УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2025 г.

# ПРОГРАММА

по дисциплине: **Дифференциальные уравнения**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 4

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 90 часов

Программу составил
к. ф.-м. н., доцент О. А. Пыркова

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 17 октября 2024 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

## Программа (годовой курс)

1. **Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнения Бернулли и Риккати. Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.
   Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Использование однопараметрических групп преобразований для понижения порядка дифференциальных уравнений (по усмотрению лектора).

2. **Задача Коши.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения $n$-го порядка в нормальном виде. Теоремы о продолжении решения. Характер зависимости решения задачи Коши от параметров и начальных данных: непрерывность, дифференцируемость (без доказательства). Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение.

3. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Формула общего решения линейного однородного уравнения $n$-го порядка. Отыскание решения линейного неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части. Уравнение Эйлера.
   Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы системы. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме (без доказательства). Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы системы. Отыскание решения линейной неоднородной системы уравнений в случае, когда неоднородность представлена квазимногочленом (без доказательства).
   Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем уравнений. Преобразование Лапласа и его применение для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (по усмотрению лектора). Исследование краевых задач для линейных уравнений второго порядка при наличии малого параметра при старшей производной (по усмотрению лектора).

4. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши

для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения $n$-го порядка в нормальном виде.

Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем. Определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Метод вариации постоянных и формула Коши для линейной неоднородной системы уравнений. Следствия для линейных уравнений $n$-го порядка.

Теорема Штурма и следствия из нее. Теорема Кнезера.

Уравнение Бесселя и некоторые свойства его решений (по усмотрению лектора). Асимптотическое поведение решений при больших значениях аргумента (по усмотрению лектора).

5. **Автономные системы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Свойства решений и фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейных автономных систем второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерных автономных нелинейных систем. Теорема о выпрямлении траекторий (*доказательство по усмотрению лектора*).

   Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Достаточные условия асимптотической устойчивости.

6. **Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.** Первые интегралы автономных систем. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов.

   Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

7. **Элементы вариационного исчисления.** Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Задача со свободными концами, задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, задача для функционалов, содержащих производные высших порядков. Условный экстремум: изопериметрическая задача, задача Лагранжа (без доказательства).

## Список литературы

### *Основная*

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Москва : URSS, ЛЕНАНД, 2023.
2. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — Москва : URSS, Ленанд, 2022, http://bookfi.org/book/791964.
3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — Москва : URSS, 2022.
4. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — Москва : Лаборатория базовых знаний, 2020.
5. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Москва : URSS, 2023.
6. *Умнов А. Е., Умнов Е. А.* Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : МФТИ, 2021, http://www.umnov.ru.

### *Дополнительная*

7. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — Москва : Физматгиз, 1961, http://techlibrary.ru/bookpage.htm.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : Физматлит, 2009.
9. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — Москва : Физматгиз, 2005.
10. *Купцов Л. П., Николаев В. С.* Курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2015.
11. *Ипатова В. М., Пыркова О. А., Седов В. Н.* Дифференциальные уравнения. Методы решений. — Москва : МФТИ, 2012.

# ЗАДАНИЯ

## Список литературы

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. Романко В. К. — Москва : ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, Физматлит, 2002, 2006. (цитируется — С)
2. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва : ЛКИ, 2008; — Москва : ЛИБРОКОМ, 2011, 2013. (цитируется — Ф)

## Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные $^*$, являются необязательными для всех студентов.

# ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–21 марта)

## I. Вариационное исчисление

**С. §19:** 12; 38; 75; <u>102</u>.
**С. §20.1:** 2; <u>9</u>; 14.
**С. §20.2:** 4.
**С. §20.3:** 5.
**С. §21:** 7.

**1.** Исследовать на экстремум при всех значениях вещественного параметра $a$:
а) $J\,[y] = \int_0^{\pi/2}(y'^2 - ay^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$;
б)* $J\,[y] = \int_0^{\pi/2}(y'^2 - ay^2)dx$, $y(0) = 0$.

## II. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

**Ф.:** <u>667</u>; 668; 677.
**С. §9:** 6; 16; 53; 47*; 73 (найти общее решение линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, используя формулу Лиувилля–Остроградского).
**Ф. §22:** 47.

**<u>2</u>.** Доказать, что уравнение Бесселя $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y = 0$, где $\nu = \text{const}$ на $(0;\infty)$, не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе со своими первыми производными.

**3*.** Доказать, что для решения задачи Коши $y'' + e^{\frac{2}{x+1}}y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ выполнено неравенство: $|y(x)| \leq e^{\frac{x}{x+1}}$ при $x \geq 0$.

## III. Теорема сравнения Штурма

**Ф.:** <u>723</u>; 726.
**С. §10:** <u>2</u>; <u>3</u>; 6.

**<u>4</u>.** Пусть функция $q(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $q(x) \leq 0$. Доказать, что краевая задача $y'' + q(x)y = 0, y(x_1) = a$, $y(x_2) = b$, при любых $a, b, x_1 \neq x_2$ имеет решение и это решение единственно.

**<u>5</u>.** Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения

$$y'' + 2x^2y' + (2x+1)y = 0$$

имеет на действительной оси не более трех нулей.

**6.** Доказать, что для любого решения уравнения

$$y'' + (2 + \cos 3x)y = 0$$

существует точка $\xi \in [-1; 6]$ такая, что $y'(\xi) = 0$.

**7.** Доказать, что:

а) любое нетривиальное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu = \text{const}$$

имеет бесконечное число нулей на промежутке $(0, +\infty)$;

б)* расстояние между последовательными нулями $|x_{n+1} - x_n|$ любого указанного выше решения стремится к $\pi$ при $n \to +\infty$.

$\boxed{29+4^*}$

## ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–16 мая)

### I. Исследование поведения фазовых траекторий

Во всех задачах изобразить фазовые траектории, для фокусов и узлов определить, являются ли они устойчивыми или неустойчивыми.

**Ф.:** 971; 972; 973; 974; 975; 976*.
**С. §13:** 39; 48; 57.
**Ф. §25:** 161.

### II. Устойчивость по Ляпунову

**Ф.:** 894; 920; 889*.

### III. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем

**С. §14:** 2; 12.
**Ф.:** 1164.

**<u>1</u>.** Проверить, что функция $u = y + xz^2$ является первым интегралом системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(2xz^2 + 2y + 3z), \\ \dot{y} = xz^3, \\ \dot{z} = z(xz^2 + y + z). \end{cases}$$

Найти все первые интегралы системы.

**2.** Найти все первые интегралы уравнений и систем уравнений. Затем, используя их, исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости. В пункте в) найти также интегральные кривые системы.

а) $\ddot{x} + \sin x = 0$; б) $\ddot{x} - x + x^2 = 0$; в) $\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 1; \end{cases}$

**С. §16:** 6; 26.

**3*.** Дифференциальное уравнение $\ddot{x} + x^5 = 0$ описывает колебания, период $T$ которых зависит от начальных значений: $T = T(x(0); \dot{x}(0))$. Найти отношение $T(1,1)/T(2,2)$.

## IV. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

**С. §17:** 4; <u>16</u>; 45; 79; 85.

**<u>4</u>.** Найти общее решение уравнения $2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Затем в пунктах а), б) и в) решить соответствующую задачу Коши. Объяснить получившиеся результаты:

а) $u = 10$ при $3x - 2y = 5$;
б) $u = e^x$ при $3x - 2y = 5$;
в) $u = \sin y$ при $x = 0$.

**5*.** Найти поверхность, проходящую через кривую $y = x, z = 2y + y^3$ и обладающую свойством, что любая касательная плоскость пересекает ось Ох в точке с абсциссой, вдвое меньшей абсциссы точки касания.

## V. Зависимость решений от параметра и начальных условий

**Ф.:** 1064 <u>1068</u>; 1070*.

## VI. Повторение

**С. §6:** 35.
**С. §7:** 56.
**С. §8:** 126.
**С. §9:** 34.
**С. §11:** 55.
**С. §13:** 49.
**С. §17:** 84.
**С. §20.1:** 8.

$\boxed{38+5^*}$

---

Задания составили: к. ф.-м. н., доцент С. Д. Животов
к. ф.-м. н., доцент О. А. Пыркова