

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Проректор по учебной работе и  
довузовской подготовке**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Современные методы теории интегрируемых систем
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Современная механика и робототехника кафедра теоретической механики кафедра теоретической механики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: С.В. Соколов, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой

Программа обсуждена на заседании кафедры теоретической механики 09.04.2020

## Аннотация

Исследования интегрируемых систем начато в классических работах по аналитической механике. Далее центр исследований переместился на изучение качественного и стохастического поведения сложных динамических систем. В середине XX столетия появи-лись пионерские работы Гарднера, Грина, Крускала, Миуры, Захарова Фаддева, Лакса, посвященные исследованиям явно решаемой бесконечномерной динамической, возникающий при изучении уравнения Кортевега-де Фриза. В предлагаемом курсе дается введение в круг математических методов и подходов, применяемых при исследовании интегрируемых систем, в частности с методом классической  $\tau$ -матрицы. Рассматривается геометрическая конструкция, объединяющая ряд важных характеристик, типичных для большинства известных примеров интегрируемых систем.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

познакомить слушателей с современными математическими методами, используемыми для описания интегрируемых систем математической физики, в частности, рассмотрению конечномерных и бесконечномерных интегрируемых моделей, возникающих при описании систем классической механики, гидродинамики, квантовой механики.

#### Задачи дисциплины

изложить общий подход, применяемый как к классическим интегрируемым гамильтоновым системам, так и интегрируемым системам, возникающим при исследованиях уравнений со скрытой симметрией.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Методы математического моделирования в геометрии, кинематике и динамике;  
различные методы аналитической геометрии, линейной алгебры, теории дифференциальных уравнений.

уметь:

Составлять уравнения динамики механических и вихревых систем;  
осваивать новые предметные области, связанные с математическим моделированием различных систем.

владеть:

Навыками освоения большого объема информации;  
культурой математического моделирования динамических процессов в сложных системах;  
навыками постановки типовых задач и задач повышенной трудности теоретического плана с использованием методов дифференциальных уравнений.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Метод классической $g$ -матрицы	6	6		5
2	Аффинные алгебры Ли и представления Лакса	6	6		10
3	Аффинные алгебры и алгебраическая геометрия	6	6		10
4	Алгебры токов и уравнения в частных производных	6	6		10
5	Разностные лагранжевы уравнения и пуассоновы группы	6	6		10
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

###### 1. Метод классической $g$ -матрицы

Метод классической  $g$ -матрицы. Пуассоновы и симплектические многообразия. Теорема факторизации. Тождества Янга-Бакстера. Градуировки и орбиты. Цепочки Тоды.

###### 2. Аффинные алгебры Ли и представления Лакса

Аффинные алгебры Ли и представления Лакса. Структура аффинных алгебр. Периодические цепочки Тоды. Многополюсные лагранжевы уравнения. Интегрируемые волчки.

### 3. Аффинные алгебры и алгебраическая геометрия

Аффинные алгебры и алгебраическая геометрия. Спектральные уравнения и линеаризация лагранжевых уравнений. Полнота интегралов движения. Функции Бейкера-Ахиезера. Обобщенные якобианы. Уравнения с эллиптическим спектральным параметром.

### 4. Алгебры токов и уравнения в частных производных

Алгебры токов и уравнения в частных производных. Уравнения нулевой кривизны. Двойные алгебра петель. Локальные законы сохранения. Одевающие преобразования и конечнозонные операторы. Коммутирующие потоки и единая гамильтонова система на полиномиальных пучках. Алгебра Вирасоро и одномерные операторы Шредингера.

### 5. Разностные лагранжевы уравнения и пуассоновы группы

Разностные лагранжевы уравнения и пуассоновы группы. Уравнения нулевой кривизны на решетке. Классификация  $g$ -матриц и теория расширений линейных операторов. Скобки Складина. Скобки Гельфанда-Дикого. Дубль Дринфельда. Лагранжевы уравнения на группах.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, интерактивная доска).

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Математические методы классической механики [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / В. И. Арнольд . — 4-е изд., испр. — М. : Эдиториал УРСС, 2000 . — 408 с.

### Дополнительная литература

1. Гамильтонов подход в теории солитонов [Текст]/Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фадеев, -М., Наука, 1986

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://lib.mipt.ru/> – электронная библиотека Физтеха  
<http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».  
<http://benran.ru> – библиотека по естественным наукам Российской академии наук  
[https://mipt.ru/education/chair/theoretical\\_mechanics/](https://mipt.ru/education/chair/theoretical_mechanics/) - сайт кафедры теоретической механики МФТИ

## 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также программные пакеты Wolfram Mathematica и Matlab.

## 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Успешное освоение курса требует большой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой.

Самостоятельная работа включает в себя:

– чтение и конспектирование рекомендованной литературы,

- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе);
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях,
- подготовку к контрольным, самостоятельным работам и тестам.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в результате анализа итогов контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Современная механика и робототехника кафедра теоретической механики кафедра теоретической механики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

**Разработчик:** С.В. Соколов, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Современные методы теории интегрируемых систем» обучающийся должен:

### знать:

Методы математического моделирования в геометрии, кинематике и динамике; различные методы аналитической геометрии, линейной алгебры, теории дифференциальных уравнений.

### уметь:

Составлять уравнения динамики механических и вихревых систем; осваивать новые предметные области, связанные с математическим моделированием различных систем.

### владеть:

Навыками освоения большого объема информации; культурой математического моделирования динамических процессов в сложных системах; навыками постановки типовых задач и задач повышенной трудности теоретического плана с использованием методов дифференциальных уравнений.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Для  $n$ -мерного комплексного линейного пространства со стандартной скобкой Пуассона и мультипликативной группы комплексных чисел, по модулю равных 1, показать, для стандартного гамильтонова действия группы на линейном пространстве, приведенное фактор-пространство по действию группы изоморфно  $(n-1)$ -мерному комплексному проективному пространству.
2. Для  $n$ -мерного комплексного линейного пространства со стандартной скобкой Пуассона и мультипликативной группы комплексных чисел, по модулю равных 1, описать дуальную пару пуассоновых отображений, связанную с действием группы на линейном пространстве.

Темы курсовых работ:

1. Представление интегрируемой системы в виде пары Лакса
2. Согласованные пуассоновы структуры и оператор рекурсии
3. Теория КдФ
4. Цепочка Тоды

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Описать все орбиты коприсоединенного представления группы треугольных матриц  $2 \times 2$ .
2. Для  $n$ -мерного комплексного линейного пространства со стандартной скобкой Пуассона и мультипликативной группы комплексных чисел, по модулю равных 1, показать, что стандартное действие группы на линейном пространстве является гамильтоновым.
3. Для  $n$ -мерного комплексного линейного пространства со стандартной скобкой Пуассона и мультипликативной группы комплексных чисел, по модулю равных 1, показать, что стандартное гамильтоново действие группы на линейном пространстве обладает отображением моментов заданным явным выражением.
4. Интегрируемость по Лиувиллю.
5. Полная интегрируемость КдФ.

Пример билета:

1. Случай Эйлера: классический случай интегрируемой по Лиувиллю системы
2. Что такое скобка Пуассона?

#### **Критерии оценивания**

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.



Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Подготовка к экзамену самостоятельная: перечислены задачи, решение которых каждый студент излагает полностью.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой, конспектами лекций.

Экзамен может проводиться по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, или путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.