

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
радиотехники и компьютерных
технологий**

А.В. Дворкович

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Математические методы оптимизации
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Радиотехника и компьютерные технологии Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра информационных систем
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

6 (весенний) - Дифференцированный зачет

7 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: С.С. Равдин, канд. техн. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры информационных систем 09.04.2020

Аннотация

В курсе рассматриваются задачи математического программирования и оптимального управления. Изучаются следующие разделы теории экстремальных задач: задачи без ограничений, гладкие задачи с ограничениями типа равенств и неравенств, линейное программирование, вариационное исчисление, оптимальное управление.

При изучении данных разделов требуется знание основ математического анализа и линейной алгебры.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

освоение студентами фундаментальных знаний в области оптимизации и оптимального управления. Получение практических навыков решения задач оптимизации и управления.

Задачи дисциплины

- изучение основ методов поиска экстремумов функций многих переменных;
- изучение методов оптимизации для линейных и нелинейных задач;
- изучение численных методов оптимизации;
- изучение динамических систем и задач управления;
- изучение методов нахождения оптимального управления для динамических систем;
- получение практических навыков решения задач оптимизации и оптимального управления.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.1 Знает численные порядки величин, характерных для соответствующей профессиональной области
	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- необходимые и достаточные условия экстремумов функций многих переменных;
- методы поиска экстремумов;
- структура динамической системы;
- методы поиска оптимального управления.

уметь:

- сводить задачу оптимизации к каноническому виду;
- выбирать метод оптимизации исходя из особенностей задачи;
- строить алгоритм нахождения оптимального управления.

владеть:

- методами нахождения экстремумов функций многих переменных;
- численными подходами оптимизации;
- основами вариационного исчисления.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	История математических методов оптимизации. Постановка задачи математического программирования.	2			1
2	Сужение класса оптимизируемых функций.	3			1
3	Нелинейное программирование.	3			2
4	Задачи линейного программирования.	3			1
5	Базисы в системах векторов.	2			2
6	Симплекс-метод.	3			1
7	Двойственная задача.	4			2
8	Численные методы оптимизации.	4			2
9	Метод сопряженных направлений.	2			1
10	Нелинейные задачи с ограничениями.	2			1
11	Методы одномерной оптимизации.	2			1
12	Задача детерминированного управления.		6		6
13	Дискретные задачи управления.		6		6
14	Непрерывные задачи управления.		6		6
15	Принцип максимума Понтрягина.		6		6
16	Линейные системы с квадратичным критерием качества.		6		6
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

1. История математических методов оптимизации. Постановка задачи математического программирования.

Допустимое множество и целевая функция. Типы максимумов. Классическая задача математического программирования. Задачи линейного и нелинейного программирования.

2. Сужение класса оптимизируемых функций.

Необходимые и достаточные условия достижения строгого локального максимума в задаче без ограничений. Задача Лагранжа. Метод Лагранжа. Необходимые условия 1-го и 2-го порядка. Интерпретация множителей Лагранжа.

3. Нелинейное программирование.

Постановка задачи. Необходимые условия в задаче с ограничениями неотрицательности переменных.

Условия Куна-Таккера. Седловая точка функции Лагранжа. Теорема о седловой точке. Условия дополняющей нежесткости.

4. Задачи линейного программирования.

Постановка задачи. Многогранное множество. Угловая точка. Теорема о существовании угловой точки, в которой целевая функция достигает максимума.

5. Базисы в системах векторов.

Опорное решение. Выделение базиса в системе векторов, разложение векторов по базису, переход к другому базису. Метод Жордана-Гаусса. Построение опорных решений, обход угловых точек многогранника.

6. Симплекс-метод.

Оценки решения, критерии о введении и выведении векторов из базиса. Алгоритм симплекс-метода. Критерий единственности решения, отсутствия решения. Двухфазный симплекс-метод. Метод искусственного базиса. Эффект «зацикливания».

7. Двойственная задача.

Несимметричные и двойственные задачи. Теорема о существовании решений прямой и двойственной задач.

8. Численные методы оптимизации.

Численные методы отыскания безусловного экстремума. Релаксационная последовательность. Скорость сходимости. Градиентные методы 1-го порядка: метод с дроблением шага, метод наискорейшего спуска. Овражный случай: эвристические методы, масштабирование переменных.

Метод Ньютона.

9. Метод сопряженных направлений.

Метод Ньютона-Рафсона. Сопряженные вектора. Построение последовательности сопряженных векторов для решения квадратичной задачи. Алгоритм метода сопряженных направлений.

10. Нелинейные задачи с ограничениями.

Метод проекции градиента. Метод штрафных функций. Внешние и внутренние штрафные функции.

11. Методы одномерной оптимизации.

Дихотомия. Золотое сечение. Метод Ньютона.

Семестр: 7 (Осенний)

12. Задача детерминированного управления.

Постановка задачи детерминированного управления. Динамическая система. Функционалы качества Больца, Лагранжа, Майера. Ограничения задачи. Задача о максимальном быстродействии.

13. Дискретные задачи управления.

Метод динамического программирования. Принцип оптимальности Беллмана. Функция оптимального поведения. Функциональное уравнение Беллмана. Решение многошаговых задач методом динамического программирования.

14. Непрерывные задачи управления.

Задачи вариационного исчисления. Условие Эйлера. Задача с закрепленными концами, со свободными концами. Условие трансверсальности. Основная формула для вариации функционала.

15. Принцип максимума Понтрягина.

Принцип максимума Понтрягина. Вывод канонических уравнений для случая отсутствия ограничений на управление. Задача управления по минимуму энергии – решение.

16. Линейные системы с квадратичным критерием качества.

Случай замкнутого решения из принципа Максимума. Задача о регуляторе выхода. Задача слежения.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Аудитория с мультимедийным проектором и компьютером, аудиторная доска.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Численные методы оптимизации [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Ф. Измайлов, М. В. Солодов .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2008 .— 320 с.
2. Методы оптимизации. Условия оптимальности в экстремальных задачах [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Г. Бирюков ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2010 .— 225 с.
3. М.Интриллятор. Математические методы оптимизации и экономическая теория. «Прогресс», 1975г.

Дополнительная литература

1. Дополнительные главы методов оптимизации [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. Г. Жадан ; Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2002 .— 75 с.

2. Н.Н.Моисеев, Ю.П. Иванилов, Е.М. Столяров. Мтоды оптимизации. «Наука», 1982г.
3. А.Е.Колеса. Рекуррентные алгоритмы фильтрации для некоторых систем с нелинейностями кусочно-линейного вида. Автоматика и Телемеханика, 1986г.
4. К.Т.Леондес. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах. «Мир», 1980г.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://lib.mipt.ru> – электронная библиотека Физтеха.
2. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
3. <http://benran.ru> – библиотека по естественным наукам Российской академии наук.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Мультимедийные технологии, презентации PowerPoint.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе);
- подготовку к дифференцированному зачету и экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к преподавателю.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Радиотехника и компьютерные технологии Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра информационных систем
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

6 (весенний) - Дифференцированный зачет
7 (осенний) - Экзамен

Разработчик: С.С. Равдин, канд. техн. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.1 Знает численные порядки величин, характерных для соответствующей профессиональной области
	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математические методы оптимизации» обучающийся должен:

знать:

- необходимые и достаточные условия экстремумов функций многих переменных;
- методы поиска экстремумов;
- структура динамической системы;
- методы поиска оптимального управления.

уметь:

- сводить задачу оптимизации к каноническому виду;
- выбирать метод оптимизации исходя из особенностей задачи;
- строить алгоритм нахождения оптимального управления.

владеть:

- методами нахождения экстремумов функций многих переменных;
- численными подходами оптимизации;
- основами вариационного исчисления.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю:

- 1) Задача математического программирования.
- 2) Общие условия экстремумма 1 и 2 порядка.
- 3) Задача Лагранжа.

- 4) Теорема Куна-Таккера.
- 5) Условия дополняющей нежесткости.
- 6) Линейное программирование.
- 7) Многогранное множество.
- 12) Переход между базисами.
- 13) Количество решений ЗЛП.
- 14) Методы решения ЗЛП при отсутствии начального базиса.
- 15) Метод решения двойственной ЗЛП.
- 19) Релаксационные последовательности.
- 20) Градиентный спуск.
- 21) Метод Ньютона.
- 22) Методы 1 порядка с квадратичной скоростью сходимости.
- 23) Нелинейный метод наименьших квадратов.
- 24) Методы одномерной оптимизации.
- 25) Учет ограничений в численных методах.
- 26) Задачи в непрерывном времени и дискретные задачи.
- 27) Функционал качества.
- 28) Эквивалентность задач Больца, Лагранжа и Майера.
- 29) Принцип Беллмана.
- 32) Принцип Максимума Понтрягина.
- 33) Условия трансверсальности.
- 34) Синтезирующая функция.
- 35) Алгоритм численного решения с использованием принципа максимума.
- 36) Функциональное уравнение Беллмана.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Контрольные вопросы для дифференцированного зачета:

- 1) Виды целевых функций.
- 2) Постановки задачи математического программирования.
- 3) Необходимые и достаточные условия экстремума.
- 4) Метод множителей Лагранжа.
- 5) Интерпретация множителей Лагранжа.
- 6) Условия Куна-Таккера.
- 7) Седловая точка.
- 8) Условия дополняющей нежесткости.
- 9) Постановки задачи линейного программирования.
- 10) Системы базисных векторов.
- 11) Обход угловых точек многогранника.
- 12) Метод Жордана-Гаусса.
- 13) Симплекс-таблица.
- 14) Случаи отсутствия решения, множества решений.
- 15) Двухфазный симплекс-метод.
- 16) Искусственный базис.
- 17) Решение двойственной задачи.
- 18) Транспортная задача.
- 19) Численные методы оптимизации.
- 20) Штрафные функции.
- 21) Модификации градиентного спуска.
- 22) Понятие сопряженных векторов.
- 23) Метод сопряженных направлений.
- 24) Метод Марквардта-Левенберга.
- 25) Методы одномерной оптимизации.

26) Скорость сходимости.

Перечень экзаменационных вопросов:

- 27) Динамическая система.
- 28) Постановки задачи оптимального управления.
- 29) Виды функционалов качества.
- 30) Принцип Беллмана.
- 31) Динамическое программирование
- 32) Принцип Максимиума Понтрягина.
- 33) Условия трансверсальности.
- 34) Синтезирующая функция.
- 35) Примеры постановок непрерывных задач.
- 36) Примеры постановок дискретных задач.
- 37) Алгоритм численного решения с использованием принципа максимума.
- 38) Функциональное уравнение Беллмана.
- 39) Эквивалентность задач Больца, Лагранжа и Майера.
- 40) Задача слежения.

Примеры билетов для проведения экзамена:

Билет 1.

1. Динамическая система.
2. Задача слежения.

Билет 2.

1. Постановки задачи оптимального управления.
2. Эквивалентность задач Больца, Лагранжа и Майера.

Критерии оценивания

Оценка отлично (10) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично (9) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично (8) выставляется студенту, показавшему систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо (7) выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо (6) выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо (5) выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно (4) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно (3) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно (2) выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно (1) выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Экзамен и дифференцированный зачет проводится в устной форме.

При проведении зачета обучающемуся предоставляется 20 минут на подготовку. Опрос обучающегося проводится в течение 30 минут.

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется не менее 60 минут на подготовку. Опрос обучающегося на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена и зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.