

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор института нано-, био-,  
информационных, когнитивных  
и социогуманитарных наук и  
технологий**

**П.А. Форш**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

<b>по дисциплине:</b>	Линейная алгебра
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Суперкомпьютерное моделирование ядерных процессов и технологий Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова Кафедра математики и математических методов физики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: И.А. Шейпак, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

Программа обсуждена на заседании Кафедры математики и математических методов физики 17.03.2020

## Аннотация

Целью дисциплины является формирование у студентов научного математического мышления, умения применять математический аппарат для исследований экономических процессов.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- освоение студентами фундаментальных знаний в области линейной алгебры и аналитической геометрии, изучение способов решения задач методами линейной алгебры и аналитической геометрии.

#### Задачи дисциплины

- формирование базовых знаний в области линейной алгебры и аналитической геометрии как дисциплины, интегрирующей общематематическую подготовку прикладных математиков и физиков и обеспечивающей технологические основы современных инновационных сфер деятельности;
- обучение студентов принципам применения основных понятий линейной алгебры.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований, и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.1 Знает численные порядки величин, характерных для соответствующей профессиональной области

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основы теории линейных пространств, определения и свойства подпространств, их базисов, суммы и пересечения, метод Гаусса решения систем линейных уравнений, свойства сложения и умножения матриц, определение и свойства ранга и определителя матрицы, свойства комплексных чисел;
- определение линейного отображения, свойства его ядра и образа, определение и свойства собственных значений, собственных и корневых векторов, теорему о жордановой форме оператора, определение и свойства билинейных и квадратичных форм;
- теорему о каноническом виде квадратичной формы, закон инерции, определение знакоопределенной и знакопеременной формы, критерий Сильвестра;
- определение евклидова пространства, основы многомерной евклидовой геометрии, свойства самосопряженных, унитарных и ортогональных операторов, свойства билинейных и квадратичных форм в евклидовых пространствах.

уметь:

- решать системы линейных уравнений, находить базисы и размерности подпространств, их сумм и пересечений, выписывать матрицу линейного оператора, находить собственные значения и собственные векторы;
- приводить матрицу оператора к жордановой форме, находить канонический вид квадратичной формы, исследовать форму на - знакоопределенность;
- определять канонический вид ортогонального, унитарного и самосопряженного оператора, приводить квадратичную форму к главным осям ортогональным преобразованием.

владеть:

- аппаратом матриц и линейных уравнений и его приложениями;
- методами теории линейных операторов и квадратичных форм.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Аналитическая геометрия и векторная алгебра.	2	2		7
2	Билинейные и полуторалинейные формы.	4	4		
3	Билинейные и полуторалинейные формы в евклидовых пространствах.	4	2		
4	Евклидовы и унитарные пространства.	2	2		7
5	Кривые второго порядка на плоскости.	2	4		
6	Линейные отображения линейных пространств.	2	2		5
7	Линейные пространства.	2	2		
8	Матрицы и системы линейных уравнений.	4	4		9
9	Операторы в евклидовых и унитарных пространствах.	4	4		7
10	Поверхности второго порядка в пространстве.	4	4		10
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

###### 1. Аналитическая геометрия и векторная алгебра.

Основные понятия линейной алгебры и аналитической геометрии. Система координат, координатное пространство.

###### 2. Билинейные и полуторалинейные формы.

Билинейные и квадратичные формы. Симметричные, кососимметричные и эрмитовы формы. Ортогональность в смысле форм. Ядро и невырожденность (косо)симметричной формы. Разложение пространства в прямую сумму подпространств, ортогональных в смысле форм. Метод Лагранжа приведения к сумме квадратов. Теорема Якоби. Положительно и отрицательно определенные формы. Критерий Сильвестра.

### 3. Билинейные и полуторалинейные формы в евклидовых пространствах.

Билинейные и квадратичные формы в евклидовых пространствах. Приведение к каноническому и нормальному видам пары форм, одна из которых знакоопределённая. Главные оси и собственные числа.

### 4. Евклидовы и унитарные пространства.

Евклидовы пространства. Определение и примеры. Неравенства Коши--Буняковского и треугольника. Ортонормированные базисы. Ортогонализация Грама--Шмидта. Подпространства и ортогональные дополнения. Изоморфизм евклидовых пространств. Матрица Грама. Объём  $n$ -мерного параллелепипеда. Унитарные пространства. Билинейные, полуторалинейные и эрмитовы формы. Эрмитово скалярное произведение. Подпространства и ортогональные дополнения.

### 5. Кривые второго порядка на плоскости.

Квадратичная форма кривой второго порядка. Приведение формы к каноническому виду. Классификация кривых второго порядка. Эллиптический, гиперболический и параболический случаи.

### 6. Линейные отображения линейных пространств.

Линейные операторы, определение и свойства. Ядро и образ. Ядро и образ оператора. Матрица оператора, ее изменение при замене базисов. Изоморфизм линейных пространств. Линейные операции над отображениями, композиция (произведение) операторов. Линейные операторы, действующие в одном пространстве.

Характеристический многочлен. Характеристическое уравнение, собственные числа и собственные векторы. Условия приведения матрицы оператора к диагональному виду. Аннулирующие многочлены. Теорема Гамильтона--Кэли.

### 7. Линейные пространства.

Линейные подпространства, примеры и свойства. Пересечение и сумма подпространств, их свойства. Прямая сумма подпространств. Теорема о размерности суммы двух подпространств.

### 8. Матрицы и системы линейных уравнений.

Матрицы и векторы. Сложение и умножение на число, свойства линейных операций. Линейная зависимость матриц. Умножение матриц, его свойства. Матричная запись системы линейных уравнений.

### 9. Операторы в евклидовых и унитарных пространствах.

Сопряженный оператор и его свойства. Самосопряжённые операторы. Собственные значения и собственные векторы самосопряжённых операторов.

Приведение матрицы самосопряжённого оператора к диагональному виду.

Ортогональные и унитарные преобразования. Собственные значения и собственные векторы ортогональных и унитарных преобразований.

Канонический вид матриц ортогональных и унитарных преобразований.

### 10. Поверхности второго порядка в пространстве.

Квадратичная форма поверхности второго порядка. Приведение формы к каноническому виду.  
Классификация поверхностей второго порядка.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория с доской и маркерами.

## **6. Перечень рекомендуемой литературы**

### **Основная литература**

1. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст] : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев .— 12-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2008, 2009 .— 312 с.
  2. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] : учеб. пособие для вузов / Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров ; под ред. Д. В. Беклемишева .— 2-е изд., перераб. — М. : Физматлит : Лаб. базовых знаний, 2003, 2004, 2006, 2012, 2014 .— 496 с.
- Фонд литературы кафедры

### **Дополнительная литература**

1. Дополнительные главы линейной алгебры [Текст] : учеб. пособие для вузов / Д. В. Беклемишев .— 2-е изд., перераб. и доп. — СПб. : Лань, 2008 .— 496 с.
2. Аналитическая геометрия [Текст] : учебник для вузов : рек. М-вом образования РФ / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк .— М : Физматлит, 2003 .— 240 с.
3. Линейная алгебра [Текст] : учебник для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк .— 6-е изд., стереотип. — М. : Физматлит, 2006 .— 280 с.
4. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст] : учебник для вузов / П. С. Александров .— М. : Наука, 1979 .— 512 с.

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

В процессе самостоятельной работы обучающиеся могут использовать программные средства MATLAB, Mathcad, WolframMathematica.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Для успешного освоения курса, помимо посещения лекций и семинаров, от студентов требуется самостоятельная работа в объеме не менее чем те часы, которые указаны для каждого раздела программы. В основном, это время отводится на самостоятельное решение задач, входящих в два задания. Самостоятельные занятия включают в себя также повторение материала лекций, семинарских занятий и подготовку к промежуточным тестированиям, которые проводятся для текущего контроля за усвоением материала. Всего предполагается провести за семестр 4 теста, выполнить итоговую контрольную работу по решению задач в конце семестра и защитить каждое из двух самостоятельно выполненных заданий. Студенты, успешно прошедшие все формы промежуточного контроля, допускаются к сдаче экзамена по дисциплине.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Суперкомпьютерное моделирование ядерных процессов и технологий Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова кафедра математики и математических методов физики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен	
<b>Разработчик:</b>	И.А. Шейпак, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований, и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.1 Знает численные порядки величин, характерных для соответствующей профессиональной области

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Линейная алгебра» обучающийся должен:

### знать:

- основы теории линейных пространств, определения и свойства подпространств, их базисов, суммы и пересечения, метод Гаусса решения систем линейных уравнений, свойства сложения и умножения матриц, определение и свойства ранга и определителя матрицы, свойства комплексных чисел;
- определение линейного отображения, свойства его ядра и образа, определение и свойства собственных значений, собственных и корневых векторов, теорему о жордановой форме оператора, определение и свойства билинейных и квадратичных форм;
- теорему о каноническом виде квадратичной формы, закон инерции, определение знакоопределенной и знакопеременной формы, критерий Сильвестра;
- определение евклидова пространства, основы многомерной евклидовой геометрии, свойства самосопряженных, унитарных и ортогональных операторов, свойства билинейных и квадратичных форм в евклидовых пространствах.

### уметь:

- решать системы линейных уравнений, находить базисы и размерности подпространств, их сумм и пересечений, выписывать матрицу линейного оператора, находить собственные значения и собственные векторы;
- приводить матрицу оператора к жордановой форме, находить канонический вид квадратичной формы, исследовать форму на - знакоопределенность;
- определять канонический вид ортогонального, унитарного и самосопряженного оператора, приводить квадратичную форму к главным осям ортогональным преобразованием.

### владеть:

- аппаратом матриц и линейных уравнений и его приложениями;
- методами теории линейных операторов и квадратичных форм.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

В целях текущего контроля успеваемости предусмотрен краткий опрос по темам предыдущих занятий по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

### **3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков**

Промежуточная аттестация по дисциплине «Линейная алгебра» осуществляется в форме экзамена. Экзамен проводится в устной форме.

Перечень контрольных вопросов для сдачи экзамена в 1 семестре:

1. Линейные функции и системы линейных уравнений. Эквивалентность систем. Метод Гаусса. Совместные и несовместные системы, однозначная разрешимость систем.
2. Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Размерность и базис. Координаты вектора в базисе.
3. Подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Изоморфизм линейных пространств.
4. Линейные отображения. Ядро и образ отображения.
5. Матрицы. Сложение и умножение матриц. Матрица линейного отображения. Матрица композиции отображений.
6. Ранги матрицы по строкам и столбцам. Теорема о совпадении рангов. Условие совместности и размерность пространства решений системы линейных уравнений в терминах ранга ее матрицы.
7. Определитель матрицы. Полилинейность и косая симметрия определителя. Единственность полилинейной кососимметричной функции строк.
8. Свойства определителя.
9. Обратная матрица.
10. Квадратные системы линейных уравнений. Формулы Крамера.
11. Матрица перехода от одного базиса линейного пространства к другому. Закон преобразования координат вектора при замене базиса.
12. Линейные операторы. Матрица оператора в базисе. Закон преобразования матрицы оператора при замене базиса.
13. Инвариантные подпространства оператора. Собственные значения и собственные векторы. Характеристический многочлен. Определитель и след линейного оператора.
14. Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел. Формула Муавра. Корни из комплексных чисел.
15. Многочлены с комплексными коэффициентами. Основная теорема алгебры.
16. Теорема Безу. Разложение на множители многочленов с комплексными и действительными коэффициентами.
17. Комплексные линейные пространства. Комплексификация и овеществление.
18. Структура инвариантного подпространства линейного оператора в комплексном пространстве. Собственные и присоединенные векторы. Жорданов базис и жорданова нормальная форма.
19. Билинейные формы. Матрица билинейной формы. Закон преобразования матрицы при замене базиса.
20. Симметричные билинейные и квадратичные формы. Ортогональные дополнения. Приведение к каноническому виду. Закон инерции.
21. Знакоопределенные и знакопеременные формы. Критерий Сильвестра.
22. Полуторалинейные и эрмитовы формы в комплексном пространстве.
23. Евклидовы пространства. Длины и углы. Неравенства Коши – Буняковского и треугольника. Ортонормированные базисы. Подпространства и ортогональные дополнения. Изоморфизм евклидовых пространств.
24. Операторы в евклидовых пространствах. Сопряженный оператор. Матрица сопряженного оператора.
25. Самосопряженные операторы и их свойства. Канонический вид.



26. Унитарные и ортогональные операторы и их свойства. Канонический вид унитарного и ортогонального оператора.
27. Полярное разложение невырожденного оператора.
28. Билинейные и квадратичные формы в евклидовых пространствах. Главные оси и собственные значения квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.
29. Классификация кривых второго порядка на плоскости.

#### **Примеры экзаменационных билетов:**

##### **Билет 1**

1. Линейные функции и системы линейных уравнений. Эквивалентность систем. Метод Гаусса. Совместные и несовместные системы, однозначная разрешимость систем.
2. Симметричные билинейные и квадратичные формы. Ортогональные дополнения. Приведение к каноническому виду. Закон инерции.

##### **Билет 2**

1. Линейные отображения. Ядро и образ отображения.
2. Полуторалинейные и эрмитовы формы в комплексном пространстве.

##### **Билет 3**

1. Матрица перехода от одного базиса линейного пространства к другому. Закон преобразования координат вектора при замене базиса.
2. Классификация кривых второго порядка на плоскости.

#### **4. Критерии оценивания**

Оценка	Баллы	Критерии
отлично	10	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	9	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	8	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.
хорошо	7	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу

		излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.
	6	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.
	5	Выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.
удовлетворительно	4	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.
	3	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.
неудовлетворительно	2	Выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.
	1	Выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении экзамена обучающемуся предоставляется не менее 40 минут на подготовку. Опрос по билету и ответы на дополнительные вопросы не должен превышать двух астрономических часов. По завершении отведенного на опрос времени, экзаменатор должен выставить обучающемуся оценку в соответствии с вышеприведенными критериями.