

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
радиотехники и компьютерных
технологий**

А.В. Дворкович

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Теория случайных процессов
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Радиотехника и компьютерные технологии Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра информационных систем
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: В.Н. Лагуткин, д-р техн. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры информационных систем 04.06.2020

Аннотация

В курсе рассматриваются основные понятия теории случайных процессов как части теории вероятностей, основные классы и типы случайных процессов, элементы стохастического анализа случайных процессов, основные свойства и методы анализа случайных процессов. Даны примеры приложения теории случайных процессов при исследовании систем различной природы, в частности, в радиотехнике, физике, метеорологии, а также в задачах оптимальной обработки сигналов как случайных функций времени и координат в информационных системах. Более подробно рассматриваются статистические свойства широко известных типов случайных процессов: импульсных, стационарных, эргодических, гауссовских, узкополосных, марковских процессов, - и их линейных и нелинейных преобразований. Количественный анализ статистических свойств и преобразований случайных процессов проводится на основе подходящих стохастических моделей рассматриваемых систем, параметры состояния которых являются случайными функциями.

Для успешного освоения курса слушателю необходимо знать курсы математического анализа, линейной алгебры, теории вероятностей, общей физики, а также желательно владеть основами теории функций комплексного переменного и курса уравнений математической физики.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

освоение студентами основных понятий и методов в области исследования стохастически определенных систем, параметры состояния которых являются случайными функциями времени и координат.

Задачи дисциплины

- ☐ изучение основных понятий теории случайных процессов;
- ☐ изучение основных характеристик случайных процессов различных типов;
- ☐ изучение методов исследования случайных процессов и оценки их статистических характеристик;
- ☐ изучение преобразований случайных процессов в линейных и нелинейных системах;
- ☐ изучение способов представлений и моделирования случайных процессов;
- ☐ изучение способов применения теории случайных процессов для исследования стохастически определенных систем различной природы, в частности, в задачах оптимальной обработки случайных сигналов в информационных системах.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.1 Знает численные порядки величин, характерных для соответствующей профессиональной области
	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- ☐ основные понятия теории случайных процессов,
- ☐ основные статистические свойства и характеристики случайных процессов различных типов,
- ☐ основные методы математического анализа, применяемые в теории случайных процессов,
- ☐ способы применения теории случайных процессов для исследования стохастически определенных систем и обработки информации.

уметь:

- ☐ выбирать подходящие математические модели для описания и исследования характеристик, рассматриваемых стохастически определенных систем,
- ☐ решать задачи по определению характеристик процессов на выходе рассматриваемых систем и устройств по известным характеристикам входных воздействий.

владеть:

- ☐ методами статистического описания случайных процессов и сигналов;
- ☐ методами представления и моделирования случайных процессов различных типов;
- ☐ методами применения теории случайных процессов для решения практических задач преобразования и обработки входных данных при наличии случайных воздействий.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Основы теории случайных процессов.	3			2
2	Основные классы случайных процессов. Элементы стохастического анализа случайных функций.	3			2
3	Стационарные случайные процессы. Эргодичность случайных процессов.	3			3
4	Практическое определение статистических характеристик стационарного эргодического случайного процесса.	3			2

5	Спектральное представление стационарных в широком смысле случайных процессов.	4			3
6	Белый шум. Аппроксимация реального случайного процесса белым шумом.	4			3
7	Гауссовские (нормальные) случайные процессы и их статистические свойства.	4			3
8	Преобразование случайных процессов в линейных системах.	4			3
9	Преобразования стационарного случайного процесса в линейных динамических системах с постоянными параметрами.	4			3
10	Оптимальные линейные системы.	4			3
11	Узкополосные случайные процессы.	4			3
12	Преобразование случайных процессов в безынерционных нелинейных системах.	4			3
13	Марковские случайные процессы.	4			3
14	Решение уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова.	4			3
15	Приложения теории марковских случайных процессов.	4			3
16	Применение теории случайных процессов к задачам обнаружения, различения и оценки параметров сигналов в присутствии шумов.	4			3
Итого часов		60			45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

1. Основы теории случайных процессов.

Введение. Понятие случайного процесса (СП). Основные определения. Реализации СП. Примеры некоторых типов СП. Одномерные и многомерные распределения вероятностей, плотности распределений вероятностей СП, их свойства, условие согласованности. Одномерные и многомерные характеристические функции СП, их свойства, условие согласованности. Моментные функции СП. Начальные и центральные моментные функции. Связь моментных и характеристических функций СП.

2. Основные классы случайных процессов. Элементы стохастического анализа случайных функций.

Некоторые основные типы случайных процессов. Элементы стохастического анализа случайных функций Дифференциальные уравнения со случайной правой частью. Стохастические интегралы. Разложение СП по ортогональным функциям (Карунена-Лозва). Представления СП в виде стохастических интегралов.

3. Стационарные случайные процессы. Эргодичность случайных процессов.

Пуассоновские импульсные СП. Дробовой шум. Определения стационарности в узком и широком смысле. Эргодичность СП. Необходимые и достаточные условия эргодичности стационарного СП при определении математического ожидания, дисперсии, функции корреляции. Определение плотности вероятности по одной реализации эргодического СП. Необходимое и достаточное условие эргодичности гауссовского стационарного СП.

4. Практическое определение статистических характеристик стационарного эргодического случайного процесса.

Практическое определение математического ожидания и ковариационной функции стационарного эргодического СП. Требуемая длительность обрабатываемой реализации для заданной точности оценок. Время корреляции. Свойства ковариационной функции стационарного СП. Примеры ковариационных функций стационарных СП.

5. Спектральное представление стационарных в широком смысле случайных процессов.

Теорема о спектральном представлении стационарных в широком смысле СП. Спектральная интенсивность и спектральная плотность СП. Связь спектральной плотности с ковариационной функцией (теорема Винера-Хинчина). Основные свойства спектральной плотности. Соотношение неопределенности для эффективной ширины спектра СП и времени корреляции. Примеры спектральных плотностей стационарных СП.

6. Белый шум. Аппроксимация реального случайного процесса белым шумом.

Асимптотический смысл дельта-коррелированных СП. Белый шум. Аппроксимация реального случайного процесса белым шумом (функция корреляции и спектральная плотность). Взаимные спектральные плотности и их свойства. Примеры спектральных представлений стационарных СП. Практическое определение спектральной плотности стационарного СП. Спектральный анализ нестационарных СП.

7. Гауссовские (нормальные) случайные процессы и их статистические свойства.

Определение гауссовского СП. Многомерные плотности вероятности и соответствующие характеристические функции. Основные свойства гауссовских СП. Некоррелированность и независимость. Стационарность в строгом и широком смысле. Многомерные смешанные моменты и их вычисление. Линейные преобразования гауссовских СП. О законе распределения на выходе линейных систем. Производная гауссовского СП. Оценка значения гауссовского случайного процесса по значениям процесса в другие моменты времени.

8. Преобразование случайных процессов в линейных системах.

Временной и спектральный подходы при описании преобразований СП в линейной системе. Математическое ожидание, ковариационная функция и дисперсия процесса на выходе системы в переходном и установившемся режимах. Спектральная плотность выходного процесса в установившемся режиме.

9. Преобразования стационарного случайного процесса в линейных динамических системах с постоянными параметрами.

Примеры преобразования стационарных СП в линейных динамических системах с постоянными параметрами: винеровский процесс, преобразование белого шума линейной динамической системой первого порядка. Броуновское движение и тепловой шум в электрических цепях. Воздействие шума на следящую систему. Фильтрация квазистационарных процессов линейными системами с постоянными параметрами.

10. Оптимальные линейные системы.

Задачи теории оптимальных линейных систем. Сглаживание и прогнозирование стационарных воздействий с использованием бесконечной предыстории. Сглаживающий фильтр с бесконечной задержкой. Выражения для функции передачи и среднеквадратической ошибки оптимального фильтра. Примеры. Максимизация отношения сигнал/шум; согласованный фильтр.

11. Узкополосные случайные процессы.

Определение узкополосного СП. Ковариационная функция узкополосного высокочастотного процесса. Эквивалентность узкополосного СП двум медленно меняющимся процессам. Узкополосные случайные процессы, определяемые дифференциальными уравнениями. Огибающая и фаза узкополосного случайного процесса. Совместная двумерная плотность вероятности, огибающей и фазы гауссовского узкополосного СП. Релеевские флуктуации. Огибающая суммы гармонического сигнала и шума. Обобщенный закон распределения Релея.

12. Преобразование случайных процессов в безынерционных нелинейных системах.

Законы распределения процесса на выходе безынерционных нелинейных систем. Плотность вероятности при квадратичном преобразовании. Определение ковариационных функций на выходе нелинейных систем. Случай узкополосного входного сигнала. Квадратичное детектирование шума и аддитивной смеси полезного сигнала и шума. Вычисление моментных функций при экспоненциальном преобразовании. Измерение шумовых сигналов. Чувствительность радиометров.

13. Марковские случайные процессы.

Основные определения марковских случайных процессов. Плотность вероятности перехода и ее свойства. Многомерная плотность вероятности. Однородные и стационарные процессы. Уравнение Смолуховского. Дифференциальные уравнения Колмогорова и уравнение Фоккера-Планка. Начальные и граничные условия. Запись уравнения Фоккера-Планка через поток вероятности. Вычисление коэффициентов сноса и диффузии для процессов, заданных стохастическими дифференциальными уравнениями. Примеры марковских СП: винеровский случайный процесс, воздействие белого шума на линейную динамическую систему первого порядка.

14. Решение уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова.

Стационарное решение уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова. Методы решения нестационарных уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова. Гауссовские марковские процессы. Многомерные непрерывные (диффузионные) марковские процессы. Многомерные марковские процессы, определяемые системами стохастических уравнений первого порядка. Приведение немарковского процесса к марковскому с большей размерностью.

15. Приложения теории марковских случайных процессов.

Задача о времени первого достижения границ марковским случайным процессом. Определение математического ожидания времени первого достижения границы марковским случайным процессом с использованием обратного уравнения Колмогорова. Статистическое описание явления «переброса» процесса из одного устойчивого состояния в другое.

16. Применение теории случайных процессов к задачам обнаружения, различения и оценки параметров сигналов в присутствии шумов.

Некоторые основные понятия статистической теории решений. Отношение и функция правдоподобия, метод максимума правдоподобия. Наблюдаемые координаты СП. Использование ортогональных представлений. Обнаружение сигналов на фоне белого гауссова шума. Бинарное обнаружение. Корреляционный приемник. Многоальтернативная задача различения сигналов на фоне белого гауссова шума. Оценка параметров сигналов в присутствии белого гауссова шума. Линейные и нелинейные оценки. Обнаружение и оценка параметров сигналов в присутствии небелого гауссова шума. Использование разложения Карунена-Лоэва. Интегральное уравнение для опорного сигнала.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

учебная аудитория для проведения занятий лекционного / семинарского типа, оснащенная мультимедийным оборудованием.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Теория случайных процессов [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев ; [Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова] .— М. : Физматлит, 2005 .— 402 с.
2. Основы теории случайных процессов [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. А. Натан, О. Г. Горбачев, С. А. Гуз .— М. : МЗ-Пресс, 2003, 2004 .— 168с.
3. Введение в теорию случайных процессов [Текст] / Ю. А. Розанов - М.Наука,1982

Дополнительная литература

1. Теория вероятностей [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. Н. Тутубалин .— М. : Академия, 2008 .— 368 с.
2. Введение в статистическую радиофизику [Текст] : в 2 ч. Ч. 1 : учеб. пособие для вузов . Случайные процессы / С. М. Рытов .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1976 .— 495 с.
3. Теоретические основы статистической радиотехники[Текст]/Б.Р.Левин, -М., Радио и связь, 1989

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используется

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Мультимедийные технологии. MS PowerPoint , демонстрация презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике при решении конкретных задач.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, приемы и методы теории случайных процессов.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе);
- решение задач, предлагаемых студентам в задании (см. приложение)
- подготовку к экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к преподавателю.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Радиотехника и компьютерные технологии Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра информационных систем
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Экзамен

Разработчик: В.Н. Лагуткин, д-р техн. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.1 Знает численные порядки величин, характерных для соответствующей профессиональной области
	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория случайных процессов» обучающийся должен:

знать:

- ☐ основные понятия теории случайных процессов,
- ☐ основные статистические свойства и характеристики случайных процессов различных типов,
- ☐ основные методы математического анализа, применяемые в теории случайных процессов,
- ☐ способы применения теории случайных процессов для исследования стохастически определенных систем и обработки информации.

уметь:

- ☐ выбирать подходящие математические модели для описания и исследования характеристик, рассматриваемых стохастически определенных систем,
- ☐ решать задачи по определению характеристик процессов на выходе рассматриваемых систем и устройств по известным характеристикам входных воздействий.

владеть:

- ☐ методами статистического описания случайных процессов и сигналов;
- ☐ методами представления и моделирования случайных процессов различных типов;
- ☐ методами применения теории случайных процессов для решения практических задач преобразования и обработки входных данных при наличии случайных воздействий.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень экзаменационных вопросов:

1. Понятие случайного процесса. Реализации случайного процесса. Примеры некоторых типов случайных процессов.
2. Одномерные и многомерные распределения вероятности, плотности распределений вероятности.
3. Характеристический функционал. Моментные функции сл. процесса.
4. Кумулянтная функция и семиинварианты. Соотношение между моментами и семиинвариантами.
5. Совместные функции распределения вероятностей нескольких случайных процессов. Взаимные моментные функции случайных процессов.
6. Представление случайных процессов рядами ортогональных функций. Каноническое разложение (Карунена-Лоэва).
7. Последовательности случайных импульсов.
8. Пуассоновские импульсные процессы.
9. Дробовой шум.
10. Стационарные случайные процессы. Эргодичность случайных процессов.
11. Свойства функции корреляции стационарного случайного процесса. Время корреляции.
12. Стохастические интегралы
13. Спектральный анализ стационарных случайных функций.
14. Теорема Релея (равенство Парсеваля). Спектральная интенсивность и спектральная плотность сл. процесса.
15. Основные свойства спектральной плотности. Соотношение неопределенности для эффективной ширины спектра низкочастотного процесса и времени корреляции.
16. Асимптотический смысл дельта-коррелированных случайных процессов. Белый шум и его основные свойства.
17. Гауссовские (нормальные) случайные процессы и их статистические свойства.
18. Преобразование случайных процессов в линейных инерционных системах.
19. Временной и спектральный подходы при описании преобразований случайных процессов в линейной системе.
20. Нормализация случайного процесса на выходе узкополосного линейного фильтра.
21. Воздействие белого шума на RC – фильтр.
22. Тепловой шум в электрических цепях.
23. Воздействие белого шума на следящую систему.
24. Воздействие белого шума на идеальный полосовой усилитель с частотной характеристикой близкой к гауссовой (4 часа)
25. Общий случай воздействия нестационарного процесса на линейную систему с переменными параметрами.
26. Случайные процессы в линейной системе с изменяющимся во времени коэффициентом усиления.
27. Линейные преобразования случайных полей.
28. Оптимальные линейные системы.
29. Сглаживание и прогнозирование стационарных воздействий с использованием бесконечной предыстории.
30. Максимизация отношения сигнал/шум; согласованный фильтр.
31. Узкополосные случайные процессы.
32. Обобщенный закон распределения Релея. (4 часа)
33. Случайные процессы в безынерционных нелинейных системах.
34. Марковские случайные процессы.
35. Стационарное решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова.

36. Критерии принятия решения. Критерий Неймана-Пирсона.

37. Корреляционный приемник.

Примеры билетов для проведения экзамена:

Билет 1.

1. Понятие случайного процесса. Реализации случайного процесса. Примеры некоторых типов случайных процессов.

2. Корреляционный приемник.

Билет 2.

1. Одномерные и многомерные распределения вероятности, плотности распределений вероятности.

2. Критерии принятия решения. Критерий Неймана-Пирсона.

Критерии оценивания

Оценка отлично (10) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично (9) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично (8) выставляется студенту, показавшему систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо (7) выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо (6) выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо (5) выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно (4) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно (3) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно (2) выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно (1) выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Экзамен проводится в устной форме.

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется не менее 60 минут на подготовку. Опрос обучающегося на устном экзамене не должен превышать 60 минут
Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.

Приложение к РПД

Задание на курсовую работу по «Теории случайных процессов»

Часть 1

Задача N 1

Пусть конечное множество элементарных событий Ω составляют равновероятные события вида $\omega = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$, где каждое $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ может принимать значения 0 или 1, а случайная величина

$\xi(\omega)$ определяется формулой $\xi(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{2^i}$ (т.е. в двоичной системе $\xi(\omega) = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$).

Определить множество значений $\{x_i\}$ такой случайной величины и ее распределение вероятностей.

Задача N 2

Используя теорему о дифференцировании интегралов, зависящих от параметров, получить соотношение, связывающее моментные и характеристические функции

$$\left. \frac{1}{i^s} \frac{\partial^s \varphi_n(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial u_{k_1} \partial u_{k_2} \dots \partial u_{k_s}} \right|_{u_1=u_2=\dots=u_n=0} = \langle \xi(t_{k_1}) \xi(t_{k_2}) \dots \xi(t_{k_s}) \rangle = m_s(t_{k_1}, t_{k_2}, \dots, t_{k_s})$$

$k_1, k_2, \dots, k_s = 1, \dots, n.$

Задача N 3

Нормальный случайный процесс $\xi(t)$ в момент t имеет плотность вероятности

$$f(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-a(t))^2/2\sigma^2(t)}$$

- 1) Найти характеристическую функцию $\varphi_\xi(y; t)$.
- 2) Вычислить математическое ожидание $m_1 = M[\xi(t)]$ и центральные моменты $\mu_n(t)$, используя $\varphi_\xi(y; t)$.
- 3) Определить характеристическую функцию и плотность вероятности суммы независимых случайных величин $\xi(t_k)$ процесса: $\eta = \sum_{k=1}^n \xi(t_k)$

Задача N 4

- 1) Показать, что для непрерывного случайного процесса с независимыми приращениями $\xi(t), t \geq 0$ ковариационная функция $B_\xi(t_1, t_2)$ связана с дисперсией $D_\xi(t)$ соотношением $B_\xi(t_1, t_2) = D_\xi(t_{\min})$, $t_{\min} = \min(t_1, t_2)$,
- 2) Получить выражения для многомерных распределений винеровского и пуассоновского случайных процессов.

Задача N 5

Двоичный счетчик пуассоновского потока частиц в каждом такте выдает значение $\xi_k = 0$, если в течении длительности такта τ не пришло ни одной частицы, и значение $\xi_k = 1$, если пришла одна или более частиц.

- 1) Как оценить среднюю частоту пуассоновского потока частиц λ имея запись случайной последовательности $\xi_k, k = 1, \dots, N$ нулей и единиц?
- 2) Как зависит точность оценки средней частоты λ от длины записи N ?

Задача N 6

Реализации случайного телеграфного процесса $\eta(t), t \geq 0$ представляют собой кусочно-постоянные знакопеременные функции, принимающие два значения (C и $-C$): $\eta(t) = C(-1)^{\xi(t)}$, где $\xi(t), t \geq 0$ ($\xi(0) = 0$) - реализации пуассоновского случайного процесса, приращения которого $\Delta\xi(\tau) = \xi(t+\tau) - \xi(t) \geq 0$ на произвольных интервалах времени $\tau \geq 0$ являются случайными величинами, имеющими пуассоновское распределение с интенсивностью λ :

$$P(\Delta\xi(\tau) = n) = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Получить выражения для математического ожидания $\langle \eta(t) \rangle, t \geq 0$ и корреляционной функции $R(t_1, t_2) = \langle \eta(t_1)\eta(t_2) \rangle$ телеграфного процесса.

Задача N 7

Установить условия стационарности (в широком смысле) действительного случайного процесса.

$$\xi(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_c t + a_2 \sin \omega_c t,$$

где $a_k, k = 0, 1, 2$ - случайные величины (ω_c - не случайная).

Записать выражение для ковариационной функции $\xi(t)$ при этих условиях.

При каком дополнительном условии этот процесс является эргодическим относительно среднего значения?

Задача N 8

Найти спектральную плотность случайного процесса с ковариационной функцией:

- 1) $B(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|), \quad \alpha > 0;$
- 2) $B(\tau) = \sigma^2 / (1 + \alpha^2 \tau^2), \quad \alpha > 0;$
- 3) $B(\tau) = \sigma^2 (1 + \alpha|\tau|) \exp(-\alpha|\tau|), \quad \alpha > 0;$

Задача N 9

Пусть пуассоновский импульсный процесс задается соотношением

$$\xi(t) = \sum_v F(t - t_v) [a_v \cos(\omega_c(t - t_v)) + b_v \sin(\omega_c(t - t_v))], \quad \omega_c = \text{const},$$

$$\text{где } F(\theta) = \begin{cases} \beta \exp(-\beta\theta), & \theta \geq 0, (\beta > 0) \\ 0, & \theta < 0 \end{cases},$$

t_v - моменты появления импульсов в рассматриваемом пуассоновском потоке импульсов, все случайные величины a_v, b_v - статистически независимы между собой, имеют нулевое среднее значение и одинаковую дисперсию σ^2 .

- 1) Определить среднее значение, дисперсию, ковариационную функцию и спектральную плотность такого процесса.
- 2) Построить график спектральной плотности $g(\omega)$ для случая $\omega_c \gg \beta$.

Задача N 10

- 1) Доказать, что не существует стационарного случайного процесса, корреляционная функция которого постоянна на интервале $|\tau| \leq \tau_1$ и равна нулю вне этого интервала, т. е.

$$B(\tau) = \begin{cases} \sigma^2, & |\tau| \leq \tau_1 \\ 0, & |\tau| > \tau_1 \end{cases}$$

- 2) Найти спектральную плотность случайного процесса с ковариационной функцией

$$B(\tau) = \sigma^2 \sin \omega_0 \tau / \omega_0 \tau, \quad \omega_0 > 0$$

Задача N 11

Показать, что случайный процесс $\xi(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, где A и ω - постоянные фиксированные величины, а фаза φ - случайная величина с плотностью вероятности $f(\varphi) = \begin{cases} 1/2\pi, & |\varphi| \leq \pi \\ 0, & |\varphi| > \pi \end{cases}$ является стационарным в широком смысле.

Задача N 12

Показать, что комплексный случайный процесс

$$\zeta(t) = A e^{i\omega t},$$

где A - комплексная случайная величина со средним $\langle A \rangle = 0$ и дисперсией $\langle |A|^2 \rangle = \sigma_A^2$, а ω - независимая от A действительная случайная величина с плотностью распределения $f(\omega)$, является стационарным в широком смысле. Определить спектральную плотность этого процесса.

Задача N 13

Определить ковариационную функцию и спектральную плотность теплового излучения $g(\omega)$ объема газа.

Считать, что излучение представляет собой комплексный пуассоновский импульсный процесс

$$\zeta(t) = \sum_v F(t - t_v)$$

$$F(\theta) = \begin{cases} a \exp(-\beta\theta) e^{i\omega_c \left(1 - \frac{u}{c}\right)\theta}, & \theta \geq 0, (\beta > 0, a, \omega_c = \text{const}), \\ 0, & \theta < 0 \end{cases},$$

где u - случайные скорости излучающих молекул газа, имеющие распределение Максвелла с температурой T .

Задача N 14

Какому условию должна удовлетворять спектральная плотность стационарного случайного процесса, чтобы этот процесс обладал первой производной?

С помощью теоремы Винера-Хинчина определить при каких значениях коэффициента β функция $B(\tau) = \sigma^2(1 + \beta|\tau|)\exp(-\alpha|\tau|)$, $\alpha > 0$, может быть ковариационной функцией:

- 1) стационарного случайного процесса?
- 2) дифференцируемого стационарного случайного процесса?

Задача N 15

Случайный процесс $\xi(t) = x(t)y(t)z(t)$, где $x(t), y(t), z(t)$ - независимые стационарные случайные процессы с нулевыми средними и спектральными плотностями $g_x(\omega), g_y(\omega), g_z(\omega)$ соответственно. Найти спектральную плотность $g_\xi(\omega)$ процесса $\xi(t)$.

Задача N 16

Определить математические ожидания, дисперсии и ковариационные функции комплексных случайных процессов $\zeta(t) = e^{i\varphi(t)}$, где:

- а) $\varphi(t)$ - действительный стационарный нормальный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием $\langle \varphi(t) \rangle = 0$ и ковариационной функцией $B_\varphi(\tau)$,
- б) $\varphi(t), t \geq 0$ - винеровский случайный процесс.

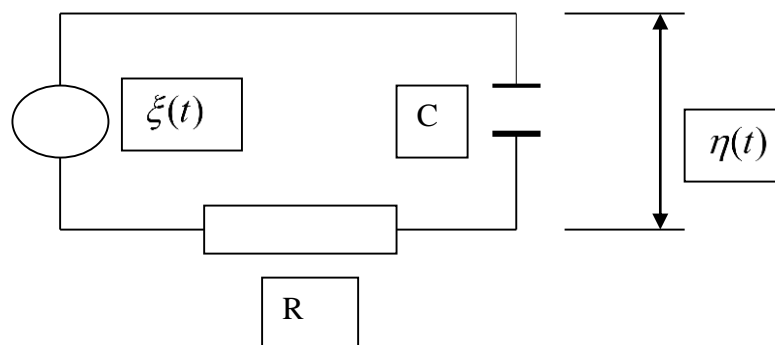
Задача N 17

Нормальный стационарный случайный процесс $\xi(t)$ имеет $\langle \xi(t) \rangle = 0$ и корреляционную функцию $B_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\beta^2 \tau^2 / 2}$. Определить корреляционную функцию $B_\eta(\tau)$ и плотность вероятности $f_\eta(y)$ производной процесса $\eta(t) = \frac{d\xi(t)}{dt}$.

Использовать полученные результаты для приближенной оценки продольного углового размера лунной дорожки, наблюдаемой на взволнованной водной поверхности.

Задача N 18

Белый шум $\xi(t)$ с $\langle \xi(t) \rangle = 0$ и спектральной плотностью N_0 действует на RC фильтр.



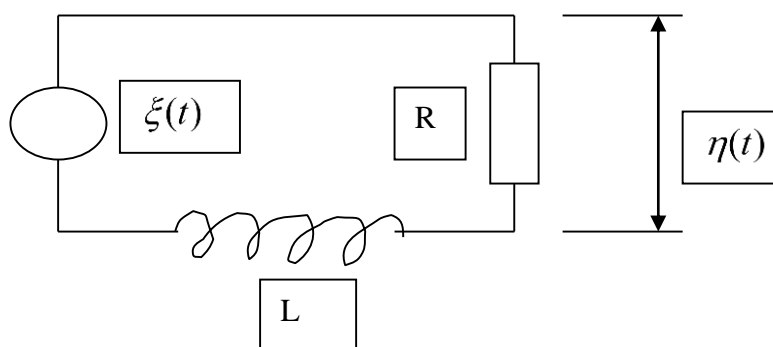
Найти:

- 1) частотную характеристику $H(\omega)$ и импульсную реакцию фильтра $h(\tau)$,

- 2) ковариационную функцию, дисперсию, спектральную плотность выходного процесса $\eta(t)$ в установившемся режиме,
- 3) дисперсию $\eta(t)$ в переходном режиме.

Задача N 19

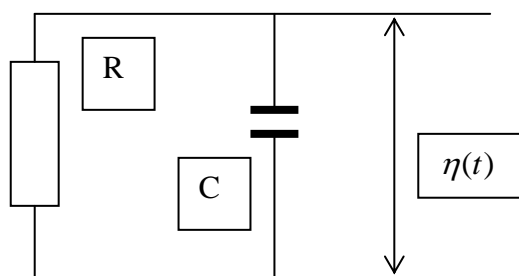
Дана линейная цепь - фильтр LR



Определить ковариационную функцию $B_{\xi}(\tau)$ процесса $\xi(t)$ на входе фильтра LR при условии, что выходное напряжение $\eta(t)$ представляет собой стационарный случайный процесс с ковариационной функцией $B_{\eta}(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha \tau^2)$, $\alpha > 0$

Задача N 20

Дана параллельная цепочка RC



Найти:

1. Спектральную плотность по положительным частотам $g_{\eta+}(\omega)$ напряжения теплового шума $\eta(t)$ на емкости C .
2. Построить график зависимости $g_{\eta+}(\omega)/k_B T$ от величины R для трех частот: $f=100\text{Гц}$, 1.5кГц , 15кГц при $C=100\text{нФ}$.
3. Вычислить дисперсию шума в полосе частот $[f_1, f_2]$.
4. Определить дисперсию шума во всей полосе частот $[0, \infty]$.

Срок сдачи 1-ой части задания – 15 апреля.

Часть 2

Задача N 21

На вход интегратора в момент $t = 0$ подается стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с $\langle \xi(t) \rangle = 0$

и функцией корреляции $B_\xi(\tau)$. Процесс на выходе: $\eta(t) = \int_0^t \xi(t) dt$

- 1) Определить общие выражения для функции корреляции $B_\eta(t_1, t_2)$ и дисперсии $\sigma_\eta^2(t)$ процесса $\eta(t)$
- 2) Вычислить дисперсию $\sigma_\eta^2(t)$ для случая $B(\tau) = \sigma_\xi^2 \beta \exp(-\beta|\tau|)$, $\beta > 0$
- 3) Вычислить дисперсию для случая, когда $\xi(t)$ - белый шум с $\langle \xi(t) \rangle = 0$ и спектральной плотностью N_0 (т.е. $\eta(t)$ - винеровский случайный процесс)
- 4) Построить графики функции $\sigma_\eta^2(t)$ для случаев (2) и (3).

Задача N 22

Осуществляется линейное преобразование случайного процесса $\xi(t)$, при этом $\eta(t) = a + b\xi(t)$, где $a, b = \text{const}$. Процесс $\xi(t)$ имеет плотность вероятности $f_\xi(x)$. Найти общее выражение для плотности вероятности $f_\eta(y)$ и конкретизировать его для случая, когда

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} e^{-(x-m_1)^2/2\sigma_\xi^2}$$

Задача N 23

Используя интегральное уравнение Винера-Хопфа получить соотношение для функции передачи оптимального сглаживающего фильтра с бесконечной задержкой.

Задача N 24

Показать, что согласованный фильтр обеспечивает максимальное значение отношения сигнал/шум на выходе при наличии аддитивного белого шума на входе.

Задача N 25

Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ имеет плотность вероятности:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} e^{-(x-m_1)^2/2\sigma_\xi^2}$$

Найти плотность вероятности $f_\eta(y)$ процесса $\eta(t) = \xi^2(t)$. Получить также $f_\eta(y)$ для частного случая $m_1 = 0$.

Задача N 26

Пусть $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ - комплексный нормальный стационарный СП, где $\xi(t), \eta(t)$ - действительные независимые нормальные стационарные СП с нулевыми средними и

одинаковыми ковариационными функциями $B(\tau)$. Определить математическое ожидание, ковариационную функцию и одномерную плотность вероятности квадрата модуля $\chi^2 = \xi^2 + \eta^2$ этого СП.

Задача N 27

Случайный процесс $\xi(t)$ имеет плотность вероятности $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} e^{-x^2/2\sigma_\xi^2}$

Найти плотности вероятности процессов:

- 1) на выходе диода с характеристикой $\eta(t) = a(e^{b\xi(t)} - 1)$, $a > 0, b > 0 - const$
- 2) на выходе идеального линейного детектора с характеристикой

$\eta(t) = \xi(t)H(\xi(t))$, где $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ - функция Хевисайда

Задача N 28

Определить двумерную плотность вероятности процесса $\eta(t)$ на выходе безинерционного нелинейного устройства, если $\eta(t) = \xi^2(t)$, $\xi(t)$ - нормальный случайный процесс с $\langle \xi(t) \rangle = 0$ и ковариационной функцией $B_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 K(\tau)$.

Задача N 29

Нормальный случайный процесс $\xi(t)$, имеющий спектральную плотность $g_\xi(\omega)$ пропускается через нелинейное устройство. Процесс на выходе $\eta(t) = \xi^2(t)$.

Определить спектральную плотность процесса $\eta(t)$, если $g_\xi(\omega) = \begin{cases} N_0, & |\omega| \leq 2\pi F \\ 0, & |\omega| > 2\pi F \end{cases}$

Построить график $g_\eta(\omega)$.

Задача N 30

Нормальный стационарный случайный процесс $\xi(t)$ имеет $\langle \xi(t) \rangle = 0$ и функцию корреляции $B_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 K(\tau)$, где $K(\tau)$ - коэффициент корреляции. Найти плотность вероятности $f_\eta(y)$

частного от деления двух зависимых значений случайного процесса $\eta(t) = \frac{\xi(t+\tau)}{\xi(t)}$.

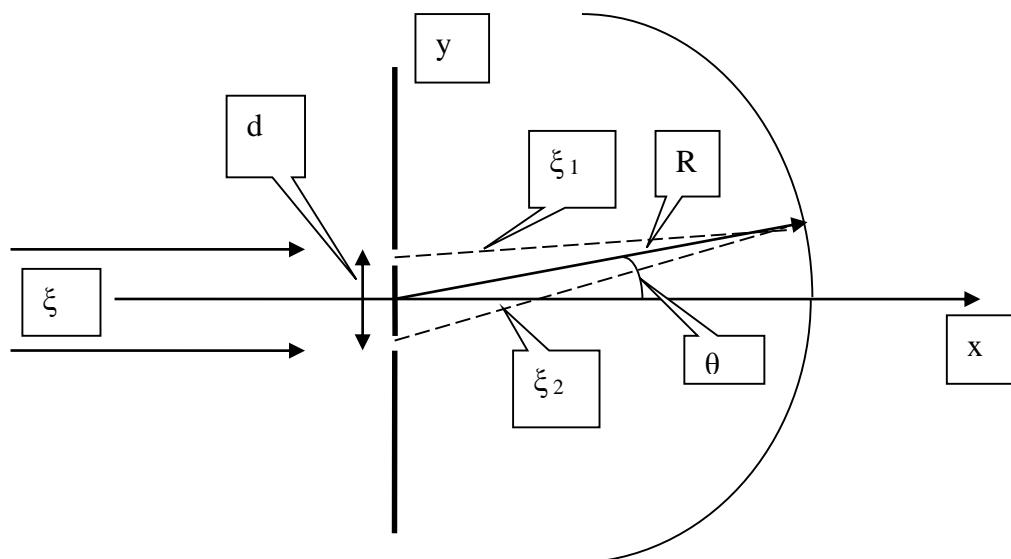
Задача N 31

Пусть на плоский экран с двумя параллельными щелями (двухщелевой интерферометр), расположенный в плоскости YZ , перпендикулярно падает узкополосная случайная волна (см. рис.)

$$\xi(t') = \xi(t - \frac{x}{c}) = \chi(t - \frac{x}{c}) \cos \left[\omega_c(t - \frac{x}{c}) \right] - \mu(t - \frac{x}{c}) \sin \left[\omega_c(t - \frac{x}{c}) \right], \text{ где } c - \text{ скорость волны,}$$

с ковариационной функцией (в фиксированной точке x)

$$B_{\xi}(\tau) = \langle \xi(t') \xi(t' + \tau) \rangle = \sigma_{\xi}^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_c \tau$$



За экраном на большом расстоянии от щелей $R \gg d$ измеряется средняя интенсивность суммарного сигнала от двух щелей в зависимости от угла θ (интерференционная картина)

$$I(\theta) = \left\langle \left[\xi_1 \left(t - \frac{R - (d \sin \theta)/2}{c} \right) + \xi_2 \left(t - \frac{R + (d \sin \theta)/2}{c} \right) \right]^2 \right\rangle$$

где $\xi_1(t') = a\xi(t')$, $\xi_2(t'') = a\xi(t'')$, $a = \text{const}$.

- 1) Получить формулу для интерференционной картины $I(\theta)$
- 2) Определить угловое расстояние между интерференционными полосами
- 3) Оценить угловой размер интерференционной картины

Задача N 32

Гауссовский белый шум $\xi(t)$ с нулевым средним значением и спектральной плотностью N_0

подаётся на интегратор. На выходе интегратора $\eta(t) = \int_0^t \xi(t) dt$

- 1) Найти плотность вероятности $f(y;t)$ процесса $\eta(t)$.
- 2) Записать уравнение Фоккера-Планка для плотности вероятности $f(y;t)$ процесса $\eta(t)$.

Задача N 33

Определить корреляцию $B_{\eta}(\tau_1, \tau_2) = \langle \Delta\eta_1 \Delta\eta_2 \rangle$ приращений $\Delta\eta_1 = \eta(t + \tau_1) - \eta(t)$, $\Delta\eta_2 = \eta(t + \tau_1 + \tau_2) - \eta(t + \tau_1)$ на примыкающих неперекрывающихся интервалах времени τ_1 и τ_2 для марковского случайного процесса, определяемого дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{d\eta}{dt} + \beta\eta = \gamma\xi(t)$$

($\beta, \gamma > 0$ - постоянные, $\xi(t)$ - гауссовский белый шум со спектральной плотностью N_0), в установившемся режиме при малых ($\beta\tau_1 \ll 1, \beta\tau_2 \ll 1$) и больших ($\beta\tau_1 \gg 1, \beta\tau_2 \gg 1$) интервалах τ_1 и τ_2 .

Задача N 34

Нелинейная система описывается стохастическим уравнением $\frac{d\eta}{dt} = -\eta^2 + \xi(t) \sin \omega_0 t$, где $\xi(t)$

- белый шум с нулевым средним значением и спектральной плотностью N_0 , $\omega_0 \gg 1$.

- 1) Найти коэффициенты сноса и диффузии и записать уравнение Фоккера-Планка для плотности вероятности $f(y;t)$ процесса $\eta(t)$.
- 2) Упростить уравнение Фоккера-Планка пренебрегая быстрыми осцилляциями.
- 3) Записать упрощенное стохастическое уравнение для системы.

Задача N 35

Получить выражение для стационарной плотности вероятности $f_{st}(y;t)$ марковского случайного процесса $\eta(t)$, заданного стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\eta}{dt} = -\gamma\eta + \frac{\pi N_0}{\eta} + \xi(t), \quad \gamma > 0$$

где $\eta > 0$, $\xi(t)$ - белый шум с нулевым средним значением и спектральной плотностью N_0 .

Задача N 36

Получить выражение для стационарной плотности вероятности $f_{st}(y;t)$ марковского случайного процесса $\eta(t)$, заданного стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\eta}{dt} = -a\eta + a\xi(t), \quad a > 0$$

где $\xi(t)$ - белый шум с нулевым средним значением и спектральной плотностью N_0 .

Задача N 37

Пусть N -мерный случайный процесс $\vec{x}(t) = \{x_\alpha(t)\}$, $\alpha = 1, \dots, N$ удовлетворяет системе стохастических уравнений

$$\frac{dx_\alpha(t)}{dt} = -\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_\alpha} + \xi_\alpha(t),$$

где $\xi_\alpha(t)$ - независимые гауссовские случайные воздействия, имеющие свойства белого шума:

$$\langle \xi_\alpha(t) \xi_\beta(t + \tau) \rangle = D \cdot \delta_{\alpha\beta} \delta(\tau).$$

Записать уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова для совместной плотности вероятностей $f(\vec{x}, t)$ и показать, что стационарное решение этого уравнения имеет вид распределения Больцмана $f_{cm}(\vec{x}) = C \cdot \exp\left[-\frac{2}{D} U(\vec{x})\right]$ (константа C определяется из условия нормировки).

Задача N 38

Случайный процесс определяется стохастическим дифференциальным уравнением 2-го порядка

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \frac{\partial U(x)}{\partial x} = \xi(t), \quad \lambda > 0,$$

$\xi(t)$ - гауссовский белый шум со спектральной плотностью $N_0 = D/2\pi$.

Записать эквивалентную систему 2-х стохастических дифференциальных уравнений 1-го порядка для x и $y = \dot{x}$. Получить соответствующее уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова для совместной плотности вероятностей $f(x, y, t)$ и показать, что стационарное решение этого

уравнения имеет вид распределения Максвелла-Больцмана $f_{cm}(x, y) = C \cdot \exp\left[-\frac{2\lambda}{D}\left(\frac{y^2}{2} + U(x)\right)\right]$

(константа C определяется из условия нормировки). Определить точки максимума $f_{cm}(x, y)$ для потенциала $U(x) = -ax^2 + bx^4, a, b > 0$

Задача N 39

Получить соотношение для среднего времени достижения границ винеровским случайным процессом.

Задача N 40

Пуассоновский случайный процесс $N(t)$ определяет, сколько случайных событий произойдет на интервале $[0, t]$, причем $N(0) = 0$ и вероятность состояния N в момент времени t дается

распределением Пуассона $P_N(t) = \frac{(\lambda t)^N}{N!} e^{-\lambda t}, N = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0$.

- 1) Получить дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию во времени вероятностей состояний $P_N(t), N = 0, 1, 2, \dots$
- 2) Найти среднее время пребывания процесса в неизменном состоянии.

Срок сдачи 2-ой части задания – 13 мая.