

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Директор физтех-школы**  
**аэрокосмических технологий**  
**С.С. Негодяев**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Введение в функциональный анализ
<b>по направлению:</b>	Системный анализ и управление
<b>профиль подготовки:</b>	Системный анализ и управление в технических, экономических и социальных системах Физтех-школа Аэрокосмических Технологий кафедра логистических систем и технологий
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: В.В. Шаньков, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры логистических систем и технологий 04.06.2020

## Аннотация

В курсе рассматриваются идеи, методы, концепции, терминология функционального анализа. Обсуждаются вопросы становления и развития функционального анализа в результате взаимного влияния, объединения и обобщения идей и методов различных разделов классических математических дисциплин. Даются подходы, основанные на идеях и методах функционального анализа, к постановке и решению задач, которые возникают при анализе систем. Курс содержит в себе обсуждение базовых вопросов, разбор типовых задач и предполагает самостоятельную работу студента.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- формирование базовых математических знаний и навыков в области математического моделирования сложных систем, описываемых операторными уравнениями в метрических и нормируемых пространствах; формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

#### Задачи дисциплины

- формирование базовых знаний о структуре отображений и связанных с ними функциональных пространств;
- формирование общематематической культуры;
- формирование навыков самостоятельно ставить математическую задачу, применять на практике обобщённые алгоритмы поиска решений, анализировать, обосновывать и обобщать результаты.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ПК-1 Способен проводить исследование систем управления и их компонент	ПК-1.1 Владеет фундаментальными понятиями, законами и теориями системного анализа
	ПК-1.2 Имеет глубокое знание и понимание базовых математических дисциплин
	ПК-1.3 Владеет культурой постановки научной задачи и моделирования объектов и систем

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- все определения, приведенные в курсе;
- формулировки всех теорем, приведенные в курсе.

уметь:

- воспроизводить доказательства всех теорем, приведенные в курсе;
- решать и обосновывать все задачи заданий, приведенных в курсе.

владеть:

- используемой терминологией функционального анализа;
- используемым математическим аппаратом.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Операторы в метрических пространствах	6	6		6
2	Линейные операторы в нормированных пространствах	6	6		6
3	Линейные функционалы	6	6		6
4	Компактные операторы	4	4		4
5	Самосопряжённые операторы	4	4		4
6	Обобщённая теорема Арцела	4	4		4
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

###### 1. Операторы в метрических пространствах

Принцип сжимающих отображений. Доказательство принципа сжимающих отображений. Теорема о вложенных шарах. Доказательство теоремы о вложенных шарах. Теорема Бэра. Доказательство теоремы Бэра.

###### 2. Линейные операторы в нормированных пространствах

Эквивалентность ограниченности и непрерывности операторов. Принцип равномерной ограниченности. Доказательство принципа равномерной ограниченности. Теорема Банаха об обратном операторе. Ряд Неймана. Доказательство теоремы о ряде Неймана. Спектр и резольвентное множество оператора.

###### 3. Линейные функционалы

Теорема Хана-Банаха. Доказательство теоремы Хана-Банаха. Теорема Хана-Банаха для нормированных пространств. Теорема Рисса о представлении. Теорема об ортогональном разложении. Доказательство теоремы Рисса о представлении. Сопряжённые операторы. Естественное отображение. Эквивалентность слабой и сильной ограниченностей.

###### 4. Компактные операторы

Теорема о собственных элементах и значениях.

###### 5. Самосопряжённые операторы

Теорема Гильберта-Шмидта. Теорема о норме самосопряжённого оператора. Доказательство теоремы Гильберта-Шмидта.

## 6. Обобщённая теорема Арцела

Критерий предкомпактности. Доказательство обобщённой теоремы Арцела.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория для проведения семинарских занятий, оснащенная ноутбуком, мультимедиапроектором и экраном.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин .— М. ; Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2002, 2003 .— 316 с.
2. Краткий курс функционального анализа [Текст] / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев - М. Высшая школа, 1982
3. Функциональный анализ [Текст] : учебник для вузов / В. А. Треногин .— 4-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2007 .— 488 с.
4. Задачи по функциональному анализу [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. В. Власов, С. П. Коновалов, С. В. Курочкин ; М-во образов. РФ, Моск. физико-техн. ин-т .— М. : Изд-во МФТИ, 2000 .— 28 с.
5. Задачи и упражнения по функциональному анализу [Текст] / В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева - М. Физматлит, 2002

### Дополнительная литература

Фонд литературы базовой кафедры (организации):

1. Борzych Д.А. Элементарное введение в функциональный анализ: Теория, примеры и задачи с решениями. Более 200 подробно разобранных примеров и задач. URSS. 2019. 288 с. ISBN 978-5-9710-6498
2. Бородин П.А. Задачи по функциональному анализу. 2017. 336 с. ISBN 978-5-4439-1092-5.
3. Дерр В.Я. Функциональный анализ 2012. 468 с. ISBN 978-5-9916-1448-1.
4. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. Электронное издание. М.: МЦНМО, 2014. 560 с.
5. Смолин Ю.Н. Начальный курс функционального анализа. Изд. 1. 2017. 380 с. ISBN 978-5-9765-2381-4.

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. Электронная библиотека МФТИ: <http://lib.mipt.ru/>
2. Федеральный портал «Российское образование»: <http://www.edu.ru>
3. Библиотека по естественным наукам Российской академии наук: <http://benran.ru>

## 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

В образовательном процессе могут использоваться при необходимости дистанционные занятия и вебинары с использованием коммуникационного программного обеспечения Zoom, сервиса видеотелефонной связи Google Meet, веб-сервиса Google Класс.

## 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий курс «Введение в функциональный анализ», должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

По мере обучения студенту следует:

- выучить все определения и формулировки теорем;
- овладеть методами проведения доказательств теорем;
- овладеть алгоритмами получения и обоснования решений задач, разобранных на семинарах;
- самостоятельно решить остальные задачи заданий.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе, материалам сети Интернет), подготовку ответов на вопросы, предназначенные для самостоятельного изучения;
- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- подготовку к практическим занятиям и дифференцированному зачёту.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется на практических занятиях и в форме индивидуальных консультаций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Системный анализ и управление
<b>профиль подготовки:</b>	Системный анализ и управление в технических, экономических и социальных системах Физтех-школа Аэрокосмических Технологий кафедра логистических систем и технологий
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет	
<b>Разработчик:</b>	В.В. Шаньков, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ПК-1 Способен проводить исследование систем управления и их компонент	ПК-1.1 Владеет фундаментальными понятиями, законами и теориями системного анализа
	ПК-1.2 Имеет глубокое знание и понимание базовых математических дисциплин
	ПК-1.3 Владеет культурой постановки научной задачи и моделирования объектов и систем

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Введение в функциональный анализ» обучающийся должен:

### знать:

- все определения, приведенные в курсе;
- формулировки всех теорем, приведенные в курсе.

### уметь:

- воспроизводить доказательства всех теорем, приведенные в курсе;
- решать и обосновывать все задачи заданий, приведенных в курсе.

### владеть:

- используемой терминологией функционального анализа;
- используемым математическим аппаратом.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется в виде выполнения контрольной работы по отдельным разделам. Для прохождения контроля студент должен продемонстрировать знания основных определений; умение решать стандартные задачи, разобранные на семинарских занятиях.

Текущий контроль проводится в виде 2 контрольных работ.

Примеры вопросов на контрольной работе:

1. Доказать, что произвольное открытое подмножество прямой можно представить в виде объединения не более чем счетного числа попарно не пересекающихся интервалов (возможно бесконечных).
2. Описать все множества в метрическом пространстве, которые могут быть множеством нулей некоторой непрерывной функции ?
3. Доказать, что отрезок и окружность не гомеоморфны.
4. Доказать, что на вещественной прямой связными множествами являются только промежутки (отрезки, интервалы, полуинтервалы, включая бесконечные).
5. Доказать, что множество вещественных чисел является пополнением множества рациональных чисел.
6. Доказать, что всякая равномерно непрерывная функция на метрическом пространстве однозначно продолжается до непрерывной функции на его пополнении, и что это продолжение равномерно непрерывно.

7. Существует ли числовая функция, непрерывная в рациональных и разрывная в иррациональных точках отрезка  $[0,1]$  ?
8. Исследовать канторово множество на отрезке: найти его мощность, меру, установить его замкнутость, компактность, нигде не плотность, найти фрактальную размерность.
9. Доказать, что компактное метрическое пространство имеет конечный диаметр.
10. Доказать, что компактное метрическое пространство сепарабельно.
11. Доказать, что компактное подмножество метрического пространства замкнуто.
12. Доказать, что компакт нельзя изометрично отобразить на свое собственное подмножество.
13. Доказать, что две нормы, определенные на одном и том же линейном пространстве, эквивалентны тогда и только тогда, когда из сходимости последовательности по одной из норм следует ее сходимость по другой норме.
14. Доказать, что норма пространства  $C[a,b]$  не может порождаться никаким скалярным произведением.
15. Доказать, что любая последовательность вложенных непустых замкнутых выпуклых ограниченных множеств в гильбертовом пространстве имеет непустое пересечение.
16. Показать, что последовательность вложенных непустых замкнутых выпуклых ограниченных множеств в банаховом пространстве может иметь пустое пересечение.
17. Доказать, что гильбертово пространство строго выпукло (т.е. его единичная сфера не содержит отрезков положительной длины).
18. Исследовать «гильбертов кирпич»: доказать, что это замкнутое множество без внутренних точек; выяснить, является ли он поглощающим множеством, к каким его точкам можно провести опорную гиперплоскость.
19. Пусть  $X$  и  $Y$  — конечномерные нормированные пространства. Доказать, что любой линейный оператор из  $X$  в  $Y$  непрерывен.
20. Доказать, что в конечномерных нормированных пространствах слабая сходимость совпадает со сходимостью по норме.

Обучающийся должен проявить всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, усвоить основную литературу и быть знакомым с дополнительной литературой, рекомендованной программой дисциплины, усвоить взаимосвязь основных понятий дисциплины, решать предложенные преподавателем задачи.

Критерии оценивания по контрольной работе:

1 балл – успешное выполнение задания и использование научной терминологии, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;

0 баллов – неуспешное выполнение задания фрагментарные знания в рамках образовательного стандарта, неумение использовать научную терминологию дисциплины, наличие в ответе грубых стилистических и логических ошибок.

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Неравенства Гёльдера и Минковского для последовательностей.
2. Принцип сжимающих отображений.
3. Теорема о вложенных шарах.
4. Теорема Бэра.
5. Принцип равномерной ограниченности.
6. Теорема Банаха (построение кандидата на плотное множество).
7. Теорема Банаха (доказательство плотности кандидата и оценка нормы обратного оператора).
8. Теорема о замкнутости спектра.
9. Теорема об ограниченности спектра.
10. Теорема о ряде Неймана.
11. Теорема Хана-Банаха (этап построения какого-нибудь продолжения).



12. Теорема Хана-Банаха (этап продолжения на всё пространство).
13. Теорема Хана-Банаха для нормированных пространств.
14. Теорема Рисса о представлении.
15. Лемма об ортогональном разложении.
16. Теорема о норме сопряжённого оператора.
17. Теорема о норме естественного образа.
18. Обобщённая теорема о полноте сопряжённого пространства.
19. Теорема об эквивалентности сильной и слабой ограниченностей.
20. Теорема о собственных элементах и значениях компактного оператора.
21. Теорема о норме самосопряжённого оператора.
22. Теорема Гильберта-Шмидта (этап построения конечных систем).
23. Теорема Гильберта-Шмидта (этап исследования счётной системы).
24. Теорема о собственном элементе самосопряжённого оператора.
25. Критерий предкомпактности.
26. Обобщённая теорема Арцела (необходимость).
27. Обобщённая теорема Арцела (достаточность).

Примеры билетов на дифференцированном зачёте:

Билет 1.

1. Теорема Рисса о представлении.
2. Теорема об ограниченности спектра.

Билет 2.

1. Теорема о норме самосопряжённого оператора.
2. Теорема Бэра.

#### Критерии оценивания

оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;

оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;

оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему систематизированные, знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;

оценка «хорошо (7)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он твердо знает материал экзаменационного билета, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

оценка «хорошо (6)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он знает материал экзаменационного билета, по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе много неточностей;

оценка «хорошо (5)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он знает материал экзаменационного билета, излагает его, умеет применять полученные знания на практике, не допускает в ответе грубых ошибок;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета он показал фрагментарный, характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета он показал разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушение логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2-1)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета, он показал что не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Дифференцированный зачет проводится по итогам текущей успеваемости: по результатам контрольных, самостоятельных работ/тестов по каждой теме.

Дифференцированный зачет по дисциплине проводится путем организации специального опроса в устной форме по вопросам.

При проведении устного дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется 40 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном зачете не должен превышать одного астрономического часа.

Во время проведения дифференцированного зачета при подготовке ответов на билеты, обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, конспектами лекций и любой другой литературой.

Во время проведения дифференцированного зачета при ответе обучающегося на вопросы по билету он не может пользоваться конспектами лекций и любой другой литературой.