

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Проректор по учебной работе и  
довузовской подготовке**

**А.А. Воронов**

|                            |  |
|----------------------------|--|
|                            | <b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>   |
| <b>по дисциплине:</b>      | Теория вероятностей  |
| <b>по направлению:</b>     | Прикладные математика и физика   |
| <b>профиль подготовки:</b> | Радиотехника и компьютерные технологии<br>Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий<br>кафедра высшей математики |
| <b>курс:</b>               | 1  |
| <b>квалификация:</b>       | бакалавр   |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: В.В. Горяйнов, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 21.05.2020

## Аннотация

В курсе излагаются основные положения и методы теории вероятностей, которые используются при анализе случайных явлений. В частности, законы больших чисел объясняют, почему вероятность события проявляется через частоту его появления в серии независимых испытаний, а центральная предельная теорема объясняет популярность нормального распределения в различных приложениях.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- формирование базовых знаний по теории вероятностей для дальнейшего использования в других областях математики, естественнонаучных и гуманитарных дисциплинах,
- формирование математической культуры и исследовательских навыков,
- овладение методами анализа случайных явлений и процессов.

#### Задачи дисциплины

- приобретение обучающимися теоретических знаний, связанных с аксиоматикой теории вероятностей и ее применениями,
- умение распознавать и выделять вероятностные закономерности,
- свободное владение основными понятиями (вероятностное пространство, случайная величина, независимость и т.д.), формулами (полной вероятности, Байеса и др.) и классическими схемами (Бернулли, полиномиальной и др.),
- знание основных теорем (законы больших чисел, центральная предельная теорема и др.) и границы их применимости,
- развитие теоретико-вероятностной интуиции, т.е. умения строить математические модели, правильно отражающие те или иные стороны случайных явлений.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

| Код и наименование компетенции   | Индикаторы достижения компетенции  |
|--|--|
| УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач              | УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи  |
|  | УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи  |
|  | УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки   |
|  | УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки   |
| УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни | УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития |

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- понятие вероятностного пространства,
- определения независимости событий и классов событий,
- определения случайной величины и связанных с ней числовых характеристик (математическое ожидание, дисперсия, моменты),
- понятия независимости случайных величин, ковариации и коэффициента корреляции,
- определения и свойства функции распределения, плотности, производящей функции, характеристической функции,
- виды сходимости последовательностей случайных величин (почти наверное, по вероятности, в среднем квадратическом, по распределению) и соотношения между ними.

уметь:

применять основные теоремы и формулы:

- формулу полной вероятности,
- формулу Байеса,
- теоремы сложения и умножения,
- предельные теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа,
- законы больших чисел Бернулли, Чебышева и Хинчина,
- центральную предельную теорему.

владеть:

- основными приемами построения вероятностного пространства,
- комбинаторной техникой вычисления вероятности и приемами вычисления геометрических вероятностей,
- аналитическими методами теории вероятностей, связанными с применением производящих и характеристических функций,
- приближенными методами вычислений, основанными на применении предельных теорем.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

| №                     | Тема (раздел) дисциплины                                      | Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час. |          |                 |                |
|-----------------------|---|---|----------|-----------------|----------------|
|                       |   | Лекции  | Семинары | Лаборат. работы | Самост. работа |
| 1                     | Вероятностное пространство и дискретная вероятностная модель. | 6   | 6        |                 | 5              |
| 2                     | Дискретные случайные величины.                                | 4   | 6        |                 | 4              |
| 3                     | Законы больших чисел и центральная предельная теорема.        | 6   | 6        |                 | 5              |
| 4                     | Общая модель вероятностного пространства.                     | 6   | 6        |                 | 4              |
| 5                     | Последовательности независимых испытаний.                     | 4   | 4        |                 | 4              |
| 6                     | Цепи Маркова: основные понятия и свойства.                    | 2   | 2        |                 | 4              |
| 7                     | Ветвящиеся процессы.  | 2   |          |                 | 4              |
| Итого часов           |   | 30  | 30       |                 | 30             |
| Подготовка к экзамену |   | 0 час.  |          |                 |                |
| Общая трудоёмкость    |   | 90 час., 2 зач.ед.  |          |                 |                |

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

###### 1. Вероятностное пространство и дискретная вероятностная модель.

Теоретико-множественная модель событий. Определение вероятности. Элементы комбинаторики. Статистики Максвелла-Больцмана, Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна. Геометрические вероятности. Алгебры множеств и разбиения. Простейшие свойства вероятности на конечной алгебре событий. Теорема сложения. Условная вероятность. Теорема умножения, формула полной вероятности, формула Байеса. Определения независимости событий и классов событий. Теорема о независимости алгебр, порожденных разбиениями.

## 2. Дискретные случайные величины.

Индикаторы событий и их свойства. Законы распределения дискретных случайных величин. Определение и свойства математического ожидания и дисперсии. Целочисленные случайные величины и производящие функции.

## 3. Законы больших чисел и центральная предельная теорема.

Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Бернулли и форме Чебышева. Определение и свойства характеристических функций. Характеристические функции некоторых распределений. Формула обращения и теорема сходимости (без доказательства). Виды сходимости последовательностей случайных величин. Центральная предельная теорема. Закон больших чисел в форме Хинчина.

## 4. Общая модель вероятностного пространства.

Последовательности множеств, верхний и нижний пределы. Сигма-алгебры множеств. Счетная аддитивность и непрерывность функции множеств. Общее определение случайной величины, функция распределения и плотность. Аппроксимационная теорема и общее определение математического ожидания. Вычисление математического ожидания и дисперсии. Совместное распределение и независимость случайных величин. Мультипликативное свойство математического ожидания. Ковариация и коэффициент корреляции, ковариационная матрица. Задача линейного оценивания.

## 5. Последовательности независимых испытаний.

Схема Бернулли. Вероятностное пространство, описывающее схему Бернулли, и биномиальное распределение. Предельные теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа. Полиномиальная схема и полиномиальное распределение.

## 6. Цепи Маркова: основные понятия и свойства.

Марковская зависимость испытаний. Переходные вероятности и стохастические матрицы. Теорема о предельных вероятностях.

## 7. Ветвящиеся процессы.

Модель Гальтона-Ватсона и классификация ветвящихся процессов. Теорема о сумме случайного числа случайных величин. Вероятность вырождения процесса и ее связь с классификацией процессов.

# 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Вероятность [Текст] : в 2 т. Т. 1 : Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы : учебник для вузов / А. Н. Ширяев .— 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Изд-во МЦНМО, 2007, 2011 .— 552 с.
2. Курс теории вероятностей и математической статистики [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Б. А. Севастьянов .— М. ; Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2004 .— 272 с.
4. Захаров В.К., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Теория вероятностей.— М.: Наука, 1983.— 160 с.
5. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей.-Дрофа, 2007. - 348экз.
6. Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Сборник задач по теории вероятностей. - М.: Наука, 1989.— 320 с.

#### Дополнительная литература

1. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика [Текст] : учебник для вузов / Ю. А. Розанов .— 2-е изд., доп. — М. : Наука, 1989 .— 312 с.

### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://www.math.mipt.ru>  
<http://lib.mipt.ru>  
<http://www.exponenta.ru> – образовательный математический сайт.  
<http://mathnet.ru> – общероссийский математический портал.  
<http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».  
<http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.  
<http://www.i-exam.ru> – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

|  |  |
|--|--|
| <b>по направлению:</b>   | Прикладные математика и физика   |
| <b>профиль подготовки:</b>   | Радиотехника и компьютерные технологии<br>Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий<br>кафедра высшей математики |
| <b>курс:</b>   | 1  |
| <b>квалификация:</b>   | бакалавр   |
| Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет |  |
| <b>Разработчик:</b>  | В.В. Горяинов, д-р физ.-мат. наук, профессор   |

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

| Код и наименование компетенции   | Индикаторы достижения компетенции  |
|--|--|
| УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач              | УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи  |
|  | УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи  |
|  | УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки   |
|  | УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки   |
| УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни | УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития |

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория вероятностей» обучающийся должен:

### знать:

- понятие вероятностного пространства,
- определения независимости событий и классов событий,
- определения случайной величины и связанных с ней числовых характеристик (математическое ожидание, дисперсия, моменты),
- понятия независимости случайных величин, ковариации и коэффициента корреляции,
- определения и свойства функции распределения, плотности, производящей функции, характеристической функции,
- виды сходимости последовательностей случайных величин (почти наверное, по вероятности, в среднем квадратическом, по распределению) и соотношения между ними.

### уметь:

применять основные теоремы и формулы:

- формулу полной вероятности,
- формулу Байеса,
- теоремы сложения и умножения,
- предельные теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа,
- законы больших чисел Бернулли, Чебышева и Хинчина,
- центральную предельную теорему.

### владеть:

- основными приемами построения вероятностного пространства,
- комбинаторной техникой вычисления вероятности и приемами вычисления геометрических вероятностей,
- аналитическими методами теории вероятностей, связанными с применением производящих и характеристических функций,
- приближенными методами вычислений, основанными на применении предельных теорем.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе выполнения студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

Аттестация по дисциплине «Теория вероятностей» осуществляется в форме дифференцированного зачета.

Дифференцированный зачет проводится в устной форме с учетом предварительно выполненных студентами контрольных заданий.

Контрольные задания:

1. Найти наиболее вероятное число выпадений в сумме 4-х очков при 83 бросаниях двух игральных костей.
2. Однотипные приборы выпускаются тремя заводами. Первый завод выпускает половину всей продукции, второй треть и третий остальную часть. Вероятность того, что прибор, выпущенный первым заводом, проработает безотказно более трех лет равна 0,7. Для второго завода эта вероятность равна 0,6, а для третьего 0,5. Какова вероятность того что взятый наудачу прибор проработает более трех лет?
3. В группе из 30 студентов 10 отличников, 15 хороших студентов и 5 слабых. Отличник при тестировании с вероятностью 0,7 получает «отлично», с вероятностью 0,2 – «хорошо» и с вероятностью 0,1 – «удовлетворительно». Хороший студент получает эти же оценки с вероятностями 0,5; 0,3 и 0,2, соответственно. Слабый студент получает оценки «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно» с вероятностями 0,3; 0,5 и 0,2, соответственно. При аттестации вуза из группы выбирается для тестирования студент случайным образом. Какова вероятность того, что в тестировании принимал участие отличник, если была получена оценка «хорошо»?
4. Пять студентов независимо друг от друга купили билеты на поезд, в котором семь вагонов. Какова вероятность того, что все они попадут в разные вагоны?
5. Два клиента должны позвонить в управляющую компанию с 9 до 12 часов, независимо друг от друга. Одному из них потребуется для разговора 10 минут, а второму – 15. Найти вероятность того, что ни один из них не позвонит во время разговора другого.
6. В коробке 5 белых, 10 черных и 5 красных шаров. Трое по очереди извлекают шары до тех пор, пока у одного из них не появится белый шар. Этот игрок считается победителем. Какова вероятность выигрыша второго игрока, если после каждой попытки шар возвращается в коробку?
7. В чулане находится  $n$  пар ботинок. Из них случайно выбирают  $2r$  ботинок ( $2r < n$ ). Какова вероятность, что среди выбранных ботинок: а) отсутствуют парные; б) имеется ровно одна комплектная пара; в) имеется ровно две комплектные пары?

Примеры контрольных заданий:

Задание №1

1. Найти наиболее вероятное число выпадений в сумме 4-х очков при 83 бросаниях двух игральных костей.
2. В чулане находится  $n$  пар ботинок. Из них случайно выбирают  $2r$  ботинок ( $2r < n$ ). Какова вероятность, что среди выбранных ботинок:
  - а) отсутствуют парные;
  - б) имеется ровно одна комплектная пара;
  - в) имеется ровно две комплектные пары?

Задание №2

1. Однотипные приборы выпускаются тремя заводами. Первый завод выпускает половину всей продукции, второй треть и третий остальную часть. Вероятность того, что прибор, выпущенный первым заводом, проработает безотказно более трех лет равна 0,7. Для второго завода эта вероятность равна 0,6, а для третьего 0,5. Какова вероятность того что взятый наудачу прибор проработает более трех лет?



2. Два клиента должны позвонить в управляющую компанию с 9 до 12 часов, независимо друг от друга. Одному из них потребуется для разговора 10 минут, а второму – 15. Найти вероятность того, что ни один из них не позвонит во время разговора другого.

#### Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

#### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку. Опрос обучающегося по билету не должен превышать двух астрономических часов. Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.