Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Директор физтех-школы прикладной математики и информатики
А.М. Райгородский

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Теоретические основы численного анализа
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Радиотехника и компьютерные технологии Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра системного программирования
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:
лекции: 15 час.
семинары: 15 час.
лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: А.В. Шокуров, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры системного программирования 15.05.2020

Аннотация

Целью курса является ознакомление студентов с математическим аппаратом аппроксимации функций. Ознакомившись с этим курсом, студенты станут лучше понимать возможности и ограничения при программировании функций на компьютерах. Предполагается знание основных элементов функционального анализа.

Лекции этой части курса предназначены для углубленного изучения предмета и получения знаний, необходимых специалисту в области программирования при решении задач аппроксимации таблично заданных функций.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

формирование у студентов знаний и навыков работы с основными понятиями и идеями теоретического численного анализа и подготовить студентов к самостоятельной работе в этой области. Студентам излагаются фундаментальные понятия в этой области: чебышевские пространства, альтернанс, положительные ядра, интерполяции, сплай-интерполяций, насыщение, и их приложения к задачам аппроксимаций и получения оценок такой аппроксимации.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области теоретических основ численного анализа;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области теоретических основ численного анализа;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области дискретной математики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
ПК-3 Способен выбирать и применять подходящее оборудование, инструменты и методы исследований для решения задач в избранной предметной области	ПК-3.1 Знает принципы работы и диапазоны рабочих параметров используемого научного оборудования
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.2 Знает источники происхождения и умеет производить оценку погрешности измерений и достоверности экспериментальных результатов

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия и задачи в области теории приближений (теоретического численного анализа);
- современные проблемы соответствующих разделов теоретического численного анализа;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла теоретических основ численного анализа;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых задач дискретной математики (численного анализа).

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач построения и анализа методов приближения;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить методы решения задач нахождения и анализа найденных приближений;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области построения и анализа приближений.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач построения и анализа приближений;
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов для решения задач построения и анализа приближений;
- предметным языком дискретной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов навыками освоения большого объема информации и решения задач АЛКТГ (в том числе, сложных).

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Постановка задачи о наилучшем приближении. Задача о наилучшем приближении непрерывных функций. Чебышевские пространства функций. Чебышевский альтернанс. Теорема Джексона об оценке скорости сходимости наулучших приближений на некотором важном классе функций. Теорема Фавара об оптимальных константах.	8	8		16
2	Интерполяция. Интерполяцион-ный процесс. Погрешность интерполяции. Лагранжевы сплайны. Интерполяционный полином в ньютоновой форме.	7	7		14
Итого часов		15	15		30
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 8 (Весенний)

1. Постановка задачи о наилучшем приближении. Задача о наилучшем приближении непрерывных функций. Чебышевские пространства функций. Чебышевский алтернанс. Теорема Джексона об оценке скорости сходимости наулучших приближений на некотором важном классе функций.
Теорема Фавара об оптимальных константах.

Приближение бесконечномерных пространств пространствами конечной размерностью. Понятие о наилучшем приближении. Теорема Бореля о существовании наилучшего приближения. Неединственность наилучшего приближения в общем случае. Понятие о строго выпуклых пространствах. Достаточное условие единственности наилучшего приближения.

Свойства чебышевских подпространств. Примеры чебышевских пространств. Теорема о несуществовании чебышевских подпространств дя функций, область определения которых отлична от прямой и окружности. Теорема Чебышева о существовании и единственности наилучшего приближения в чебышевском подпространстве.

Понятие положительного ядра. Метод построения приближений функций с помощью ядер. Теорема о равномерной сходимости последовательности сверток. Примеры ядер: Фурье и Фейера и теоремы Дирихле и Фейера. Теорема Вейерштрасса. Ядро Джексона. Теорема Джексона о скорости сходимости наилучших приближений для некоторого важного класса функций.

Понятие оптимальности констант в формуле Джексона. Функции Бернулли и формула обращения для представления периодических функций. Теорема Фавара.

2. Интерполяция. Интерполяцион-ный процесс. Погрешность интерполяции. Лагранжевы сплайны. Интерполяционный полином в ньютоновой форме.

Постановка задачи. Полиномы Лагранжа. Константы Лебега. Неравенство Лебега. Оценки констант Лебега для равномерных узлов.

Нижняя и верхняя оценки для констант Лебега (Теоремы Фабера-Бернштейна и Бернштейна). Существование равномерного интерполяционного процесса для каждой непрерывной функции. Невозможность одновременного интерполяционного процесса для всех непрерывных функций. Чебышевские узлы интерполяции. Пример Бернштейна. Оценка погрешности интерполяции для некоторого важного класса функций. Интерполяция периодических функций.

Пространство лагранжевых сплайнов. Свойства сплайнов. Неравенство Лебега для сплайнов. Теорема о равномерной сходимости аппроксимаций сплайнами. Теорема о насыщении аппроксимации сплайнами.

Интерполяционный полином в ньютоновой форме. Конечные разности. Целозначные многочлены. Теорема о представлении целозначных многочленов в виде многочленов Ньютона.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Необходимое оборудование для лекций и практических занятий: компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, звуковая система).

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. О.В. Локуциевский, М.Б. Гавриков “Начала численного анализа”. Москва ТОО «Янус», 1995.
2. К.И. Бабенко. “Основы численного анализа”. М. Наука, 1. О.В. Локуциевский, М.Б. Гавриков “Начала численного анализа”. Москва ТОО «Янус», 1995.
3. К.И. Бабенко. “Основы численного анализа”. М. Наука, 1986.

Дополнительная литература

1. M. Agrawal, N. Kayal, N. Saxena, Primes is in P, Annals of Mathematics, 2004, v. 160, pp. 781–793.
2. M. Ajtai, Generating Hard Instances of Lattice Problems, In 28th ACM Symposium on Theory of Computing, Philadelphia, 1996, 99–108.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

http://www.thefreecountry.com/programming/compilerconstruction.shtml, http://llvm.org/, http://gcc.gnu.org/, http://suif.stanford.edu/suif/suif2/

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Программное обеспечение и информационные технологии не требуются.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, алгоритмы.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

– чтение и конспектирование рекомендованной литературы,

– проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;

– подготовку к экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Радиотехника и компьютерные технологии Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра системного программирования
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Экзамен

Разработчик: А.В. Шокуров, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
ПК-3 Способен выбирать и применять подходящее оборудование, инструменты и методы исследований для решения задач в избранной предметной области	ПК-3.1 Знает принципы работы и диапазоны рабочих параметров используемого научного оборудования
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.2 Знает источники происхождения и умеет производить оценку погрешности измерений и достоверности экспериментальных результатов

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теоретические основы численного анализа» обучающийся должен:

знать:

- фундаментальные понятия и задачи в области теории приближений (теоретического численного анализа);
- современные проблемы соответствующих разделов теоретического численного анализа;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла теоретических основ численного анализа;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых задач дискретной математики (численного анализа).

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач построения и анализа методов приближения;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить методы решения задач нахождения и анализа найденных приближений;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области построения и анализа приближений.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач построения и анализа приближений;
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов для решения задач построения и анализа приближений;
- предметным языком дискретной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов навыками освоения большого объема информации и решения задач АЛКТГ (в том числе, сложных).

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется в форме экзамена. Экзамен проводится в устной форме.

Перечень контрольных вопросов для сдачи экзамена в 8 семестре:

1. Постановка задачи о наилучшем приближении. Свойства функции погрешности наилучшего приближения $\varepsilon(x, M)$, где $M \subset \mathbf{B}$, а $\mathbf{B}$ — нормированное пространство.
2. Чебышевские подпространства. Свойства чебышевских подпространств. Основные леммы для доказательства теорем Чебышева.
3. Доказательство теоремы Чебышева для $\mathcal{P}_n \subset C[a, b]$.
4. Доказательство теоремы Чебышева для $\mathcal{T}_n \subset C[\mathbf{S}^1]$.
5. Положительные ядра. Свойства положительных ядер. Свойства ядер Дирихле, Фейера, Джексона.
6. Доказательства теоремы Джексона для $W^n(M)$.
7. Доказательства теоремы Джексона для $W^n(M, [a, b])$.
8. Понятие оптимальности констант в теореме Джексона. Формулировка теоремы Фавара. Формулировка лемм. Определение периодических интегралов. Оценка для констант Фавара.
9. Вывод теоремы Фавара (необходимость).
10. Вывод теоремы Фавара (достаточность).
11. Постановка задачи интерполяции. Числа Лебега. Неравенство Лебега. Оценка констант Лебега для равномерно распределенных узлов.
12. Интерполяционный процесс. Теоремы Фабера и Бернштейна. Свойства сходимости и расходимости интерполяционного процесса. Чебышевские узлы.
13. Погрешность интерполяции функций класса $W^n(M, [a, b])$. Теоремы Лагранжа.
14. Сплайны. Лагранжевы сплайны. Погрешность интерполяции лагранжевыми сплайнами.
15. Насыщение при интерполяции лагранжевыми сплайнами.
16. Конечные разности. Интерполяционный полином в форме Ньютона.

4. Критерии оценивания

Оценка	Баллы	Критерии
отлично	10	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	9	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и

		умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	8	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.
хорошо	7	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.
	6	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.
	5	Выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.
удовлетворительно	4	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.
	3	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.
неудовлетворительно	2	Выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания

		при решении типовых задач.
	1	Выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой, конспектами лекций.

Экзамен проводится путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.

Задание по курсу «Теоретические основы численного анализа»

Задача 1. Пусть $\mathbf{B}$ – гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y), где $(x, y) \in \mathbf{B}$. Тогда пространство $\mathbf{B}$ является строго нормированным относительно нормы $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Задача 2. Пусть $\mathbf{B} = L_p(D, \mu)$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ открыто, а μ мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Элементами пространства $\mathbf{B}$ являются классы эквивалентных, измеримых по Лебегу функций $f : D \to \mathbb{R}$, для которых функция f^p является μ-суммируемой по D, а две функции эквивалентны, если их разность равна нулю почти всюду в D. Норма в $\mathbf{B}$ задается равенством:

$$\|f\| = \left(\int\limits_D |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда пространство $\mathbf{B}$ является строго нормированным относительно введенной нормы. Это утверждение следует из неравенства Минковского и условий при которых оно превращается в равенство.

Задача 3. Доказать, что банахово пространство строго нормировано тогда и только тогда, когда для любых различных элементов $x \neq y$ единичной сферы и $0 < \alpha < 1$ выполнено неравенство

$$\|\alpha \, x + (1 - \alpha) \, y\| < 1.$$

Задача 4. Доказать, что банахово пространство $\mathbf{B} = C[0, 1]$ с нормой $\|f\| = \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$ не является строго нормированным.

Задача 5. Доказать, что банахово пространство классов интегрируемых по Лебегу функций $\mathcal{L}_1[0, 1]$ с нормой $\|f\| = \int\limits_0^1 |f(x)| \, d\mu$ не является строго нормированным.

Задача 6. Пусть $\mathbf{H}$ — гильбертово пространство и $\mathbf{H}_n$ — его n-мерное подпространство. Пусть отображение $\pi = \pi_n : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ сопоставляет элементу $x \in \mathbf{H}$ наименее уклоняющийся элемент из $\mathbf{H}_n$. Доказать, что

$$\pi(x) = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) \, e_k$$

и

$$\varepsilon(x, \mathbf{H}_n) = \left(\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $e_1, \dots e_n$ — произвольный ортонормированный базис.

Задача 7. Пусть $M \subset \mathbf{B}$ линейное подпространство и $\lambda \in \mathbf{R}$ и $x, \ \lambda \, x \in P_M$. Доказать, что тогда выполнено равенство $\pi(\lambda \, x) = \lambda \, \pi(x)$.

Задача 8. В $C[\mathbf{S}^1]$ не существует четномерных Чебышевских подпространств.

Задача 9. Не существует чебышевских подпространств размерности большей 1 на множестве, являющемся объединением трех отрезков с общим концом.

Задача 10. Чебышевское подпространство размерности большей 1 определено на связном компактном множестве тогда и только тогда, когда это множество гомеоморфно отрезку или окружности.

Задача 11. Доказать, что в чебышевском пространстве всегда существует строго положительная функция.

Задача 12. Докажите теорему Чебышева для произвольного чебышевского подпространства в случае $D = \mathbf{S}^1$.

Задача 13. Докажите теорему Чебышева для произвольного чебышевского подпространства в случае $D = [0, 1]$.

Задача 14. Пусть $a_k > 0$ — такие вещественные положительные числа, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится. Рассмотрим 2π-периодическую функцию

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 3^k x$$

и для целого $m \geq 0$ положим

$$T(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cos 3^k x.$$

Доказать, что тригонометрический многочлен $T(x)$ наименее уклоняется от $f(x)$ в $\mathcal{T}_{2\cdot 3^m+1}$ и $\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2\cdot 3^m+1}) = \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$.

Задача 15. Пусть $f \in C[D]$ и для некоторого p из чебышевского подпространства L размерности n найдутся точки $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leq b$, в которых разность $r = f - p$ принимает ненулевые значения с чередующимися знаками (в силу задачи 2 это множество упорядочено, для $\mathbf{S}^1$ этот порядок задает направление обхода по окружности.) Тогда

$$\varepsilon(f, L) \geq \min_{1 \leq k \leq n+1} |r(x_k)|.$$

Задача 16. Пусть $f \in C[\mathbf{S}^1]$ — четная функция. Тогда наименее уклоняющийся многочлен Чебышева также является четной функцией.

Задача 17. Пусть $a_k > 0$ — такие вещественные положительные числа, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится, а $1 \le n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ — такие натуральные числа, для которых все отношения n_{k+1}/n_k суть целые нечетные числа. Положим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos n_k x$$

и для целого $m \ge 0$ положим

$$T(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cos n_k x.$$

Доказать, что тригонометрический многочлен $T(x)$ наименее уклоняется от $f(x)$ в $\mathcal{T}_{2\cdot n_m+1}$ и $\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2\cdot n_m+1}) = \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$.

Задача 18. Пусть m, ν — целые, $m \ge 1$, $m \ge \nu \ge 0$, $f \in C^m[I]$ и f имеет $k \ge m$ различных нулей на I. Тогда $f^{(\nu)}$ имеет не менее $k - \nu$ корней на отрезке I. Указание: докажите по индукции, используя теорему Ролля.

Задача 19. Пусть $n \ge 1$, $f \in C^n[a,b]$, $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ — чебышевские интерполяционные узлы на $[a,b]$, $x_k^* = \frac{b-a}{2} \cos \frac{2k-1}{2n}\pi + \frac{a+b}{2}$, $1 \le k \le n$. Докажите, что при $a = -1$, $b = 1$

$$\|f - \pi_n(\mathbf{x}^*, f)\| \le \frac{1}{2^{n-1} n!} \sup_{x \in [-1,1]} |f^{(n)}(x)|.$$

Задача 20. Докажите теорему Джексона для многочленов: Пусть $f \in W^r(M, [a,b])$. Тогда для любого $n \ge r$ справедливо неравенство

$$\varepsilon(f, \mathcal{P}_n) < \left(\frac{b-a}{2}\right)^r \frac{A_r M}{n^r}, \quad n \ge r,$$

где константа A_r не зависит от M, n, f и равна $A_r = (Cr)^r/r!$ (C — константа из теоремы Джексона). Указание: сначала сведите доказательство к случаю функций f на отрезке $[-1,1]$, затем перейдите к функциям вида $h(t) = f(\cos t)$.

Задача 21. Доказать, что для произвольных $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathbb{R}$:

$$(а) \begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cdots & \cos(n-1)\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cdots & \cos(n-1)\varphi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cos\varphi_n & \cdots & \cos(n-1)\varphi_n \end{vmatrix} =$$

$$2^{(n-1)^2} \prod_{1\le i<k\le n} \sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \cdot \sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2},$$

при $n > 1$.

$$(б) \begin{vmatrix} \sin\varphi_1 & \sin 2\varphi_1 & \cdots & \sin n\varphi_1 \\ \sin\varphi_2 & \sin 2\varphi_2 & \cdots & \sin n\varphi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin\varphi_n & \sin 2\varphi_n & \cdots & \sin n\varphi_n \end{vmatrix} =$$

$$2^{n(n-1)} \prod_{k=1}^{n} \sin\varphi_k \prod_{1\le i<k\le n} \sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \cdot \sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}.$$

(Указание. Воспользуйтесь тем, что $\cos nx$ и $\sin(n+1)x/\sin x$ — многочлены степени n относительно переменной $\cos x$. Найдите их старшие коэффициенты. Используйте определитель Вандермонда.)

Задача 22. Воспользуйтесь результатом предыдущего упражнения для вывода леммы 2 лекции 5.

Задача 23. Докажите лемму 6 лекции 5. Для этого рассмотрите процедуру дифференцирования функций $\Delta_{nr}(t) = B_r(t) - T_{nr}(t)$. Сколько раз можно дифференцировать эту функцию? Докажите, что при дифференцировании число нулей не изменится. Воспользуйтесь периодичностью функций. Рассмотрите отдельно случай четного r и случай нечетного r.

Задача 24. Пусть $f \in C[a,b]$ — ограничение целой функции. Тогда для произвольного $q > 0$ найдется $A > 0$, что для любой системы узлов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ на отрезке $[a,b]$ выполняется неравенство $\|f - \pi_(\ \mathbf{x}, f)\| \le Aq^n$. Вывести из этого, что интерполяционный процесс, отвечающий произвольной интерполяционной матрице $\mathbf{X}$ на отрезке $[a,b]$ равномерно сходится к функции f.

Задача 25. Пусть $f \in C^\infty[a,b]$ и $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)| \le BA^n$ для всех $n \ge 1$ и некоторых констант $A > 0$ и $B > 0$. Докажите, что а) интерполяционный процесс, отвечающий произвольной матрице интерполяционных узлов на $[a,b]$ равномерно на $[a,b]$ сходится к f,

б) функция f аналитична на $[a,b]$.

Рассмотрите примеры $f(x) = \sin kx$, $k \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Задача 26. Докажите неравенство Лебега

$$\|f - l_r(\mathbf{x}, f)\| \leq (1 + \|l_r\|)\varepsilon(f, \mathcal{L}_r^{(n)}),$$

где $f \in C[a,b]$, $2 \leq r \leq n$.

Задача 27. 1) Если $1 \leq s \leq r$, то $\delta_n^r W^s(M) \asymp M|b-a|n^{-s}$ при $n \to \infty$, $n \geq r$,

2) если $s > r$, то $\delta_n^r W^s(M) = \infty$ при $n \geq r$, причем для любого $E > 0$ найдется функция $f_E \in W^s(M)$, для которой $\delta_n^r(f) \geq E|b-a|^r K_r n^{-r}$, где константа K_r зависит только от r.

Задача 28. Проверьте, что сложение функций коммутативно и ассоциативно, а функция $f_0 : \ R \to \mathbb{R}$ является единственным нулевым элементом. Однако, если $D_f \neq \emptyset$, то элемент f не обратим.

Задача 29. Для произвольной функции $f \in C^n[a,b]$ и системы узлов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и любого $x \in [a,b]$

$$f(x) = \pi_n(\mathbf{x}, f)(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (x - x_k),$$

где $y_1 < \xi < y_2$, а $y_1 = \min\{x, x_1, \ldots, x_n\}$ и $y_1 = \max\{x, x_1, \ldots, x_n\}$.

Задача 30. Докажите утверждения лекции 10.