.

T.1. Пусть функция f дифференцируема на множестве $I = [a, +\infty)$. Докажите следующие утверждения:

а) если f' ограничена на I, то f равномерно непрерывна на этом множестве;

б) если f' бесконечно большая при $x \to +\infty$, то f не является равномерно непрерывной;

в)* если f' неограничена, но не является бесконечно большой на I, то f может быть, а может и не быть равномерно непрерывной на I.

С1, §12: 3(7, 9).

Т.2. Исследуйте на луче $(0, +\infty)$ равномерную непрерывность функций

а) $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$; б) $f(x) = xe^{\sin x}$.

II. Исследование функций

С1, §20: 14; 33; 41(5); 57; 69(2); 70(4, 5, 7); 73*.

Т.3. Выясните, что больше e^π или π^e?

III. Построение графиков функций

С1, §21: 4(5); 5(2); 12(8, 10); 14(3); 15(6); 23(4)*; 31(1)*.

IV. Элементы дифференциальной геометрии

С1, §24: 50; 51; 78(3); 80(1); 81(6); 109(1, 3); 122(1); 118*.

Рекомендации по решению третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	**С1, §12:** 4(4); 2(1, 2); 1(5); 17; 21; 23; 25; 28*; 29*; Т.1. **С1, §12:** 3(7, 9); Т.2.
2 неделя	**С1, §20:** 14; 33; 41(5); 57; 69(2); 70(4, 5, 7); 73*; Т.3. **С1, §21:** 4(5); 5(2); 12(8, 10); 14(3); 15(6); 23(4)*; 31(1)*.
3 неделя	**С1, §24:** 50; 51; 78(3); 80(1); 81(6); 109(1, 3); 122(1); 118*.

$\boxed{35 + 6^*}$

Задания составили: доцент Н. А. Гусев, доцент Е. Ю. Редкозубова