

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе

А.А. Воронов

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Основы математической статистики
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Радиотехника и компьютерные технологии Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра проблем передачи информации и анализа данных
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Количество контрольных работ, заданий: 1

Программу составил: Г.К. Голубев, доктор наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры проблем передачи информации и анализа данных 31.05.2023

Аннотация

Курс предназначен для магистров математики, интересующихся современными методами дискретной математики и вероятностными приложениями в информатике. Курс включает в себя все основные определения и положения теории вероятностей: аксиоматику Колмогорова, распределения, случайные величины и векторы, математическое ожидание, вероятностные неравенства, законы больших чисел и центральную предельную теорему.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

овладение основными современными методами теории вероятностей.

Задачи дисциплины

- студенты овладевают базовыми знаниями (понятиями, концепциями, методами и моделями) теории вероятностей;
- приобретение теоретических знаний и практических навыков по теории вероятностей;
- консультирование и помощь студентам в проведении собственных теоретических исследований по теории вероятностей.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ПК-1 Способен планировать и проводить научные эксперименты (в избранной предметной области) и (или) теоретические (аналитические и имитационные) исследования	ПК-1.1 Владеет фундаментальными понятиями, законами и теориями современной физики
	ПК-1.2 Имеет глубокое знание и понимание базовых математических дисциплин
	ПК-1.3 Владеет культурой постановки научной задачи и моделирования естественнонаучных объектов и систем
	ПК-1.4 Умеет строить математические модели для описания и исследования процессов и явлений в соответствующих научных областях
	ПК-1.5 Владеет навыками безопасной работы с современными научными приборами и другим экспериментальным оборудованием
	ПК-1.6 Знает основные правила поведения и работы в современной научной лаборатории
	ПК-1.7 Способен оценивать требуемые ресурсы (материальные и временные) для планирования и проведения научного эксперимента
	ПК-1.8 Владеет навыками работы с современными языками программирования и программными пакетами для научных расчетов
	ПК-1.9 Знает перечень ведущих периодических научных изданий и способен выделять актуальные научные публикации в профессиональной области

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы теории вероятностей;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов теории вероятностей;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательства и доказательства основных теорем в разделах, входящих в основную часть цикла;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы решения типовых прикладных задач теории вероятностей.

уметь:

- ☐ понять задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- ☐ оценить правильность постановки задачи;
- ☐ строго доказывать или опровергать заявление;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения проблем, в том числе нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть последствия результатов;
- ☐ точно представлять математические знания по теории вероятностей в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыки усвоения большого количества информации и решения задач (в том числе сложных);
- ☐ навыки самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культура постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих использования математических подходов и методов их решения;
- ☐ предметный язык теории вероятностей и навыки грамотного описания решения задач и представления результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Дискретная вероятность, классическая и бернуллиевская модели.	1	1		1
2	Геометрическая вероятность и Колмогоровская аксиоматика	2	2		2
3	События, независимость, условная вероятность	1	1		1
4	Распределение вероятностей, случайные величины и случайные векторы	1	1		1
5	Функция распределения	1	1		1
6	Дискретное и абсолютно непрерывные распределения	2	2		2
7	Плотности	1	1		1
8	Математическое ожидание и дисперсия	1	1		1
9	Основные неравенства	1	1		1
10	Закон больших чисел и различные типы сходимостей	1	1		1
11	Предельные теоремы	2	2		2

12	Моменты, производящие функции и метод моментов	1	1		1
Итого часов		15	15		15
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		45 час., 1 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

1. Дискретные вероятностные пространства.

Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры.

2. Независимость от произвольного набора случайных величин.

Независимость от произвольного набора случайных величин. Критерий независимости, теорема о независимости борелевских функций от непересекающихся множеств независимых случайных величин.

3. Случайные элементы, случайные величины и векторы.

Случайные элементы, случайные величины и векторы. Достаточное условие измеримости отображения, следствие для случайных величин и векторов. Действия со случайными величинами.

4. Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (доказательство единственности).

Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (доказательство единственности). Теорема Лебега о функции распределения

5. Условные вероятности.

Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Примеры

6. Дискретное и абсолютно непрерывные распределения

Дискретное распределение.

Законы распределения дискретных случайных величин.

Определение и свойства математического ожидания и дисперсии.

7. Плотности

Плотности. Определение плотности.

Свойства плотности вероятности

8. Математическое ожидание и дисперсия

Смысл математического ожидания и дисперсии.

Свойства дисперсии.

9. Основные неравенства

Основные виде неравенств в теории вероятности.

Неравенство Чебышёва и другие.

10. Закон больших чисел и различные типы сходимостей

Группа теорем, объединённая под названием "закон больших чисел".

Устойчивость средних результатов большого количества случайных явлений и объяснение причин устойчивости.

11. Предельные теоремы

Предельные теоремы теории вероятностей.

Соответствие между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин при большом количестве испытаний.

12. Моменты, производящие функции и метод моментов

Моменты, производящие функции.

Метод моментов — метод оценки неизвестных параметров распределений в математической статистике. Идея метода моментов.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах [Текст] : учебное пособие для вузов: доп. М-вом образования РФ / В.А. Ватутин [и др.] . — 2-е изд., испр. — М : Дрофа, 2003 . — 328с.

Дополнительная литература

Литература на кафедре:

1. William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery. Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, 2007 Ian Goodfellow, Yoshua Bengio & Aaron Courville. Deep Learning (Adaptive Computation and Machine Learning series). The MIT Press, 2016.
2. David F. Anderson. Introduction to Probability. Cambridge University Press, 2017.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Мультимедийные технологии можно использовать на лекциях и практических занятиях, в том числе на презентациях.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.

2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего использовать лекционные материалы.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Радиотехника и компьютерные технологии Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра проблем передачи информации и анализа данных
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: Г.К. Голубев, доктор наук, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ПК-1 Способен планировать и проводить научные эксперименты (в избранной предметной области) и (или) теоретические (аналитические и имитационные) исследования	ПК-1.1 Владеет фундаментальными понятиями, законами и теориями современной физики
	ПК-1.2 Имеет глубокое знание и понимание базовых математических дисциплин
	ПК-1.3 Владеет культурой постановки научной задачи и моделирования естественнонаучных объектов и систем
	ПК-1.4 Умеет строить математические модели для описания и исследования процессов и явлений в соответствующих научных областях
	ПК-1.5 Владеет навыками безопасной работы с современными научными приборами и другим экспериментальным оборудованием
	ПК-1.6 Знает основные правила поведения и работы в современной научной лаборатории
	ПК-1.7 Способен оценивать требуемые ресурсы (материальные и временные) для планирования и проведения научного эксперимента
	ПК-1.8 Владеет навыками работы с современными языками программирования и программными пакетами для научных расчетов
	ПК-1.9 Знает перечень ведущих периодических научных изданий и способен выделять актуальные научные публикации в профессиональной области

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Основы математической статистики» обучающийся должен:

знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы теории вероятностей;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов теории вероятностей;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательства и доказательства основных теорем в разделах, входящих в основную часть цикла;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы решения типовых прикладных задач теории вероятностей.

уметь:

- ☐ понять задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- ☐ оценить правильность постановки задачи;
- ☐ строго доказывать или опровергать заявление;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения проблем, в том числе нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть последствия результатов;
- ☐ точно представлять математические знания по теории вероятностей в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыки усвоения большого количества информации и решения задач (в том числе сложных);
- ☐ навыки самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культура постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих использования математических подходов и методов их решения;
- ☐ предметный язык теории вероятностей и навыки грамотного описания решения задач и представления результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры домашних заданий

1. Точка x выбирается случайным образом из прямоугольника со сторонами длиной 1 и 2. Найдите вероятность того, что ближайшая к x сторона имеет длину 1.
2. $2I(x + y \leq 1, x > 0, y > 0)$ - плотность случайного вектора (ξ, η) . Пусть $p_\xi, p_\eta, p_{\xi + \eta}$ - плотности (непрерывные на $(0, 1)$) $\xi, \eta, \xi + \eta$ соответственно. Найдите $p_\xi(1/2) p_\eta(1/2) p_{\xi + \eta}(1/2)$.
3. Пусть $\xi \sim \text{Bern}(p)$ и F - его функция распределения. Какое распределение имеет $F(\xi)$?
4. Пусть $S_n, n \in \mathbb{Z}^+$ - симметричное случайное блуждание на \mathbb{Z} . Пусть X - число $k \in \{1, \dots, 10\}$ таких, что $S_k = 0$. Найдите $\text{Var} X$.
5. Пусть $(\xi_n - \xi) \xrightarrow{P} 0$. Верно ли, что а) $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$? б) $\xi_n^2 \xrightarrow{P} \xi^2$? в) $\xi_n^3 \xrightarrow{P} \xi^3$?

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов к экзамену:

1. Вероятностное пространство. Аксиомы Колмогорова. Теорема о непрерывности в «нуле» вероятностной меры.
2. Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры.
3. Геометрические вероятности. Примеры.
4. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Примеры формул Байеса.
5. Теорема о монотонных классах.
6. Независимость событий и систем событий. Пример Бернштейна. Лемма о достаточном условии независимости сигма-алгебр.
7. Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (доказательство единственности).
8. Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах. Независимость от случайных величин. Математическое ожидание случайной величины, ее основные свойства. Дисперсия, ковариантность и их свойства.
9. Случайные элементы, случайные величины и векторы. Достаточное условие измеримости отображения, следствие для случайных величин и векторов. Действия со случайными величинами.
10. Независимость от произвольного набора случайных величин. Критерий независимости, теорема о независимости борелевских функций от непересекающихся множеств независимых случайных величин.
11. Математическое ожидание случайной величины (интеграл Лебега в вероятностной мере): определение простых, неотрицательных и произвольных случайных величин. Проверка определений.
12. Основные свойства математического ожидания. Теорема о математическом ожидании для произведения независимых случайных величин.

13. Дисперсия, ковариантность и их свойства. Неравенство Коши-Буняковского. Дисперсия суммы независимых случайных величин. Ковариационная матрица случайного вектора, ее неотрицательная определенность.
14. Неравенство Маркова, неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Неравенство Дженсена.
15. Типы сходимости случайных величин, их взаимосвязь. Критерий Коши сходимости с вероятностью 1.
16. Неравенство Колмогорова. Теорема сходимости для почти наверняка серии случайных величин.
17. Усиленный закон больших чисел для независимых случайных величин с ограниченными дисперсиями.
18. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Теорема о монотонной сходимости, лемма Фату, теорема Лебега о мажорированной сходимости.
19. Лемма Бореля Кантелли. Усиленный закон больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин с ограниченным математическим ожиданием.
20. Формула пересчета математических ожиданий. Теорема о замене переменной в интеграле Лебега.
21. Прямое произведение вероятностных пространств. Теорема Фубини (b / d). Совместное распределение конечного набора случайных величин. Свертка распределений.
22. Слабая сходимость и сходимость в основном вероятностных мер. Теорема Александрова (б / г). Теорема об эквивалентности сходимости по распределению случайных величин и сходимости функций распределения во всех точках непрерывности предельной функции.
23. План тестов Бернулли и полиномиальный план. Предельные теоремы для схемы Бернулли: теорема Пуассона и теорема Муавра-Лапласа (b / d).
24. Характеристические функции вероятностных мер. функции распределения, случайные величины и векторы. Примеры. Основные свойства характеристических функций случайных величин.
25. Теорема единственности для характеристических функций вероятности. Независимость компонент случайного вектора в терминах характеристических функций.
26. Теорема непрерывности для характеристических функций (b / d). Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин.
27. Теорема Берри Эссеена о скорости сходимости в центральной предельной теореме (b / d). Оценки константы в теореме Берри Эссеена.

Билет 1

1. Дизайн тестов Бернулли и полиномиальный дизайн. Предельные теоремы для схемы Бернулли: теорема Пуассона и теорема Муавра-Лапласа (b / d)
2. Неравенство Маркова, неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Неравенство Дженсена

Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется студенту, проявившему всестороннее, систематическое и глубокое знание материала образовательной программы, самостоятельно выполнившего все задания, предусмотренные программой, глубоко изучившему основную и дополнительную литературу, рекомендованную программой. , активно работает в классе и понимает основные научные концепции по изучаемой дисциплине, проявил творческий подход и научный подход в понимании и представлении материала образовательной программы, ответ на который характеризуется использованием богатых и адекватных терминов, а также последовательным и логичным изложением материала;

Оценка «отлично (9)» выставляется студенту, который продемонстрировал всестороннее систематическое знание материала образовательной программы, самостоятельно выполнил все задачи, предусмотренные программой, глубоко усвоил основную литературу и знаком с рекомендуемой дополнительной литературой. по программе, активно проработал на занятиях, показал системность знаний по дисциплине, достаточную для дальнейшего изучения, а также умение самостоятельно расширять ее, ответ которой отличается точностью используемых терминов, а изложение материала в нем последовательное и логичное;

Оценка «отлично (8)» выставляется студенту, который проявил полное знание материала образовательной программы, не допускает существенных неточностей в своем ответе, самостоятельно выполнил все задания, предусмотренные программой, изучил основную литературу, рекомендованную учебной программой. программа, активно проработанная на занятиях, показала системность его знаний по дисциплине, достаточных для дальнейшего изучения, а также способность самостоятельно их расширять;

Оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, который проявил достаточно полное знание материала образовательной программы, не допускает существенных неточностей в ответе, самостоятельно выполнил все задания, предусмотренные программой, изучил основную рекомендованную литературу по программе, активно работал на занятиях, показал системность своих знаний по дисциплине, достаточных для дальнейшего изучения, а также умение самостоятельно их усиливать;

Оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, который проявил достаточно полное знание материала образовательной программы, не допускает существенных неточностей в своем ответе, самостоятельно выполнил основные задачи, предусмотренные программой, изучил основную литературу. рекомендован программой, показал систематичность своих знаний по дисциплине, достаточную для дальнейшего изучения;

Оценка «хорошо (5)» дается студенту, продемонстрировавшему знание материала основной образовательной программы в объеме, необходимом для дальнейшего обучения и будущей работы по профессии, который, не проявляя достаточной активности на уроках, тем не менее самостоятельно выполнял овладел основными задачами, предусмотренными программой, освоил основную литературу, рекомендованную программой, допустил ошибки в их выполнении и ответе во время тестирования, но имеет необходимые знания для исправления этих ошибок самостоятельно;

Оценка «удовлетворительно (4)» дается студенту, обнаружившему знание материала основной образовательной программы в объеме, необходимом для дальнейшего обучения и будущей работы по профессии, который, не проявляя достаточной активности на уроках, тем не менее самостоятельно выполнял основные задачи, предусмотренные программой, изучил основную литературу, но допустил ошибки в их выполнении и в своем ответе во время теста, но имеет необходимые знания для исправления этих ошибок под руководством преподавателя;

Оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, проявившему знание материала основной образовательной программы в объеме, необходимом для дальнейшего обучения и будущей работы по профессии, не проявившего активности на занятиях, самостоятельно выполнившего основные задачи, предусмотренные программой, но допускающая ошибки в их выполнении и в ответе при тестировании, но обладающая необходимыми знаниями для устранения под руководством преподавателя наиболее существенных ошибок;

Оценка «неудовлетворительно (2)» дается студенту, который показал пробелы в знаниях или недостаток знаний по значительной части материала основной образовательной программы, не выполнил самостоятельно основные задачи, требуемые программой, допустил принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой задач, который не может продолжить учебу или начать профессиональную деятельность без дополнительной подготовки по рассматриваемой дисциплине;

Оценка «неудовлетворительно (1)» ставится студенту при отсутствии ответа (отказ от ответа), либо когда представленный ответ совсем не соответствует сути вопросов, содержащихся в задании.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время экзамена студенту разрешается использовать программу дисциплины.