

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Дискретный анализ
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Радиотехника и компьютерные технологии Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра математических основ управления
курс:	1
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 3

Программу составил: А.А. Рубцов, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры математических основ управления 15.05.2020

Аннотация

«Дискретный анализ» — базовый вводный курс, рассматривающий разделы дискретной математики: алгебра логики, комбинаторика, теория графов (АЛКТГ) и прививающий студентам азы математической культуры, необходимые для последующего изучения как математических дисциплин, так и компьютерных наук. Курс знакомит с такими фундаментальными понятиями как множество, функции и отображения, булевы функции, алгебра логики, отношения и графы. Они важны как для дальнейшего изучения Computer Science, так и в качестве основы «чистой» математики.

С другой стороны, для плодотворного развития Computer Science требуется понимание того, что такое доказательство. Доказательства корректности многих алгоритмов являются, по сути, доказательствами теорем, поэтому в рамках данного курса особое внимание уделяется доказательствам.

Курс завершается изучением производящих функций — важным математическим аппаратом современной комбинаторики. Для изучения этой темы студенты должны владеть базовыми знаниями из математического анализа: уметь дифференцировать, интегрировать и применять формулу Тейлора.

Дополнительных знаний помимо школьной программы и своевременного освоения математического анализа для изучения курса не требуется.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Знакомство с базовыми понятиями дискретного анализа: алгебры логики, комбинаторики, теории графов (АЛКТГ). Развитие математической культуры доказательств. Изучение фундаментальных разделов, относящихся к дискретной математике - АЛКТГ, необходимых для успешного прохождения последующих курсов алгоритмического цикла.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области АЛКТГ;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области АЛКТГ;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области дискретной математики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
ПК-3 Способен выбирать и применять подходящее оборудование, инструменты и методы исследований для решения задач в избранной предметной области	ПК-3.3 Умеет производить оценку точности численных методов, используемых на ЭВМ, вычислительной сложности используемых алгоритмов и объема требуемых вычислительных ресурсов
	ПК-3.2 Знает области и критерии применимости используемых теоретических подходов и умение оценивать точность приближенных аналитических методов вычислений

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы, теории дискретной математики (АЛКТГ);
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов дискретной математики (АЛКТГ);
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла АЛКТГ;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дискретной математики (АЛКТГ).

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач АЛКТГ;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач АЛКТГ, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в области АЛКТГ в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач АЛКТГ (в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов АЛКТГ;
- ☐ предметным языком дискретной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Алгебра логики.	2	2		4
2	Множества и логика.	2	2		4
3	Математические определения, утверждения и доказательства.	2	4		4
4	Графы	4	4		4
5	Двудольные графы, паросочетания и функции.	2	2		4
6	Комбинаторика	6	6		5
7	Бинарные отношения. Отношения эквивалентности.	2	2		5
8	Оrientированные графы и отношения порядка.	2	2		5
9	Булевы функции.	2	2		5
10	Производящие функции.	6	4		5
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Алгебра логики.

Высказывания и логические связки. Булевы функции и способы их задания: таблицы истинности, формулы, вектор значений. Законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, приоритет операций. Законы поглощения. Равенство булевых функций (и булевых формул). Существенные и фиктивные переменные.

2. Множества и логика.

Множества и операции над ними. Связь алгебры логики и алгебры множеств: предикаты, универсум и дополнение, законы де Моргана, кванторы, эквивалентность тождеств алгебры множеств и алгебры логики, импликация и включение множеств, контрапозиция.

3. Математические определения, утверждения и доказательства.

Определение, утверждение, теорема, критерий. Запись утверждений в кванторах (формулы первого порядка). Методы доказательств: контрапозиция, индукция, от противного, конструктивные (примеры и контрпримеры), неконструктивные.

4. Графы

Графы I. Неориентированные графы.

Определение неориентированных графов. Степень вершины. Сумма степеней вершин — удвоенное количество рёбер. Число людей, сделавших нечётное число рукопожатий, чётно. Теоретико-множественные операции с графами. Определение подграфа. Определение путей и циклов (через подграфы). Связные графы и компоненты связности (через подграфы).

Графы II. Деревья.

Связность. Теорема «#компонент связности $\geq |V| - |E|$ ». Маршруты и замкнутые маршруты. Между двумя вершинами графа есть путь, если между ними есть маршрут. Деревья. Теорема об эквивалентности четырёх свойств. Расстояние между вершинами, диаметр графа. Диаметр любого связного графа не превосходит $|V| - 1$. Двураскрашиваемый граф. Граф двураскрашиваемый тогда и только тогда, когда нет циклов нечётной длины. Эйлеровы маршруты.

5. Двудольные графы, паросочетания и функции.

Двудольные графы и паросочетание. Теорема Холла (без доказательства). Функции (область определения, множество значений, образ, полный прообраз). Отображения (всюду определённые функции): инъекции, сюръекции, биекции. Отображения и задача о назначениях. Изоморфизм графов. Доказательство теоремы Холла*.

6. Комбинаторика

Комбинаторика I. Правила суммы и произведения.

Отображения и подсчёты. Правило суммы. Правило произведения — биекция с декартовым произведением множеств. Число двоичных слов длины n . Число подмножеств n -элементного множества. Размещения. Перестановки. Подсчёт количества слов длины k с разными буквами. Подсчёты с кратностью: сколько различных слов можно составить из слова «Математика»? Число сочетаний. Количество k -элементных подмножеств n -элементного множества. Дискретная вероятность.

Комбинаторика II. Биномиальные коэффициенты.

Количество путей по узлам клеток (вправо и вверх) из $(0,0)$ в (i,j) есть число сочетаний из $i+j$ по i . Треугольник Паскаля и его свойства: симметрия, возрастание биномиальных коэффициентов к середине, оценка центрального коэффициента. Бином Ньютона и биномиальные коэффициенты. Рекуррентное соотношение. Сумма биномиальных коэффициентов и её комбинаторный смысл. Знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов. Комбинаторные доказательства. Рекуррентное соотношение на биномиальные коэффициенты в треугольнике Паскаля. Задача о командире и солдатах. Метод точек и перегородок. Формула Муавра. Число мономов степени d . Число сочетаний с повторениями. Числа Фибоначчи. Числа Каталана (доказательство явной формулы).

Комбинаторика III. Формула включений-исключений.

Характеристические функции. Доказательство формулы включений-исключений. Примеры: количество чисел от 1 до 1000 не делящихся ни на 3, ни на 5, ни на 7; связь со знакопеременной суммой биномиальных коэффициентов; подсчёт сюръекций. Подсчёт числа отображений (всюду определённых функций), функций, инъекций, биекций из n -элементного множества в n -элементное множество Множества и функции. Смысл обозначений 2^A для множества всех подмножеств и Y^X для множества отображений из X в Y . Принцип Дирихле: при $m > n$ нет инъекции из $\{1, \dots, m\}$ в $\{1, \dots, n\}$.

7. Бинарные отношения. Отношения эквивалентности.

Формальное определение отношений и их свойств: рефлексивность, транзитивность, симметричность, антисимметричность. Задание бинарного отношения таблицей, двудольным графом, перечислением пар. Примеры отношений эквивалентности: рациональные числа, равные и подобные треугольники, неопределённые интегралы. Формальное определение. Т.: Классы эквивалентности не пересекаются или совпадают. Теоретико-множественные операции с отношениями. Операция обращения. Описание с помощью булевых матриц. Композиция отношений (связь с базами данных).

8. Ориентированные графы и отношения порядка.

Определение ориентированного графа. Исходящие и входящие степени — аналог формулы суммы степеней для неориентированного графа. Компоненты сильной связности. Т.: Следующие условия для ориентированного графа равносильны:

- Каждая компонента сильной связности тривиальна (состоит из одной вершины).
- Граф ациклический.
- Вершины графа можно занумеровать так, что рёбра идут только от вершин с меньшим номером к вершинам с большим номером.

Примеры отношений (частичного) порядка, формальное определение. Линейный порядок. Отношение непосредственного следования и его граф (диаграмма Хассе). Покоординатный порядок. Булев куб — двоичные слова, упорядоченные покоординатно.

9. Булевы функции.

Алгоритм построения ДНФ (и КНФ) по таблице истинности Определение булевых схем, реализующих булевы функции, через последовательности присваиваний и графов (стандартный базис). Задание функции булевой схемой (последовательностью присваиваний) Формулы—схемы специального вида Общее определение схем (для произвольного базиса). Базис — полный базис. Монотонные функции: неполнота монотонного базиса $\{\wedge, \vee\}$, связь с множествами (монотонность по включению), раскраска булева куба, оценка числа монотонных булевых функций. Многочлены Жегалкина. Классы Поста. Формулировка теоремы Поста.

10. Производящие функции.

Определения и примеры. Производящая функция бинома Ньютона Свойства, нужные для математического анализа (экспонента растёт быстрее полинома и т.п.). Применение для решения комбинаторных задач Задача Муавра. Задача о счастливых билетах. Найти число целочисленных решений системы уравнений вида $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ с ограничениями на значения переменных. Число разбиений n на различные слагаемые совпадает с числом разбиений n на нечётные слагаемые. Свёртки. Пример использования для вычисления производящей функции последовательности. Числа Каталана. *Общий метод для линейно-рекуррентных последовательностей. Числа Стирлинга первого рода (без знака). Задача о числе беспорядков. Числа Фибоначчи. Числа Стирлинга второго рода. Числа Белла.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиапроектором и экраном.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Дискретный анализ. Комбинаторика. Алгебра логики. Теория графов [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Журавлев, Ю. А. Флеров, О. С. Федько ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2012 .— 248 с.
2. Сборник задач по дискретному анализу. Комбинаторика. Элементы алгебры логики. Теория графов [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Журавлев [и др.] ; М-во образования Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 2-е изд. — М. : МФТИ, 2000, 2004 .— 100 с.

Дополнительная литература

1. Конкретная математика. Основание информатики [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник ; пер. с англ. Б. Б. Походзея, А. Б. Ходулёва ; под ред. А. Б. Ходулёва .— 3-е изд. — М. : Мир : Бином. Лаб. знаний, 2009 .— 703 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://www.mou.mipt.ru>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Не предусмотрено.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий курс дискретного анализа, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, методы доказательств.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;

– решение задач, предлагаемых студентам на практических занятиях и в качестве курсового задания;

– подготовку к практическим занятиям, экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Радиотехника и компьютерные технологии Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра математических основ управления
курс:	1
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Разработчик: А.А. Рубцов, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
ПК-3 Способен выбирать и применять подходящее оборудование, инструменты и методы исследований для решения задач в избранной предметной области	ПК-3.3 Умеет производить оценку точности численных методов, используемых на ЭВМ, вычислительной сложности используемых алгоритмов и объема требуемых вычислительных ресурсов
	ПК-3.2 Знает области и критерии применимости используемых теоретических подходов и умение оценивать точность приближенных аналитических методов вычислений

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дискретный анализ» обучающийся должен:

знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы, теории дискретной математики (АЛКТГ);
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов дискретной математики (АЛКТГ);
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла АЛКТГ;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дискретной математики (АЛКТГ).

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач АЛКТГ;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач АЛКТГ, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в области АЛКТГ в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач АЛКТГ (в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов АЛКТГ;
- ☐ предметным языком дискретной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений , навыков

1. Алгебра логики. Булевы функции и способы их задания: таблицы истинности, формулы, вектор значений.
2. Законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, приоритет операций.
3. Законы поглощения.
4. Равенство булевых функций (и булевых формул).
5. Существенные и фиктивные переменные.
6. Множества и логика.
Множества и операции над ними.
7. Связь алгебры логики и алгебры множеств: предикаты, универсум и дополнение, законы де Моргана, кванторы, эквивалентность тождеств алгебры множеств и алгебры логики, импликация и включение множеств, контрапозиция.
8. Математические определения, утверждения и доказательства.
Определение, утверждение, теорема, критерий. Запись утверждений в кванторах (формулы первого порядка).
9. Методы доказательств: контрапозиция, индукция, от противного, конструктивные (примеры и контрпримеры), неконструктивные.
10. Графы I. Неориентированные графы.
Определение неориентированных графов Степень вершины. Сумма степеней вершин — удвоенное количество рёбер.
11. Число людей, сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.
12. Теоретико - множественные операции с графами.
13. Определение подграфа. Определение путей и циклов (через подграфы). Связные графы и компоненты связности (через подграфы).
14. Графы II. Деревья. Связность. Теорема «#компонент связности $\geq |V| - |E|$ ».
Маршруты и замкнутые маршруты.
15. Между двумя вершинами графа есть путь, если между ними есть маршрут.
16. Деревья. Теорема об эквивалентности четырёх свойств. Расстояние между вершинами, диаметр графа. Диаметр любого связного графа не превосходит $|V| - 1$.
Двураскрашиваемый граф. Граф двураскрашиваемый тогда и только тогда, когда нет циклов нечётной длины.
17. Эйлеровы маршруты.
18. Двудольные графы, паросочетания и функции. Теорема Холла (без доказательства).
19. Функции (область определения, множество значений, образ, полный прообраз).
Отображения (всюду определённые функции): инъекции, сюръекции, биекции.
Отображения и задача о назначениях.
20. Изоморфизм графов.
21. Доказательство теоремы Холла*.
22. Комбинаторика I. Правила суммы и произведения.
Отображения и подсчёты. Правило суммы. Правило произведения — биекция с декартовым произведением множеств. Число двоичных слов длины n . Число подмножеств n -элементного множества.
23. Размещения. Перестановки. Подсчёт количества слов длины k с разными буквами.
Подсчёты с кратностью: сколько различных слов можно составить из слова «Математика»?
24. Число сочетаний. Количество k -элементных подмножеств n -элементного множества.
Дискретная вероятность.
25. Комбинаторика II. Биномиальные коэффициенты. Количество путей по узлам клеток (вправо и вверх) из $(0,0)$ в (i,j) есть число сочетаний из $i+j$ по i .

26. Треугольник Паскаля и его свойства: симметрия, возрастание биномиальных коэффициентов к середине, оценка центрального коэффициента.
27. Бином Ньютона и биномиальные коэффициенты. Рекуррентное соотношение.
28. Сумма биномиальных коэффициентов и её комбинаторный смысл. Знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов.
29. Комбинаторные доказательства. Рекуррентное соотношение на биномиальные коэффициенты в треугольнике Паскаля. Задача о командире и солдатах.
30. Метод точек и перегородок. Формула Муавра.
31. Число мономов степени d . Число сочетаний с повторениями.
32. Числа Фибоначчи.
33. Числа Каталана (доказательство явной формулы).
34. Комбинаторика III. Формула включений-исключений.
35. Характеристические функции. Доказательство формулы включений-исключений.
36. Примеры: количество чисел от 1 до 1000 не делящихся ни на 3, ни на 5, ни на 7; связь со знакопеременной суммой биномиальных коэффициентов; подсчёт сюръекций.
37. Подсчёт числа отображений (всюду определённых функций), функций, инъекций, биекций из n -элементного множества в n -элементное множество.
38. Множества и функции. Смысл обозначений 2^A для множества всех подмножеств и Y^X для множества отображений из X в Y .
39. Принцип Дирихле: при $m > n$ нет инъекции из $\{1, \dots, m\}$ в $\{1, \dots, n\}$.
40. Бинарные отношения. Отношения эквивалентности.
Формальное определение отношений и их свойств: рефлексивность, транзитивность, симметричность, антисимметричность. Задание бинарного отношения таблицей, двудольным графом, перечислением пар. Примеры отношений эквивалентности: рациональные числа, равные и подобные треугольники, неопределённые интегралы. Формальное определение. Т.: Классы эквивалентности не пересекаются или совпадают.
41. Теоретико-множественные операции над отношениями. Операция обращения. Описание с помощью булевых матриц. Композиция отношений (связь с базами данных).
42. Ориентированные графы и отношения порядка.
Определение ориентированного графа. Исходящие и входящие степени — аналог формулы суммы степеней для неориентированного графа.
43. Компоненты сильной связности.
44. Т.: Следующие условия для ориентированного графа равносильны:
 - Каждая компонента сильной связности тривиальна (состоит из одной вершины).
 - Граф ациклический.
 - Вершины графа можно занумеровать так, что рёбра идут только от вершин с меньшим номером к вершинам с большим номером.
45. Примеры отношений (частичного) порядка, формальное определение. Линейный порядок. Отношение непосредственного следования и его граф (диаграмма Хассе). Покоординатный порядок.
- i. Булев куб — двоичные слова, упорядоченные покоординатно.
46. Булевы функции.
Алгоритм построения ДНФ (и КНФ) по таблице истинности Определение булевых схем, реализующих булевы функции, через последовательности присваиваний и графов (стандартный базис). Задание функции булевой схемой (последовательностью присваиваний).
47. Формулы-схемы специального вида. Общее определение схем (для произвольного базиса).
48. Базис — полный базис.

49. Монотонные функции: неполнота монотонного базиса $\{\wedge, \vee\}$, связь с множествами (монотонность по включению), раскраска булева куба, оценка числа монотонных булевых функций.
50. Многочлены Жегалкина.
51. Классы Поста. Формулировка теоремы Поста.
52. Производящие функции. Определения и примеры. Производящая функция бинома Ньютона Свойства, нужные для математического анализа (экспонента растёт быстрее полинома и т.п.). Применение для решения комбинаторных задач.
53. Задача Муавра.
54. Задача о счастливых билетах.
55. Найти число целочисленных решений системы уравнений вида $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ с ограничениями на значения переменных.
56. Число разбиений n на различные слагаемые совпадает с числом разбиений n на нечётные слагаемые.
57. Свёртки. Пример использования для вычисления производящей функции последовательности.
58. Числа Каталана.
59. *Общий метод для линейно-рекуррентных последовательностей.
60. Числа Стирлинга первого рода (без знака).
61. Задача о числе беспорядков. Числа Фибоначчи.
62. Числа Стирлинга второго рода. Числа Белла.

На каждом семинаре студентам предлагаются домашние задания, например, такое:
Пример домашнего задания

Домашняя работа

1. Верно ли, что для любых множеств A и B выполняется равенство

$$(A \setminus B) \cap ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = A \setminus B?$$
2. Верно ли, что для любых множеств A , B и C выполняется равенство

$$((A \setminus B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \setminus (B \cap C)) = A \setminus (B \cup C)?$$
3. Верно ли, что для любых множеств A , B и C выполняется равенство

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)?$$
4. Верно ли, что для любых множеств A и B выполняется включение

$$(A \cup B) \setminus (A \setminus B) \subseteq B?$$
5. Пусть $P = [10, 40]$; $Q = [20, 30]$; известно, что отрезок A удовлетворяет соотношению

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \wedge ((x \in Q) \rightarrow (x \in A)).$$
 - a. Найдите отрезок A максимально возможной длины.
 - b. Найдите отрезок A минимально возможной длины.
6. Про множества A , B , X , Y известно, что $A \cap X = B \cap X$, $A \cup Y = B \cup Y$. Верно ли, что тогда выполняется равенство $A \cup (Y \setminus X) = B \cup (Y \setminus X)$?
7. Пусть $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$ — невозрастающая последовательность множеств. Известно, что $A_1 \setminus A_4 = A_6 \setminus A_9$. Докажите, что $A_2 \setminus A_7 = A_3 \setminus A_8$.

8. Пусть A, B, C, D — такие отрезки прямой, что $A \triangle B = C \triangle D$ (симметрические разности равны). Верно ли, что выполняется включение $A \cap B \subseteq C$?

Пример контрольной работы

1. Для какого слова ложно высказывание

«Первая буква слова гласная \rightarrow (Вторая буква слова гласная \vee Последняя буква слова гласная)»?

- 1) жара; 2) орда; 3) огород; 4) парад.

2. Докажите, что $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$; $x \wedge y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$ $\bar{x} \rightarrow \bar{y} = x \wedge \bar{y}$.

3. Найдите для формулы $(x \wedge z) \vee (x \wedge \neg z) \vee \neg(\neg x \rightarrow \neg y)$ равносильную формулу (среди формул ниже), преобразовав первую.

- а) 1; б) $x \wedge (z \vee y)$; в) $x \vee y$; г) y .

4. Докажите дистрибутивность дизъюнкции относительно эквивалентности:

$$x \vee (y \leftrightarrow z) = (x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z).$$

5. Булева функция $\text{MAJ}(x_1, x_2, x_3)$ возвращает 1 тогда и только тогда, когда хотя бы две переменные из трёх равны. Выразите $\text{MAJ}(x_1, x_2, x_3)$ через булеву формулу.

6. Докажите следующие формулы разложений (Шеннона и Рида):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\bar{x}_1 \wedge f(0, x_2, \dots, x_n)) \vee (x_1 \wedge f(1, x_2, \dots, x_n));$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = ((1 \oplus x_1) \wedge f(0, x_2, \dots, x_n)) \oplus (x_1 \wedge f(1, x_2, \dots, x_n)).$$

7. Булева функция задана вектором значений: $f(x_1, x_2, x_3) = 10100101$.

- а. Опишите f через таблицу истинности.

- б. Какие переменные f являются существенными; фиктивными?

- с. Опишите f через булеву формулу.

8. Булева функция f задана формулой. Выразите f через таблицу истинности и формулу с операциями \wedge, \vee, \neg (в стандартном базисе):

$$f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \wedge x_2);$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_1 \wedge x_3) \oplus (x_2 \wedge x_3) \oplus (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3).$$

9. Докажите, что не существует булевой функции $f(x, y)$, существенно зависящей от обеих переменных, такой что

$$\overline{f(x, y)} = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

- 10*. Докажите, что любое тождество вида $A = B$, где A и B — булевы формулы со связками \wedge, \vee, \neg , останется верным, если в нём все конъюнкции заменить на дизъюнкции, а дизъюнкции заменить на конъюнкции.

- 11*. Постройте такую логическую связку (булеву функцию от двух переменных), что любая булева функция выразима в виде формулы с этой связкой.

Пример семестровой контрольной работы №1

Приведите ответ (обоснование не требуется).

Запишите ответ сразу после условия задачи! Не обязательно приводить в ответе число в десятичной записи, если в условии не требуется численный ответ. В следующих разделах после условия задачи запишите её решение.

1. Найдите число семиэлементных подмножеств девятиэлементного множества. Ответом должно быть число в десятичной записи.

Ответ:

2. Найдите фиктивные переменные у булевой функции, заданной вектором значений 11001100. Ответом должно быть число в десятичной записи.

Ответ:

3. Лесом называется граф, компонентами связности которого являются деревья. Найти количество рёбер в лесу, содержащем 2019 вершин и 100 компонент связности. Ответом должно быть число в десятичной записи.

Ответ:

4. Найдите число правильных раскрасок графа-звезды на 11 вершинах в три цвета.

Ответ:

5. Сколькими способами из полной колоды (36 карт) можно выбрать 7 карт так, чтобы все 4 масти в этом наборе оказались представлены хотя бы по разу?

Ответ:

Приведите определение и обоснованно ответьте на вопрос.

6. Дерево. Верно ли, что если в графе число вершин на единицу больше, чем число ребер, то граф — дерево?
7. Инъекция. Найдите число инъекций из множества $\{1, 2, 3, \dots, 2019\}$ в множество $\{1, 2, 3, \dots, 2007\}$. Ответом должно быть число в десятичной записи.
8. Законы де Моргана. Докажите, что если $A \cap (B \cup \bar{C}) = \bar{A} \cup D$, то $\bar{A} \cup (\bar{B} \cap C) = A \cap \bar{D}$.

Приведите обоснованные решения

9. Сколькими способами можно выложить в ряд 25 красных, 25 синих и 25 зелёных шаров, так чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?
10. На окружности отмечены 2020 различных точек. Одна из этих точек синего цвета, а остальные — красного. Каких дуг окружности с концами в двух различных из этих 2020 точек больше: тех, на которых лежит синяя точка (в том числе, возможно, в качестве одного из концов), или остальных?

11. Найдите количество всевозможных троек множеств $A, B, C \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 8\}$, для которых выполняются условия $|A| = |B| = |C| = 4$ и $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 2$.
12. Существует ли такое отображение $f: \mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{N}_1$, что из любого связного (простого неориентированного) графа, в котором степень каждой вершины не меньше $f(k)$, при удалении любых k вершин (со всеми смежными рёбрами) получается связный граф?
13. В стране из каждого города исходит не меньше $m \geq 2$ двусторонних автомобильных дорог и любые два города связаны не более чем одной дорогой. Докажите, что некоторый город лежит на кольцевом маршруте длины не меньше $m + 1$, в котором все города разные, т. е. из города можно выехать в другой, из другого в третий и так далее, каждый раз отправляясь в новый город, и вернуться в конце маршрута из $m + 1$ -го города в первый.

Пример семестровой контрольной работы №2

Приведите ответ (обоснование не требуется).

На выполнение теста даётся полтора часа! Запишите ответ сразу после условия задачи! Не обязательно приводить в ответе число в десятичной записи, если в условии не требуется численный ответ.

1. Приведите пример одновременно нереклексивного и не антирефлексивного бинарного отношения на множестве $\{1, 2, 3\}$.

Ответ:

2. Постройте ДНФ-разложение для функции, заданной вектором 10110010.

Ответ:

3. Найдите число инъекций из 5-элементного множества в 8-элементное множество.

Ответ:

4. Сколько подграфов графа K_5 являются циклами длины 4?

Ответ:

5. Каждый из четырёх экзаменов в сессию на <<отлично 10>> сдали по 42 студента, при этом каждую пару экзаменов на <<отлично 10>> сдали по 5 студентов, каждые три экзамена сдали на отлично по 3 студентов, а все экзамены на <<отлично 10>> сдали только 2 человека. Сколько студентов получили <<отлично 10>> хотя бы за один экзамен?

Ответ:

Приведите определение

6. Наибольший элемент.
7. Самодвойственная функция.

8. Изоморфные графы.

Обоснованно ответьте на вопрос, опираясь на определение

6. Приведите пример отношения порядка на бесконечном множестве, в котором есть наибольший элемент.
7. Посчитайте количество булевых функций от n переменных, которые являются одновременно линейными и самодвойственными.
8. Сколько неизоморфных неориентированных графов на 9999 вершинах с $\binom{9999}{2} - 2$ рёбрами?

Приведите обоснованные решения

9. Сколькими способами можно расселить 25 гостей (это разные люди!) в гостиной, спальне, кухне и на чердаке, если требуется чтобы ни одна из комнат не осталась пустой?
10. Зафиксируем множество U . Опишите все отношения эквивалентности на U , которые являются частичными порядками на U .
11. Между любыми двумя вершинами x и y простого ориентированного графа G существует ровно один путь: либо путь из x в y , либо путь из y в x . Неориентированный граф G' получен из графа G удалением ориентации рёбер. Докажите, что в G есть остовное дерево, являющееся графом-путём.
12. Рассмотрим отображения $f: \{1, 2, 3, \dots, 13\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 13\}$. Найдите число таких отображений, что $f^{13}(1) = 1$; под f^{13} понимается композиция: $f(f(f(\dots f(x))))$.
- 13
13. Пусть $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Найдите количество неупорядоченных троек множеств X, Y, Z (множества не обязательно различны), таких что $X \cup Y \cup Z = A$.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся по итогам обучения

Промежуточная аттестация по дисциплине «Дискретный анализ» осуществляется в форме экзамена. Экзамен проводится в форме теста + устный опрос.

На экзамене предлагается тест, вопросы которого близки по духу к приведённым ниже.

Примеры тестовых вопросов

Ответьте на вопросы. Обоснование не требуется. Не обязательно приводить в ответе число в десятичной записи, если в условии этого не требуется.

1. Найдите симметрическую разность множеств $\{0,1,2,3\}$ и $\{1,3,5,7\}$.
2. Чему равно пятое число Фибоначчи (F_5)?
3. Известно, что вектор значений булевой функции f имеет вид $0?10?1?1$, где $?$ — это 0 или 1. Найдите число всевозможных функций f . Ответом должно быть число в десятичной записи.
4. Сколько существует подмножеств из 5-элементов у 10-элементного множества? Ответом должно быть число в десятичной записи.
5. Сколько не обязательно осмысленных слов можно получить переставляя буквы в слове <<ГОЛОСЛОВНЫЙ>>?
6. Найдите число инъекций из множества $\{1,2, \dots, 7\}$ в $\{1,2, \dots, 10\}$.
7. Найдите число различных правильных раскрасок графа-пути длины 5 в три цвета.
8. Найдите коэффициент при члене $x^2y^3z^4$ в разложении $(3x - 2y + z)^9$.
9. Представьте булеву функцию f , заданную вектором значений 00101001, в виде ДНФ.
10. Найдите вероятность события <<при бросании двух костей выпало 9 очков>>.
11. Сколько подграфов-треугольников у графа K_5 ?

Список определений

1. Логические операции: конъюнкция, дизъюнкция и отрицание
2. Логические операции: импликация, XOR (исключающее или) и эквивалентность
3. Булевы функции. Задание таблицей истинности и вектором значений
4. Существенные и фиктивные переменные булевой функции
5. Множество, подмножество, равенство множеств
6. Операции с множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность. Диаграммы Эйлера-Венна
7. Законы Моргана (с обобщением на произвольное семейство множеств)
8. Закон контрапозиции
9. Метод математической индукции
10. Графы. Основные определения: ребра, вершины, степени вершин.
11. Базовые графы: граф-путь, граф-цикл, полный граф, граф-звезда
12. Подграфы. Путь, цикл, клика и независимое множество
13. Компонента связности. Индуцированный подграф

14. Деревья. Полные бинарные деревья (см. ДЗ 7)
15. Правильные раскраски графов. Формулировка критерия 2-раскрашиваемости
16. Двудольные графы. Двудольные и двураскрашиваемые графы
17. Эйлеровы замкнутые маршруты
18. Функции. Область определения и множество значений
19. Образ множества и полный прообраз
20. Отображения (всюду определённые функции). Инъекции, сюръекции и биекции
21. Правило суммы
22. Правило произведения
23. Комбинаторные числа. Число перестановок, число подмножеств размера k у -элементного множества
24. Характеристическая функция и её использование при подсчёте числа элементов множества
25. Формула включений и исключений
26. Биномиальные коэффициенты, основные свойства. Бином Ньютона
27. Треугольник Паскаля. Рекуррентное соотношение
28. Формула для n -го числа Каталана: $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.
29. Бинарные отношения. Транзитивность, симметричность, рефлексивность
30. Теоретико-множественные операции с отношениями. Операция обращения
31. Композиция бинарных отношений
32. Отношения эквивалентности
33. Ориентированные графы, основные определения
34. Компоненты сильной связности ориентированного графа
35. Отношения (частичного) порядка (строгие и нестрогие), линейные порядки
36. Отношение непосредственного следования
37. Минимальные и максимальные, наименьшие и наибольшие элементы в частично-упорядоченных множествах
38. Изоморфизм графов и (частичных) порядков
39. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы
40. Булевы схемы
41. Многочлены Жегалкина
42. Монотонные булевы функции

43. Линейные булевы функции
44. Самодвойственные булевы функции
45. Булевы функции, сохраняющие ноль и единицу
46. Производящая функция последовательности
47. Числа Фибоначчи и числа Каталана
48. Числа Стирлинга первого и второго рода. Числа Белла

Примеры задач на определения

1. Монотонная булева функция. Известно, что вектор значений булевой функции f имеет вид $0?10?1?1$, где $?$ — это 0 или 1. Найдите число монотонных функций f .
2. Транзитивность. Являются ли отношения $P = \{(1,2), (3,4), (5,6), (7,0)\}$ и $Q = \{(1,2), (2,1), (1,1)\}$ на множестве $\{0,1, \dots, 7\}$ транзитивными?
3. Формула включений-исключений. Найдите число биекций $f: \{0,1, \dots, 9\} \rightarrow \{0,1, \dots, 9\}$, таких что $f(0) > 1$, а $f(9) < 8$.
4. Самодвойственная булева функция. Известно, что вектор значений булевой функции f имеет вид $0?1??0?1$, где $?$ — это 0 или 1. Найдите число самодвойственных функций f .
5. Линейная булева функция. Найдите число линейных булевых функций от пяти переменных.
6. Полный прообраз. Функция f из множества $\{1,2, \dots, 8\}$ в множество $\{a, b, c, d, e\}$ определена следующим образом

$$f: 1 \mapsto a, \quad 2 \mapsto a, \quad 3 \mapsto c, \quad 4 \mapsto d, \quad 5 \mapsto c, \quad 7 \mapsto d.$$
7. Найдите полный прообраз множества $\{a, b, c\}$
8. Независимое множество. Докажите, что булев куб размерности n содержит независимое множество размера 2^{n-1} .
9. Производящая функция. Выразите аналитически производящую функцию последовательности $1, 2, 3, 4, \dots$

Список вопросов на доказательство

1. Обобщённый закон Моргана
2. Иррациональность числа $\sqrt{2}$. Существуют такие иррациональные числа a и b , что число a^b рационально.
3. Нижняя оценка числа связных компонент в неориентированном графе
4. Если G — минимально связный граф (удаление любого ребра приводит к несвязности), то G не содержит циклов
5. Если G — связный ациклический граф, то между любыми двумя вершинами G существует единственный путь

6. Если между любыми двумя вершинами G существует единственный путь, то G — связный граф с $|V| - 1$ ребром
7. Критерий 2-раскрашиваемости неориентированного графа
8. Критерий существования замкнутого эйлера маршрута в неориентированном графе
9. Явная формула для числа сочетаний $\binom{n}{k}$: числа n -элементных подмножеств n -элементного множества
10. Бином Ньютона. Рекуррентное соотношение для биномиальных коэффициентов
11. Основные свойства треугольника Паскаля: симметричность строк, возрастание чисел в первой половине строки
12. Основные свойства треугольника Паскаля: формула для суммы чисел в строке, нижняя оценка на центральный коэффициент:

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{2n+1}$$

13. Число решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ в неотрицательных целых числах (Задача Муавра)
14. Формула включений и исключений
15. Число отображений, функций, инъекций, биекций из n -элементного множества в m -элементное множество
16. Формула для числа сюръекций
17. Основная теорема об отношениях эквивалентности (классы эквивалентности на множестве A — в точности разбиения множества A на подмножества)
18. Равносильность свойств ориентированных графов: (1) каждая компонента сильной связности состоит из одной вершины; (2) вершины графа возможно занумеровать так, чтобы каждое ребро вело из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером; (3) в графе нет циклов длины больше 1
19. Разложение в ДНФ и КНФ булевой функции
20. Нижняя оценка на число монотонных булевых функций: монотонных булевых функций от $2n$ переменных не меньше $\frac{2^n}{2^{2n+1}}$
21. Полнота многочленов Жегалкина. Каждой булевой функции от n переменных соответствует единственный многочлен Жегалкина от n переменных (в стандартном виде)
22. Производящая функция для чисел Фибоначчи (аналитическая формула). Явная формула для чисел Фибоначчи (Формула Бине)
23. Число разбиений числа n на различные слагаемые совпадает с числом разбиений числа n на нечётные слагаемые

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Экзамен состоит из письменной и устной части. Письменная часть состоит из 10 тестовых вопросов и длится 60 минут. В случае, если студент ответил верно не более, чем на 5 вопросов, за экзамен выставляется неудовлетворительная оценка: 0-2 правильных ответа **неудовлетворительно(1)**, 3-5 правильных ответов **неудовлетворительно(2)**.

Содержание устной части экзамена зависит от результатов теста. Если студент ответил верно на 6-7 вопросов теста, то устная часть состоит из беседы с экзаменатором по результатам теста (которая может включать и дополнительные вопросы); максимальная оценка по результатам беседы "— **удовлетворительно(4)** (неудовлетворительная оценка также возможна, но не может быть ниже **неудовлетворительно(2)**).

Если студент ответил верно на 8 вопросов и более, то устная часть состоит из ответа на вопросы билета и доп. вопросы. Билет состоит из задачи на определение и вопроса на доказательство. Решение задачи нужно начать с формулировки определения. Оценка за экзамен (если за тест набрано не меньше 8 и беседа не выявила непонимания написанного в тесте) не может быть ниже **удовлетворительно(3)**; в случае, если студент верно решил задачу и привёл верное доказательство, оценка не может быть ниже **хорошо(6)**; если, при этом, тест выполнен на полный балл, то оценка не может быть ниже **хорошо(7)**. Для получения отличной оценки после верного ответа на оба вопроса билета студенту нужно ответить на доп. вопрос, состоящий из решения задачи по курсу (в случае получения оценок **отлично(9)** и **отлично(10)** задач может быть несколько). Экзаменатор может поставить отличную оценку без дополнительных задач, если в ходе беседы по билету уже задал достаточно дополнительных вопросов.

Итоговая оценка за курс для студентов ФРТК совпадает с оценкой за экзамен (если ранее не была получена оценка автоматом).

На экзамене студентам запрещается пользоваться какими-либо материалами и приборами, чем-либо кроме чистой бумаги и письменных принадлежностей. В случае обнаружения факта списывания, за экзамен выставляется оценка **0** (вне зависимости от результатов теста и беседы по устной части).

Критерии оценивания

Оценка «отлично (10 баллов)» - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка «отлично (9 баллов)» - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка «отлично (8 баллов)» - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка «хорошо (7 баллов)» - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка «хорошо (6 баллов)» - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка «хорошо (5 баллов)» - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка «удовлетворительно (4 балла)» - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка «удовлетворительно (3 балла)» - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка «неудовлетворительно (2 балла)» - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка «неудовлетворительно (1 балл)» - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

Знания, умения и навыки студентов по предмету фиксируются в балльно-рейтинговой системе (БРС) оценки знаний, умений, навыков студентов. БРС по предмету размещена на сайте кафедры www.mou.mipt.ru.