

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
радиотехники и компьютерных
технологий**

Е.А. Белянко

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Введение в выпуклую оптимизацию
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Радиотехника и компьютерные технологии Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра интегрированных киберсистем
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Программу составил: А.В. Назин, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры интегрированных киберсистем 29.04.2021

Аннотация

Курс «Введение в выпуклую оптимизацию» предназначен для изучения современных методов и алгоритмов выпуклой оптимизации для широкого класса задач с иллюстрацией ряда примеров. В рамках данного курса обучающиеся получают базовые знания о современных задачах и подходах в выпуклой оптимизации, оценки аналитической и вычислительной сложности методов, рассмотрении практических примеров. Теоретический материал иллюстрируется с помощью решения конкретных задач, в частности, задачи PageRank, задаче о стохастическом многоруком бандите, бинарной классификации с учителем. Детально изучается прямо-двойственный подход и варианты метода зеркального спуска в задачах стохастической и детерминированной оптимизации. В результате прохождения курса обучающиеся смогут самостоятельно формулировать задачи выпуклой оптимизации, исследовать их свойства и решать их с помощью эффективных алгоритмов градиентного типа. Курс включает в себя теоретические и практические занятия. Для успешного освоения курса необходимо посещение занятий, своевременное выполнение практических заданий и тестов, самостоятельная работа с дополнительной литературой.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

изучение основ современной теории выпуклой оптимизации, знакомство с основными методами и алгоритмами выпуклой оптимизации в конечномерных пространствах (как для детерминированных, так и для стохастических задач), выяснение их сложности, применение в ряде прикладных задач.

Задачи дисциплины

- получение представлений о современных рекуррентных методах выпуклой оптимизации;
- обоснование сложности методов — числа итераций, гарантирующего заданную точность оптимума (по целевой функции);
- знакомство с соответствующими методами решения задач машинного обучения, PageRank, о многоруком бандите.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации

ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.1 Знает численные порядки величин, характерных для соответствующей профессиональной области
	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- описание класса выпуклых задач оптимизации (как детерминированных, так и стохастических);
- основные рекуррентные методы выпуклой оптимизации и их сложность;
- конкретные алгоритмы прямо-двойственной оптимизации, предназначенные для машинного обучения.

уметь:

- формулировать задачи выпуклой оптимизации;
- описывать современные методы и алгоритмы выпуклой оптимизации, в частности, прямо-двойственного типа;
- обосновывать сложность указанных методов (по числу итераций);
- пользоваться основными прямо-двойственными алгоритмами выпуклой оптимизации, широко используемыми для задач машинного обучения.

владеть:

- навыком освоения большого объема информации;
- навыками постановки научно-исследовательских задач и навыками самостоятельной работы.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Элементы выпуклого анализа. Введение в выпуклую оптимизацию. Краткий обзор задач и методов. Примеры.	3			1
2	Метод центров тяжести и метод эллипсоидов: свойства и сложность. Градиентный метод.	5			3
3	Прямо-двойственный подход и метод зеркального спуска (МЗС) для задач стохастической и детерминированной оптимизации. МЗС с инерцией.	6			3
4	Верхние и нижние (информационные) границы методов оптимизации. Их вывод и обоснование.	6			3
5	Минимаксные выпукло-вогнутые задачи, их решение на основе МЗС.	4			2
6	Применение МЗС к задачам о многоруком бандите, PageRank, бинарной классификации с учителем и др.	6			3
Итого часов		30			15
Подготовка к экзамену		0 час.			

Общая трудоёмкость	45 час., 1 зач.ед.
--------------------	--------------------

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

1. Элементы выпуклого анализа. Введение в выпуклую оптимизацию. Краткий обзор задач и методов. Примеры.

Введение: выпуклые множества и функции. Задача выпуклой оптимизации (в n -мерном пространстве). Примеры: машинное обучение, классификация с учителем, регрессия.

Элементы выпуклого анализа: теоремы о разделении, об опорной гиперплоскости, определение и существование субградиента. Условия оптимальности 1-го порядка.

Модель черного ящика. Понятия об оракуле, его сложности, о методе оптимизации и его сложности. Краткий обзор методов и результатов.

2. Метод центров тяжести и метод эллипсоидов: свойства и сложность. Градиентный метод.

Метод центра тяжести. Доказательство верхней границы. Сложность метода.

Метод эллипсоидов, его свойства и сложность. Градиентный метод.

3. Прямо-двойственный подход и метод зеркального спуска (МЗС) для задач стохастической и детерминированной оптимизации. МЗС с инерцией.

Прямо-двойственный подход к задачам выпуклой оптимизации. Идея метода зеркального спуска (МЗС). Параметры метода: исходная и двойственная нормы, потенциал отображения сопряженного пространства и условие Липшица на градиент. Примеры (с доказательствами).

Задача выпуклой стохастической оптимизации на заданном компакте с оракулом 1-го порядка. МЗС и его анализ. Понятие прокси-функции, преобразование Лежандра-Фенхеля. Параметр сильной выпуклости. Связь МЗС с методом стохастической аппроксимации.

Частный случай параметров МЗС; полностью рекуррентный алгоритм ЗС (АЗС), его верхняя граница и сложность. Доказательства.

Адаптивный АЗС (по обобщенной температуре), его верхняя граница и сложность. Другие варианты прямо-двойственных методов. Обсуждение. МЗС с инерцией.

4. Верхние и нижние (информационные) границы методов оптимизации. Их вывод и обоснование.

Подробное изучение нижних и верхних границ методов зеркального спуска в задачах выпуклой оптимизации, в частности, для задачи о стохастическом многоруком бандите.

5. Минимаксные выпукло-вогнутые задачи, их решение на основе МЗС.

Рассмотрение задачи PageRank как минимаксную выпукло-вогнутую задачу и ее решение на основе МЗС. Обобщение на выпукло-вогнутые стохастические задачи.

6. Применение МЗС к задачам о многоруком бандите, PageRank, бинарной классификации с учителем и др.

Задача о стохастическом многоруком бандите. Применение оптимизационного подхода и МЗС. Получение верхней границы. Сравнение с известной информационной нижней границей. Задача PageRank как оценивание главного собственного вектора стохастической матрицы. Сведение к задаче выпуклой оптимизации и применение МЗС.

Задача бинарной классификации с учителем: применение МЗС для минимизации ошибки классификации на выпуклой оболочке «простых» правил разделения.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система), а также доской.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Введение в выпуклую оптимизацию [Текст], [монография]/Ю. Е. Нестеров, -М., МЦНМО, 2010
2. Введение в оптимизацию [Текст] / Б. Т. Поляк - М.ЛЕНАНД,2014
3. А.С. Немировский. Методы зеркального спуска. Седьмая Традиционная молодежная школа "Управление, информация и оптимизация". 16 июня 2015 г. Солнечногорск (Московская область).
http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=11950

Дополнительная литература

1. Beck, A. and Teboulle, M., Mirror Descent and Nonlinear Projected Subgradient Methods for Convex Optimization, Oper.R esearch Letters, 2003, vol. 31, no. 3, pp. 167–175.
2. N. Cesa-Bianchi and G. Lugosi. Prediction, Learning, and Games. Cambridge University Press, 2006.
3. А. Б. Юдицкий, А. В. Назин, А. Б. Цыбаков, Н. Ваятис. Рекуррентное агрегирование оценок методом зеркального спуска с усреднением // Пробл. передачи информ., 41:4 (2005), с. 78–96.
4. А.В. Назин, Б.Т. Поляк. Рандомизированный алгоритм нахождения собственного вектора стохастической матрицы с применением к задаче PageRank // Автомат. и телемех., 2011, вып. 2, с. 131–141.
5. А. В. Назин. Алгоритмы инерционного зеркального спуска в выпуклых задачах стохастической оптимизации // Автомат. и телемех., 2018, вып. 1, с. 100–112.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. mipt.ipu.ru
2. http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=11950
3. <http://dx.doi.org/10.1561/22000000050> (Bubeck S. Convex Optimization: Algorithms and Complexity. Foundations and Trends ® in Machine Learning, vol. 8, no. 3-4, pp. 231–357, 2015).

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Мультимедийные технологии. MS PowerPoint , демонстрация презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по учебной и научной литературе);
- подготовку к Дифференцированному зачету.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к преподавателю.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Радиотехника и компьютерные технологии Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра интегрированных киберсистем
курс:	3
квалификация:	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет	
Разработчик:	А.В. Назин, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.1 Знает численные порядки величин, характерных для соответствующей профессиональной области
	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Введение в выпуклую оптимизацию» обучающийся должен:

знать:

- описание класса выпуклых задач оптимизации (как детерминированных, так и стохастических);
- основные рекуррентные методы выпуклой оптимизации и их сложность;
- конкретные алгоритмы прямо-двойственной оптимизации, предназначенные для машинного обучения.

уметь:

- формулировать задачи выпуклой оптимизации;
- описывать современные методы и алгоритмы выпуклой оптимизации, в частности, прямо-двойственного типа;
- обосновывать сложность указанных методов (по числу итераций);
- пользоваться основными прямо-двойственными алгоритмами выпуклой оптимизации, широко используемыми для задач машинного обучения.

владеть:

- навыком освоения большого объема информации;
- навыками постановки научно-исследовательских задач и навыками самостоятельной работы.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Определения выпуклого множества и выпуклой функции; строго выпуклые множества и функции; сильно выпуклые функции.

2. Задача выпуклой оптимизации на заданном множестве в конечномерном пространстве. Формулировка задач машинного обучения, бинарной классификации с учителем и линейной регрессии как задачи выпуклой оптимизации. Возможные варианты этих задач: Support Vector Machines (SVM) и Hinge Loss в классификации, МНК, гребневая регрессия и LASSO для регрессии.
3. Формулировка теоремы о разделении и теоремы об опорной гиперплоскости. Определение субградиента; соответствующая теорема о существовании и доказательство. Важность задач выпуклой оптимизации. Условия оптимальности 1-го порядка.
4. Понятие черного ящика и оракула. Порядок оракула. Понятие метода оптимизации. Сложность оракула и метода; понятие о дефекте метода (регрет). О структурной оптимизации. Краткий обзор методов и результатов выпуклой оптимизации.
5. Формулировка метода центров тяжести. Исходные предположения о задаче и оракуле. Теорема о дефекте метода (о верхней границе); доказательство с использованием леммы Грюнбаума. Сложность метода и его реализуемость.
6. Лемма об отсечении эллипсоида плоскостью, проходящей через его центр. Метод эллипсоидов, его свойства: сложность и трудоемкость.
7. Понятие о методе зеркального спуска (МЗС) в непрерывном времени. Исходное и сопряженное векторные пространства в \mathbb{R}^n , исходная и двойственная нормы, потенциальное гладкое отображение сопряженного пространства $\text{grad } W$ и условие Липшица (на градиент потенциала $\text{grad } W$). Пример с евклидовыми нормами и квадратичным потенциалом, приводящий МЗС к стандартному субградиентному методу.
8. Задача выпуклой стохастической оптимизации на заданном компакте с оракулом градиентного типа. МЗС в дискретном времени и его анализ.
9. Преобразование Лежандра-Фенхеля. Параметр обобщенной температуры. Определение прокси-функции V , ее связь с потенциальным отображением сопряженного пространства на допустимое множество. Параметр сильной выпуклости прокси-функции и связь с условием Липшица на $\text{grad } W$.
10. Пример оптимизации на стандартном симплексе. Прокси-функция энтропийного типа, ее свойства выпуклости по отношению к норме в l_1 ; соответствующее преобразование Лежандра-Фенхеля (с параметром обобщенной температуры) и прямое обоснование условия Липшица на градиент.
11. Выбор последовательностей коэффициента усиления и обобщенной температуры: частный случай параметров МЗС; полностью рекуррентный алгоритм ЗС (АЗС), доказательство его верхней границы (дефекта), сложность и трудоемкость АЗС. Обобщение метода как прямо-двойственный. Пример оптимизации на заданном евклидовом шаре с квадратичной прокси-функцией: АЗС как алгоритм проекции субградиента.
12. Адаптивный АЗС (по обобщенной температуре и постоянному коэффициентом усиления). Условие о равномерно ограниченной норме субградиента минимизируемой функции почти наверное. Теорема о верхней границе, доказательство. Сравнение с нижней границей Немировского-Юдина (без доказательства). Сложность АЗС. Другие варианты прямо-двойственных алгоритмов.
13. Стохастическая задача о многоруком бандите. Применение оптимизационного подхода и алгоритма ЗС с целью синтеза рандомизированной стратегии, минимизирующей функцию средних потерь. Получение верхней границы (дефекта функции потерь). Сравнение с известной информационной нижней границей (Auer et al., 2002) без доказательства.
14. Задача PageRank как задача оценивания главного собственного вектора стохастической матрицы. Сведение к задаче выпуклой стохастической оптимизации с оракулом градиентного типа. Применение МЗС с прокси функцией энтропийного типа. Рандомизированные АЗС.
15. Сведение PageRank к минимаксной выпукло-вогнутой стохастической задаче с оракулом градиентного типа. Применение МЗС.
16. Задача бинарной классификации с учителем, сведение к задаче выпуклой стохастической оптимизации на стандартном симплексе. Понятие и примеры функций фи-риска: экспоненциальные, используемые в SVM, и логит-потери.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов для проведения дифференцированного зачета:

1. О задачах выпуклой оптимизации и методах их решения. Примеры.
2. Метод центров тяжести. Доказательство верхней границы. Сложность метода.
3. Метод эллипсоидов и теорема о верхней границе.
4. Метод проекции (суб)градиента. Его обобщение на основе метода зеркального спуска (МЗС). Идея МЗС (в непрерывном времени).
5. Структура и параметры МЗС. Условия использования МЗС. Примеры.
6. Понятие прокси-функции и ее β -сопряженной, их свойства, используемые в МЗС. Пример (с оптимизацией на стандартном симплексе).
7. Алгоритм ЗС и теорема о верхней границе.
8. Алгоритм ЗС и вывод верхней границы.
9. Прокси-функция энтропийного типа и ее β -сопряженная; их свойства относительно ℓ_1 / ℓ_∞ и прямое доказательство.
10. Прокси-функция энтропийного типа и ее β -сопряженная; их свойства относительно ℓ_1 / ℓ_∞ и доказательство при общем подходе.

Критерии оценивания

Оценка отлично (10) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично (9) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично (8) выставляется студенту, показавшему систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо (7) выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо (6) выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо (5) выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно (4) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно (3) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно (2) выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно (1) выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Дифференцированный зачет проводится в устной форме.

При проведении зачета обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося проводится в течение 40 минут.

Во время проведения дифференцированного зачёта обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой и прочее.