

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор института нано-, био-,  
информационных, когнитивных  
и социогуманитарных наук и  
технологий**

**П.А. Форш**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

<b>по дисциплине:</b>	Многомерный анализ, интегралы и ряды
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Суперкомпьютерное моделирование ядерных процессов и технологий Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова Кафедра математики и математических методов физики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 120 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 270, всего зач. ед.: 6

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.Г. Давтян, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент

Программа обсуждена на заседании Кафедры математики и математических методов физики 17.03.2020

## Аннотация

Целью освоения дисциплины является привитие знаний основных математических методов и математического аппарата, используемого при изучении общенаучных и специальных дисциплин; развитие математической культуры у обучающегося, навыков применения математических методов и основ математического моделирования при решении практических задач.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- обучение основам математического анализа для формирования у студентов представления о математике как особом методе познания природы, осознания общности математических понятий и моделей, приобретения навыков логического мышления и оперирования абстрактными математическими объектами; воспитание высокой математической культуры.

#### Задачи дисциплины

- добиться четкого, ясного понимания основных объектов исследования и понятий анализа;
- продемонстрировать возможности методов анализа для решения задач фундаментальной и прикладной математики;
- привить точность и обстоятельность аргументации в математических рассуждениях;
- сформировать высокий уровень математической культуры, достаточный для понимания и усвоения последующих курсов по непрерывной и дискретной математике;
- способствовать: подготовке к ведению исследовательской деятельности (в частности, для написания курсовой и выпускной квалификационной работ) в областях, использующих математические методы; созданию и использованию математических моделей процессов и объектов; разработке эффективных математических методов решения задач естествознания, техники, экономики и управления;
- развивать умение самостоятельной работы с учебными пособиями и другой научной и математической литературой.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1 Формулирует совокупность взаимосвязанных задач в рамках поставленной цели работы, обеспечивающих ее достижение. Определяет ожидаемые результаты решения поставленных задач
	УК-2.2 Проектирует решение конкретной задачи проекта, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из действующих правовых норм и имеющихся ресурсов и ограничений
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- основные свойства отображений метрических пространств, линейных нормированных пространств;
- признаки сходимости числовых рядов и несобственных интегралов;
- условия дифференцируемости функций многих переменных, существование и дифференцируемость обратного отображения;
- достаточные условия существования экстремума на гладких поверхностях;
- условия существования кратного интеграла, замену переменных в кратном интеграле и методы сведения кратного интеграла к повторному.

уметь:

- исследовать свойства отображений метрических пространств;
- дифференцировать функцию многих переменных;
- исследовать сходимость числовых рядов и несобственных интегралов;
- находить экстремумы функции многих переменных, вычислять кратные интегралы.

владеть:

- основными определениями сходимости интегралов и рядов;
- дифференцируемости функции многих переменных;
- навыками представления функции формулой Тейлора;
- методами поиска экстремума функции многих переменных;
- навыками сведения кратного интеграла к повторному.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Дифференцируемое отображение конечномерных нормированных пространств.	20	20		25
2	Кратные интегралы.	10	10		30
3	Метрические и конечномерные линейные нормированные пространства.	14	14		22
4	Несобственные интегралы.	8	8		18
5	Числовые ряды.	8	8		25
Итого часов		60	60		120
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		270 час., 6 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

###### 1. Дифференцируемое отображение конечномерных нормированных пространств.

Дается определение дифференцируемых отображений, вводится понятие полных производных, дифференциала. Рассматриваются достаточные условия дифференцируемости, условия существования и дифференцируемости обратного отображения, условия существования и дифференцируемости неявного отображения. Выводится формула Тейлора для функции многих переменных. Рассматриваются вопросы экстремума функции на гладких поверхностях в конечномерных нормированных пространствах.

## 2. Кратные интегралы.

Формулируется понятие  $n$ -того объема. Дается определение  $n$ -кратного интеграла и формулируются достаточные и необходимые условия интегрируемости по Риману функции многих переменных. Рассматриваются свойства  $n$ -кратного интеграла. Доказывается теорема о сведении кратного интеграла к повторному. Доказывается теорема о замене переменных в  $n$ -кратном интеграле.

## 3. Метрические и конечномерные линейные нормированные пространства.

Рассматриваются такие фундаментальные понятия как компактность, полнота, норма. Непрерывность и равномерная непрерывность отображения метрических и нормированных конечномерных пространств.

## 4. Несобственные интегралы.

Вводится понятие несобственного интеграла, дается определение сходимости несобственного интеграла, рассматриваются необходимые и достаточные условия абсолютной и условной сходимости интегралов.

## 5. Числовые ряды.

Рассматриваются понятия числового ряда, способы суммирования рядов, достаточное и необходимое условие сходимости рядов.

# 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная доской и маркерами.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] : учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович .— М. : Астрель, 2004, 2005, 2007 .— 558, [2] с. : ил. - 8 000 экз. - ISBN 5-271-03601-4( в пер.).
2. Математический анализ [Текст]. Ч. 1 / В. А. Зорич - М.МЦНМО, 2017
3. Математический анализ [Текст] : в 2 ч. Ч. 1 / В. А. Зорич - М.МЦНМО, 2015
4. Математический анализ [Текст] : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов ; под ред. А. Н. Тихонова .— М. : Наука, 1979 .— 719 с.

Фонд литературы кафедры

### Дополнительная литература

1. Дифференциальные уравнения [Текст] : уч. для вузов : доп. М-вом высш. и сред. спец. образов. СССР / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников .— М. : Наука, 1980 .— 232 с.

Фонд литературы кафедры

3. Введение в математический анализ / А.М. Воробьев, В.В. Гарбарук, В.И. Родин, М.А. Шварц. – М., 2006.

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

1. <http://www.exponenta.ru> – «Образовательный математический сайт Exponenta.ru».
2. <http://www.matclub.ru> – Лекции, примеры решения задач, интегралы и производные, дифференцирование, ТФКП, Электронные учебники.
3. <http://www.math.ru> – «Образовательный математический сайт Math.ru».
4. <http://www.mathelp.spb.ru> – «Высшая математика» (помощь студентам) – Лекции, электронные учебники, решение контрольных работ.
5. <http://www.mathelp.spb.ru> – Лекции по высшей математике: Математический анализ; Дифференциальные уравнения; Аналитическая геометрия, Теория вероятностей и др.
6. <http://www.fisimat.ru> – Высшая математика для студентов и абитуриентов – интегралы и производные, ряды, ТФКП, дифференцирование, лекции, задачи, учебники.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

на лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и практических занятиях,
- подготовку к практическим занятиям, коллоквиумам, экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций. Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения. Значительно облегчить решение задачи может хорошо выполненный чертеж, если он соответствует условию задачи (прямой угол нарисован прямым, равнобедренный треугольник – равнобедренным и т. д. При подготовке к практическим занятиям необходимо повторять ранее изученные основные формулировки теорем. В начале занятия, как правило, проводится короткий (10-15 минут) опрос по материалу прошедших занятий в устной или письменной форме. Обычно придерживаются следующей схемы: изучение материала лекции по конспекту в тот же день, когда была прослушана лекция (10-15 минут); повторение материала накануне следующей лекции (10-15 минут), проработка учебного материала по конспектам лекций, учебной и научной литературе, подготовка ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения (1 час неделю), подготовка к практическому занятию, решение задач (1 час). Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

Обязательным требованием является выполнение домашних работ, которые оформляются в специально отведённой для этого тетради и систематически сдаются на проверку.

Промежуточный контроль знаний проводится в виде коллоквиумов, на которых студенту предлагается письменно ответить на теоретический вопрос и решить две задачи по теме коллоквиума, а также студенту в ходе освоения курса необходимо выполнить две домашних индивидуальные работы с их последующей защитой.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Суперкомпьютерное моделирование ядерных процессов и технологий Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова кафедра математики и математических методов физики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен	
<b>Разработчик:</b>	А.Г. Давтян, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1 Формулирует совокупность взаимосвязанных задач в рамках поставленной цели работы, обеспечивающих ее достижение. Определяет ожидаемые результаты решения поставленных задач
	УК-2.2 Проектирует решение конкретной задачи проекта, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из действующих правовых норм и имеющихся ресурсов и ограничений
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Многомерный анализ, интегралы и ряды» обучающийся должен:

### знать:

- основные свойства отображений метрических пространств, линейных нормированных пространств;
- признаки сходимости числовых рядов и несобственных интегралов;
- условия дифференцируемости функций многих переменных, существование и дифференцируемость обратного отображения;
- достаточные условия существования экстремума на гладких поверхностях;
- условия существования кратного интеграла, замену переменных в кратном интеграле и методы сведения кратного интеграла к повторному.

### уметь:

- исследовать свойства отображений метрических пространств;
- дифференцировать функцию многих переменных;
- исследовать сходимость числовых рядов и несобственных интегралов;
- находить экстремумы функции многих переменных, вычислять кратные интегралы.

### владеть:

- основными определениями сходимости интегралов и рядов;
- дифференцируемости функции многих переменных;
- навыками представления функции формулой Тейлора;
- методами поиска экстремума функции многих переменных;
- навыками сведения кратного интеграла к повторному.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

В целях текущего контроля успеваемости предусмотрен краткий опрос по темам предыдущих занятий по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

### **3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков**

Промежуточная аттестация по дисциплине «Многомерный анализ, интегралы и ряды» осуществляется в форме экзамена. Экзамен проводится в устной форме.

#### **Перечень контрольных вопросов для сдачи экзамена в 2 семестре:**

1. Суммирование числовой последовательности. Определение числового ряда. Классификация рядов. Критерий Коши.
2. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с неотрицательными членами.
3. Признаки сравнения рядов относительно их сходимости.
4. Сходимость ряда  $1/n^p$ .
5. Признак Даламбера.
6. Признак Коши.
7. Признак Раабе
8. Свойство условно сходящегося ряда относительно перестановки членов ряда.
9. Эквивалентность безусловной и абсолютной сходимости ряда.
10. Суммирование по частям, признаки Дирихле –Абеля.
11. Определение несобственного интеграла. Классификация несобственных интегралов.
12. Критерий Коши для несобственных интегралов.
13. Признаки сравнения для несобственных интегралов.
14. Признаки Абеля - Дирихле сходимости несобственного интеграла.
15. Определение метрики. Нормы в линейном конечномерном пространстве.
16. Эквивалентность норм конечномерного вещественного линейного пространства. Сходимость в нормированном конечномерном линейном пространстве.
17. Представление отображений конечномерных нормированных пространств относительно фиксированных базисов. Непрерывность отображений.
18. Компактные подмножества метрических пространств и их свойства. Свойства непрерывных на компакте функций.
19. Непрерывность функции обратной к непрерывной на компакте функции.
20. Дифференцируемость отображений конечномерных вещественных пространств. Определение полной производной и частных производных. Достаточное условие дифференцируемости.
21. Дифференцируемость композиции отображений. Полная производная композиции (сложной функции).
22. Свойства линейного отображения.
23. Определение полных производных высших порядков. Дифференциал  $n$  – ого порядка.
24. Достаточное условие равенства смешанных производных  $n$  – ого порядка.
25. Формула Тейлора для функций многих переменных.
26. Теорема об обратной функции.
27. Теорема о неявной функции.
28. Определение локального экстремума. Необходимое условие локального экстремума.
29. Достаточные условия локального экстремума.
30. Функциональная зависимость. Критерий функциональной независимости.
31. Условный экстремум. Необходимые условия существования условного экстремума.
32. Достаточные условия локального условного экстремума.
33. Аксиоматическое определение объема фигур. Определение кратного интеграла.



34. Лемма о понижении кратности интеграла. Сведение кратного интеграла к повторному.
35. Интегрируемость непрерывной функции. Свойства кратного интеграла.
36. Замена переменных в кратном интеграле.

### **Примеры экзаменационных билетов:**

#### **Билет 1**

1. Классификация рядов. Критерий Коши.
2. Эквивалентность норм конечномерного вещественного линейного пространства. Сходимость в нормированном конечномерном линейном пространстве.
3. Условный экстремум. Необходимые условия существования условного экстремума.

#### **Билет 2**

1. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с неотрицательными членами.
2. Представление отображений конечномерных нормированных пространств относительно фиксированных базисов. Непрерывность отображений.
3. Достаточные условия локального условного экстремума.

#### **Билет 3**

1. Признаки сравнения рядов относительно их сходимости.
2. Компактные подмножества метрических пространств и их свойства. Свойства непрерывных на компакте функций.
3. Аксиоматическое определение объема фигур. Определение кратного интеграла.

### **4. Критерии оценивания**

Оценка	Баллы	Критерии
отлично	10	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	9	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	8	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.
хорошо	7	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу

		излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.
	6	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.
	5	Выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.
удовлетворительно	4	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.
	3	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.
неудовлетворительно	2	Выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.
	1	Выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

**5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении экзамена обучающемуся предоставляется не менее 40 минут на подготовку. Опрос по билету и ответы на дополнительные вопросы не должны превышать двух астрономических часов. По завершении отведенного на опрос времени, экзаменатор должен выставить обучающемуся экзаменационную оценку.