

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Директор физтех-школы**  
**аэрокосмических технологий**  
**С.С. Негодяев**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Математическая статистика
<b>по направлению:</b>	Системный анализ и управление
<b>профиль подготовки:</b>	Системный анализ и управление в технических, экономических и социальных системах Физтех-школа Аэрокосмических Технологий кафедра логистических систем и технологий
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: С.Е. Городецкий, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры логистических систем и технологий 04.06.2020

## Аннотация

Курс математической статистики является обязательной дисциплиной базовой части. В рамках данной дисциплины студенты проходят следующие темы: сходимости случайных векторов, статистики и оценки, методы нахождения оценок, эффективные оценки, достаточные статистики и оптимальные оценки, байесовские оценки, доверительное оценивание, линейная регрессионная модель, проверка гипотез и равномерно наиболее мощные критерии, критерии, основанные на нормальности, критерии согласия, критерии проверки независимости.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- изучение математических и теоретических основ современного статистического анализа, а также подготовка слушателей к дальнейшей самостоятельной работе в области анализа статистических задач прикладной математики, физики и экономики.

#### Задачи дисциплины

- изучение математических основ математической статистики;
- приобретение слушателями теоретических знаний в области современного статистического анализа.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-6 Способен применять математические, системно-аналитические, вычислительные методы и программные средства для решения прикладных задач в области создания систем анализа и автоматического управления и их компонентов	ОПК-6.1 Применяет естественнонаучные и инженерные знания, методы математического анализа и моделирования, методы вычислительной математики для анализа моделей и решения научных и технических задач
	ОПК-6.2 Применяет программные средства для решения прикладных задач в области создания систем анализа и автоматического управления и их компонентов
	ОПК-6.3 Использует программные средства для разработки информационных систем
	ОПК-6.4 Осуществляет поиск необходимой информации в базах данных и информационных системах
ПК-1 Способен проводить исследование систем управления и их компонент	ПК-1.1 Владеет фундаментальными понятиями, законами и теориями системного анализа
	ПК-1.2 Имеет глубокое знание и понимание базовых математических дисциплин
	ПК-1.3 Владеет культурой постановки научной задачи и моделирования объектов и систем

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- основные понятия математической статистики;
- основные подходы к сравнению оценок параметров неизвестного распределения;
- асимптотические и неасимптотические свойства оценок параметров неизвестного распределения;
- основные методы построения оценок с хорошими асимптотическими свойствами: метод моментов, метод максимального правдоподобия, метод выборочных квантилей;
- понятие эффективных оценок и неравенство информации Рао-Крамера;
- определение и главные свойства условного математического ожидания случайной величины относительно сигма-алгебры или другой случайной величины;
- определение общей линейной регрессионной модели и метод наименьших квадратов;
- многомерное нормальное распределение и его основные свойства;
- базовые понятия теории проверки статистических гипотез;
- лемму Неймана – Пирсона и теорему о монотонном отношении правдоподобия;
- критерий хи-квадрат Пирсона для проверки простых гипотез в схеме Бернулли.

уметь:

- обосновывать асимптотические свойства оценок с помощью применения предельных теорем теории вероятностей;
- строить оценки с хорошими асимптотическими свойствами для параметров неизвестного распределения по заданной выборке из него;
- находить байесовские оценки по заданному априорному распределению;
- вычислять условные математические ожидания с помощью условных распределений;
- находить оптимальные оценки с помощью полных достаточных статистик;
- строить точные и асимптотические доверительные интервалы и области для параметров неизвестного распределения;
- находить оптимальные оценки и доверительные области в гауссовской линейной модели;
- строить равномерно наиболее мощные критерии в случае параметрического семейства с монотонным отношением правдоподобия;
- строить F-критерий для проверки линейных гипотез в линейной гауссовской модели.

владеть:

- основными методами математической статистики построения точечных и доверительных оценок: методом моментов, выборочных квантилей, максимального правдоподобия, методом наименьших квадратов, методом центральной статистики.
- навыками асимптотического анализа статистических критериев;
- навыками применения теорем математической статистики в прикладных задачах физики и экономики.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	F-критерий для проверки линейных гипотез в гауссовской линейной модели.	4	4		
2	Вероятностно-статистическая модель.	4	4		
3	Основная задача математической статистики.	4	4		
4	Различные виды сходимостей случайных векторов.	6	6		
5	Статистики и оценки.	6	6		
6	Эмпирическое распределение и эмпирическая функция распределения.	6	6		45

Итого часов	30	30		45
Подготовка к экзамену	30 час.			
Общая трудоёмкость	135 час., 3 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

1. F-критерий для проверки линейных гипотез в гауссовской линейной модели.

F-критерий для проверки линейных гипотез в гауссовской линейной модели. Пример с двумя гауссовскими выборками, отличающимися сдвигом: проверка гипотезы об их однородности.

2. Вероятностно-статистическая модель.

Вероятностно-статистическая модель. Понятия наблюдения и выборки. Параметрическая статистическая модель. Моделирование выборки из неизвестного распределения, принадлежащему параметрическому семейству.

3. Основная задача математической статистики.

Основная задача математической статистики. Примеры: выборка и линейная модель.

4. Различные виды сходимостей случайных векторов.

Различные виды сходимостей случайных векторов: с вероятностью 1, по вероятности, по распределению. Три знаменитых теоремы: закон больших чисел, усиленный закон больших чисел, центральная предельная теорема. Теорема о наследовании сходимости и лемма Slutsky. Пример применения леммы Slutsky.

5. Статистики и оценки.

Напоминание правила трех сигм и пояснения в терминах этого правила. Пример со «смешанным» нормальным распределением (медиана vs. выборочное среднее). Примеры статистик: выборочные характеристики, порядковые статистики. Основные свойства оценок: несмещенность, состоятельность, сильная состоятельность, асимптотическая нормальность. Наследование состоятельности и сильной состоятельности при взятии непрерывной функции. Лемма о наследовании асимптотической нормальности.

6. Эмпирическое распределение и эмпирическая функция распределения.

Оценки максимального правдоподобия (о.м.п.) и их свойства (состоятельность, асимптотическая нормальность и эффективность). О.м.п. для параметра сдвига в распределении Лапласа как пример асимптотически нормальной о.м.п. в нерегулярной модели.

#### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

учебная аудитория.

#### 6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Математическая статистика [Текст] : [учебник для вузов] / А. А. Боровков .— [3-е изд., испр.] .— М. : Физматлит, 2007 .— 704 с.
2. Введение в математическую статистику [Текст] : [учебник для вузов] / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев .— М. : ЛКИ, 2010, 2014, 2015 .— 600 с.
1. Боровков А. А. Математическая статистика. 3-е изд. М.: Физматлит, 2007.
2. Ивченко Г. И. и Медведев Ю. И. Введение в математическую статистику. М.: Издательство ЛКИ, 2010.
3. Лагутин М. Б. Наглядная математическая статистика. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.
4. Севастьянов Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики. 2-е изд. - М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
5. Тюрин Ю. Н. Математическая статистика. Записки лекций. М.: изд-во ЦПИ механико-математического факультета МГУ, 2003.

#### Дополнительная литература

1. Ширяев А. Н. Вероятность. В 2-х кн. — 3-е изд. — М.: МЦНМО, 2004.

### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Успешное освоение курса требует большой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой.

Самостоятельная работа включает в себя:

- изучение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам);
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к тестам и опросам.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в результате анализа итогов тестов и опросов по рассмотренным темам.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

<b>по направлению:</b>	Системный анализ и управление
<b>профиль подготовки:</b>	Системный анализ и управление в технических, экономических и социальных системах Физтех-школа Аэрокосмических Технологий кафедра логистических систем и технологий
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Экзамен	
<b>Разработчик:</b>	С.Е. Городецкий, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-6 Способен применять математические, системно-аналитические, вычислительные методы и программные средства для решения прикладных задач в области создания систем анализа и автоматического управления и их компонентов	ОПК-6.1 Применяет естественнонаучные и общинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, методы вычислительной математики для анализа моделей и решения научных и технических задач
	ОПК-6.2 Применяет программные средства для решения прикладных задач в области создания систем анализа и автоматического управления и их компонентов
	ОПК-6.3 Использует программные средства для разработки информационных систем
	ОПК-6.4 Осуществляет поиск необходимой информации в базах данных и информационных системах
ПК-1 Способен проводить исследование систем управления и их компонент	ПК-1.1 Владеет фундаментальными понятиями, законами и теориями системного анализа
	ПК-1.2 Имеет глубокое знание и понимание базовых математических дисциплин
	ПК-1.3 Владеет культурой постановки научной задачи и моделирования объектов и систем

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математическая статистика» обучающийся должен:

### знать:

- основные понятия математической статистики;
- основные подходы к сравнению оценок параметров неизвестного распределения;
- асимптотические и неасимптотические свойства оценок параметров неизвестного распределения;
- основные методы построения оценок с хорошими асимптотическими свойствами: метод моментов, метод максимального правдоподобия, метод выборочных квантилей;
- понятие эффективных оценок и неравенство информации Рао-Крамера;
- определение и главные свойства условного математического ожидания случайной величины относительно сигма-алгебры или другой случайной величины;
- определение общей линейной регрессионной модели и метод наименьших квадратов;
- многомерное нормальное распределение и его основные свойства;
- базовые понятия теории проверки статистических гипотез;
- лемму Неймана – Пирсона и теорему о монотонном отношении правдоподобия;
- критерий хи-квадрат Пирсона для проверки простых гипотез в схеме Бернулли.

### уметь:

- обосновывать асимптотические свойства оценок с помощью применения предельных теорем теории вероятностей;
- строить оценки с хорошими асимптотическими свойствами для параметров неизвестного распределения по заданной выборке из него;
- находить байесовские оценки по заданному априорному распределению;
- вычислять условные математические ожидания с помощью условных распределений;
- находить оптимальные оценки с помощью полных достаточных статистик;
- строить точные и асимптотические доверительные интервалы и области для параметров неизвестного распределения;
- находить оптимальные оценки и доверительные области в гауссовской линейной модели;
- строить равномерно наиболее мощные критерии в случае параметрического семейства с монотонным отношением правдоподобия;
- строить F-критерий для проверки линейных гипотез в линейной гауссовской модели.

#### **владеть:**

- основными методами математической статистики построения точечных и доверительных оценок: методом моментов, выборочных квантилей, максимального правдоподобия, методом наименьших квадратов, методом центральной статистики.
- навыками асимптотического анализа статистических критериев;
- навыками применения теорем математической статистики в прикладных задачах физики и экономики.

### **3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю**

Текущий контроль осуществляется в форме устного опроса по каждой теме.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется на индивидуальных консультациях.

### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

Промежуточная аттестация по дисциплине «Математическая статистика» осуществляется в форме экзамена (устного).

Перечень вопросов для подготовки к экзамену:

1. Виды сходимостей случайных векторов: с вероятностью 1, по вероятности, по распределению. Взаимоотношения между различными видами сходимостей. Усиленный закон больших чисел для случайных векторов. Многомерная центральная предельная теорема.
2. Теорема о наследовании сходимости и лемма Slutsky. Пример их применения.
3. Гауссовские случайные векторы (многомерное нормальное распределение). Теорема о трех эквивалентных определениях. Смысл параметров гауссовского вектора.
4. Основные свойства гауссовских векторов: линейные преобразования и критерий независимости компонент. Теорема об ортогональном разложении гауссовского вектора.
5. Вероятностно-статистическая модель, параметрическая модель. Выборка, эмпирическое распределение. Теорема Гливенко-Кантелли.
6. Статистики и оценки. Несмещенность, состоятельность, сильная состоятельность и асимптотическая нормальность. Лемма о наследовании асимптотической нормальности.
7. Оценка параметра по методу подстановки. Оценка параметра по методу моментов. Теорема о состоятельности оценки метода моментов.
8. Квантили распределения, выборочные квантили, выборочная медиана. Теорема об асимптотической нормальности выборочной  $r$ -квантили.
9. Функция потерь и функция риска. Равномерный подход к сравнению оценок. Байесовский, минимаксный и асимптотический подходы к сравнению оценок.
10. Информация Фишера и вклад наблюдения. Неравенство Рао-Крамера. Эффективные оценки и критерий эффективности.
11. Понятие плотности для дискретной случайной величины. Доминируемое семейство распределений. Функция правдоподобия и оценка максимального правдоподобия. Теорема об экстремальном свойстве правдоподобия.



12. Теорема о существовании состоятельного решения уравнения правдоподобия. Состоятельность оценки максимального правдоподобия. Теорема об асимптотической нормальности решения уравнения правдоподобия.
13. Теорема Бахадура. Асимптотически эффективные оценки. Асимптотическая эффективность и эффективность оценки максимального правдоподобия.
14. Условное математическое ожидание случайной величины относительно сигма-алгебры. Заряд на вероятностном пространстве. Теорема Радона-Никодима.
15. Свойства условного математического ожидания (9 штук).
16. Условное математическое ожидание. Условное распределение и условная плотность одной случайной величины относительно другой. Теорема о вычислении условного математического ожидания с помощью условной плотности. Теорема о достаточном условии существования условной плотности.
17. Достаточные статистики. Критерий факторизации Неймана-Фишера. Теорема Колмогорова-Блекуэлла-Рао и следствие из нее.
18. Полные статистики. Теорема об оптимальной оценке. Экспоненциальное семейство распределений. Теорема о полной достаточной статистике в экспоненциальном семействе.
19. Доверительные интервалы и доверительные области. Понятие центральной статистики и метод построения доверительных областей с ее помощью. Асимптотические доверительные интервалы.
20. Линейная регрессионная модель. Оценка наименьших квадратов, формула ее вычисления. Несмещенные оценки для параметров линейной регрессионной модели.
21. Проверка статистических гипотез: гипотеза и альтернатива, критерий проверки гипотезы, ошибки первого и второго родов, уровень значимости и размер критерия, функция мощности. Несмещенность и состоятельность статистического критерия.
22. Сравнения критериев, равномерно наиболее мощные критерии. Лемма Неймана-Пирсона о проверке простых гипотез. Следствие из нее. Параметрические семейства распределений с монотонным отношением правдоподобия. Теорема о семействе с монотонным отношением правдоподобия.
23. Линейная гауссовская модель, достаточная статистика в линейной гауссовской модели. Линейные гипотезы, F-критерий для проверки линейной гипотезы в гауссовской линейной модели.
24. Статистика хи-квадрат Пирсона в схеме Бернулли с  $m$  исходами. Теорема Пирсона. Критерий согласия Пирсона.

Пример экзаменационного билета по дисциплине:

Экзаменационный билет № 1

1. Теорема о наследовании сходимости и лемма Слуцкого. Пример их применения.
2. Проверка статистических гипотез: гипотеза и альтернатива, критерий проверки гипотезы, ошибки первого и второго родов, уровень значимости и размер критерия, функция мощности.

Экзаменационный билет № 2

1. Свойства условного математического ожидания.
2. Полные статистики. Теорема об оптимальной оценке. Экспоненциальное семейство распределений. Теорема о полной достаточной статистике в экспоненциальном семействе.

#### Критерии оценивания

оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины;

оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины;

оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему систематизированные, знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины;

оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал экзаменационного билета, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал экзаменационного билета, по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе много неточностей;

оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал экзаменационного билета, излагает его, умеет применять полученные знания на практике, не допускает в ответе грубых ошибок;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, если во время ответа экзаменационного билета он показал фрагментарный, характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, если во время ответа экзаменационного билета он показал разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушение логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2-1)» выставляется студенту, если во время ответа экзаменационного билета, он показал, что не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 60 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов.

Преподавателю предоставляется право, помимо теоретических вопросов студентам дополнительные вопросы, уточняющие понимание содержания курса.

Во время проведения экзамена при подготовке ответов на билеты, обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, конспектами лекций и любой другой литературой.

Во время проведения экзамена при ответе обучающегося на вопросы по билету или по программе дисциплины, он не может пользоваться конспектами лекций и любой другой литературой.