

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор института нано-, био-,
информационных, когнитивных
и социогуманитарных наук и
технологий**

П.А. Форш

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Математические методы современной физики
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Синхротронные и нейтронные методы исследований Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова Кафедра математики и математических методов физики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 45 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: А.М. Башаров, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент

Программа обсуждена на заседании Кафедры математики и математических методов физики 18.03.2020

Аннотация

Целью дисциплины является ознакомление студентов с основными идеями и понятиями, необходимыми для построения стохастических моделей разнообразных процессов, вычислительных алгоритмов и открытых систем, как классических так и квантовых.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- Дать инструментарий для общего описания различных процессов в терминах стохастических дифференциальных уравнений. Познакомить с базовыми случайными процессами – винеровским, пуассоновским и процессами Леви. Познакомить с субординированными случайными процессами как моделями немарковских процессов. Познакомить с новыми математическими понятиями, возникающими при описании базовых случайных процессов, такими как дробные производные и интегралы, их свойствами, фрактальными объектами. Познакомить с квантовыми случайными процессами и рождающим, уничтожающим и считающим компонентами.

Задачи дисциплины

- Научить студентов составлять и решать стохастические дифференциальные уравнения (СДУ), понимать базовые понятия и представления, лежащие в их основе, научить получать из СДУ кинетические уравнения, в том числе детерминированные дифференциальные уравнения для основных характеристик открытых систем, научить моделировать решения детерминированных уравнений случайными уравнениями, строить случайные модели разнообразных явлений и систем.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- основные понятия и представления центральных предельных теорем, свойства характеристической функции, характеристическую функцию для гауссовского распределения, теорему о непрерывности; центральную предельную теорему для одинаково распределенных случайных величин, связь с ренорм-групповым подходом, ренорм-групповое преобразование, неподвижную точку, анализ устойчивости, центральную предельную теорему для одинаково распределенных случайных величин в случае бесконечной дисперсии;
- уравнение Чемпена-Колмогорова-Смолуховского, обобщенное уравнение Фоккера-Планка, математическое определение непрерывного марковского процесса, частные случаи обобщенного уравнения Фоккера-Планка - управляющее уравнение, диффузионные процессы, уравнение Фоккера-Планка; детерминированные процессы и уравнение Лиувилля как частный случай обобщенного уравнения Фоккера-Планка; обобщенное уравнение Фоккера-Планка как кинетическое уравнение при классическом и квантовом описании;
- стационарные марковские процессы - эргодические свойства стационарного процесса, измерения среднего значения, автокорреляционной функции, спектра, теореме Винера-Хинчина, измерение функции распределения; однородные марковские процессы и их физическую интерпретацию, автокорреляционную функцию марковских процессов;
- основные представления о винеровском процессе - нерегулярность и недифференцируемость траекторий, независимость приращений, автокорреляционные функции;
- основные представления о процесс Орнштейна – Уленбека - корреляционные функции, гауссовость, стационарное решение, использование в качестве модели реального шумового сигнала;
- основные представления винеровских стохастических дифференциальных уравнений - обоснование уравнений типа Ланжевена, белый шум, аппроксимации белого шума, роль центральной предельной теоремы, свойство марковости интеграла от белого шума; определение стохастического интеграла, свойства стохастического интеграла Ито;
- решения и преобразования винеровских стохастических дифференциальных уравнений - приближенное решение методом Коши – Эйлера, замена переменных (формула Ито), другой подход к формуле Ито, правило дифференцирования Ито, связь между уравнением Фоккера - Планка и стохастическим дифференциальным уравнением; решение СДУ для осциллятора с шумящей частотой;
- определения и свойства стохастических дифференциалов и интегралов в смысле Ито и Стратановича, дифференциальных уравнений Ито и Стратановича;
- СДУ, управляемые независимыми случайными винеровскими процессами, СДУ в случае комплексного винеровского процесса, комплексный винеровский процесс общего вида;
- составные пуассоновские процессы, компенсированный пуассоновский процесс;
- СДУ невинеровского типа, решения простейших СДУ невинеровского типа (уравнение для заряда на аноде, уравнение для тока на аноде, линейное уравнение, осциллятор с шумящей частотой невинеровского типа, осциллятор с шумящей частотой общего типа);
- точечные процессы на произвольных множествах;
- альфа-устойчивые процессы - свойство самоподобия (масштабной инвариантности), теорема Леви-Хинчина, свойства функции плотности распределения, распределения Коши и Леви-Смирнова;
- простейшие стохастические уравнения с участием устойчивых процессов, процесс Коши;
- линейное стохастическое уравнение для процессов Леви;
- связь СДУ, управляемых составным пуассоновским процессом, с уравнениями типа Фоккера-Планка с дробными производными, дробные интегралы Римана-Лиувилля, дробные производные на прямой, дробные производные Капуто и Маршо, преобразования Лапласа уравнений с дробными производными, формулы интегрирования по частям;
- отличия квантовой вероятности от классической;
- считывающий, рождающий и уничтожающий компоненты квантового случайного процесса;
- алгебру Хадсона-Партасарати;
- кинетическое уравнение для матрицы плотности в форме Линдблада.

уметь:

- вычислять простейшие стохастические интегралы в смысле Ито и Стратановича;
- составлять стохастические дифференциальные уравнения для осциллятора с шумящей частотой, для механических систем со случайными силами, телеграфного процесса, электрического тока в цепях, уравнения фильтрации;
- получать СДУ Ито из СДУ Стратановича;
- составлять СДУ, управляемое независимыми винеровскими процессами, составными пуассоновскими процессами;
- получать управляющие уравнения типа Фоккера-Планка из СДУ винеровского, пуассоновского типов, а также СДУ для процессов Леви;
- получать из СДУ уравнения для корреляционных функций, моментов и т.п.;
- решать СДУ, управляемые винеровским и пуассоновским процессами;
- получать кинетические уравнения для матрицы плотности в форме Линдблада из квантовых СДУ винеровского и невинеровского типов.

владеть:

- основными методами теории стохастических процессов – метод стохастических дифференциальных уравнений, метод кинетического уравнения, аппаратом характеристической функции, центральными предельными теоремами, алгебраической теорией возмущений.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Введение в квантовые СДУ.	5	3		10
2	Случайные процессы Леви и субординированные процессы.	10	3		10
3	Стохастические дифференциальные уравнения и кинетические уравнения для открытых систем.	5	3		10
4	Теория СДУ винеровского и пуассоновского типов.	5	3		10
5	Традиционная теория случайных процессов.	5	3		5
Итого часов		30	15		45
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. Введение в квантовые СДУ.

Особенности составления СДУ в резонансных системах. Алгебраическая теория возмущений для получения эффективного гамильтониана системы в условиях резонансов. Квантовая вероятность. Квантовые считывающий, рождающий и уничтожающий процессы. Квантовый интеграл Ито. Алгебра Хадсона-Партасарати. Квантовое СДУ невинеровского типа для оператора эволюции системы. Унитарность оператора эволюции и квантовая формула Ито. Кинетическое уравнение для матрицы плотности в форме Линдблада.

2. Случайные процессы Леви и субординированные процессы.

Альфа-устойчивые процессы. Характеристики процессов Леви. Основы теории субординированных случайных процессов и СДУ обобщенного невинеровского типа. Другой вывод уравнения Фоккера-Планка для уравнения Ланжевена в случае процесса Леви. Модель непрерывного во времени броуновского движения. Вероятностные характеристики направляющего процесса. Дробные производные в управляющем уравнении для случая подчиненного случайного процесса.

3. Стохастические дифференциальные уравнения и кинетические уравнения для открытых систем.

Парадигма СДУ. Открытые системы и релаксационные процессы. Особенности СДУ и стохастических интегралов. Алгебра инкрементов. Регулярные разрывные функции и стохастическая непрерывность. СДУ и кинетические (управляющие) уравнения. Элементарные операции с СДУ. Решения СДУ. Масштабы времен изменения переменных в СДУ. Роль центральных предельных теорем. Переход от микро к макроскопике. Масштабное преобразование. Уравнения Ланжевена. Основные случайные процессы. Пуассоновский процесс. Сумма независимых пуассоновских процессов. Полиномиальное распределение. Процессы Леви и СДУ общего вида. Составной пуассоновский процесс и процессы Леви. Кинетическое уравнение для СДУ, управляемым процессом Леви. Процессы Леви из винеровского процесса. Связь центральных предельных теорем с ренормгрупповым подходом.

4. Теория СДУ винеровского и пуассоновского типов.

Свойства стохастического интеграла Ито. Определения и свойства стохастических дифференциалов и интегралов в смысле Ито и Стратановича, дифференциальных уравнений Ито и Стратановича. Замена переменных (формула Ито), правило дифференцирования Ито. Связь между интегралами и СДУ Ито и Стратановича. Решения СДУ в случаях, когда коэффициенты стохастического дифференциального уравнения не зависят от времени, мультипликативного шума; процесса Орнштейна-Уленбека. Уравнения для среднего и моментов. Решение СДУ для осциллятора с шумящей частотой. Комплексный винеровский процесс общего вида и СДУ, им управляемые. СДУ невинеровского типа, решения простейших СДУ невинеровского типа (уравнение для заряда на аноде, уравнение для тока на аноде, линейное уравнение, осциллятор с шумящей частотой невинеровского типа). СДУ и кинетическое уравнение для телеграфного процесса. Осциллятор с шумом винеровского и пуассоновского типов. СДУ, управляемые независимыми случайными винеровскими процессами, СДУ в случае комплексного винеровского процесса, комплексный винеровский процесс общего вида. Примеры использования СДУ в описании физических процессов и решении детерминированных дифференциальных уравнений в частных производных. Спонтанное излучение атома, коллапс волновой функции, кинетическое уравнение и его решение методом Монте-Карло. Элементарная теория фильтрации.

5. Традиционная теория случайных процессов.

Основные необходимые представления теории вероятностей. Сепарабельные процессы и теорема Колмогорова. Условие марковости. Уравнение Чемпена-Колмогорова-Смолуховского и его частные случаи. Подходы Эйнштейна, Ланжевена и Башелье. Стационарные марковские процессы, их эргодические свойства, измерения среднего значения, автокорреляционной функции, спектра, теорема Винера-Хинчина, измерение функции распределения. Однородные марковские процессы и их физическая интерпретация, автокорреляционная функция марковских процессов.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику для физиков [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. М. Чеботарев ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т. — М. : Изд-во МФТИ, 2009. — 248 с.
Фонд литературы кафедры
2. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М., Мир, 1986..
3. Кингман Дж. Пуассоновские процессы. М., МЦНМО, 2007.
4. Chebotarev A.M. Lectures on quantum probability. Sociedad Matematica Mexicana, 2000.
5. Gardiner C.W., Zoller P. Quantum noise, Springer-Verlag, Berlin (2000, 2004).

Дополнительная литература

1. Теория вероятностей [Текст] / А. А. Боровков. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 472 с.
Фонд литературы кафедры
2. Jacobs K. Stochastic Processes for Physicists. Cambridge, CUP, 2010
3. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. ГИТТЛ, 1949.
4. Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. М., Наука, 1983.
5. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. М., АСТ, 2003.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. http://vk.com/stochastic_processes - группа с учебно-научными материалами преподавателя курса Башарова А.М. «В Контакте».
2. <http://basharov.me/> - сайт преподавателя курса Башарова А.М. с авторскими учебно-научными материалами.
3. <http://sci-edu.ru/> - проект преподавателя курса Башарова А.М. с интересными и полезными научными и учебными видео-материалами.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Видео-материалы, гипертекстовые материалы и презентации по темам курса.

В процессе самостоятельной работы обучающиеся могут использовать программные средства MATLAB, Maple, WolframMathematica.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Для успешного освоения курса, помимо посещения лекций, от студентов требуется самостоятельная работа. Эта работа организована на интернет ресурсах автора данного курса. Самостоятельные занятия включают в себя повторение материала лекций и вспомогательного материала из предыдущего курса «Теория вероятности и математическая статистика», просмотр рекомендованных видео-материалов. Основное время отводится на самостоятельное решение задач, сформулированных на лекциях или выложенных на указанных интернет-ресурсах. Именно эти задачи и будут предлагаться на дифференцированном зачете.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Синхротронные и нейтронные методы исследований Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова кафедра математики и математических методов физики
курс:	1
квалификация:	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет	
Разработчик:	А.М. Башаров, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математические методы современной физики» обучающийся должен:

знать:

- основные понятия и представления центральных предельных теорем, свойства характеристической функции, характеристическую функцию для гауссовского распределения, теорему о непрерывности; центральную предельную теорему для одинаково распределенных случайных величин, связь с ренорм-групповым подходом, ренорм-групповое преобразование, неподвижную точку, анализ устойчивости, центральную предельную теорему для одинаково распределенных случайных величин в случае бесконечной дисперсии;
- уравнение Чемпена-Колмогорова-Смолуховского, обобщенное уравнение Фоккера-Планка, математическое определение непрерывного марковского процесса, частные случаи обобщенного уравнения Фоккера-Планка - управляющее уравнение, диффузионные процессы, уравнение Фоккера-Планка; детерминированные процессы и уравнение Лиувилля как частный случай обобщенного уравнения Фоккера-Планка; обобщенное уравнение Фоккера-Планка как кинетическое уравнение при классическом и квантовом описании;
- стационарные марковские процессы - эргодические свойства стационарного процесса, измерения среднего значения, автокорреляционной функции, спектра, теореме Винера-Хинчина, измерение функции распределения; однородные марковские процессы и их физическую интерпретацию, автокорреляционную функцию марковских процессов;
- основные представления о винеровском процессе - нерегулярность и недифференцируемость траекторий, независимость приращений, автокорреляционные функции;
- основные представления о процесс Орнштейна – Уленбека - корреляционные функции, гауссовость, стационарное решение, использование в качестве модели реального шумового сигнала;
- основные представления винеровских стохастических дифференциальных уравнений - обоснование уравнений типа Ланжевена, белый шум, аппроксимации белого шума, роль центральной предельной теоремы, свойство марковости интеграла от белого шума; определение стохастического интеграла, свойства стохастического интеграла Ито;
- решения и преобразования винеровских стохастических дифференциальных уравнений - приближенное решение методом Коши – Эйлера, замена переменных (формула Ито), другой подход к формуле Ито, правило дифференцирования Ито, связь между уравнением Фоккера - Планка и стохастическим дифференциальным уравнением; решение СДУ для осциллятора с шумящей частотой;
- определения и свойства стохастических дифференциалов и интегралов в смысле Ито и Стратановича, дифференциальных уравнений Ито и Стратановича;
- СДУ, управляемые независимыми случайными винеровскими процессами, СДУ в случае комплексного винеровского процесса, комплексный винеровский процесс общего вида;
- составные пуассоновские процессы, компенсированный пуассоновский процесс;
- СДУ невинеровского типа, решения простейших СДУ невинеровского типа (уравнение для заряда на аноде, уравнение для тока на аноде, линейное уравнение, осциллятор с шумящей частотой невинеровского типа, осциллятор с шумящей частотой общего типа);
- точечные процессы на произвольных множествах;
- альфа-устойчивые процессы - свойство самоподобия (масштабной инвариантности), теорема Леви-Хинчина, свойства функции плотности распределения, распределения Коши и Леви-Смирнова;
- простейшие стохастические уравнения с участием устойчивых процессов, процесс Коши;
- линейное стохастическое уравнение для процессов Леви;
- связь СДУ, управляемых составным пуассоновским процессом, с уравнениями типа Фоккера-Планка с дробными производными, дробные интегралы Римана-Лиувилля, дробные производные на прямой, дробные производные Капуто и Маршо, преобразования Лапласа уравнений с дробными производными, формулы интегрирования по частям;
- отличия квантовой вероятности от классической;
- считывающий, рождающий и уничтожающий компоненты квантового случайного процесса;
- алгебру Хадсона-Партасарати;
- кинетическое уравнение для матрицы плотности в форме Линдблада.

уметь:

- вычислять простейшие стохастические интегралы в смысле Ито и Стратановича;
- составлять стохастические дифференциальные уравнения для осциллятора с шумящей частотой, для механических систем со случайными силами, телеграфного процесса, электрического тока в цепях, уравнения фильтрации;
- получать СДУ Ито из СДУ Стратановича;
- составлять СДУ, управляемое независимыми винеровскими процессами, составными пуассоновскими процессами;
- получать управляющие уравнения типа Фоккера-Планка из СДУ винеровского, пуассоновского типов, а также СДУ для процессов Леви;
- получать из СДУ уравнения для корреляционных функций, моментов и т.п.;
- решать СДУ, управляемые винеровским и пуассоновским процессами;
- получать кинетические уравнения для матрицы плотности в форме Линдблада из квантовых СДУ винеровского и невинеровского типов.

владеть:

- основными методами теории стохастических процессов – метод стохастических дифференциальных уравнений, метод кинетического уравнения, аппаратом характеристической функции, центральными предельными теоремами, алгебраической теорией возмущений.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

В целях текущего контроля успеваемости предусмотрен краткий опрос по темам предыдущих занятий по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Промежуточная аттестация по дисциплине «Математические методы современной физики» осуществляется в форме дифференцированного зачета во 2 семестре. Зачет проводится в устной форме.

Примерный перечень контрольных вопросов в билетах:

1. Дифференциал и интеграл Ито в случае случайного скачкообразного процесса. Алгебра Ито.
2. Сходства и отличия интегральных сумм интегралов Ито от Риманова интеграла для функций с конечным числом разрывов.
3. Пуассоновский процесс. Управляющее уравнение, функция распределения. Разные способы вывода.
4. Многомерный Пуассоновский процесс.
5. Процесс Бернулли.
6. Связь процесса Бернулли с винеровским и пуассоновским процессами.
7. Подходы Эйнштейна, Смолуховского и Башелье к описанию броуновского движения.
8. Винеровский процесс. Основные свойства и характеристики. Дифференциал и алгебра Ито. Управляющее уравнение (уравнение Фоккера-Планка) и его решения.
9. Многомерный винеровский процесс.
10. Масштабное преобразование СДУ в случае пуассоновского процесса. Компенсированный пуассоновский процесс.
11. Сепарабельные процессы. Теорема Колмогорова.
12. Статистическая независимость. Условия Маркова.
13. Уравнение Ченпена-Колмогорова-Смолуховского. Вывод обобщенного уравнения Фоккера-Планка (управляющего уравнения), его частные случаи.
14. Детерминированные процессы и уравнение Лиувилля как частный случай обобщенного уравнения Фоккера-Планка.
15. Связь между СДУ и кинетическим (управляющим) уравнением в случае винеровского и пуассоновского процессов.
16. Понятие и описание белого шума.
17. Типы сходимости случайных последовательностей и взаимосвязи между ними.
18. Ренорм-групповое преобразование, неподвижная точка, анализ устойчивости. Связь с центральной предельной теоремой для одинаково распределенных случайных величин.
19. Центральная предельная теорема для одинаково распределенных случайных величин в случае бесконечной дисперсии.
20. Стационарные марковские процессы – определения и основные свойства.
21. Теорема Винера-Хинчина.
22. Измерения среднего значения, автокорреляционной функции, спектра, функции распределения.
23. Однородные марковские процессы и их физическая интерпретация.
24. Процесс Орнштейна – Уленбека - корреляционные функции, гауссовость.
25. Определения и свойства стохастических дифференциалов и интегралов в смысле Ито и Стратановича, дифференциальных уравнений Ито и Стратановича;
26. Свойства стохастического интеграла Ито (существование, интегрирование многочленов, правила дифференцирования, средние значения, формула для корреляции).
27. Замена переменных (формула Ито). Использование замены переменной при поиске решаемых СДУ (примеры).
28. Решение уравнения Ито в случае, когда коэффициенты стохастического дифференциального уравнения не зависят от времени

29. СДУ в случае мультипликативного шума.
30. СДУ в случай процесса Орнштейна-Уленбека.
31. Формулировка СДУ для осциллятора с шумящей частотой через уравнение Стратановича и интегральное решение, обоснование интегрального представления уравнения. Решения этих уравнений.
32. СДУ, управляемые независимыми случайными винеровскими процессами, СДУ в случае комплексного винеровского процесса, комплексный винеровский процесс общего вида.
33. Элементарная теория фильтрации.
34. Составные пуассоновские процессы.
35. СДУ невинеровского типа, решения простейших СДУ невинеровского типа (уравнение для заряда на аноде, уравнение для тока на аноде, линейное уравнение, осциллятор с шумящей частотой невинеровского типа, осциллятор с шумящей частотой общего типа).
36. Классическое СДУ и кинетическое уравнение для матрицы плотности спонтанно излучающего двухуровневого атома в представлении коллапса волновой функции.
37. Альфа-устойчивые процессы - свойство самоподобия (масштабной инвариантности), теорема Леви-Хинчина, свойства функции плотности распределения,
38. Распределения Коши и Леви-Смирнова. Получение процесса, описываемого распределением Леви-Смирнова из броуновского движения.
39. Простейшие стохастические уравнения с участием альфа-устойчивых процессов, процесс Коши, случай типа процесса Орнштейна-Уленбека.
40. Решение линейного стохастического дифференциального уравнения для процессов Леви.
41. Связь СДУ, управляемых составным пуассоновским процессом, с уравнениями типа Фоккера-Планка с дробными производными.
42. Дробные интегралы Римана-Лиувилля, дробные производные на прямой, дробные производные Капуто и Маршо, преобразования Лапласа уравнений с дробными производными, формулы интегрирования по частям.
43. Отличия квантовой вероятности от классической.
44. Алгебраическая теория возмущений и эффективный гамильтониан кубита в электромагнитном поле.
45. Квантовые интегралы Ито и Стратановича.
46. Квантовая формула Ито для оператора эволюции двухуровневого атома при учете вакуумного электромагнитного поля.
47. Алгебра Хадсона-Партасарати.
48. Квантовое СДУ и кинетическое уравнение для двухуровневого атома при учете вакуумного электромагнитного поля и штарковского взаимодействия с ним.

Примерный перечень задач для самостоятельного решения, которые будут предлагаться на дифференцированном зачете.

1. Определить вероятность того, что счетчик Гейгера сосчитает все частицы за время t , если в течение отклика, вызванным попаданием частицы, счетчик Гейгера на другие частицы не реагирует. Время отклика τ .
2. N молекул идеального газа находятся в объеме V . Определить вероятность того, что в объеме $v < V$ находятся n молекул. Получить приближенное выражение, когда $v \ll V$ (распределение Пуассона). Найти среднее число частиц n в объеме v , его среднюю абсолютную и относительную флуктуации. Найти вид распределения в случае $v \ll V$, $n \gg 1$ (распределение Гаусса).

3. Покажите, что функция распределения $\Phi(w)$ для винеровского процесса обладает свойством устойчивости: Для положительных чисел b_1 и b_2 всегда найдутся такие положительное число b и вещественное число a , что

$$\Phi(w/b_1) * \Phi(w/b_2) = \Phi((w-a)/b).$$

Здесь знак $*$ обозначает свертку двух функций $F(x) * G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)G(x-u)du$.

4. Считая, что смещения броуновской частицы и степени этих смещений в последовательные интервалы времени независимыми, определить зависимость от времени средних от степеней этих смещений для одномерного броуновского движения.

5. Для одномерного броуновского движения частицы, начинающегося из начала координат, определить

1. вероятность достижения ею точки x к моменту времени в интервале $(t, t+dt)$.
2. вероятность максимального смещения частицы за данный временной интервал $(0, t)$.
3. распределение по времени достижения броуновской частицей максимального за время t ее отклонения $X_m(t)$.
6. Рассмотрите скачкообразный процесс, в котором интенсивность λ совершить скачок в интервале времени $[t, t+dt]$ является заданной функцией времени $\lambda = f(t)$. Найдите вероятность $P(n, t)$ к моменту времени t совершить n скачков.
7. Доказать, что имеется следующая связь между сходимостями
сходимость почти наверное \Rightarrow сходимость в среднеквадратичном \Rightarrow сходимость по вероятности \Rightarrow сходимость по распределению.
8. Найти характеристические функции для распределений

1. пуассоновского процесса $P\{N = n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, n = 0, 1, \dots;$

2. биномиального процесса $P\{\xi = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, m = 0, 1, \dots, n;$

3. показательного $p(x) = \alpha e^{-\alpha x}, x > 0;$

4. процесса Коши $p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(x-x_0)^2 + \gamma^2}, -\infty < x < \infty.$

9. Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти распределение случайной величины $\chi_n^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{\chi_n^2}{n} - 1\right| > \varepsilon\right\} = 0 \text{ для } \forall \varepsilon > 0. \text{ Найти } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\chi_n^2 - E\{\chi_n^2\}}{\sqrt{D\{\chi_n^2\}}} \leq x\right\}, -\infty < x < \infty.$$

10. Пусть условную вероятность $p(x, t + \Delta t | y, t)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ можно представить в виде двух слагаемых $p(x, t + \Delta t | y, t) = (1 - a\Delta t)\delta(x - y) + \Delta t W(x | y)$, характеризующих вероятность частице остаться через Δt в точке y и вероятность перейти за Δt в точку x . Вывести из уравнения Чепмена-Колмогорова-Смолуховского кинетическое уравнение

$$\frac{\partial p(x, t | y, \tau)}{\partial t} = \int [p(x, t | z, \tau)W(z | y) - p(x, t | y, \tau)W(y | z)]dz.$$

11. Из уравнения Фоккера-Планка

$$\frac{\partial p(z, t | y, \tau)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(z, t | y, \tau)}{\partial z^2}, p(z, \tau | y, \tau) = \delta(z - y), p(z, t | y, \tau) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty$$

для одномерного винеровского процесса получить уравнение для среднего квадрата смещения $\langle (z - y)^2 \rangle$ и решить его.

12. Доказать, что в случае отсутствия диффузионного слагаемого решение уравнения Фоккера-Планка

$$\frac{\partial p(z, t | y, \tau)}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial [A_i(z) p(z, t | y, \tau)]}{\partial z_i}, \quad p(z, \tau | y, \tau) = \delta(z - y),$$

будет иметь вид

$$p(z, t | y, \tau) = \delta(z - x(y, t)),$$

где $x(y, t)$ - решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx(y, t)}{dt} = A_i[x(y, t), t]$$

с начальным условием

$$x(y, \tau) = y.$$

13. Пусть дан одномерный стационарный случайный процесс $X_t, t \geq 0$ со спектральной плотностью $e^{-|\omega|}$. Найдите спектральную плотность процесса $\int_t^{t+\tau} X_s ds$.

14. Пусть $W(t)$ является стандартным одномерным винеровским процессом. Доказать, что следующие процессы винеровские

$$14.1. W^{(1)}(t) = \begin{cases} 0, & t = 0; \\ tW(1/t), & t > 0; \end{cases}$$

$$14.2. W^{(2)}(t) = \sqrt{c}W(t/c), \quad t \geq 0, \quad c > 0;$$

$$14.3. W^{(3)}(t) = W(f(t)), \quad f(t) \text{ является гладкой монотонно возрастающей функцией}$$

Определите параметры процессов $W^{(i)}(t), i = 1, 2, 3$.

15. Пусть $\tau(z), z > 0$ - случайный момент времени, в который винеровский процесс $W(t)$ впервые достигает значения z . Найти плотность распределения $\tau(z)$. Найти ее характеристическую функцию. Показать, что математическое ожидание $\tau(z)$ бесконечно.

16. Пусть $W(s)$ -винеровский процесс, $X_t = e^{-t}W(e^{2t})$. Показать, что X_t - стационарный марковский процесс. Найти его ковариационную функцию и спектральную плотность.

17. Определить параметры случайных процессов

17.1. $\int_{t_0}^t f(t')W(t')dt'$, 17.2. $\int_{t_0}^t f(W(t'))dt'$, где $W(t)$ - стандартный винеровский процесс, а $f(t)$ - заданная гладкая функция.

18. Вычислить интегралы (получить рекуррентные формулы) и определить параметры случайных процессов

$$18.1. \int_{t_0}^t \exp[W(t')]dW(t'), \quad 18.2. \int_{t_0}^t \sin[W(t')]dW(t'), \quad 18.3. \int_{t_0}^t \cos[W(t')]dW(t').$$

19. Доказать, что для любых неупреждающей функции $G(t)$ и целого $n \geq 0$ выполняются соотношения $\int_{t_0}^t G(t')[dW(t')]^{2+n} = \int_{t_0}^t G(t')dW(t')dt' = 0$.

20. Рассмотрите замену временной переменной $t = t(s)$ для монотонной гладкой функции $t = t(s)$ в простейшем СДУ $dx(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)$. Напишите СДУ для временного параметра s и стандартного винеровского процесса $\tilde{W}(s)$, построенного из процесса $W(t(s))$.

21. Вычислить интегралы (получить рекуррентные формулы) и определить параметры случайных процессов

$$21.1. \quad \bar{T} \exp \left(\int_{t_0}^t W(t') dt' \right), \quad 21.2. \quad \bar{T} \exp \left(\int_{t_0}^t W(t') dW(t') \right), \quad \text{где } W(t) - \text{ стандартный винеровский процесс.}$$

22. Решить стохастические дифференциальные уравнения

$$22.1. \quad dx(t) = a(t)dt + b_1(t)dW_1(t) + b_2(t)dW_2(t),$$

$$22.2. \quad dx(t) = kx(t)dt + b_1dW_1(t) + b_2dW_2(t),$$

$$22.3. \quad dx(t) = cx(t)dW_1(t) + b_2dW_2(t).$$

Здесь $dW_1(t)$ и $dW_2(t)$ - инкременты двух независимых стандартных винеровских процессов, $a(t)$, $b_1(t)$ и $b_2(t)$ - заданные вещественные функции времени, c и k - вещественные постоянные. Исходя из полученных решений вычислить величины $\langle x(t) \rangle$ и $\langle x(t)x(t') \rangle$ для неслучайного начального значения $x(0)$.

23. Решить стохастические дифференциальные уравнения

$$23.1. \quad dx(t) = a(t)dt + b_1(t)dW(t) + b_2(t)dN(t),$$

$$23.2. \quad dx(t) = kx(t)dt + b_1dW(t) + b_2dN(t),$$

$$23.3. \quad dx(t) = x(t)(b_1dW(t) + b_2dN(t)).$$

Здесь $dW(t)$ и $dN(t)$ - инкременты двух стандартных винеровского и пуассоновского процессов, $a(t)$, $b_1(t)$ и $b_2(t)$ - заданные вещественные функции времени, c , $b_{1,2}$ и k - вещественные постоянные. Исходя из полученных решений вычислить величины $\langle x(t) \rangle$ и $\langle x(t)x(t') \rangle$ для неслучайного начального значения $x(0)$.

24. Получить СДУ, а из него - кинетическое (управляющее) уравнение, для кубита (двухуровневой квантовой частицы) в шумовом классическом электромагнитном поле. Кубит в классическом поле описывается следующими уравнениями для медленных амплитудматрицы плотности ρ

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{21}}{dt} &= id_{10}E^{(-)}\hbar^{-1}(-\rho_{22} + \rho_{11}), \quad \frac{d\rho_{12}}{dt} = -id_{21}^*E^{(+)}\hbar^{-1}(\rho_{11} - \rho_{22}), \\ \frac{d\rho_{22}}{dt} &= i(-d_{10}^*E^{(+)}\rho_{21} + \rho_{12}d_{10}E^{(-)})\hbar^{-1}, \quad \frac{d\rho_{11}}{dt} = i(-\rho_{12}d_{21}E^{(-)} + d_{21}^*E^{(+)}\rho_{21})\hbar^{-1}. \end{aligned}$$

Рассмотреть моделирование амплитуд $E^{(\pm)}$ классического поля напряженности $E = E^{(+)}e^{-i\omega t} + E^{(-)}e^{i\omega t}$ комплексным винеровским процессом общего вида.

25. Вывести СДУ для телеграфного процесса и из него получить кинетическое уравнение. Найти решение уравнений.

26. Вывести СДУ и кинетическое уравнения для спонтанного излучения атома на основе представлений о коллапсе волновой функции и классическом пуассоновском процессе.

27. Вычислить интегралы (получить рекуррентные формулы) и определить параметры случайных процессов

$$\begin{aligned} 27.1. \quad & \int_{t_0}^t B(t')dB(t'), \quad 27.2. \quad \int_{t_0}^t B^+(t')dB(t'), \quad 27.3. \quad \int_{t_0}^t \Lambda(t')d\Lambda(t'), \quad 27.4. \quad \int_{t_0}^t B(t')d\Lambda(t'), \\ 27.5. \quad & \int_{t_0}^t B^+(t')d\Lambda(t'), \quad 27.6. \quad \int_{t_0}^t \exp[aB(t') + b\Lambda(t')]dB(t'), \quad 27.7. \quad \int_{t_0}^t \exp[aB(t') + b\Lambda(t')]d\Lambda(t'), \\ 27.8. \quad & \int_{t_0}^t \exp[aB^+(t') + b\Lambda(t')]dB(t'), \quad 27.9. \quad \int_{t_0}^t \exp[aB(t') + b\Lambda(t')]d\Lambda(t'). \end{aligned}$$

28. Получить эффективный гамильтониан резонансного взаимодействия атома с классическим электромагнитным полем в электродипольном приближении. Получить оператор штарковского взаимодействия атома с классическим нерезонансным электромагнитным полем.

29. При помощи алгебраической теории возмущений вывести эффективный гамильтониан резонансного взаимодействия атома с квантовым электромагнитным полем в электродипольном приближении. Получить оператор штарковского взаимодействия атома с квантованным полем и выражения для лэмбовского сдвига атомных уровней.

30. Вывести квантовое СДУ для оператора эволюции двухуровневой квантовой частицы с учетом штарковского взаимодействия с квантованным электромагнитным вакуумным полем.

31. Вывести кинетическое уравнение для двухуровневого атома с учетом электродипольного взаимодействия с квантованным электромагнитным вакуумным полем и его представлением квантовым рождающим и уничтожающим процессами.

4. Критерии оценивания

Оценка	баллы	Критерий
Отлично	10	Всесторонние, систематизированные, глубокие знания программы, умение решать конкретные задачи, правильное обоснование принятых решений
	9	
	8	
Хорошо	7	Твердое знание материала, умение применять полученные знания при решении конкретных задач, допускает некоторые неточности.
	6	
	5	
Удовлетворительно	4	Владение основными разделами программы, необходимыми для дальнейшего обучения, но знания носят несистематический, разрозненный характер. Не умеет решать задачи из контрольного задания.
	3	
Неудовлетворительно	2	Отсутствуют знания базовой составляющей дисциплины, допускаются грубые ошибки в изложении материала, отсутствует умение решать типовые, стандартные задачи.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности.

При проведении дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется не менее 30 минут на подготовку. Опрос по билету и ответы на дополнительные вопросы не должен превышать двух астрономических часов. По завершении отведенного на опрос времени, экзаменатор должен выставить обучающемуся оценку в соответствии с вышеприведенными критериями.