

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе

А.А. Воронов

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Интегрируемые системы гамильтоновой механики
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Современная механика и робототехника кафедра теоретической механики кафедра теоретической механики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: С.В. Соколов, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой

Программа обсуждена на заседании кафедры теоретической механики 09.04.2020

Аннотация

Проблема точного интегрирования систем дифференциальных уравнений - одна из самых популярных тем научных исследований, начиная с классических работ, посвященных задачам небесной механики, заканчивая современными исследованиями бесконечных серий интегралов движений нелинейных уравнений математической физики. Основным орудием в изучении проблем этого круга является идея симметрии. Тем не менее после работ Пуанкаре стало ясно, что свойство интегрируемости связано с особенностями глобального поведения траекторий. В курсе предполагается рассмотреть вопросы грубых (топологических) препятствий к интегрируемости, а также влияние резонансов. Освоенные математические методы, изложенные в курсе, позволят проводить строгие доказательства не интегрируемости многих актуальных проблем динамики.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

познакомить слушателей с классическими и современными результатами проблемы интегрируемости гамильтоновых систем, которые возникают естественным образом в задачах аналитической, небесной механики, а также в задачах динамики твердых тел и идеальной жидкости.

Задачи дисциплины

изложить на современном языке основы гамильтоновой механики, рассмотреть в систематическом виде методы точного интегрирования уравнений Гамильтона, а также различные препятствия к интегрируемости уравнений Гамильтона.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- ☐ Методы математического моделирования в геометрии, кинематике и динамике;
- ☐ различные методы аналитической геометрии, линейной алгебры, теории дифференциальных уравнений.

уметь:

- ☐ Составлять уравнения динамики механических и вихревых систем;
- ☐ осваивать новые предметные области, связанные с математическим моделированием различных систем.

владеть:

- ☐ Навыками освоения большого объема информации;
- ☐ культурой математического моделирования динамических процессов в сложных системах;
- ☐ навыками постановки типовых задач и задач повышенной трудности теоретического плана с использованием методов дифференциальных уравнений.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Уравнения Гамильтона и алгебры Ли	3	3		5
2	Интегралы и группы симметрий	3	3		4
3	Топология конфигурационных пространств	3	3		5
4	Метод Пуанкаре	4	4		5
5	Метод Зигеля	3	3		5
6	Метод малого параметра Пуанкаре	4	4		8
7	Метод Биркгофа	3	3		5
8	Топология фазовых многообразий	4	4		4
9	Отображение момента	3	3		4
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. Уравнения Гамильтона и алгебры Ли

Уравнения Гамильтона. Уравнения Эйлера-Пуассона на алгебрах Ли. Примеры: колебания, движение твердого тела с голономными и неголономными связями, задача N тел, некоторые задачи математической физики.

2. Интегралы и группы симметрий

Интегралы. Инвариантные соотношения. Группы симметрий. Полная интегрируемость. Примеры. Разделение переменных. Представление Гейзенберга. Алгебраическая интегрируемость. Теория возмущений. Нормальные формы.

3. Топология конфигурационных пространств

Топология конфигурационного пространства интегрируемой системы. Геометрические препятствия к интегрируемости. Топологические препятствия к существованию линейных интегралов. Симметрии. Случай систем с двумя степенями свободы.

4. Метод Пуанкаре

Метод Пуанкаре. Группы симметрий. Критерий интегрируемости для тригонометрического потенциала. Рождение изолированных периодических решений. Асимптотические поверхности и условия их расщепления. Бифуркации сепаратрис.

5. Метод Зигеля

Метод Пуанкаре. Группы симметрий. Критерий интегрируемости для тригонометрического потенциала. Рождение изолированных периодических решений. Асимптотические поверхности и условия их расщепления. Бифуркации сепаратрис.

6. Метод малого параметра Пуанкаре

Метод малого параметра Пуанкаре. Группы монодромии гамильтоновых систем с однозначными интегралами.

7. Метод Биркгофа

Метод Биркгофа. Возмущения гамильтоновых систем с некомпактными инвариантными поверхностями. Влияние гироскопических сил.

8. Топология фазовых многообразий

Основные классы топологий фазовых многообразий.

9. Отображение момента

Анализ бифуркаций.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, интерактивная доска).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Математические методы классической механики [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / В. И. Арнольд .— 5-е изд., стереотип. — М. : Эдиториал УРСС, 2003 .— 416 с.
2. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. И. Арнольд .— М. : Наука, 1978 .— 304 с.
3. Теоретическая механика [Текст] : учеб. пособие для ун-ов / А. П. Маркеев .— М. : Наука, 1990 .— 415 с.
4. Основы теоретической механики [Текст] / В. Ф. Журавлев .— 2-изд., перераб. — М. : Физматлит, 2001 .— 320 с.

5. Теоретическая гидромеханика [Текст] : 2 ч. Ч. 1 : учеб. пособие для вузов / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе ; под ред. И. А. Кибеля .— 6-е изд., испр. и доп. — М : Физматгиз, 1963 .— 583 с.
6. Гидродинамика [Текст]/Г. Ламб , -М. ; Л., Гостехтеоретиздат, 1947

Дополнительная литература

1. Общая теория вихрей [Текст]/В. В. Козлов, -М. ; Ижевск, Ин-т компьютер. исследований, 2013

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».

<http://benran.ru> – библиотека по естественным наукам Российской академии наук

https://mipt.ru/education/chair/theoretical_mechanics/ - сайт кафедры теоретической механики МФТИ

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также программные пакеты Wolfram Mathematica и Matlab.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Успешное освоение курса требует большой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе);
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях,
- подготовку к контрольным, самостоятельным работам и тестам.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в результате анализа итогов контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладные математика и физика
профиль подготовки: Современная механика и робототехника
кафедра теоретической механики
кафедра теоретической механики
курс: 1
квалификация: магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Разработчик: С.В. Соколов, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Интегрируемые системы гамильтоновой механики» обучающийся должен:

знать:

- ☐ Методы математического моделирования в геометрии, кинематике и динамике;
- ☐ различные методы аналитической геометрии, линейной алгебры, теории дифференциальных уравнений.

уметь:

- ☐ Составлять уравнения динамики механических и вихревых систем;
- ☐ осваивать новые предметные области, связанные с математическим моделированием различных систем.

владеть:

- ☐ Навыками освоения большого объема информации;
- ☐ культурой математического моделирования динамических процессов в сложных системах;
- ☐ навыками постановки типовых задач и задач повышенной трудности теоретического плана с использованием методов дифференциальных уравнений.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Показать, что скобка Ли-Пуассона алгебры группы движений твердого тела вырождена. Найти аннуляторы этой алгебры.

2. Показать, что если имеется n полей симметрии, то уравнения движения допускают столько же линейных интегралов.

Темы курсовых:

1. Получить и проанализировать полный набор первых интегралов одного из классических интегрируемых случаев классической механики
2. Получить и проанализировать полный набор первых интегралов одного из классических интегрируемых случаев задач вихревой динамики
3. Построить бифуркационную диаграмму особенностей отображения момента некоторой гамильтоновой системы

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Для линейно гамильтоновой системы найти рекуррентные соотношения для полиномиальных первых интегралов. Показать их инволютивность и независимость. Остаток расхождения решения.
2. Показать, что в окрестности любой неособой точки векторного поля система может быть представлена в гамильтоновой форме.
3. Показать, что для пары Лакса системы дифференциальных уравнений, собственные числа матрицы Лакса являются первыми интегралами этой системы.
4. Найти представление Гейзенберга задачи Эйлера о свободном вращении твердого тела.
5. Рассмотреть группу движений твердого тела в трехмерном евклидовом пространстве и соответствующую ей алгебру. Найти структурные константы этой алгебры.

Билет:

1. Для линейно гамильтоновой системы найти рекуррентные соотношения для полиномиальных первых интегралов. Показать их инволютивность и независимость. Остаток расхождения решения.
2. Найти представление Гейзенберга задачи Эйлера о свободном вращении твердого тела.

Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Подготовка к экзамену самостоятельная: перечислены задачи, решение которых каждый студент излагает полностью.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой, конспектами лекций.

Экзамен может проводиться по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, или путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.