Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education "Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University)"

APPROVED
Head of the Phystech School of Applied Mathematics and Informatics
A.M. Raygorodskiy

Work program of the course (training module)

course:	Elementary Number Theory and Number System/Элементарная теория чисел и системы счисления
major:	Information Science and Computer Engineering
specialization:	Computer Science/Информатика
	Phystech School of Applied Mathematics and Informatics
	Chair of Discrete Mathematics
term:	1
qualification:	Bachelor

Semester, form of interim assessment: 1 (fall) - Grading test

Academic hours: 60 AH in total, including:
- lectures: 30 AH.
- seminars: 30 AH.
- laboratory practical: 0 AH.

Independent work: 75 AH.

In total: 135 AH, credits in total: 3

Number of course papers, tasks: 2

Author of the program: E.V. Dashkov, candidate of physics and mathematical sciences, associate professor

The program was discussed at the Chair of Discrete Mathematics 04.06.2020

Annotation

The course covers mainly traditional issues: the foundations of set theory, propositional logic and first-order logic, elements of model theory, proof theory and the theory of algorithms. Considerable space is devoted to the most rigorous presentation of the set-theoretic formalism as the language of subsequent mathematical courses, as well as for didactic purposes. In connection with the focus on discrete mathematical sciences, the course examines and substantiates in detail various types of recursion, inductive definitions of sets, as well as the foundations of the theory of formal languages, the system of natural inference, lambda calculus.

1. Study objective

Purpose of the course

- mastering general mathematical terminology (sets, relationships, functions).

Tasks of the course

- Develop the skill of structured logical thinking;
- learn to give formal definitions and give examples of defined objects;
- learn to build formal records of mathematical statements and their proofs and work with these records;
- learn to conduct mathematical reasoning, not based on the specific properties of the objects under consideration.

2. List of the planned results of the course (training module), correlated with the planned results of the mastering the educational program

Mastering the discipline is aimed at the formation of the following competencies:

Code and the name of the competence	Competency indicators
Gen.Pro.C-1 Apply fundamental knowledge acquired in the physical and mathematical fields and/or natural sciences and use it in professional settings	Gen.Pro.C-1.1 Analyze the task in hand, outline the ways to complete it
Pro.C-1 Assign, formalize, and solve tasks, develop and research mathematical models of the studied phenomena and processes, systematically analyze scientific problems, obtain new scientific outcomes	Pro.C-1.2 Make hypotheses, build mathematical models of the studied phenomena and processes, evaluate the quality of the developed model

3. List of the planned results of the course (training module)

As a result of studying the course the student should:

know:

- Fundamental concepts, laws, theories of a part of discrete mathematics;
- modern problems of the corresponding sections of discrete mathematics;
- concepts, axioms, methods of proofs and proofs of the main theorems in the sections included in the basic part of the cycle;
- basic properties of the corresponding mathematical objects.

be able to:

- Understand the task at hand;
- use your knowledge to solve fundamental and applied problems;
- evaluate the correctness of the problem setting;
- strictly prove or disprove the statement;
- independently find algorithms for solving problems, including non-standard ones, and analyze them;
- independently see the consequences of the results obtained;
- accurately present mathematical knowledge in the field orally and in writing.

master:

- Skills of mastering a large amount of information and solving problems (including complex ones);
- skills of independent work and mastering new disciplines;
- culture of formulation, analysis and solution of mathematical and applied problems that require the use of mathematical approaches and methods for their solution;
- the subject language of discrete mathematics and the skills of competently describing the solution of problems and presenting the results obtained.

4. Content of the course (training module), structured by topics (sections), indicating the number of allocated academic hours and types of training sessions

4.1. The sections of the course (training module) and the complexity of the types of training sessions

№	Topic (section) of the course	Types of training sessions, including independent work			
		Lectures	Seminars	Laboratory practical	Independent work
1	Methods of forming sets	8	8		10
2	Set operations	4	4		10
3	Properties of bijections. Set embedding	4	4		10
4	Equivalence classes	6	6		25
5	Mathematical induction. Recursion. Counting	4	4		10
6	Axioms of countable and dependent choice. Formal languages	4	4		10
AH in total		30	30		75
Exam preparation		0 AH.			
Total complexity		135 AH., credits in total 3			

4.2. Content of the course (training module), structured by topics (sections)

Semester: 1 (Fall)

1. Methods of forming sets

Intuitive concept of a set. Elements of sets. Inclusion and equality of sets. The main ways of forming new sets are: enumeration of all elements, when there are certainly many of them; allocation of a subset by a property; degree (set of subsets) of a set; union of the set. Empty set, Russell's paradox, set intersection

2. Set operations

Operations of union, intersection and complement of sets. Basic identities of the algebra of sets. Set relations. Types of binary relations. Operations of inversion and composition of relations

3. Properties of bijections. Set embedding

Properties of functionality, injectivity, surjectivity and totality of a relation. ... Injections, surjections and bijections. The criterion for the bijectivity of the relationship. Equal cardinality of sets. ABOUT

4. Equivalence classes

Equivalence ratio. Equivalence classes and quotient set. Partitioning a set.

5. Mathematical induction. Recursion. Counting

Power properties of finite and countable sets. Fundamental orders. Induction principle. Equivalence of Funding Conditions, Finiteness of Decreasing Chains, and the Induction Principle

6. Axioms of countable and dependent choice. Formal languages

Words and formal languages. Concatenation of words, empty word. Prefixes and Suffixes. The "prefix" relation as a partial order. Operations on languages. Examples of inductive language definitions. Prefix-free languages. P

5. Description of the material and technical facilities that are necessary for the implementation of the educational process of the course (training module)

Necessary equipment for lectures and practical exercises: classroom, computer, projector.

6. List of the main and additional literature, that is necessary for the course (training module) mastering

Main literature

1. Алгоритмы: построение и анализ [Текст] : [учебник для вузов] / Т. Кормен [и др.] ; [пер. с англ. И. В. Красикова и др.] .— 3-е изд. — М. : Вильямс, 2014 .— 1328 с.

1. Языки и исчисления [Текст] : лекции по мат. логике и теории алгоритмов / Н. К. Верещагин, А. Шень .— 3-е изд., доп. — М. : МЦНМО, 2008 .— 288 с. - На обл. авт. не указаны .— (Современные лекционные курсы. Математическая логика и теория алгоритмов). - Библиогр.: с. 272-275. - Предм. указ.: с. 276-284. - Указ. имен: с. 285-288. - 1000 экз. - ISBN 978-5-94057-322-7) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

Additional literature

1. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений [Текст] /Д. Хопкрофт, Р. Мотвани, Д. Ульман ; пер. с англ. О. И. Васылык [и др.], [учеб. пособие для вузов]. -М, Вильямс, 2018

7. List of web resources that are necessary for the course (training module) mastering

http://dm.fizteh.ru

8. List of information technologies used for implementation of the educational process, including a list of software and information reference systems (if necessary)

Multimedia technologies can be used in lectures and practical classes, including a presentation

9. Guidelines for students to master the course

It is recommended to successfully pass test papers, as this simplifies the final certification in the subject. To prepare for the final certification in the subject, it is best to use the lecture materials.

SUPPLEMENT

Assessment funds for course (training module)

major:	Information Science and Computer Engineering
specialization:	Computer Science/Информатика Phystech School of Applied Mathematics and Informatics Chair of Discrete Mathematics
term:	1
qualification:	Bachelor

Semester, form of interim assessment: 1 (fall) - Grading test

Author:	E.V. Dashkov, candidate of physics and mathematical sciences, associate professor

1. Competencies formed during the process of studying the course

Code and the name of the competence	Competency indicators
Gen.Pro.C-1 Apply fundamental knowledge acquired in the physical and mathematical fields and/or natural sciences and use it in professional settings	Gen.Pro.C-1.1 Analyze the task in hand, outline the ways to complete it
Pro.C-1 Assign, formalize, and solve tasks, develop and research mathematical models of the studied phenomena and processes, systematically analyze scientific problems, obtain new scientific outcomes	Pro.C-1.2 Make hypotheses, build mathematical models of the studied phenomena and processes, evaluate the quality of the developed model

2. Competency assessment indicators

As a result of studying the course the student should:

know:

- Fundamental concepts, laws, theories of a part of discrete mathematics;
- modern problems of the corresponding sections of discrete mathematics;
- concepts, axioms, methods of proofs and proofs of the main theorems in the sections included in the basic part of the cycle;
- basic properties of the corresponding mathematical objects.

be able to:

- Understand the task at hand;
- use your knowledge to solve fundamental and applied problems;
- evaluate the correctness of the problem setting;
- strictly prove or disprove the statement;
- independently find algorithms for solving problems, including non-standard ones, and analyze them;
- independently see the consequences of the results obtained;
- accurately present mathematical knowledge in the field orally and in writing.

master:

- Skills of mastering a large amount of information and solving problems (including complex ones);
- skills of independent work and mastering new disciplines;
- culture of formulation, analysis and solution of mathematical and applied problems that require the use of mathematical approaches and methods for their solution;
- the subject language of discrete mathematics and the skills of competently describing the solution of problems and presenting the results obtained.

3. List of typical control tasks used to evaluate knowledge and skills

Current control consists of two tests per semester, as well as oral delivery of tasks for independent solution. Evaluation criteria are attached. Also attached is an example of a test assignment and several tasks for independent solution on various topics at the end of the program.

4. Evaluation criteria

The list of questions for passing differential credit:

1. Elementary set theory.
2. The concepts of sets and subsets, the simplest operations on sets. Ordered pairs and tuples, Cartesian product.
3. Mappings and matching. The concepts of the image and the prototype. Injections, surjections and bijections. Composition and reverse mapping.
4. Comparison of capacities and the concept of equal power. Cantor-Bernstein theorem. Countable and uncountable sets, their properties.
5. Cantor's theorem. Relations on sets. Properties of binary relations. Equivalence relations, theorem on equivalence classes.

6. Relations of partial and linear order. Minimum / maximum and smallest / largest elements. Properties of ordered sets. Operations on ordered sets. Isomorphisms of ordered sets.
7. Logic of statements. Boolean variables and functions. Construction of propositional formulas.
8. Calculation of the formula value on a set of variable values. Truth tables.
9. Tautologies and contradictions. Reduction of formulas to CNF and DNF. Zhegalkin polynomials.
10. Complete systems of connectives, Post's theorem.
11. Propositional calculus. Axioms and rules for inference of the propositional calculus. The correctness of the calculus of statements.
12. Lemma on deduction. Completeness of the propositional calculus. Consistent and consistent families of formulas.

Checklist for passing the exam:
1. Compactness theorem for propositional formulas.
2. Languages of the first order. Signature concept. Construction of first-order formulas: theorems, atomic formulas, logical connectives and quantifiers.
3. Formula parameters. The concept of a closed formula. Interpretation of the signature. The validity of the formula in the given interpretation on the given assessment.
4. Satisfaction and general validity of first-order formulas. Replacing a bound variable.
5. Preceded normal form. Expression of predicates in this interpretation by first-order formulas.
6. Isomorphisms and automorphisms of interpretations. Examples of ineffable predicates.
7. Method of elimination of quantifiers. Elementary equivalence of interpretations. Ehrenfeucht Games.
8. Predicate calculus and model theory. Axioms and rules for the derivation of the predicate calculus.
9. Generalization rule. A deduction lemma for predicate calculus. Correctness of the predicate calculus.
Tasks:
1. Consistent and consistent theories.
2. Theories and models. Complete and existentially complete theories. Gödel's theorem on the completeness of the predicate calculus. Semantic following.
3. Maltsev's compactness theorem.

Ticket 1:
1. Comparison of capacities and the concept of equal power. Cantor-Bernstein theorem. Countable and uncountable sets, their properties .;
2. The logic of statements. Boolean variables and functions. Construction of propositional formulas.

Ticket 2:
1. Elementary set theory;
2. Propositional calculus. Axioms and rules for inference of the propositional calculus. The correctness of the calculus of statements.

- the mark "excellent (10)" is given to a student who has shown comprehensive, systematized, in-depth knowledge of the curriculum of the discipline and the ability to confidently apply them in practice when solving specific problems, free and correct justification of the decisions made
- the mark "excellent (9)" is given to a student who has shown comprehensive, systematized, in-depth knowledge of the curriculum of the discipline and the ability to apply them in practice in solving specific problems, free and correct justification of the decisions
- the mark "excellent (8)" is given to a student who has shown comprehensive systematized, deep knowledge of the curriculum of the discipline and the ability to apply them in practice in solving specific problems, and the correct justification of the decisions
- the mark "good (7)" is given to a student if he firmly knows the material, expresses it competently and to the point, knows how to apply the acquired knowledge in practice, but makes some inaccuracies in the answer or in solving problems;
- the mark "good (6)" is given to the student if he knows the material, presents it competently and in essence, knows how to apply the knowledge gained in practice, but makes some inaccuracies in the answer or in solving problems;

- the mark "good (5)" is given to the student if he knows the material, and essentially expounds it, knows how to apply the knowledge gained in practice, but makes some inaccuracies in the answer or in solving problems;
- the mark "satisfactory (4)" is given to a student who has shown a fragmented, scattered nature of knowledge, insufficiently correct formulations of basic concepts, a violation of the logical sequence in the presentation of the program material, but at the same time he owns the main sections of the curriculum necessary for further education and can apply the obtained knowledge by model in a standard situation;
- the mark "satisfactory (3)" is given to a student who has shown a fragmentary, scattered nature of knowledge, insufficiently correct formulations of basic concepts, violation of the logical sequence in the presentation of program material, but at the same time he has fragmentary knowledge of the main sections of the curriculum necessary for further education and can apply the knowledge gained by the model in a standard situation;
- the mark "unsatisfactory (2)" is given to a student who does not know most of the main content of the curriculum of the discipline, makes gross mistakes in the formulation of the basic concepts of the discipline and does not know how to use the knowledge gained in solving typical practical problems
- the mark "unsatisfactory (1)" is given to a student who does not know the wording of the basic concepts of the discipline

5. Methodological materials defining the procedures for the assessment of knowledge, skills, abilities and/or experience

During the exam, students can use the discipline program.

Критерии оценок по курсу «Математическая логика»

(осенний семестр)

1. Оценка *за семестр* основана на доле решенных задач в контрольных (округляется до целых процентов по обычным правилам), а также сложности и количестве сданных устно (или письменно, по усмотрению преподавателя) задач из списка.

2. Студенту выставляется *наивысший* балл, для которого студентом выполнены *достаточные* условия, приведенные в таблице п. 4, если этот балл не меньше четырех.

3. Если таковой балл меньше четырех, студент вызывается на *устный зачет.* Студенты, пропустившие какие-либо контрольные по *уважительной причине*, всегда имеют право на устный зачет.

4. Таблица достаточных условий. Числа в таблице, кроме итоговых баллов, следует понимать как нижнюю границу.

Балл	**Сумм. КР**	**Устная сдача**
2	0	любой результат
4	33%	любой результат
5	33%	решено 8 задач; из каждой темы 1
6	33%	решено 8 задач; из каждой темы 1; всего 2 сложности 2
7	33%	решено 8 задач; из каждой темы 1; всего 4 сложности 2
8	66%	решено 8 задач; из каждой темы 1; всего 6 сложности 2
9	66%	решено 8 задач; из каждой темы 1; всего 8 сложности 2
10	66%	решена задача сложности 3; решено 8 задач; из каждой темы 1; всего 8 сложности 2

Например, пусть студент решил 2 задачи на три балла, 3 задачи на два балла и 10 задач на один балл. При этом в каждой теме студент решил некоторую задачу и получил по совокупности контрольных 50%. Тогда этот студент выполнил достаточные условия на оценку 7, но не 8, для которой ему недостает результата контрольных и еще одной задачи сложности два или три. Студент получает оценку 7.

5. На устном зачете студент получает общую оценку: «не зачтено», «зачтено» (33%) или «зачтено с отличием» (66%). Оценка используется вместо результатов пропущенных по уважительной причине контрольных работ или, если таковых нет, вместо итогового результата контрольных. При достаточно слабом ответе также может быть выставлена оценка 3 за семестр.

6. Для получения на устном зачете оценки «зачтено с отличием» *необходимо* иметь контрольные, пропущенные по уважительной причине, и результат $\geqslant 66\%$ по совокупности посещенных контрольных.

Критерии оценок по курсу «Математическая логика»

(весенний семестр)

1. Оценка *за семестр* основана на доле решенных задач в контрольных (округляется до целых процентов по обычным правилам), а также сложности и количестве сданных устно (или письменно, по усмотрению преподавателя) задач из списка.

2. Студенту выставляется *наивысший* балл, для которого студентом выполнены *достаточные* условия, приведенные в таблице п. 4, если этот балл не меньше четырех.

3. Если таковой балл меньше четырех, студент приглашается на *особую беседу*. Студенты, пропустившие какие-либо контрольные по *уважительной причине*, всегда имеют право на особую беседу.

4. Таблица достаточных условий. Числа в таблице, кроме баллов, следует понимать как нижнюю границу.

Балл	**Сумм. КР**	**Устная сдача**
2	0	любой результат
4	25%	любой результат
5	25%	решено 8 задач; из каждой темы 1
6	25%	решено 8 задач; из каждой темы 1; всего 2 сложности 2
7	25%	решено 8 задач; из каждой темы 1; всего 4 сложности 2
8	50%	решено 8 задач; из каждой темы 1; всего 6 сложности 2
9	50%	решено 8 задач; из каждой темы 1; всего 8 сложности 2
10	50%	решена задача сложности 3; решено 8 задач; из каждой темы 1; всего 8 сложности 2

5. На особой беседе студент получают общую оценку: «не зачтено», «зачтено» (25%) или «зачтено с отличием» (50%). Оценка используется вместо результатов пропущенных по уважительной причине контрольных работ или, если таковых нет, вместо итогового результата контрольных. При достаточно слабом ответе также может быть выставлена оценка 3 за семестр.

6. Для получения на особой беседе оценки «зачтено с отличием» *необходимо* иметь контрольные, пропущенные по уважительной причине, и результат $\geqslant 50\%$ по совокупности посещенных контрольных.

7. Ответ на экзамене оценивается по пятибалльной шкале. Удовлетворительной считается оценка *не менее* 2. В случае удовлетворительной оценки на экзамене, итоговая оценка получается сложением результата экзамена с оценкой за семестр, преобразованной по следующим правилам.

За семестр	**К экзамену**
$\leqslant 2$	0
3	1
4	1
5	2
6	3
7	3
8	4
9	5
10	5

8. Неудовлетворительная оценка на экзамене влечет пересдачу. При пересдаче оценка выставляется согласно изложенным принципам.

Контрольная работа № 1

1. Пусть $P, Q \subseteq U$ и $\overline{X} = U \setminus X$. Вычислите

$$\overline{((\overline{\overline{P} \cup Q}) \cup P)} \cup P.$$

2. Всегда ли верно $\cup\cap X = \cap\cup X$?

3. Пусть $X \subseteq A \times B$. Всегда ли $X = C \times D$ для некоторых $C \subseteq A$ и $D \subseteq B$?

4. Существует ли множество A, т. ч. $A \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}^A$?

5. Пусть множество X бесконечно и $\mathcal{P}_{inf}(X)$ есть множество всех его бесконечных подмножеств. Всегда ли верно $X \lnsim \mathcal{P}_{inf}(X)$?

6. Может ли быть так, что $\cup X \sim \cap X$, но $X \neq \varnothing$?

7. Пусть $P, Q \subseteq A^2$. Может ли быть так, что отношение $P \cap Q$ рефлексивно (для A), а $P \circ Q$ не рефлексивно?

8. Пусть $R \subseteq A^2$ и $R^{-1} \cup (R \circ R) = R^{-1}$. Всегда ли R транзитивно?

9. Пусть A некоторое множество. Найдите все транзитивные сюръекции $A \to A$.

10. Существует ли в ч. у. м. $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ непустая цепь, не имеющая ни наибольшего, ни наименьшего элементов?

11. Пусть на множестве $\underline{12}$ заданы отношения эквивалентности P и Q, т. ч.

$$xPy \iff \text{остатки от деления } x \text{ и } y \text{ на 2 одинаковы} \quad \text{и} \quad xQy \iff \text{остатки от деления } x \text{ и } y \text{ на 3 одинаковы.}$$

Выпишите все классы эквивалентности по отношению $P \cap Q$. Или это не эквивалентность? (Тогда почему?)

12. Укажите множество $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, т. ч. $S \neq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, S бесконечно и для всех $A, B \in S$ верно $A \cap B, \bar{A} \in S$.

Контрольная работа № 1

1. Пусть $P, Q \subseteq U$ и $\overline{X} = U \setminus X$. Вычислите

$$\overline{((\overline{\overline{P} \cup Q}) \cup P)} \cup P.$$

2. Всегда ли верно $\cup\cap X = \cap\cup X$?

3. Пусть $X \subseteq A \times B$. Всегда ли $X = C \times D$ для некоторых $C \subseteq A$ и $D \subseteq B$?

4. Существует ли множество A, т. ч. $A \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}^A$?

5. Пусть множество X бесконечно и $\mathcal{P}_{inf}(X)$ есть множество всех его бесконечных подмножеств. Всегда ли верно $X \lnsim \mathcal{P}_{inf}(X)$?

6. Может ли быть так, что $\cup X \sim \cap X$, но $X \neq \varnothing$?

7. Пусть $P, Q \subseteq A^2$. Может ли быть так, что отношение $P \cap Q$ рефлексивно (для A), а $P \circ Q$ не рефлексивно?

8. Пусть $R \subseteq A^2$ и $R^{-1} \cup (R \circ R) = R^{-1}$. Всегда ли R транзитивно?

9. Пусть A некоторое множество. Найдите все транзитивные сюръекции $A \to A$.

10. Существует ли в ч. у. м. $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ непустая цепь, не имеющая ни наибольшего, ни наименьшего элементов?

11. Пусть на множестве $\underline{12}$ заданы отношения эквивалентности P и Q, т. ч.

$$xPy \iff \text{остатки от деления } x \text{ и } y \text{ на 2 одинаковы} \quad \text{и} \quad xQy \iff \text{остатки от деления } x \text{ и } y \text{ на 3 одинаковы.}$$

Выпишите все классы эквивалентности по отношению $P \cap Q$. Или это не эквивалентность? (Тогда почему?)

12. Укажите множество $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, т. ч. $S \neq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, S бесконечно и для всех $A, B \in S$ верно $A \cap B, \bar{A} \in S$.

Контрольная работа № 1

1. Пусть $P, Q \subseteq U$ и $\overline{X} = U \setminus X$. Вычислите

$$\overline{((\overline{\overline{P} \cup Q}) \cup P)} \cup P.$$

2. Всегда ли верно $\cup\cap X = \cap\cup X$?

3. Пусть $X \subseteq A \times B$. Всегда ли $X = C \times D$ для некоторых $C \subseteq A$ и $D \subseteq B$?

4. Существует ли множество A, т. ч. $A \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}^A$?

5. Пусть множество X бесконечно и $\mathcal{P}_{inf}(X)$ есть множество всех его бесконечных подмножеств. Всегда ли верно $X \lnsim \mathcal{P}_{inf}(X)$?

6. Может ли быть так, что $\cup X \sim \cap X$, но $X \neq \varnothing$?

7. Пусть $P, Q \subseteq A^2$. Может ли быть так, что отношение $P \cap Q$ рефлексивно (для A), а $P \circ Q$ не рефлексивно?

8. Пусть $R \subseteq A^2$ и $R^{-1} \cup (R \circ R) = R^{-1}$. Всегда ли R транзитивно?

9. Пусть A некоторое множество. Найдите все транзитивные сюръекции $A \to A$.

10. Существует ли в ч. у. м. $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ непустая цепь, не имеющая ни наибольшего, ни наименьшего элементов?

11. Пусть на множестве $\underline{12}$ заданы отношения эквивалентности P и Q, т. ч.

$$xPy \iff \text{остатки от деления } x \text{ и } y \text{ на 2 одинаковы} \quad \text{и} \quad xQy \iff \text{остатки от деления } x \text{ и } y \text{ на 3 одинаковы.}$$

Выпишите все классы эквивалентности по отношению $P \cap Q$. Или это не эквивалентность? (Тогда почему?)

12. Укажите множество $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, т. ч. $S \neq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, S бесконечно и для всех $A, B \in S$ верно $A \cap B, \bar{A} \in S$.

1. (2) Выведите тождество

$$A \cap A = A$$

из тождеств $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$, а также коммутативности и ассоциативности $\cap$ и $\cup$.

2. (1)

a) Пусть $X \cap Y \neq \varnothing$. Докажите, что $\bigcap X \cap \bigcap Y \subseteq \bigcap(X \cap Y)$.

b) Пусть $X \cap Y \neq \varnothing$. Приведите пример, когда $\bigcap X \cap \bigcap Y \neq \bigcap(X \cap Y)$.

c) Приведите пример, когда $\bigcap X \cap \bigcap Y \not\subseteq \bigcap(X \cap Y)$.

3. (1) Докажите, что $\mathcal{P}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \{\bigcup_{i \in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{P}(A_i)\}$.

4. (2) Докажите, что для любых множеств X и Y верно

$$\cup X \subseteq Y \iff X \subseteq \mathcal{P}(Y).$$

5. (3) Существует ли множество $A \neq \varnothing$, т. ч. $A \times A \subseteq A$?

6. (1) Пусть $f, g \colon A \to B$. Докажите, что $f \cup g \colon A \to B$ тогда и только тогда, когда $f = g$.

7. (2) Постройте биекцию $[0,1] \to [0,1)$.

8. (3) Пусть $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Всегда ли найдется $n \in \mathbb{N}$, т. ч. $A_n \sim \mathbb{R}$?

9. (3) Допустим, у любой сюръекции есть правая обратная функция. Выведите отсюда аксиому выбора.

10. (2) Докажите, что для любого ч. у. м. $\mathcal{A} = (A, \leqslant)$ найдется $S \subseteq \mathcal{P}(A)$, т. ч. $\mathcal{A} \cong (S, \subseteq)$. Иначе говоря, любой порядок устроен, как включение на подходящем семействе подмножеств.

11. (1) Проверьте, что отношение R на множестве A рефлексивно и транзитивно тогда и только тогда, когда $R = (R \circ R) \cup \mathrm{id}_A$.

12. (3) Пусть $\leq$ есть частичный порядок на *бесконечном* множестве A. Докажите, что в A есть бесконечная цепь или бесконечная антицепь.

13. (2) Выведите аксиому счетного выбора из принципа зависимого выбора.

14. (2) Докажите, что если $A = \cup A$, то множество A пусто или бесконечно.

1. (2) Пусть в. у. м. A, B конечны и $A \sim B$. Тогда $A \cong B$.

2. (2) Вычислите $(\mathbb{N} + m)^k$ для всевозможных $m, k \in \mathbb{N}$.

3. (2) Может ли быть $2A \cong A$, но $3A \ncong A$ для некоторого в. у. м. A?

4. (2) Применяя лемму Цорна *непосредственно*, докажите, что $A \lesssim B$ или $B \lesssim A$ для любых множеств A и B.

5. (3) Пусть в каждом связном графе есть остовное дерево. Выведите отсюда аксиому выбора.

6. (3) Докажите, что для каждой функции $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ существуют *биекции* $g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, т. ч. $f(x) = g(x) + h(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

7. (2) Пусть множество A бесконечно. Какова мощность множества:

a) всех отношений эквивалентности на A;

b) всех инъекций $A \to A$;

c) всех сюръекций $A \to A$;

d) всех биекций $A \to A$;

e) всех вполнеупорядочений A (не обязательно попарно неизоморфных);

f) всех двуэлементных подмножеств A;

g) всех конечных подмножеств A?

8. (2) Докажите, что язык $\mathrm{Fm}(\hat{\mathcal{F}})$ булевых формул (в польской записи) над произвольным множеством связок $\hat{\mathcal{F}}$ является беспрефиксным.

9. (2) Используя, если нужно, теорему о компактности для логики высказываний, докажите, что любой частичный порядок на *счетном* множестве можно продолжить до линейного.

10. (3) Покажите, что если сигнатура σ содержит двувалентный предикатный символ, то найдется множество попарно элементарно неэквивалентных σ-структур, имеющее мощность $\underline{2}^{\mathbb{N}}$.

11. (2) Докажите, что $(\mathbb{N} \setminus \{0\}; \cdot\,; =)$ не вкладывается в $(\mathbb{N}; +; =)$.

12. (2) Докажите, что следующие порядки не изоморфны:

a) $\mathbb{R} + \mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$;

b) $\mathbb{R}\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}\mathbb{R}$.

13. Укажите предложение φ, т. ч. $\mathrm{Sp}(\varphi) = X$, если:

a) (2) X есть множество натуральных чисел, делящихся на 3 с остатком 1;

b) (3) X есть множество всех составных чисел;

c) (3) $X = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

14. Пусть сигнатура σ конечна, σ-структуры $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ нормальные, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ конечна.

a) (3) Покажите, что $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

b) (3) Устраните требование конечности σ.

15. (2) В структуре $(\mathbb{N}; |)$, где $m \,|\, n$ означает, что число m является делителем числа n, выразите предикаты:

a) a_3 есть наибольший, в смысле естественного порядка, общий делитель чисел a_1 и a_2;

b) a_2 является n-ой степенью простого числа a_1 (для каждого $n \in \mathbb{N}$ своя формула);

c) множество чисел, свободных от квадратов (т. е. не кратных никакому квадрату простого).

16. (3) Выразите сложение натуральных чисел в структуре $(\mathbb{N}; S, \cdot\,; =)$, где S означает функцию $n \mapsto n+1$, а $\cdot$ означает умножение.

17. (2) Покажите, что в структуре $(\mathbb{N}; S; =)$ элемент 0 не выражается никакой бескванторной формулой.

18. Покажите, что:

a) (3) в группе $\mathcal{Z}^+$ (целые числа по сложению) множество четных чисел не выражается никакой формулой вида $\forall \vec{x}\, \varphi$, где φ бескванторная;

b) (1) для кольца $\mathcal{Z}$ такая формула существует.

19. Найдите все автоморфизмы следующих структур:

a) (1) порядок $(\mathbb{Z}, <)$;

b) (1) аддитивная группа $\mathcal{Q}^+_<$ рациональных чисел с естественным порядком;

c) (2) $(\mathbb{N}, |)$;

d) (2) группа $\mathbb{Z}_n$ чисел $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ со сложением по модулю $n \geqslant 2$;

e) (2) поле вещественных чисел $\mathcal{R}$.

20. Быть может, с помощью игры Эренфойхта, проверьте следующие структуры на элементарную эквивалентность:

a) (2) $(\mathbb{R}^2; \leq)$ и $(\mathbb{R}^3; \leq)$ (порядок покоординатный, т. е. $(x, y) \leq (x', y') \iff x \leqslant x'$ и $y \leqslant y'$);

b) (2) $(\mathbb{R}_{>10}; A, =)$ и $(\mathbb{R}_{>10}; M, =)$, где $Mxyz \iff xy = z$;;

c) (3) линейные порядки $\mathbb{Z}\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$;

d) (3) $(\mathbb{Q}; A, =)$ и $(\mathbb{Q}^2; A, =)$ (пары складываются покомпонентно).

21. (1) Пусть A, B, C, D реляционные символы подходящей валентности. Приведите следующую формулу к предваренной нормальной форме:

a) $(\neg\forall x \exists y Axy \to Bz) \wedge (\exists y Cy \to \exists z Dxz)$;

b) $(\forall x \exists y Axxyw \wedge \neg\exists y Cy) \to \exists z \forall y Bxyzz$.

22. (1) Пусть A, B, C реляционные символы подходящей валентности. Проверьте, является ли следующая формула общезначимой:

a) $\forall x \exists y \forall z Axyz \to \exists y \forall x \exists z Axyz$;

b) $\forall x(Ax \to (Bx \land Cx)) \to (\exists x Ax \to (\forall x Bx \land \forall x Cx))$;

23. (2) В системе натурального вывода для исчисления предикатов (с равенством) выведите, если это возможно, формулы следующих видов из пустого множества (активных) гипотез:

a) (1) $\neg(A \lor B) \leftrightarrow (\neg A \land \neg B)$;

b) (2) $\forall y \exists x(Ax \lor By) \to \exists x \forall y(Ax \lor By)$;

c) (2) $\exists t \forall u Atut \to \exists x \forall y \exists z Axyz$;

d) (2) $\forall z \exists x(z = f(gx)) \to (\neg\forall y \exists x(y = gx) \to \exists u \exists w(\neg u = w \land fu = fw))$;

24. (2) Докажите, что класс $\mathcal{K}$ конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда оба класса $\mathcal{K}$ и $\bar{\mathcal{K}}$ (все σ-структуры вне $\mathcal{K}$) аксиоматизируемы.

25. (3) Пусть теория T в конечной сигнатуре σ не имеет бесконечных моделей. Всегда ли T конечно аксиоматизируема?

26. (2) Пусть множество $B \subseteq \mathbb{N}^2$ разрешимо. Докажите, что множество A всех таких $z \in \mathbb{N}$, что точка (z, z) лежит в прямоугольнике с вершинами $(0,0), (0,y), (x,0), (x,y)$, где $(x,y) \in B$, также разрешимо.

27. (3) Пусть E перечислимое отношение эквивалентности на множестве $\mathbb{N}$, имеющее лишь конечно много классов эквивалентности. Докажите, что E разрешимо.

28. (2) Пусть множество B конечно. Может ли множество $A \cup B$ быть:

a) разрешимым, если A неразрешимо;

b) перечислимым, если A неперечислимо?

29. (2) Постройте неперечислимые множества A и B, т. ч. разрешимо множество:

a) $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$;

b) $A \cdot B = \{xy \mid x \in A, y \in B\}$.

30. (2) Постройте неперечислимое множество $B \subseteq \mathbb{N}^2$, т. ч. обе его проекции $\mathrm{pr}^1 B$ и $\mathrm{pr}^2 B$ перечислимы.

31. (2) Постройте последовательность множеств $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, т. ч. все A_k перечислимые неразрешимые и $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \mathbb{N}$.

32. (1) Докажите, что для любой г. у. в. ф. U найдутся попарно различные «программы» n, m и l, т. ч. для всех $x \in \mathbb{N}$ верно:

a) $U(n,x) = m$ и $U(m,x) = 2^n$;

b) $U(n,x) \simeq U(x,m)$ и $U(m,x) \simeq U(x,n) + 1$;

c) $U(n,x) = 2^m$, $U(m,x) = 3^{l+1}$ и $U(l,x) = 5^n$.

33. (3) Пусть U г. у. в. ф. Докажите, что множество

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m < n\, U_m \neq U_n\}$$

(«наименьшие программы для функций») бесконечно, но не содержит бесконечного разрешимого подмножества. Заключите отсюда, что бесконечного перечислимого подмножества множество A также не содержит.

34. (1) Пусть U г. у. в. ф. Проверьте разрешимость, перечислимость и коперечислимость (перечислимость дополнения) следующих множеств:

a) $\{n \in \mathbb{N} \mid U_n \text{ инъективна}\}$;

b) $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists x\, U_n(x) = x\}$;

35. (2) Пусть U г. у. в. ф. Проверьте перечислимость и коперечислимость следующих множеств:

a) $\{n \in \mathbb{N} \mid U_n = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}\}$;

b) $\{n \in \mathbb{N} \mid \operatorname{dom} U_n \cap 2\mathbb{N} \text{ бесконечно}\}$;

36. (2) Пусть U г. у. в. ф. Проверьте перечислимость и коперечислимость множества $\{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid \forall x \in \operatorname{dom} U_m \cap \operatorname{dom} U_n\ f(x) < g(x)\}$.

37. (3) Докажите, что существует у. в. ф. W, т. ч. разрешимо множество

$$\{n \in \mathbb{N} \mid W_n = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}\}.$$

38. (1) Опишите работу машин Тьюринга, вычисляющих следующие функции и разрешающих следующие множества (числа можно, по выбору, считать представленным в унарной или в бинарной записи; *разрешать* множество — значит вычислять его характеристическую функцию):

a) $x \mod y$;

b) $\{0^{2017}1^{n+1}0^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

39. (2) Докажите, что множество вычислимых функций не изменится, если считать, что на ленте в начальной конфигурации левее головки стоит особый символ $\rhd$, сдвиг влево от которого запрещается.

40. (1) Приведите, если возможно, следующие термы к нормальной форме:

a) $(\lambda xy.xxy)(\lambda xy.yx)(\lambda x.x)(\lambda xy.xyx)$;

b) $(\lambda xy.xxy)((\lambda xy.yx)(\lambda x.x))(\lambda xy.xyx)$;

41. (1) Докажите, что существует комбинатор M, т. ч. для любых комбинаторов X, Y, Z имеет место:

a) $MX = XXM$;

b) $MXY = \lambda w.Y(XM)w$;

42. Постройте комбинаторы, представляющие следующие функции:

a) (2) число простых чисел, не превосходящих x;

b) (2) $\lfloor x\sqrt{2} \rfloor$;

43. (2) Существует ли терм G, т. ч. для всех комбинаторов M и N верно $G(MN) = N$?

44. (2) Постройте комбинатор **Map**, т. ч. для любого $n \in \mathbb{N}_+$ и любых комбинаторов $F, M_1, \ldots, M_n$ верно

$$\mathbf{Map}\, F\, [\ ] = [\ ] \quad \text{и}$$

$$\mathbf{Map}\, F\, [M_1, \ldots, M_n] = [FM_1, \ldots, FM_n].$$

45. (2) Постройте комбинатор, равномерно нумерующий последовательность $(\underline{\varphi_n})_{n\in\mathbb{N}}$, где φ_n есть n-ое число Фибоначчи.