

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
радиотехники и компьютерных
технологий**

А.В. Дворкович

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Теория стохастических систем
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Радиотехника и компьютерные технологии Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра интегрированных киберсистем
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: Е.Я. Рубинович, д-р техн. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры интегрированных киберсистем 20.05.2020

Аннотация

Данный курс предназначен для изучения основных принципов математической формализации стохастических динамических систем на базе теории стохастических дифференциальных уравнений Ито.

В рамках данного курса будет рассмотрена общая структура стохастического интеграла Ито по внеровскому процессу и его свойства с предварительным углубленным погружением в аксиоматику современной теории вероятностей (теория меры и интеграла Лебега, теоремы о предельных переходах под знаком интеграла Лебега, виды сходимостей последовательностей случайных величин и их функций распределения, условные математические ожидания и их свойства).

Курс проходит в формате лекционных занятий, включающих изложение теоретического материала и разбор тематических примеров. Для успешного прохождения данного курса необходимо посещение и конспектирование лекций, своевременное выполнение текущих заданий, а также самостоятельная работа с дополнительной литературой.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

изучение особенностей управления в живых организмах и популяциях, знакомство с теоретическими основами и методами математического моделирования процессов на уровне организма и популяций.

Задачи дисциплины

- знакомство студентов с основами строения организма, популяции и биоценоза как объектов управления;
- освоение студентами базовых знаний в области управления в живых системах;
- приобретение теоретических знаний в области математического моделирования процессов, протекающих на популяционном уровне, и моделирования влияния факторов риска на популяцию;
- изучение методов математического моделирования эпидемического процесса и оценки эффективности управления им;
- знакомство с современными программными системами для математического моделирования и статистического анализа медико-биологической информации.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.1 Знает численные порядки величин, характерных для соответствующей профессиональной области
	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- ☐ аксиоматику современной теории вероятностей и случайных процессов;
- ☐ измеримые функции (случайные величины) и виды сходимости их последовательностей;
- ☐ основы теории меры и интеграла Лебега;
- ☐ теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега;
- ☐ условные математические ожидания и их свойства;
- ☐ винеровский процесс и его свойства;
- ☐ стохастический интеграл Ито по винеровскому процессу и его свойства.

уметь:

- ☐ пользоваться своими знаниями для решения фундаментальных и прикладных задач;
- ☐ делать правильные выводы из сопоставления результатов теории и эксперимента;
- ☐ алгоритмизировать процесс построения математической модели явления;
- ☐ делать качественные выводы по результатам математического моделирования;
- ☐ видеть в технических задачах физическое содержание;
- ☐ осваивать новые предметные области, теоретические подходы и экспериментальные методики;
- ☐ получать наилучшие оценки изучаемых параметров и правильно оценивать степень их достоверности;
- ☐ эффективно использовать информационные технологии и компьютерную технику для достижения необходимых теоретических и прикладных результатов.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации;
- ☐ навыками самостоятельной работы в Интернете;
- ☐ навыками грамотной обработки результатов опыта и сопоставления с теоретическими данными;
- ☐ практикой исследования и решения теоретических и прикладных задач;
- ☐ навыками теоретического анализа вероятностных процессов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Аксиоматика теории вероятностей и случайных процессов	4			4

2	Измеримые функции (случайные величины) и виды сходимости их последовательностей	6			5
3	Интеграла Лебега и его свойства	4			4
4	Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега	4			4
5	Условные математические ожидания и их свойства	6			5
6	Винеровский процесс и его свойства	4			4
7	Стохастический интеграл Ито по винеровскому процессу и его свойства	2			4
Итого часов		30			30
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 8 (Весенний)

1. Аксиоматика теории вероятностей и случайных процессов

Вероятностные модели с конечным и счетным числом исходов. Основные понятия элементарной теории вероятностей. Сигма-алгебры и измеримые пространства. Вероятностные пространства. Основы теории меры.

2. Измеримые функции (случайные величины) и виды сходимости их последовательностей

Определение измеримой функции (случайной величины). Сходимость последовательностей случайных величин. Поточечная сходимость. Сходимость по мере (по вероятности). Сходимость почти всюду (с вероятностью единица). Сходимость по распределению. Сходимости в среднем и в среднем квадратическом. Связь между различными видами сходимости.

3. Интеграла Лебега и его свойства

Конструкция интеграла Лебега. Абсолютная непрерывность мер. Теорема Радона-Никодима. Замена переменных в интеграле Лебега. Теорема Фубини.

4. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега

Теорема о монотонной сходимости. Лемма Фату. Теорема о сходимости мажорируемой последовательности. Равномерная интегрируемость. Необходимые и достаточные условия для предельного перехода под знаком интеграла Лебега.

5. Условные математические ожидания и их свойства

Условные математические ожидания и условные вероятности. Определения. Основные свойства.

6. Винеровский процесс и его свойства

Процессы с независимыми приращениями. Функции Хаара. Построение винеровского процесса в виде ряда со случайными коэффициентами.

7. Стохастический интеграл Ито по винеровскому процессу и его свойства

Интегралы от простых функций. Свойства стохастических интегралов. Существование непрерывной модификации. Неравенство Колмогорова для мартингалов. Формула Ито. Стохастические дифференциальные уравнения в форме Ито.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Вероятность [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Н. Ширяев .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1989 .— 640 с.
2. Задачи по теории вероятностей [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Н. Ширяев .— М. : МЦНМО, 2006 .— 416 с.
3. Теория случайных процессов в примерах и задачах [Текст] : [учеб. пособия для вузов] / Б. М .Миллер, А. Р. Панков; под ред. А. И .Кибзуна .— М : ФИЗМАТЛИТ, 2002 .— 320 с.

Дополнительная литература

1. Теория случайных процессов [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев ; [Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова] .— М. : Физматлит, 2005 .— 402 с.
2. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин .— М. ; Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2002, 2003 .— 316 с.
3. Статистика случайных процессов. Нелинейная фильтрация и смежные вопросы [Текст], [монография]/Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, -М., Наука, 1974

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Видео лекции курса:

<https://mipt.ipu.ru/node/25418>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Мультимедийные технологии. MS PowerPoint , демонстрация презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по учебной и научной литературе);
- подготовку к экзамену

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к преподавателю.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Радиотехника и компьютерные технологии Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра интегрированных киберсистем
курс:	4
квалификация:	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Экзамен	
Разработчик:	Е.Я. Рубинович, д-р техн. наук, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.1 Знает численные порядки величин, характерных для соответствующей профессиональной области
	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория стохастических систем» обучающийся должен:

знать:

- ☐ аксиоматику современной теории вероятностей и случайных процессов;
- ☐ измеримые функции (случайные величины) и виды сходимости их последовательностей;
- ☐ основы теории меры и интеграла Лебега;
- ☐ теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега;
- ☐ условные математические ожидания и их свойства;
- ☐ винеровский процесс и его свойства;
- ☐ стохастический интеграл Ито по винеровскому процессу и его свойства.

уметь:

- ☐ пользоваться своими знаниями для решения фундаментальных и прикладных задач;
- ☐ делать правильные выводы из сопоставления результатов теории и эксперимента;
- ☐ алгоритмизировать процесс построения математической модели явления;
- ☐ делать качественные выводы по результатам математического моделирования;
- ☐ видеть в технических задачах физическое содержание;
- ☐ осваивать новые предметные области, теоретические подходы и экспериментальные методики;
- ☐ получать наилучшие оценки изучаемых параметров и правильно оценивать степень их достоверности;
- ☐ эффективно использовать информационные технологии и компьютерную технику для достижения необходимых теоретических и прикладных результатов.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации;
- ☐ навыками самостоятельной работы в Интернете;
- ☐ навыками грамотной обработки результатов опыта и сопоставления с теоретическими данными;
- ☐ практикой исследования и решения теоретических и прикладных задач;
- ☐ навыками теоретического анализа вероятностных процессов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

В середине семестра предусмотрена контрольная работа.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов для проведения экзамена:

- 1) Определения вероятностного пространства и случайной величины.
- 2) Функция распределения случайной величины и ее свойства.
- 3) Определение случайной величины. Примеры.
- 4) Сходимость последовательности случайных величин по вероятности. Примеры.
- 5) Сходимость последовательности случайных величин с вероятностью единица. Примеры.
- 6) Связь сходимости последовательности случайных величин по вероятности и с вероятностью единица. Примеры.
- 7) Интеграл Лебега от простых функций. Общее определение интеграла Лебега.
- 8) Абсолютная непрерывность мер. Теорема Радона-Никодима.
- 9) Замена переменных в интеграле Лебега. Теорема Фубини.
- 10) Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.
- 11) Лемма Фату.
- 12) Необходимые и достаточные условия для предельного перехода под знаком интеграла Лебега.
- 13) Условные математические ожидания и условные вероятности. Определения. Основные свойства.
- 14) Процессы с независимыми приращениями. Свойства. Примеры.
- 15) Функции Хаара. Построение винеровского процесса в виде ряда со случайными коэффициентами.
- 16) Стохастические интегралы Ито от простых функций. Свойства.
- 17) Формула Ито. Стохастические дифференциальные уравнения в форме Ито.

Билет 1.

- 1) Определения вероятностного пространства и случайной величины.
- 2) Формула Ито. Стохастические дифференциальные уравнения в форме Ито.

Билет 2.

- 1) Функция распределения случайной величины и ее свойства.
- 2) Стохастические интегралы Ито от простых функций. Свойства.

Критерии оценивания

Оценка отлично (10) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично (9) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично (8) выставляется студенту, показавшему систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо (7) выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо (6) выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо (5) выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно (4) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно (3) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно (2) выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно (1) выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Экзамен проводится в устной форме.

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется не менее 60 минут на подготовку. Опрос обучающегося на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.

Примерные вопросы для контрольной работы в середине семестра:

- 1) Найти стохастический дифференциал Ито для

$$\xi(t) = \exp\{\alpha t + \beta W(t)\}, \quad \alpha, \beta = \text{const}$$

- 2) Найти

$$m_\eta, D_\eta(t), R_\eta(t, s)$$

для процесса

$$\eta(t) = \int_0^t W^2(s) dW(s)$$

- 3) Найти стох. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция

$$\eta(t) = \sin \xi(t)$$

где

$$\xi(t)$$

- решение уравнения

$$d\xi(t) = \cos \xi(t) dt + \cos \xi(t) dW(t).$$