

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор института нано-, био-,
информационных, когнитивных
и социогуманитарных наук и
технологий**

П.А. Форш

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Гармонический анализ
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Суперкомпьютерное моделирование ядерных процессов и технологий Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова Кафедра математики и математических методов физики
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.И. Шафаревич, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

Программа обсуждена на заседании Кафедры математики и математических методов физики 20.03.2020

Аннотация

В курсе изучаются неявные функции, экстремумы многих переменных, многомерное интегрирование. Приводятся необходимые сведения по кривым и поверхностям в R^3 , определяются криволинейные и поверхностные интегралы. Даются доказательства интегральных теорем Грина, Гаусса-Остроградского и Стокса о связях между различными типами интегралов. Кратко рассматриваются основные операции математической теории поля (в т.ч. и формальные преобразования с оператором набла), изучаются условия потенциальности и соленоидальности векторных полей.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- формирование базовых знаний по математическому анализу для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания;
- формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

Задачи дисциплины

- формирование у обучающихся базовых знаний по математическому анализу;
- формирование общематематической культуры: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями;
- формирование умений и навыков применять полученные знания для решения аналитических задач, самостоятельного анализа полученных результатов.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- определение и свойства тензоров и внешних форм, тензорные операции, тензорный закон преобразования координат;
- определение и основные свойства дифференциальных форм, криволинейных и поверхностных интегралов от форм, внешнего дифференциала формы, общую теорему Стокса;
- свойства ротора и дивергенции векторного поля, классические формулы Грина, Стокса и Остроградского – Гаусса; основные свойства функциональных рядов и несобственных интегралов, зависящих от параметров, теоремы о равномерной сходимости и аналитические свойства равномерно сходящихся рядов и интегралов;
- теорему о сходимости степенных рядов, теорему Коши – Адамара, свойства аналитических функций; теоремы о сходимости и равномерной сходимости рядов Фурье, теорему Фейера, теоремы Вейерштрасса о приближении функций многочленами; свойства преобразования Фурье;
- теорему обращения преобразования Фурье; определение, основные свойства и примеры обобщенных функций.

уметь:

- осуществлять основные операции с тензорами и внешними формами, вычислять их координаты; находить криволинейные и поверхностные интегралы от дифференциальных форм, вычислять внешний дифференциал, пользоваться формулой Стокса;
- находить дивергенцию и ротор векторного поля; исследовать функциональные ряды и несобственные интегралы, зависящие от параметров, на поточечную и равномерную сходимость;
- вычислять радиус сходимости степенного ряда, разлагать функцию в ряд Фурье и исследовать его сходимость, вычислять преобразование Фурье, находить производные обобщенных функций.

владеть:

- тензорной алгеброй для ее применения в анализе и физике, аппаратом дифференциальных форм, криволинейных и поверхностных интегралов и внешних производных и его приложениями в дифференциальных уравнениях и теоретической физике;
- теорией функциональных рядов и несобственных интегралов, гармоническим анализом и первыми понятиями теории обобщенных функций, их приложениями.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Тензорная алгебра и векторный анализ.	10	10		10
2	Функциональные пространства и обобщенные функции.	10	10		10
3	Функциональные ряды и несобственные интегралы, зависящие от параметров. Степенные ряды, ряды Фурье и преобразование Фурье.	10	10		10
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

1. Тензорная алгебра и векторный анализ.

Тензорные произведения линейных пространств. Универсальность тензорного умножения. Общие тензорные операции. Линейные отображения и полилинейные функции как примеры тензоров.

Тензоры типа (p,q) . Операции над тензорами. Тензорный закон преобразования координат.

Внешние формы. Внешнее умножение форм и его свойства.

Внешние формы в евклидовых пространствах. Скалярное умножение тензоров и внешних форм. Детерминант и объем ориентированного параллелепипеда.

Оператор Ходжа и его свойства.

Тензоры в физике и механике.

Криволинейные и поверхностные интегралы как интегралы от дифференциальных форм. Дифференциальные формы на кривых, поверхностях и в областях трехмерного евклидова пространства. Ограничение форм.

Интегрирование и внешнее дифференцирование форм. Формула Стокса.

Связь дифференциальных форм с векторными полями. Дивергенция и ротор, поток и циркуляция поля. Классические формулы Грина, Стокса и Остроградского – Гаусса.

2. Функциональные пространства и обобщенные функции.

Нормированные бесконечномерные пространства. Сходимость. Линейно независимые и полные системы.

Функциональные пространства и полные системы функций. Полные и неполные пространства.

Евклидовы пространства. Норма в евклидовом пространстве. Тожество параллелограмма.

Ортогональные системы. Ортогонализация.

Наилучшее приближение вектора евклидова пространства линейной комбинацией векторов ортогональной системы. Неравенство Бесселя. Полнота ортогональной системы. Равенство Парсеваля. Замкнутые ортогональные системы. Полные евклидовы пространства и свойства ортогональных систем в них. Изоморфизм евклидовых пространств.

Полнота системы алгебраических и тригонометрических многочленов в пространстве Q .

Пространство D . Обобщенные функции. Примеры. Регулярные и сингулярные обобщенные функции.

Производные обобщенных функций.

Пространство Шварца. Обобщенные функции умеренного роста. Преобразование Фурье обобщенных функций умеренного роста.

3. Функциональные ряды и несобственные интегралы, зависящие от параметров. Степенные ряды, ряды Фурье и преобразование Фурье.

Функциональные ряды. Поточечная и равномерная сходимость.

Признаки равномерной сходимости. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

Несобственные интегралы, зависящие от параметров. Поточечная и равномерная сходимость.

Признаки равномерной сходимости. Аналитические свойства равномерно сходящихся интегралов. В- и Г- функции.

Степенные ряды. Радиус сходимости. Формула Коши – Адамара. Аналитические функции.

Ряды Фурье. Теоремы о сходимости рядов Фурье. Теорема Фейера.

Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.

Преобразование Фурье. Формула обращения. Свойства преобразования Фурье.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Математический анализ [Текст] : в 2 ч. : учебник для вузов / В. А. Зорич .— 5-е изд. — М. : МЦНМО, 2007 .— Ч.2. - 794 с.
2. Математический анализ [Текст] : в 2 ч. : учебник для вузов / В. А. Зорич .— 5-е изд. — М. : МЦНМО, 2007. — Ч.1. - 2007. - 664 с.
3. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] : учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович .— М. : Астрель, 2004, 2005, 2007 .— 558, [2] с. : ил. - 8 000 экз. - ISBN 5-271-03601-4(в пер.).
4. Курс математического анализа [Текст] : в 3т. : учебник для вузов. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной / Л. Д. Кудрявцев .— 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Дрофа, 2003, 2006 .— 704 с.
5. Курс математического анализа [Текст] : учебник для вузов / С. М. Никольский .— 6-е изд., стереотип. — М. : Физматлит, 2001 .— 592 с.

Фонд литературы кафедры

7. С.М. Львовский. Лекции по математическому анализу. МЦНМО, 2009.

Дополнительная литература

1. Курс дифференциальной геометрии и топологии [Текст] : [учебник для вузов] / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко .— М. : Факториал Пресс, 2000 .— 448 с.

Фонд литературы кафедры

3. И.Р. Шафаревич, А.О. Ремизов. Линейная алгебра и геометрия. Физматлит, 2009.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://math.mipt.ru/study/>
2. <http://dfgm.math.msu.su/materials.php>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

Для контроля и коррекции знаний обучающиеся могут использовать компьютерное тестирование, в том числе на портале www.i-exam.ru.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, Scilab и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и семинарах;

– подготовку к семинарам, коллоквиумам, дифференцированному зачету.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций. Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения. Значительно облегчить решение задачи может хорошо выполненный чертеж, если он соответствует условию задачи (прямой угол нарисован прямым, равнобедренный треугольник – равнобедренным и т. д. При подготовке к семинарам необходимо повторять ранее изученные основные определения, формулировки теорем. В начале занятия, как правило, проводится короткий (10-15 минут) опрос по материалу прошедших занятий в устной или письменной форме. Обычно придерживаются следующей схемы: изучение материала лекции по конспекту в тот же день, когда была прослушана лекция (10-15 минут); повторение материала накануне следующей лекции (10-15 минут), проработка учебного материала по конспектам лекций, учебной и научной литературе, подготовка ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения (1 час неделю), подготовка к семинару, решение задач (1 час). Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему семинары.

Обязательным требованием является выполнение домашних работ, которые оформляются в специально отведённой для этого тетради и систематически сдаются на проверку.

Промежуточный контроль знаний проводится в виде коллоквиумов, на которых студенту предлагается письменно ответить на теоретический вопрос и решить две задачи по теме коллоквиума, а также студенту в ходе освоения курса необходимо выполнить две домашних индивидуальных работы с их последующей защитой.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Суперкомпьютерное моделирование ядерных процессов и технологий Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова кафедра математики и математических методов физики
курс:	2
квалификация:	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет	
Разработчик:	А.И. Шафаревич, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Гармонический анализ» обучающийся должен:

знать:

- определение и свойства тензоров и внешних форм, тензорные операции, тензорный закон преобразования координат;
- определение и основные свойства дифференциальных форм, криволинейных и поверхностных интегралов от форм, внешнего дифференциала формы, общую теорему Стокса;
- свойства ротора и дивергенции векторного поля, классические формулы Грина, Стокса и Остроградского – Гаусса; основные свойства функциональных рядов и несобственных интегралов, зависящих от параметров, теоремы о равномерной сходимости и аналитические свойства равномерно сходящихся рядов и интегралов;
- теорему о сходимости степенных рядов, теорему Коши – Адамара, свойства аналитических функций; теоремы о сходимости и равномерной сходимости рядов Фурье, теорему Фейера, теоремы Вейерштрасса о приближении функций многочленами; свойства преобразования Фурье;
- теорему обращения преобразования Фурье; определение, основные свойства и примеры обобщенных функций.

уметь:

- осуществлять основные операции с тензорами и внешними формами, вычислять их координаты; находить криволинейные и поверхностные интегралы от дифференциальных форм, вычислять внешний дифференциал, пользоваться формулой Стокса;
- находить дивергенцию и ротор векторного поля; исследовать функциональные ряды и несобственные интегралы, зависящие от параметров, на поточечную и равномерную сходимость;
- вычислять радиус сходимости степенного ряда, разлагать функцию в ряд Фурье и исследовать его сходимость, вычислять преобразование Фурье, находить производные обобщенных функций.

владеть:

- тензорной алгеброй для ее применения в анализе и физике, аппаратом дифференциальных форм, криволинейных и поверхностных интегралов и внешних производных и его приложениями в дифференциальных уравнениях и теоретической физике;
- теорией функциональных рядов и несобственных интегралов, гармоническим анализом и первыми понятиями теории обобщенных функций, их приложениями.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

В целях текущего контроля успеваемости предусмотрен краткий опрос по темам предыдущих занятий по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Промежуточная аттестация по дисциплине «Гармонический анализ» осуществляется в форме **дифференцированного зачета**. Дифференцированный зачет проводится в устной форме.

Перечень контрольных вопросов для сдачи дифференцированного зачета в 3 семестре:

1. Тензорные произведения линейных пространств. Универсальность тензорного умножения. Разложимые и неразложимые тензоры.
2. Двойственные пространства и двойственные базисы. Линейные операторы и билинейные формы как примеры тензоров.
3. Тензоры типа (p,q) . Операции над тензорами.
4. Запись тензоров в базисе. Тензорный закон преобразования координат. Тензорные операции в координатах.
5. Внешние формы. Базис и размерность пространства внешних форм.
6. Внешнее умножение форм и его свойства.
7. Внешние формы в евклидовых пространствах. Скалярное умножение тензоров и внешних форм.
8. Оператор Ходжа и его свойства.
9. Дифференциальные формы на кривых, поверхностях и в областях трехмерного пространства. Выражения в координатах. Ограничение дифференциальных форм.
10. Интегрирование дифференциальных форм. Криволинейные и поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода.
11. Внешнее дифференцирование форм.
12. Триангулируемые поверхности. Формула Стокса-Пуанкаре в трехмерном пространстве.
13. Векторные поля в трехмерном пространстве. Дифференциальные формы, порожденные векторными полями. Циркуляция и поток векторного поля. Дивергенция и ротор, их связь с операциями d и \wedge . Классические формулы Гаусса-Остроградского и Стокса.
14. Дифференциальные формы в n -мерном пространстве. Интегрирование и дифференцирование форм. Общая формула Стокса - Пуанкаре.
15. Функциональные последовательности и ряды. Поточечная и равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости.
16. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов. Признак Вейерштрасса. Признаки Дирихле и Абеля.
17. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов (переход к пределу, непрерывность, теорема Дини, дифференцирование и интегрирование).
18. Непрерывность и дифференцирование собственных интегралов, зависящих от параметров.
19. Несобственные интегралы, зависящие от параметров. Сходимость и равномерная сходимость. Критерий Коши. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметров.
20. Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметров (переход к пределу, непрерывность, теорема Дини, интегрирование, дифференцирование, изменение порядка интегрирования).
21. Приложения теории несобственных интегралов, зависящих от параметров. Вычисление интегралов. В - и Г-функции.
22. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг и радиус сходимости степенного ряда.

23. Вычисление радиуса сходимости степенного ряда. Формула Коши-Адамара.
24. Степенные ряды в вещественной области. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Ряды Тейлора. Аналитические функции и их свойства.
25. Разложение элементарных функций в ряды Тейлора. Аналитические функции комплексной переменной. Основные элементарные функции в комплексной области.
26. Периодические функции и периодическое продолжение функций. Ряды Фурье и коэффициенты Фурье. Ряды Фурье четных и нечетных функций.
27. Ядро Дирихле и его свойства. Лемма об осцилляции для кусочно-гладких функций.
28. Теоремы о сходимости и равномерной сходимости рядов Фурье. Интегрирование и дифференцирование рядов Фурье.
29. Суммирование расходящихся рядов по Чезаро и по Абелю.
30. Теорема Фейера. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.
31. Прямое и обратное преобразования Фурье. Теорема обращения. Косинус- и синус- преобразования Фурье.
32. Свойства преобразования Фурье. Связь между гладкостью функции и поведением на бесконечности ее преобразования Фурье. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности.
33. Пространство D . Обобщенные функции. Примеры. Свойства обобщенных функций. Производные обобщенных функций.
34. Пространство Шварца. Обобщенные функции умеренного роста. Преобразование Фурье обобщенных функций и его свойства.

4. Критерии оценивания

Оценка	Баллы	Критерии
отлично	10	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	9	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	8	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми

		недочетами.
хорошо	7	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.
	6	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.
	5	Выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.
удовлетворительно	4	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.
	3	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.
неудовлетворительно	2	Выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.
	1	Выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется не менее 40 минут на подготовку. Опрос по билету и ответы на дополнительные вопросы не должны превышать двух астрономических часов. По завершении отведенного на опрос времени, экзаменатор должен выставить обучающемуся оценку, в соответствии с вышеприведенными критериями.