

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор института нано-, био-,  
информационных, когнитивных  
и социогуманитарных наук и  
технологий**

**П.А. Форш**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

<b>по дисциплине:</b>	Моделирование физических систем алгебро-геометрическими методами
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Синхротронные и нейтронные методы исследований Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова Кафедра математики и математических методов физики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 45 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 60 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: М.В. Карасев, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

Программа обсуждена на заседании Кафедры математики и математических методов физики 18.03.2020

## Аннотация

Данная дисциплина направлена на подготовку высококвалифицированных специалистов по прикладной математике, которые обладают глубоким знанием совокупности математических методов (в том числе, новейших), используемых при исследовании систем естествознания, перспективных и важных для высоких технологий, а также владеют методами алгебраической и вероятностной информатики, компьютерного моделирования, алгоритмами высокопроизводительных вычислений и представления научной информации с использованием современного программного обеспечения, суперкомпьютеров, сетевых, мультимедийных средств.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- познакомить студентов с современными алгебро-геометрическими методами решения задач теории возмущений, возникающих в базовых моделях математической физики.

#### Задачи дисциплины

- обучить студентов алгебраическому (операторному) методу решения задач математической физики.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- современную алгебраическую (операторную) технику теории возмущений и теории адиабатического приближения.

уметь:

- эффективно решать возмущенные динамические системы (линейные и нелинейные) на больших временах, а также системы адиабатического типа.

владеть:

- базовыми понятиями современной математической физики.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Алгебраическое усреднение в линейных системах.	10	5		20
2	Алгебраическое усреднение в нелинейных системах.	10	5		20
3	Операторная схема адиабатического приближения.	10	5		20
Итого часов		30	15		60
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

###### 1. Алгебраическое усреднение в линейных системах.

Асимптотика решения линейных возмущенных систем на конечных временах и проблема, возникающая на больших временах. Коммутирующие и некоммутирующие матрицы.

Преобразование суммы двух матриц к сумме двух коммутирующих матриц: как это сделать точно и асимптотически по малому возмущающему параметру. Приведение общих семейств матриц к коммутативному виду. Система гомологических уравнений.

Решение гомологических уравнений в терминах спектральных данных. Решение гомологических уравнений в периодическом случае в терминах однопараметрической группы (экспоненты от матрицы).

Решение гомологических уравнений в случае несоизмеримых собственных значений в терминах многопараметрической группы. Условие диофантовости.

Асимптотика решения возмущенной линейной системы на больших временах в первом приближении по малому параметру.

###### 2. Алгебраическое усреднение в нелинейных системах.

Сведение нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к линейной задаче. Алгебраическая схема построения асимптотики решения на больших временах.

Гомологические уравнения в классе дифференциальных операторов первого порядка. Решение гомологических уравнений в периодическом случае.

Возмущенные гамильтоновы системы. Переход от коммутаторов к скобкам Пуассона. Гомологические уравнения к пространству функций на фазовом пространстве. Решение гомологических уравнений в периодическом случае.

Переменные действие-угол и решение гомологических уравнений в почти-периодическом случае. Пример: возмущенный многомерный осциллятор с несоизмеримыми частотами.

Двумерный изотропный осциллятор с ангармоническим возмущением четвертой степени. Усредненная система с кубической правой частью. Алгебра Ли симметрий изотропного осциллятора (симметрии Швингера). Редукция усредненной системы к волчку Эйлера. Полное решение усредненной системы с помощью матриц типа «рождение-уничтожение» и формул квазикоммутации.

### 3. Операторная схема адиабатического приближения.

Волновые и квантовые системы с разномасштабными степенями свободы. Асимптотическое разделение быстрых и медленных переменных методом Борна-Оппенгеймера. Фаза Берри.

Оператор «действие». Изоспектральная деформация. Операторная версия связности Берри. Уравнение нулевой кривизны. Фазовые пространства с нетривиальной топологией и адиабатический класс когомологий.

Некоммутативное произведение функций на фазовом пространстве, отвечающее произведению операторов. Вывод и решение гомологического уравнения. Универсальная динамическая система с малым параметром в качестве «времени» для вычисления эффективного гамильтониана, интегралов движения и адиабатической связности.

Пример: адиабатическое преобразование трехмерного уравнения Гельмгольца в узком волноводе к одномерному уравнению Шредингера на оси волновода. Пример: эффективный гамильтониан с одной степенью свободы для описания дрейфа заряда по поверхности в слабо-неоднородном магнитном поле.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

Фонд литературы кафедры

1. V. I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics (Nauka, Moscow, 1989).
2. V. I. Arnold, V.V. Kozlov, A. I. Neishtadt, Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006).
3. Snyder A. W., Young W. R. Modes of optical waveguides. (J. Opt. Soc. Amer. v.68, No.3, 297-309, 1978).

### Дополнительная литература

Фонд литературы кафедры

1. F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer, Deformation theory (Ann. Phys., 111, 61–151, 1978).
2. M. V. Karasev, “Adiabatic Approximation Via Hodograph Translation and Zero-Curvature Equations (Russ. J. Math. Phys. 21 (2), 197–218, 2014).

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://lib.mipt.ru>– электронная библиотека Физтеха.
2. <http://www.Sci-lib.com> – Большая научная библиотека.
3. <http://www.eqworld.ipmnet.ru> - Mathematical Equations - EqWorld Физико-математическая библиотека. Книги в формате DjVu и PDF. [eqworld.ipmnet.ru](http://eqworld.ipmnet.ru)
4. <http://arXiv.org>– CornellUniversityLibrary – Библиотека Корнельского Университета, электронный ресурс arXiv

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

В процессе самостоятельной работы обучающиеся могут использовать программные средства WolframMathematica, а также MATLAB, Mathcad,

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Для успешного освоения курса, помимо посещения лекций и семинаров, от студентов требуется самостоятельная работа в объеме не менее чем те часы, которые указаны для каждого раздела программы. В основном, это время отводится на самостоятельное решение задач, выдаваемых на лекциях и практических занятиях. Самостоятельные занятия включают в себя также повторение материала лекций, семинарских занятий. и подготовку к промежуточным тестированиям, которые проводятся для текущего контроля за усвоением материала.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Синхротронные и нейтронные методы исследований Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова кафедра математики и математических методов физики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен	
<b>Разработчик:</b>	М.В. Карасев, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Моделирование физических систем алгебро-геометрическими методами» обучающийся должен:

### знать:

- современную алгебраическую (операторную) технику теории возмущений и теории адиабатического приближения.

### уметь:

- эффективно решать возмущенные динамические системы (линейные и нелинейные) на больших временах, а также системы адиабатического типа.

### владеть:

- базовыми понятиями современной математической физики.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

В целях текущего контроля успеваемости предусмотрен краткий опрос по темам предыдущих занятий по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

### **3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков.**

Перечень контрольных вопросов:

1. Асимптотика решения линейных возмущенных систем на конечных временах и проблема, возникающая на больших временах. Коммутирующие и некоммутирующие матрицы.
2. Преобразование суммы двух матриц к сумме двух коммутирующих матриц: как это сделать точно и асимптотически по малому возмущающему параметру. Приведение общих семейств матриц к коммутативному виду. Система гомологических уравнений.
3. Решение гомологических уравнений в терминах спектральных данных. Решение гомологических уравнений в периодическом случае в терминах однопараметрической группы (экспоненты от матрицы).
4. Решение гомологических уравнений в случае несоизмеримых собственных значений в терминах многопараметрической группы. Условие диофантовости.
5. Асимптотика решения возмущенной линейной системы на больших временах в первом приближении по малому параметру.
6. Сведение нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к линейной задаче. Алгебраическая схема построения асимптотики решения на больших временах.
7. Гомологические уравнения в классе дифференциальных операторов первого порядка. Решение гомологических уравнений в периодическом случае.
8. Возмущенные гамильтоновы системы. Переход от коммутаторов к скобкам Пуассона. Гомологические уравнения к пространству функций на фазовом пространстве. Решение гомологических уравнений в периодическом случае.
9. Переменные действие-угол и решение гомологических уравнений в почти-периодическом случае. Пример: возмущенный многомерный осциллятор с несоизмеримыми частотами.
10. Двумерный изотропный осциллятор с ангармоническим возмущением четвертой степени. Усредненная система с кубической правой частью. Алгебра Ли симметрий изотропного осциллятора (симметрии Швингера). Редукция усредненной системы к волчку Эйлера. Полное решение усредненной системы с помощью матриц типа «рождение-уничтожение» и формул квазикоммутации.
11. Волновые и квантовые системы с разномасштабными степенями свободы. Асимптотическое разделение быстрых и медленных переменных методом Борна-Оппенгеймера. Фаза Берри.
12. Оператор «действие». Изоспектральная деформация. Операторная версия связности Берри. Уравнение нулевой кривизны. Фазовые пространства с нетривиальной топологией и адиабатический класс когомологий.



13. Некоммутативное произведение функций на фазовом пространстве, отвечающее произведению операторов. Вывод и решение гомологического уравнения. Универсальная динамическая система с малым параметром в качестве «времени» для вычисления эффективного гамильтониана, интегралов движения и адиабатической связности.

#### Примеры экзаменационных билетов

##### Вопрос 1.

Асимптотика решения линейных возмущенных систем на конечных временах и проблема, возникающая на больших временах. Коммутирующие и некоммутирующие матрицы.

##### Вопрос 2.

Доказать совпадение решений гомологических уравнений, полученных через спектральное разложение и через однопараметрическую группу (экспоненту).

#### 4. Критерии оценивания

Оценка	баллы	Критерий
Отлично	10	Всесторонние, систематизированные, глубокие знания программы, умение решать конкретные задачи, правильное обоснование принятых решений
	9	
	8	
Хорошо	7	Твердое знание материала, умение применять полученные знания при решении конкретных задач, допускает некоторые неточности.
	6	
	5	
Удовлетворительно	4	Владение основными разделами программы, необходимыми для дальнейшего обучения, но знания носят несистематический, разрозненный характер.
	3	
Неудовлетворительно	2	Отсутствуют знания базовой составляющей дисциплины, допускаются грубые ошибки в изложении материала, отсутствует умение решать типовые, стандартные задачи.

#### 5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности.

При проведении экзамена обучающемуся предоставляется не менее 40 минут на подготовку. Опрос по билету и ответы на дополнительные вопросы не должен превышать двух астрономических часов. По завершении отведенного на опрос времени, экзаменатор должен выставить обучающемуся оценку в соответствии с вышеприведенными критериями.