

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор института нано-, био-,  
информационных, когнитивных  
и социогуманитарных наук и  
технологий**

**П.А. Форш**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Теория функций комплексного переменного
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Суперкомпьютерное моделирование ядерных процессов и технологий Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова Кафедра математики и математических методов физики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: С.А. Сергеев, канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Программа обсуждена на заседании Кафедры математики и математических методов физики 19.03.2020

## Аннотация

Курс посвящен основам теории функций комплексного переменного. Изложены вопросы представления регулярных функций в виде степенных и других функциональных рядов, геометрические принципы: аргумента, сохранения области, максимума модуля и другие. Построена геометрическая теория конформных отображений. Приведены эффективные методы вычисления интегралов, основанные на теории вычетов. Рассмотрены приложения комплексного анализа к решению краевых задач уравнений математической физики.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- познакомить студентов с основами теории функции комплексного переменного, научить студентов использовать мощный аппарат теории функций комплексного переменного в анализе поставленных перед ними задач.

#### Задачи дисциплины

- научить студентов, пользуясь методами теории функций комплексного переменного;
- проводить вычисления, связанные с интегральным исчислением и уравнениями математической физики.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- Основные представления комплексных чисел.
- Условия Коши-Римана.
- Представление аналитических функций с помощью степенных рядов.
- Теорему Коши об интегрировании аналитической функции по замкнутому контуру.
- Теорему Коши о вычетах.
- Понятие особой точки. Определение вычета функции.
- Представление функции в окрестности особых точек с помощью степенных рядов.
- Свойства дробно-линейного отображения.
- Конформное отображение с помощью элементарных функций.
- Логарифмический вычет.
- Теорему Руше о приращении аргумента.

уметь:

- Вычислять функции от комплексного числа.
- Дифференцировать функции комплексного аргумента.
- Строить по заданной действительной или мнимой части аналитическую функцию.
- Вычислять интеграл от функции комплексного аргумента по кривой или по замкнутому контуру.
- Раскладывать функцию в ряд Лорана в окрестности особых точек.
- С помощью конформных отображений переводить одну заданную область в другую.

владеть:

- Элементарными операциями с комплексными числами.
- Методами дифференцирования функций комплексного аргумента.
- Основными методами вычисления интегралов от функций комплексного переменного.
- Основными способами конформных отображений.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Дифференцируемость функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана.	2	2		4
2	Интеграл по пути от функции комплексного переменного.	2	2		4
3	Комплексные числа. Сфера Римана.	2	2		6
4	Конформные отображения с помощью элементарных функций.	4	2		4
5	Конформное отображение с помощью дробно-линейной функции.	2	2		4
6	Многолистные функции.	2	4		6
7	Особые точки аналитической функции. Вычеты.	2	2		6
8	Ряд Лорана аналитической функции в окрестности особой точки.	6	6		6
9	Ряд Тейлора для аналитической функции.	2	2		4
10	Теорема Коши об аналитической функции по замкнутому контуру.	2	2		1
11	Теорема Руше. Принцип аргумента.	4	4		

Итого часов	30	30		45
Подготовка к экзамену	30 час.			
Общая трудоёмкость	135 час., 3 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

1. Дифференцируемость функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана.

Действительная и комплексная дифференцируемости. Условия Коши-Римана.

2. Интеграл по пути от функции комплексного переменного.

Путь на комплексной плоскости. Определение интеграла, суммы Дарбу, интегральные суммы. Интеграл от степенной функции.

3. Комплексные числа. Сфера Римана.

Определение комплексного числа. Основные способы представления комплексного числа. Формула Эйлера. Представление комплексной плоскости с помощью сферы Римана. Замыкание комплексной плоскости, бесконечно удаленная точка.

4. Конформные отображения с помощью элементарных функций.

Конформные отображения с помощью элементарных функций и обратных к ним – степенная, экспонента.

5. Конформное отображение с помощью дробно-линейной функции.

Свойства дробно-линейного отображения. Круговое свойство дробно-линейного отображения. Элементарные отображения с помощью дробно-линейного отображения.

6. Многолистные функции.

Ветви аналитической функции. Точка ветвления.

7. Особые точки аналитической функции. Вычеты.

Определение и классификация изолированных особых точек. Определение вычета функции в точке.

8. Ряд Лорана аналитической функции в окрестности особой точки.

Теорема о равномерной сходимости ряда Лорана. Классификация особых точек с точки зрения ряда Лорана. Теорема Коши о вычетах. Лемма Жордана.

9. Ряд Тейлора для аналитической функции.

Определение ряда Тейлора, теорема о равномерной сходимости ряда Тейлора. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций. Единственность аналитических функций.

10. Теорема Коши об аналитической функции по замкнутому контуру.

Жорданов контур. Лемма Гурса. Интегрирование элементарных функций по замкнутому контуру.

11. Теорема Руше. Принцип аргумента.

Логарифмический вычет функции. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

## **6. Перечень рекомендуемой литературы**

### Основная литература

1. Функции комплексного переменного с элементами операционного исчисления [Текст] : учебник для вузов / Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц .— СПб. : Лань, 2002 .— 296, [2] с. - Библиогр.: с. 297-298. - 5000 экз. - ISBN 5-8114-0457-3 (в пер.).
2. Введение в теорию функций комплексного переменного [Текст] : учебник для вузов : доп. М-вом высш. и сред. спец. образов. СССР / И. И. Привалов ; 11 - е изд. — М. : Наука, 1967 .— 444 с.
3. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : в 2 ч. Ч. 1 : [учеб. пособие для вузов] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова .— 5-е изд., испр. — М. : Высшая школа, 1997 .— 304 с.

### Фонд литературы кафедры

5. Морозова В. Д. Теория функций комплексного переменного. — М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000.

### Дополнительная литература

1. Методы теории функций комплексного переменного [Текст] : учеб. пособие для вузов / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат .— 5-е изд., испр. — М. : Наука, 1987, 2002 .— 688 с.
2. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости [Текст] : учеб. пособие для вузов / И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц .— М. : Наука, 1968 .— (Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов вузов). - Библиогр.: с.416.- 45 000 экз. (в пер.) .
3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного [Текст] : учебник для вузов / Я. С. Бугров, С. М. Никольский .— 3-е изд., испр. — М. : Наука, 1989 .— 464 с.

### Фонд литературы кафедры

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

1. <http://lib.mipt.ru>— электронная библиотека Физтеха.
2. <http://www.Sci-lib.com> — Большая научная библиотека.
4. <http://arXiv.org>— CornellUniversityLibrary — Библиотека Корнельского Университета, электронный ресурс arXiv.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

В процессе самостоятельной работы обучающиеся могут использовать программные средства MATLAB, Mathcad, WolframMathematica.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Для успешного освоения курса, помимо посещения лекций и семинаров, от студентов требуется самостоятельная работа в объеме не менее чем те часы, которые указаны для каждого раздела программы. В основном, это время отводится на самостоятельное решение домашнего задания. Самостоятельные занятия включают в себя также повторение материала лекций, семинарских занятий и подготовку к промежуточным тестированиям, которые проводятся для текущего контроля за усвоением материала. Всего предполагается провести за семестр 2 контрольных работы. Студенты, успешно прошедшие все формы промежуточного контроля, допускаются к сдаче экзамена по дисциплине.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Суперкомпьютерное моделирование ядерных процессов и технологий Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова кафедра математики и математических методов физики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Экзамен	
<b>Разработчик:</b>	С.А. Сергеев, канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория функций комплексного переменного» обучающийся должен:

### знать:

- Основные представления комплексных чисел.
- Условия Коши-Римана.
- Представление аналитических функций с помощью степенных рядов.
- Теорему Коши об интегрировании аналитической функции по замкнутому контуру.
- Теорему Коши о вычетах.
- Понятие особой точки. Определение вычета функции.
- Представление функции в окрестности особых точек с помощью степенных рядов.
- Свойства дробно-линейного отображения.
- Конформное отображение с помощью элементарных функций.
- Логарифмический вычет.
- Теорему Руше о приращении аргумента.

### уметь:

- Вычислять функции от комплексного числа.
- Дифференцировать функции комплексного аргумента.
- Строить по заданной действительной или мнимой части аналитическую функцию.
- Вычислять интеграл от функции комплексного аргумента по кривой или по замкнутому контуру.
- Раскладывать функцию в ряд Лорана в окрестности особых точек.
- С помощью конформных отображений переводить одну заданную область в другую.

### владеть:

- Элементарными операциями с комплексными числами.
- Методами дифференцирования функций комплексного аргумента.
- Основными методами вычисления интегралов от функций комплексного переменного.
- Основными способами конформных отображений.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю



В целях текущего контроля успеваемости предусмотрен краткий опрос по темам предыдущих занятий по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

### 3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Промежуточная аттестация по дисциплине «Теория функции комплексного переменного» осуществляется в форме экзамена. Экзамен проводится в устной форме.

#### Перечень контрольных вопросов для сдачи экзамена в 4 семестре:

1. Комплексное число. Структура и основные понятия. Путь на комплексной плоскости. Область на комплексной плоскости. Сфера Римана.
2. Функции комплексного переменного и дифференцируемость. R-дифференцируемость и C-дифференцируемость. Голоморфные функции. Условия Коши-Римана. Производная по направлению.
3. Основные функции комплексного переменного:  $z^n, e^z, \sin z, \cos z$ . Формула Эйлера.
4. Интеграл и первообразная. Первообразная вдоль пути.
5. Теорема Коши для областей, ограниченных простым жордановым контуром.
6. Теорема Коши для многосвязных областей. Интегральная формула Коши.
7. Ряд Тейлора. Сходимость ряда Тейлора. Голоморфность суммы степенного ряда.
8. Ряд Тейлора. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Интегральная формула Коши для производных.
9. Ряд Лорана. Сходимость ряда Лорана. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана. Изолированные особые точки: описание и классификация. Теорема Сохоцкого. Точка  $z = \infty$  как изолированная особая точка.
10. Вычеты. Теорема Коши о вычетах. Ряд Лорана и вычеты. Формулы для вычисления вычетов. Теорема о полной сумме вычетов. Лемма Жордана.
11. Конформное отображение с помощью дробно-линейного отображения. Групповое и круговое свойства. Инверсия. Единственность дробно-линейного преобразования.
12. Конформные отображения с помощью функций (и обратных к ним)  $z^n, e^z$  и функции Жуковского.
13. Многозначные функции, точки ветвления. Римановы поверхности функций  $\sqrt{z}$  и  $\ln z$ .

#### 3.1 Примеры экзаменационных билетов

##### Билет №1

1. Комплексное число. Структура и основные понятия. Путь на комплексной плоскости. Область на комплексной плоскости. Сфера Римана.
2. Ряд Тейлора. Сходимость ряда Тейлора. Голоморфность суммы степенного ряда.
3. Конформные отображения с помощью функций (и обратных к ним)  $z^n, e^z$  и функции Жуковского.

##### Билет № 2

1. Основные функции комплексного переменного:  $z^n, e^z, \sin z, \cos z$ . Формула Эйлера.
2. Теорема Коши для областей, ограниченных простым жордановым контуром.
3. Многозначные функции, точки ветвления. Римановы поверхности функций  $\sqrt{z}$  и  $\ln z$ .

#### 4. Критерии оценивания

Оценка	Баллы	Критерии
отлично	10	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие

		знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	9	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	8	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.
хорошо	7	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.
	6	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.
	5	Выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.
удовлетворительно	4	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.
	3	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении

		программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.
неудовлетворительно	2	Выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.
	1	Выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

#### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении экзамена обучающемуся предоставляется не менее 40 минут на подготовку. Опрос по билету и ответы на дополнительные вопросы не должны превышать двух астрономических часов. По завершении отведенного на опрос времени, экзаменатор должен выставить обучающемуся экзаменационную оценку.