

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
радиотехники и компьютерных
технологий**

Е.А. Белянко

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Дополнительные главы теории вероятностей и основы математической статистики
по направлению:	Прикладная математика и физика
профиль подготовки:	Радиотехника и компьютерные технологии Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра интегрированных киберсистем
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Программу составил: Б.М. Миллер, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры интегрированных киберсистем 29.04.2021

Аннотация

Данный курс является базовым для изучения курса теории случайных процессов в непрерывном времени. Целью курса является более глубокое изучение основ теории вероятностей, основанное на современных представлениях теории меры, включающее начальные сведения о построении вероятностных моделей на основе методов математической статистики.

Построение вероятностных моделей включает оценку параметров распределений и функций распределения случайных величин на основе выборочной информации с использованием принципиального результата – центральной предельной теоремы и методов оценки параметров распределений путем построения доверительных интервалов.

Курс включает методы проверки гипотез и принципы построения линейной и полиномиальной регрессии.

Одним из наиболее важных аспектов курса является теория мартингалов, которая лежит в основе современной теории вероятностей и математической статистики. Будут представлены наиболее важные результаты теории мартингалов, а именно: неравенства, теоремы сходимости, сохранение мартингаловых свойств при случайной замене времени.

Часть лекций посвящена теории фильтрации Калмана, включая оценку параметров, интерполяцию и экстраполяцию случайных процессов в дискретном времени.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

изучение основ современной теории вероятностей и теории мартингалов, знакомство с теоретическими основами и методами математического описания стохастических динамических систем, изучение методов оценивания состояния динамических систем.

Задачи дисциплины

- знакомство студентов с аксиоматическими основами современной теории вероятностей и методами математической статистики;
- освоение студентами базовых знаний в области теории меры и интеграла Лебега;
- приобретение теоретических знаний в области стохастического анализа;
- изучение методов конструктивного математического моделирования случайных процессов;
- освоение методов оценивания случайных процессов с использованием методов теории фильтрации.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.1 Знает численные порядки величин, характерных для соответствующей профессиональной области
	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- аксиоматику современной теории вероятностей;
- методы оценивания параметров вероятностных распределений;
- построение доверительных интервалов;
- статистические выводы, проверка гипотез;
- линейная и полиномиальная регрессия;
- понятие измеримой функции (случайной величины) и виды сходимости их последовательностей;
- основы теории меры и интеграла Лебега;
- теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега;
- условные математические ожидания и их свойства;
- основные понятия теории мартигалов,
- методы фильтрации для линейных моделей случайных процессов.

уметь:

- делать правильные выводы из сопоставления результатов теории и эксперимента;
- алгоритмизировать процесс построения математической модели явления;
- делать качественные выводы по результатам математического моделирования;
- получать наилучшие оценки изучаемых параметров и правильно оценивать степень их достоверности.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации;
- навыками грамотной обработки результатов опыта и сопоставления с теоретическими данными;
- практикой исследования и решения теоретических и прикладных задач;
- навыками теоретического анализа вероятностных процессов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Аксиоматика теории вероятностей	4			2
2	Методы построения вероятностных моделей на основе статистической теории оценивания и проверки гипотез	4			2

3	Измеримые функции (случайные величины) и виды сходимости их последовательностей. Интеграл Лебега и его свойства	4			2
4	Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега	4			2
5	Условные математические ожидания и их свойства	4			2
6	Теория мартингалов	6			3
7	Фильтр Калмана (дискретное время)	4			2
Итого часов		30			15
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		45 час., 1 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

1. Аксиоматика теории вероятностей

Вероятностные модели с конечным и счетным числом исходов. Основные понятия элементарной теории вероятностей. Сигма-алгебры и измеримые пространства. Вероятностные пространства. Основы теории меры.

2. Методы построения вероятностных моделей на основе статистической теории оценивания и проверки гипотез

Методы статистического вывода, построение доверительных интервалов, проверка гипотез.

3. Измеримые функции (случайные величины) и виды сходимости их последовательностей. Интеграл Лебега и его свойства

Измеримые функции. Виды сходимости их последовательностей. Конструкция интеграла Лебега. Абсолютная непрерывность мер. Теорема Радона-Никодима. Замена переменных в интеграле Лебега. Теорема Фубини.

4. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега

Теорема о монотонной сходимости. Лемма Фату. Теорема о сходимости мажорируемой последовательности. Равномерная интегрируемость. Необходимые и достаточные условия для предельного перехода под знаком интеграла Лебега.

5. Условные математические ожидания и их свойства

Условные математические ожидания и условные вероятности. Определения. Основные свойства.

6. Теория мартингалов

Определения. Неравенства для мартингалов. Сходимость полумартингалов. Моменты остановки, сохранение мартингального свойства

7. Фильтр Калмана (дискретное время)

Определение фильтра Калмана. Формула дискретного фильтра Калмана.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная аудитория для лекций, оснащенная мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Вероятность [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Н. Ширяев .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1989 .— 640 с.
2. Задачи по теории вероятностей [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Н. Ширяев .— М. : МЦНМО, 2006 .— 416 с.
3. Теория случайных процессов в примерах и задачах [Текст]/Б. М. Миллер, А. Р. Панков , -М., Физматлит, 2007

Дополнительная литература

1. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] : учебник для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин .— 7-е изд. — М. : Физматлит, 2004, 2006, 2009, 2012 .— 572 с.
2. Теория случайных процессов [Текст] / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев .— М. : Физматлит, 2003 .— 400 с.
3. Статистика случайных процессов. Нелинейная фильтрация и смежные вопросы [Текст], [монография]/Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, -М., Наука, 1974

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://lib.mipt.ru/> – электронная библиотека Физтеха
2. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
3. <http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Microsoft Office, PowerPoint.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по учебной и научной литературе);
- подготовку к дифференцированному зачету.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций. Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При

затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к преподавателю.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Радиотехника и компьютерные технологии Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра интегрированных киберсистем
курс:	4
квалификация:	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет	
Разработчик:	Б.М. Миллер, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.1 Знает численные порядки величин, характерных для соответствующей профессиональной области
	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дополнительные главы теории вероятностей и основы математической статистики» обучающийся должен:

знать:

- аксиоматику современной теории вероятностей;
- методы оценивания параметров вероятностных распределений;
- построение доверительных интервалов;
- статистические выводы, проверка гипотез;
- линейная и полиномиальная регрессия;
- понятие измеримой функции (случайной величины) и виды сходимости их последовательностей;
- основы теории меры и интеграла Лебега;
- теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега;
- условные математические ожидания и их свойства;
- основные понятия теории мартигалов,
- методы фильтрации для линейных моделей случайных процессов.

уметь:

- делать правильные выводы из сопоставления результатов теории и эксперимента;
- алгоритмизировать процесс построения математической модели явления;
- делать качественные выводы по результатам математического моделирования;
- получать наилучшие оценки изучаемых параметров и правильно оценивать степень их достоверности.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации;
- навыками грамотной обработки результатов опыта и сопоставления с теоретическими данными;
- практикой исследования и решения теоретических и прикладных задач;
- навыками теоретического анализа вероятностных процессов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов для сдачи дифференцированного зачета:

- 1) Определения вероятностного пространства и случайной величины.
- 2) Функция распределения случайной величины и ее свойства.
- 3) Характеристическая функция ее свойства
- 4) Оценки среднего и дисперсии случайной величины
- 5) Сходимость последовательности случайных величин по вероятности. Примеры.
- 6) Сходимость последовательности случайных величин с вероятностью единица. Примеры.
- 7) Связь сходимости последовательности случайных величин по вероятности и с вероятностью единица. Примеры.
- 8) Интеграл Лебега от простых функций. Общее определение интеграла Лебега.
- 9) Абсолютная непрерывность мер. Теорема Радона-Никодима.
- 10) Замена переменных в интеграле Лебега. Теорема Фубини.
- 11) Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.
- 12) Лемма Фату.
- 13) Условные математические ожидания и условные вероятности. Определения. Основные свойства.
- 14) Мартингалы и полумартингалы. Примеры.
- 15) Неравенства для мартингалов.
- 16) Остановленные мартингалы, тождества Вальда.
- 17) Квадратично интегрируемые мартингалы.
- 18) Сходимость мартингалов.
- 19) Фильтр Калмана.
- 20) Прогнозирование случайных последовательностей.

Примеры билетов для проведения дифференцированного зачёта:

Билет 1.

- 1) Определения вероятностного пространства и случайной величины.
- 2) Условное математическое ожидание

Билет 2.

- 1) Функция распределения случайной величины и ее свойства.
- 2) Фильтр Калмана.

Критерии оценивания

Оценка отлично (10) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично (9) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично (8) выставляется студенту, показавшему систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо (7) выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо (6) выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо (5) выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно (4) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно (3) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно (2) выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно (1) выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Дифференцированный зачет проводится в устной форме.

При проведении дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется не менее 60 минут на подготовку. Опрос обучающегося не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.