

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор института нано-, био-,
информационных, когнитивных
и социогуманитарных наук и
технологий**

Т.Е. Григорьев

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Теория колебаний и асимптотические методы
по направлению:	Прикладная математика и физика
профиль подготовки:	Синхротронные и нейтронные методы исследований Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова Кафедра математики и математических методов физики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

1 (осенний) - Экзамен

2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 90 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 105 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Количество контрольных работ, заданий: 4

Программу составил: С.Ю. Доброхотов, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой

Программа обсуждена на заседании Кафедры математики и математических методов физики 20.03.2023

Аннотация

Курс «Теория колебаний и асимптотические методы» посвящен изучению теоретических основ и методов классической теории возмущений. Подробно изложена теория усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений с медленными переменными и быстрыми фазами в одночастотном случае. Обсуждаются приложения этой теории к асимптотическому исследованию нелинейных колебаний: нахождение зависимости частоты от амплитуды, поиск автомодельных решений и их периодов и т. д. Изучается многочастотная теория усреднения и возникающие в ней проблемы резонансов и малых знаменателей. Разбираются вопросы теории чисел, связанные со свойствами диофантовых частот. Значительная часть курса посвящена гамильтоновой теории возмущений: метод Линшtedта и Цейпеля, приложение к задачам небесной механики, основы теории КАМ, диффузия Арнольда, теория адиабатических инвариантов. Изложена асимптотическая теория Кузмака-Уизема и ее связь с изложенными методами теории усреднения.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- овладение подходами к асимптотическому интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений, основанными на различных методах усреднения (в частности, методе Крылова-Боголюбова, методе Кузмака, теории КАМ, теории нормальных форм и т.д.), а также навыком применения этих методов к задачам нелинейной физики и механики.

Задачи дисциплины

- изучение методов усреднения в одночастотных системах;
- изучение методов усреднения в системах с одной быстрой фазой;
- изучение методов усреднения в многочастотных системах и элементов КАМ-теории;
- изучения методов усреднения, основанных на теории нормальных форм;
- применение методов, изложенных в предыдущих пунктах к некоторым задачам нелинейной физики и механики .

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- принципы методов осреднения в нелинейных задачах физики и механики.

уметь:

- правильно осреднять системы обыкновенных дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными.

владеть:

- методами осреднения при их применении в задачах нелинейной физики и механики.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Усреднение в многочастотных системах.	15	10		30
2	Усреднение в одночастотных системах.	15	5		30
3	Нормальные формы.	15	10		20
4	Усреднение в гамильтоновых системах и адиабатические инварианты.	15	5		25
Итого часов		60	30		105
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		225 час., 5 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Усреднение в многочастотных системах.

Системы с постоянными частотами. Проблемы резонансов и малых знаменателей. Точность метода усреднения в многочастотных системах с постоянными частотами в общем нерезонансном случае. Точность метода усреднения в многочастотных системах с постоянными частотами в случае диофантова вектора частот. Процедура исключения быстрых угловых переменных в многочастотных системах с постоянными частотами. Движение заряженной частицы на плоскости в большом магнитном поле и электрическом потенциале. Усреднение в переменных действие- угол. Примеры возрастающих и периодических потенциалов. Геометрическая интерпретация траекторий на основе теории Морса и графы Роба. Усреднение и резонансы Усреднение в многочастотных нелинейных системах. Захват в резонанс. Усреднение в быстро-медленных системах при эргодическом быстром движении. Усреднение возмущений интегрируемых гамильтоновых систем: невырожденный случай, частичное усреднение вблизи резонанса, случай собственного вырождения.

2. Усреднение в одночастотных системах.

Принцип осреднения и асимптотики, регулярная и нерегулярная теория возмущений. Задачи с малым параметром для обыкновенных дифференциальных уравнений. Асимптотические решения. Прямые подходы и подходы, основанные на замене координат. Принцип усреднения. Обоснование принципа усреднения в одночастотном случае. Уравнение Ван-дер Поля. Предельные циклы и их устойчивость. Зависимость частоты от амплитуды в нелинейных колебаниях. Высшие поправки теории возмущений

Семестр: 2 (Весенний)

3. Нормальные формы.

Нормальная форма системы дифференциальных уравнений в окрестности равновесия (резонансный и нерезонансный случаи), Процедура приведения к нормальной форме, Бифуркация Пуанкаре-Андронova-Хопфа и ее исследование с помощью нормальной формы. Мягкая и жесткая потеря устойчивости, Нормальная форма системы дифференциальных уравнений в окрестности периодического решения, нормальная форма отображения в окрестности неподвижной точки (резонансный и нерезонансный случаи). Нормальные формы гамильтоновых систем в окрестности положения равновесия (резонансный и нерезонансный случаи.)

4. Усреднение в гамильтоновых системах и адиабатические инварианты.

Метод Линдштедта исключения быстрых угловых переменных в гамильтоновых системах. Элементы теории Колмогорова – Арнольда – Мозера: процедура ускоренной сходимости для построения инвариантных торов, инвариантные торы возмущенных гамильтоновых систем в случаях невырожденности, изоэнергетической невырожденности и собственного вырождения; случай двух степеней свободы. Адиабатические инварианты. Адиабатические инварианты одночастотных гамильтоновых систем (случаи систем с медленно изменяющимися параметрами и быстро-медленных систем). Адиабатическая теория возмущений для одночастотных гамильтоновых систем (случаи систем с медленно изменяющимися параметрами и быстро-медленных систем). Усреднение нелинейного ангармонического осциллятора и метод Кузмака Асимптотическое интегрирование уравнения нелинейного ангармонического осциллятора с медленно меняющимся потенциалом в переменных действие-угол. Метод Кузмака (нелинейный метод ВКБ) для «слабонелинейных» и «сильнонелинейных» систем. Асимптотическое интегрирование нелинейного ангармонического осциллятора с медленно меняющимся потенциалом и трением. Пример уравнения маятника с переменной частотой. Устойчивость и неустойчивость асимптотического интегрирования. Адиабатические инварианты гамильтоновых систем с медленно изменяющимися параметрами при эргодическом быстром движении.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором и экраном.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Математические методы классической механики [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / В. И. Арнольд . — 5-е изд., стереотип. — М. : Эдиториал УРСС, 2003 . — 416 с.
2. Теоретическая физика [Текст] : в 10 т. Т. 3 : Квантовая механика. Нерелятивистская теория : учеб. пособие для вузов: рек. М-вом образования РФ / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц ; под ред. Л. П. Питаевского . — 6-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2008 . — 800 с.

Дополнительная литература

Статьи:

1. S.Yu. Dobrokhotov, D. S. Minenkov , On Various Averaging Methods for a Nonlinear Oscillator with Slow Time-dependent Potential and a Nonconservative Perturbation , Regular and Chaotic Dynamics, 2010, Vol. 15, No. 2–3, pp. 285–299.
2. J.Bruening, S.Yu.Dobrokhotov, K.V.Pankrashkin, The spectral asymptotics of the two-dimensional Schroedinger operator with a strong magnetic field. Russian J. of Math. Physics, 2002, v.9, N 1, pp.14-49, N 3, pp.400-416.
- 3 Cole, J.D. and Kevorkian, J., Multiple Scale and Singular Perturbation Methods, Appl. Math. Sci., vol. 114, New York: Springer, 1996
4. Брюнинг, Й., Доброхотов С.Ю., Потеряхин М.А., Усреднение гамильтоновых систем с одной быстрой фазой и малой амплитудой, Мат.заметки, 2001, т. 70, N 5, С. 660-669
5. А.В.,Болсинов Фоменко А.Т. Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем. М.: Наука, 1997.
6. Себехей В. Теория орбит: Ограниченная задача трех тел. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1982.
7. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний— М.: Наука, 2005.
8. Марсден Дж., Мак-Кракен М., Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.
9. Арнольд, В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002.
10. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: Эдиториал УРСС, 2001.
11. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: РХД, 2000)

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Mathematical Equations - EqWorld Физико-математическая библиотека. Книги в формате DjVu и PDF.eqworld.ipmnet.ru

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях демонстрируются презентации с помощью мультимедийных технологий.

В процессе самостоятельной работы обучающиеся могут использовать программные средства MATLAB, Mathcad, WolframMathematica.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Для успешного освоения курса, помимо посещения лекций и семинаров, от студентов требуется самостоятельная работа в объеме не менее чем те часы, которые указаны для каждого раздела программы (всего не менее 20 часов в семестр). Самостоятельные занятия включают в себя повторение материала лекций, семинарских занятий и подготовку к контрольным работам, которые проводятся для текущего контроля за усвоением материала. Всего предполагается провести в каждом семестре две контрольные работы. Студенты, успешно прошедшие все формы промежуточного контроля, допускаются к сдаче экзамена в осеннем семестре, либо дифференцированного зачета в весеннем семестре.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Синхротронные и нейтронные методы исследований Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова кафедра математики и математических методов физики
курс:	1
квалификация:	магистр
Семестры, формы промежуточной аттестации:	
1 (осенний) - Экзамен	
2 (весенний) - Дифференцированный зачет	
Разработчик:	С.Ю. Доброхотов, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория колебаний и асимптотические методы» обучающийся должен:

знать:

- принципы методов осреднения в нелинейных задачах физики и механики.

уметь:

- правильно осреднять системы обыкновенных дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными.

владеть:

- методами осреднения при их применении в задачах нелинейной физики и механики.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

В целях текущего контроля успеваемости предусмотрен краткий опрос по темам предыдущих занятий по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Промежуточная аттестация по дисциплине «Теория колебаний и асимптотические методы» осуществляется в форме экзамена в 9 семестре и дифференцированного зачета в 10 семестре. Дифференцированный зачет и экзамен проводятся в устной форме.

Перечень контрольных вопросов для сдачи экзамена в 9 семестре:

1. Принцип осреднения в одночастотном случае.
2. Обоснование принципа усреднения в одночастотном случае.
3. Уравнение Ван-дер Поля.
4. Предельные циклы и их устойчивость.
5. Зависимость частоты от амплитуды в нелинейных колебаниях.
6. Точность метода усреднения в многочастотных системах с постоянными частотами в общем нерезонансном случае.
7. Точность метода усреднения в многочастотных системах с постоянными частотами в случае диофантова вектора частот.
8. Процедура исключения быстрых угловых переменных в многочастотных системах с постоянными частотами.
9. Движение заряженной частицы на плоскости в большом магнитном поле и электрическом потенциале.
10. Усреднение в переменных действие-угол.
11. Геометрическая интерпретация траекторий на основе теории Морса и графы Рибба.
12. Усреднение двухчастотной системы с постоянными частотами в резонансном случае.
13. Захват в резонанс.
14. Рассеяние на резонансе.
15. Усреднение в быстро-медленных системах при эргодическом быстром движении.
16. Усреднение возмущений интегрируемых гамильтоновых систем: невырожденный случай, частичное усреднение вблизи резонанса, случай собственного вырождения.

Перечень контрольных вопросов для сдачи дифференцированного зачета в 10 семестре:

1. Метод Линдштедта исключения быстрых угловых переменных в гамильтоновых системах.
2. Основная теорема КАМ-теории в случаях невырожденности, изоэнергетической невырожденности и собственного вырождения
3. Следствия из КАМ-теории для гамильтоновой системы в двух степенях свободы. Отсутствие диффузии.
4. Адиабатические инварианты одночастотных гамильтоновых систем (случаи систем с медленно изменяющимися параметрами и быстро-медленных систем).
5. Адиабатическая теория возмущений для одночастотных гамильтоновых систем (случаи систем с медленно изменяющимися параметрами и быстро-медленных систем).
6. Усреднение нелинейного ангармонического осциллятора и метод Кузмака.
7. Асимптотическое интегрирование уравнения нелинейного ангармонического осциллятора с медленно меняющимся потенциалом в переменных действие-угол.

8. Метод Кузмака (нелинейный метод ВКБ) для «слабонелинейных» и «сильнонелинейных» систем.
9. Адиабатические инварианты гамильтоновых систем с медленно изменяющимися параметрами при эргодическом быстром движении.
10. Нормальная форма Пуанкаре системы дифференциальных уравнений в окрестности равновесия (резонансный и нерезонансный случаи)
11. Процедура приведения к нормальной форме. Бифуркация Пуанкаре-Андропова-Хопфа и ее исследование с помощью нормальной формы.
12. Мягкая и жесткая потеря устойчивости.
13. Нормальная форма системы дифференциальных уравнений в окрестности периодического решения, нормальная форма отображения в окрестности неподвижной точки (резонансный и нерезонансный случаи).
14. Нормальные формы гамильтоновых систем в окрестности положения равновесия (резонансный и нерезонансный случаи.)

Примеры экзаменационных билетов

Билет №1

1. Принцип осреднения в одночастотном случае.
2. Движение заряженной частицы на плоскости в большом магнитном поле и электрическом потенциале.

Билет №2

1. Уравнение Ван-дер Поля.
2. Захват в резонанс.

Билет №3

1. Предельные циклы и их устойчивость.
2. Усреднение в быстро-медленных системах при эргодическом быстром движении.

4. Критерии оценивания

Оценка	Баллы	Критерии
отлично	10	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	9	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и

		правильное обоснование принятых решений.
	8	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.
хорошо	7	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.
	6	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.
	5	Выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.
удовлетворительно	4	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.
	3	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.
неудовлетворительно	2	Выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

	1	Выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.
--	---	--

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении экзамена обучающемуся предоставляется не менее 40 минут на подготовку. Опрос по билету и ответы на дополнительные вопросы не должны превышать двух астрономических часов. По завершении отведенного на опрос времени, экзаменатор должен выставить обучающемуся экзаменационную оценку.

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой, конспектами лекций.

Дифференцированный зачет может проводиться по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, или путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.