

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Проректор по учебной работе**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Дополнительные главы теории вероятностей
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Радиотехника и компьютерные технологии Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра проблем передачи информации и анализа данных
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Программу составил: А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры проблем передачи информации и анализа данных 20.04.2020

## Аннотация

Целью курса является развитие навыков работы со случайными величинами и процессами. Изложение формального аппарата сопровождается интуитивным анализом конструкций и результатов. При этом для определения самих объектов – случайной переменной, вероятности, плотности вероятности (функции распределения) достаточно именно интуитивных представлений без какого-либо использования теории меры. Особенностью курса является большое число конкретных примеров вероятностных распределений, на которых иллюстрируются общие положения. К ним относится, в частности, класс распределений Леви-Парето, играющие важную роль в физике лазерного охлаждения атомов.

Центральное место в курсе занимает комплекс асимптотических результатов теории вероятностей, включающий, наряду с законом больших чисел и классической центральной предельной теоремой, обобщение последней для устойчивых законов и теоремы о предельных распределениях экстремальных значений и больших уклонений. Математическое введенное понятие энтропии связывается также с функционалом действия – объектом, играющем важную роль в физике.

Назначение раздела, посвященного математической статистике — ознакомить слушателей с основными концепциями и постановками задач математической статистики и показать связь математической статистики и теории информации с теорией вероятностей, прежде всего с теорией больших уклонений.

Заключительный раздел курса содержит традиционный материал по основам теории цепей Маркова.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

Освоение студентами дополнительных глав теории вероятностей, в частности, различных типов предельных теорем (статистика экстремальных значений, теория больших уклонений и др.) и теории случайных процессов.

### Задачи дисциплины

- фундаментальная подготовка студентов в двух областях теории вероятностей: теории массового обслуживания (ТМО) и теории случайных процессов (ТСП);
- построение у студентов навыков применения ТМО и ТСП в исследовании телекоммуникационных сетей и систем;
- оказание консультаций студентам в проведении собственных теоретических и экспериментальных исследований телекоммуникационных сетей и систем.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.1 Знает численные порядки величин, характерных для соответствующей профессиональной области
	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные понятия и утверждения теории массового обслуживания (ТМО);
- основные понятия и утверждения теории случайных процессов (ТСП);
- современные направления развития теории вероятностей.

уметь:

- строить математические модели процессов в телекоммуникационных сетях и системах;
- применять математический аппарат ТМО и ТСП для решения научно-исследовательских задач в области телекоммуникационных сетей и систем.

владеть:

- навыком освоения большого объема информации;
- навыками постановки научно-исследовательских задач и аналитического моделирования процессов и явлений в области телекоммуникационных сетей и систем.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Напоминание основных понятий и технических средств	3			1
2	Основы теории массового обслуживания.	4			2
3	Система предельных теорем теории вероятностей	4			2
4	Цепи Маркова и случайные процессы в дискретном случае.	4			2
5	Основы теории случайных процессов.	3			2
6	Диффузионные процессы и основы стохастического анализа.	5			2
7	Основы теории стационарных случайных процессов	4			2
8	Пуассоновские процессы и поля.	3			2
Итого часов		30			15
Подготовка к экзамену		0 час.			

Общая трудоёмкость	45 час., 1 зач.ед.
--------------------	--------------------

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

##### 1. Напоминание основных понятий и технических средств

Элементарные и составные события. Дискретные случайные величины, их распределения и совместные распределения, моменты. Маргинальные и условные распределения. Независимые случайные величины. Производящие функции распределения вероятности и моментов. Поведение производящих функций, мат. ожидания и дисперсии при сложении независимых случайных величин. Вывод биномиального распределения методом производящих функций. Вывод распределения Пуассона из биномиального распределения методом производящих функций.

Непрерывные случайные величины. Кумулятивная функция распределения вероятности (к.ф.р.), функция плотности вероятности (ф.п.в.) и характеристическая функция распределения вероятности (х.ф.). Абсолютно непрерывные и сингулярные распределения. Совместное распределение, маргинальные и условные распределения в непрерывном случае, формула полной вероятности, независимость. Поведение х.ф., мат. ожидания и дисперсии при сложении случайных величин. Логарифм х.ф. (характеристический показатель) и кумулянты случайной величины. Экспоненциальное распределение, его характеристическое свойство («сколько ни ждешь, осталось ждать еще столько же»). Гамма-распределение как сумма экспоненциальных распределений.

##### 2. Основы теории массового обслуживания.

Классификация потоков событий. Пуассоновский поток. Поток Пальма. Прореживание пуассоновских потоков. Помеченный пуассоновский поток. Суперпозиция пуассоновских потоков.

Основные понятия теории массового обслуживания. Формула Литтла. Система М/М/1. Передача в канале без шума и длиной пакетов с экспоненциальным распределением как система М/М/1. Оценка среднего времени ожидания пакета в очереди.

Передача пакетов равной длины по беспроводному каналу с белым шумом как система В/В/1. Входной поток малой интенсивности как on-off-процесс, передача по каналу как бернуллиевский процесс с вероятностью  $p$ , отражающей уровень шума в канале. Оценка среднего и дисперсии времени передачи пакета и пропускной способности канала в зависимости от уровня шума.

Система М/Г/1. Оценка среднего времени ожидания пакета в очереди методом производящих функций.

##### 3. Система предельных теорем теории вероятностей

Предельные теоремы. Среднее выборки и дисперсия выборки. Неравенства Маркова, Чебышева, закон больших чисел. Слабая сходимости случайных величин. Непрерывность х.ф. относительно слабой сходимости (без доказательства, но с обсуждением основных идей). Центральная предельная теорема (вывод с помощью х.ф.). Закон больших чисел в форме Хинчина (через х.ф.).

Нормальное распределение и распределение хи-квадрат. Нормальное распределение, гауссовы векторы. Распределение хи-квадрат, число его степеней свободы. Критерий хи-квадрат. Пример проверки статистической гипотезы: бомбардировки Лондона (по В. Феллеру)

Обобщение центральной предельной теоремы для распределений с «тяжелыми хвостами». Распределения Леви-Парето.

Предельные теоремы в статистике экстремальных значений (теорема Фишера-Типпета). Распределения Гумбеля, Фреше и Вейбулла, примеры задач, в которых они встречаются.

Принципы больших уклонений. Большие уклонения в последовательности испытаний Бернулли. Энтропия Шеннона, относительная энтропия (энтропия Кульбака-Лейблера). Теорема Санова. Большие уклонения сумм непрерывных случайных величин и теорема Крамера. Функционал действия.

#### 4. Цепи Маркова и случайные процессы в дискретном случае.

Цепь Маркова с конечным числом состояний. Граф цепи Маркова и матрица вероятностей перехода. Стационарное распределение цепи Маркова. Принцип детального равновесия, обратимые цепи Маркова.

Моделирование процесса переключения сигнально-кодowych конструкций при передаче в беспроводном канале цепью Маркова. Оценка стационарных вероятностей передачи на каждой СКК.

Эргодическая теорема для цепей Маркова. Существование и единственность стационарного распределения в общей неприводимой непериодической цепи Маркова.

#### 5. Основы теории случайных процессов.

Вероятностное пространство, алгебра событий, процессы и потоки алгебр.

Задание случайного процесса иерархией функций распределения. Условия согласования многовременных распределений, теорема Колмогорова (без доказательства).

Марковские процессы. Уравнение Смолуховского.

#### 6. Диффузионные процессы и основы стохастического анализа.

Случайное блуждание и процесс Винера как его предел.

Диффузионные процессы и уравнение Фоккера-Планка (с выводом).

Краевые условия для уравнения Фоккера-Планка. Распределение времени выхода. Равновесное распределение вероятности, обратимость, распределение Гиббса.

Марковские процессы со скачками. Уравнение Колмогорова-Феллера.

Уравнение Ланжевена. Процесс Орнштейна-Уленбека.

Стохастические дифференциальные уравнения. Стохастическое дифференциальное исчисление по Ито и по Стратоновичу.

#### 7. Основы теории стационарных случайных процессов

Спектральное разложение случайной функции. Стационарные случайные функции, спектральное условие стационарности.

Теорема Винера-Хинчина. Формула Найквиста, «белый» и «цветной» шум.

Стационарные случайные процессы и эргодическая теория динамических систем.

#### 8. Пуассоновские процессы и поля.

Определение и основные свойства пуассоновского случайного точечного поля. Корреляции. Маркированные пуассоновские поля. Модели, приводящие к пуассоновским процессам и полям.

### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедийным оборудованием (проектор или плазменная панель), доской.

### 6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

Фонд литературы базовой кафедры (организации):

1. Ширяев А.Н. Вероятность. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МЦНМО, 2004. Кн.1 - 520 с. Кн.2 - 408 с.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Пер. с англ. М.: Мир, 1984. Т.1. - 511 с. Т.2. - 738 с.

Дополнительная литература

Фонд литературы базовой кафедры (организации):

1. Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа. 1990. - 376 с.
2. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986. - 528 с.
3. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1976. - 484 с.

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Statistics 110: Probability by Harvard University,

<http://itunes.apple.com/us/course/statistics-110-probability/id502492375>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Студент, изучающий дисциплину, должен, с одной стороны, овладеть общими понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные понятия и утверждения теории массового обслуживания, теории случайных процессов, современные направления развития теории вероятностей.

Успешное освоение курса требует напряженной самостоятельной работы студента. В программе курса отведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам занятий, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенные для самостоятельного изучения, решение задач;
- подготовка к дифференцированному зачету.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов следует обращаться за консультациями к лектору.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Радиотехника и компьютерные технологии Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра проблем передачи информации и анализа данных
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет	
<b>Разработчик:</b>	А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.1 Знает численные порядки величин, характерных для соответствующей профессиональной области
	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дополнительные главы теории вероятностей» обучающийся должен:

### знать:

- основные понятия и утверждения теории массового обслуживания (ТМО);
- основные понятия и утверждения теории случайных процессов (ТСП);
- современные направления развития теории вероятностей.

### уметь:

- строить математические модели процессов в телекоммуникационных сетях и системах;
- применять математический аппарат ТМО и ТСП для решения научно-исследовательских задач в области телекоммуникационных сетей и систем.

### владеть:

- навыком освоения большого объема информации;
- навыками постановки научно-исследовательских задач и аналитического моделирования процессов и явлений в области телекоммуникационных сетей и систем.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме



#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Распределение вероятности на числовой прямой: каким условиям удовлетворяет, как задается (перечислите все известные вам способы), какими параметрами может быть охарактеризовано.
2. Совместное распределение вероятности нескольких случайных величин. Маргинальные и условные распределения, независимость.
3. Потоки событий, марковское свойство и рекуррентность.
4. Основные понятия теории массового обслуживания.
5. Передача в канале без шума и длиной пакетов с экспоненциальным распределением как система М/М/1.
6. Передача пакетов равной длины по беспроводному каналу с белым шумом как система В/В/1.
7. Система М/Г/1. Оценка среднего времени ожидания пакета в очереди методом производящих функций.
8. Центральная предельная теорема (формулировка и доказательство сходимости к характеристической функции нормального распределения).
9. Цепь Маркова с конечным числом состояний: определение при помощи помеченного графа и матрицы, вероятности перехода и маргинальные вероятности, стационарные распределения.
10. Эргодическая теорема для цепей Маркова: классификация состояний и доказательство для неприводимой нециклической цепи.
11. Вероятностное пространство, алгебра событий, процессы и потоки алгебр.
12. Случайное блуждание и процесс Винера как его предел.
13. Описание статистики случайного процесса в терминах корреляционных функций. Теорема Колмогорова (без доказательства).
14. Марковские процессы. Уравнение Смолуховского. Условия, при которых оно переходит в уравнение Фоккера-Планка (диффузионный процесс), и вывод последнего уравнения из уравнения Смолуховского.
15. Равновесное распределение вероятности, обратимость, распределение Гиббса.
16. Марковские процессы со скачками. Уравнение Колмогорова-Феллера.
17. Уравнение Ланжевена для импульса броуновской частицы («поршень Рэлея»). Процесс Орнштейна-Уленбека.
18. Стохастические дифференциальные уравнения. Стохастический дифференциал Ито. Примеры стохастических дифференциалов.
19. Спектральное разложение случайной функции. Стационарные случайные функции, спектральное условие стационарности.
20. Теорема Винера-Хинчина. Формула Найквиста, «белый» и «цветной» шум.
21. Стационарные случайные процессы и эргодическая теория динамических систем.

#### Критерии оценивания

Оценка отлично (10) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично (9) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично (8) выставляется студенту, показавшему систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо (7) выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо (6) выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо (5) выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно (4) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно (3) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно (2) выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно (1) выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Дифференцированный зачет проводится в устной форме.

При проведении дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на дифференцированном зачете не должен превышать 45 мин.

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой и проч.