

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Проректор по учебной работе и  
довузовской подготовке**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Вычислительная математика
<b>по направлению:</b>	Системный анализ и управление
<b>профиль подготовки:</b>	Системный анализ и управление в технических, экономических и социальных системах
	Физтех-школа Аэрокосмических Технологий
	кафедра вычислительной физики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

5 (осенний) - Дифференцированный зачет

6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 60 час.

Самостоятельная работа: 150 час.

Всего часов: 270, всего зач. ед.: 6

Количество контрольных работ, заданий: 8

Программу составил: Н.А. Завьялова, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры вычислительной физики 28.05.2020

## Аннотация

Курс посвящен проблемам решения прикладных математических задач на компьютере: разработке вычислительных алгоритмов и изучению их свойств. Студентам необходимо обладать физико-математической подготовкой первых двух лет МФТИ, иметь представления о нелинейных уравнениях и системах, обыкновенных дифференциальных уравнениях, рядах Тейлора, свойствах операторов, действующих в линейных пространствах, описании физических явлений системами дифференциальных уравнений, иметь начальные навыки программирования и работы с данными.

После обучения у студентов появятся следующие навыки:

- знание основных численных методов дифференцирования, интегрирования, интерполирования данных,
- понимание принципов решения Задачи Коши и краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений,
- умение исследовать изученные методы на сходимость, аппроксимацию и устойчивость,
- умение сравнивать численные методы и выбирать подходящий под задачу,
- умение программировать изученные численные методы,
- умение искать ошибки в реализованных алгоритмах;
- умение решать физические задачи, начиная с описания в обыкновенных дифференциальных уравнениях и заканчивая количественным решением.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

Сформировать у студентов систематическое представление о:

- 1) методах приближенного решения наиболее распространенных базовых типов математических задач;
- 2) источниках погрешностей и методах их оценки;
- 3) методах решения актуальных прикладных задач.

### Задачи дисциплины

- 1) Освоение материала охватывающего основные задачи и методы вычислительной математики.
- 2) формирование целостного представления о численных методах решения современных научных прикладных задач.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-6 Способен применять математические, системно-аналитические, вычислительные методы и программные средства для решения прикладных задач в области создания систем анализа и автоматического управления и их компонентов	ОПК-6.1 Применяет естественнонаучные и инженерные знания, методы математического анализа и моделирования, методы вычислительной математики для анализа моделей и решения научных и технических задач
ПК-1 Способен проводить исследование систем управления и их компонент	ПК-1.1 Владеет фундаментальными понятиями, законами и теориями системного анализа

## 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Область применения, теоретические основы, основные принципы, особенности и современные тенденции развития методов вычислительной математики.

уметь:

Применять методы численного анализа для приближенного решения задач в области своей научно-исследовательской работы.

владеть:

Программными средствами разработки вычислительных алгоритмов и программ, способами их отладки, тестирования и практической проверки соответствия реализованного алгоритма теоретическим оценкам.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Предмет вычислительной математики	4		4	
2	Функции, заданные на дискретном множестве	5		5	15
3	Методы решения нелинейных уравнений	5		6	15
4	Численное дифференцирование	5		5	15
5	Задача Коши для ОДУ	5		6	15
6	Краевые задачи для ОДУ	6		4	15
7	Уравнения гиперболического типа	8		8	19
8	Уравнения параболического типа и решение неявных задач на их примере	8		8	19
9	Численное решение уравнений эллиптического типа	8		8	19
10	Использование методов машинного обучения для задач аппроксимации и оптимизации	6		6	18
Итого часов		60		60	150
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		270 час., 6 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

###### 1. Предмет вычислительной математики

Специфика машинных вычислений. Элементарная теория погрешностей.

###### 2. Функции, заданные на дискретном множестве

Задача алгебраической интерполяции. Существование и единственность алгебраического интерполяционного полинома. Остаточный член интерполяции. Оценка погрешности интерполяции для функций, заданных с ошибками. Кусочно-многочленная интерполяция. Интерполяция сплайнами. Численное интегрирование. Квадратурные формулы Ньютона–Котеса (прямоугольников, трапеций, Симпсона) и оценка их погрешности. Правило Рунге, апостериорная оценка порядка. Квадратурные формулы Гаусса и их погрешность. Вычисление несобственных интегралов. Интегрирование быстро осциллирующих функций. Численное дифференцирование. Оценка погрешности формул.

### 3. Методы решения нелинейных уравнений

Локализация корней. Принцип сжимающих отображений. Метод простой итерации. Условие сходимости метода простой итерации. Теорема о достаточных условиях сходимости метода простой итерации для системы нелинейных уравнений. Метод Ньютона. Порядок сходимости и условия достижения заданной точности итерационных методов. Теоремы о сходимости метода Ньютона для скалярного уравнения и системы уравнений в окрестности корня. Методы высших порядков сходимости и наискорейшего спуска для системы уравнений.

### 4. Численное дифференцирование

Простейшие формулы численного дифференцирования. Оценка погрешности.

### 5. Задача Коши для ОДУ

Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Теорема о связи аппроксимации, устойчивости, сходимости. Методы Рунге–Кутты решения Задачи Коши для ОДУ. Устойчивость методов Рунге–Кутты. Барьеры Бутчера. Методы Адамса. Оценки погрешности и управление длиной шага при численном интегрировании систем ОДУ. Понятия о жёстких уравнениях и системах ОДУ. А-устойчивые схемы. Функции и области устойчивости наиболее употребительных разностных схем.

### 6. Краевые задачи для ОДУ

Алгоритм прогонки. Методы решения нелинейных краевых задач (метод стрельбы, метод квазилинеаризации). Вариационно-разностные и проекционные методы построения приближенного решения.

Семестр: 6 (Весенний)

### 7. Уравнения гиперболического типа

Методы построения аппроксимирующих разностных уравнений для уравнений в частных производных (на примере волнового уравнения и уравнения переноса). Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Приемы исследования разностных задач на устойчивость. Принцип максимума, спектральный признак устойчивости, принцип замороженных коэффициентов.

Теорема Годунова о связи порядка аппроксимации и монотонности для линейных разностных схем. Корректная постановка краевых условий для системы уравнений с частными производными гиперболического типа. Характеристики, инварианты Римана. Техника переноса граничных условий с границы на расчетную ячейку. Разностные схемы для характеристической формы записи системы. Нелинейное уравнение Хопфа. Уравнения акустики и газовой динамики.

### 8. Уравнения параболического типа и решение неявных задач на их примере

Квазилинейное уравнение теплопроводности и его автомодельное решение. Разностные схемы для решения многомерных уравнений теплопроводности. Понятие о методах расщепления. Метод переменных направлений. Метод дробных шагов. Применение итерационных методов решения СЛАУ, полученных после линеаризации неявных задач.

Нормы в конечномерных пространствах. Обусловленность системы линейных алгебраических уравнений. Метод простых итераций. Необходимое, достаточное условие сходимости метода простых итераций. Чебышёвское ускорение итераций.

Метод Ньютона для систем уравнений. Вариационные методы решения СЛАУ: обобщенный метод минимальных невязок (GMRes), стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGStab). Понятие о предобуславливании: предобуславливатель Якоби, неполное LU-разложение (ILU(0)). Уравнения однофазной фильтрации.

### 9. Численное решение уравнений эллиптического типа

Численные методы решения уравнений в частных производных эллиптического типа. Разностная схема “крест” для численного решения уравнений Лапласа, Пуассона. Компактная схема 4-го порядка точности «крест на крест». Схемы на неструктурированных сетках, представления о построении треугольных сеток в областях сложной формы. Интегро-интерполяционный метод построения разностных схем. Конечно-объемные методы. МКЭ. Использование многосеточных методов (MultiGrid).

#### 10. Использование методов машинного обучения для задач аппроксимации и оптимизации

Представление об основных алгоритмах машинного обучения. Использование методов машинного обучения для задач аппроксимации данных. Использование методов машинного обучения в задачах оптимизации.

### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная персональными компьютерами, мультимедиапроектором и экраном.

### 6. Перечень рекомендуемой литературы

#### Основная литература

1. Введение в вычислительную математику [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. С. Рябенкий .— 3-е изд., испр. и доп. — М. : Физматлит, 2008 .— 288 с.
2. Введение в вычислительную физику [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Р. П. Федоренко ; под ред. А. И. Лобанова .— 2-е изд., испр. и доп. — Долгопрудный : Интеллект, 2008 .— 504 с.
3. 12 лекций по вычислительной математике : вводный курс [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. И. Косарев .— 3-е изд., испр. и доп. — М. : Физматкнига, 2013 .— 240 с.
4. Лекции по вычислительной математике [Текст] : учеб. пособие для вузов / И. Б. Петров, А. И. Лобанов .— М. : Интернет-Ун-т Информ. Технологий : БИНОМ. Лаб. знаний, 2006, 2010, 2013 .— 523 с.
5. Численные методы [Текст] : в 2 кн. : учебник для вузов / Н. Н. Калиткин, Е. А. Альшина .— М. : Академия, 2013 .— (Университетский учебник. Прикладная математика и информатика) .— Кн. 1 : Численный анализ. - 2013. - 304 с.

#### Дополнительная литература

1. Основы вычислительной математики [Текст] : учеб. пособие для вузов ; доп. М-вом высш. и сред. спец. образования СССР / Б. П. Демидович, И. А. Марон .— 4-е изд., испр. — М. : Наука, 1970 .— 664 с.

#### Фонд литературы базовой кафедры

2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1990. — 512 с.
3. Самарский А А., Гулин А В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.

### 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

[http://mipt.ru/education/chair/computational\\_mathematics/study/materials/compmath/](http://mipt.ru/education/chair/computational_mathematics/study/materials/compmath/)

### 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Компиляторы и среды разработки C++, JAVA, FORTRAN, PYTHON

### 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий курс должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса отведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на практических занятиях и в качестве курсового задания,
- подготовку к практическим занятиям и зачетам.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать теоретические и практические задачи.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания, ощутить взаимосвязь между темами курса.

При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Системный анализ и управление
<b>профиль подготовки:</b>	Системный анализ и управление в технических, экономических и социальных системах Физтех-школа Аэрокосмических Технологий кафедра вычислительной физики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестры, формы промежуточной аттестации:	
	5 (осенний) - Дифференцированный зачет
	6 (весенний) - Дифференцированный зачет
<b>Разработчик:</b>	Н.А. Завьялова, канд. физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-6 Способен применять математические, системно-аналитические, вычислительные методы и программные средства для решения прикладных задач в области создания систем анализа и автоматического управления и их компонентов	ОПК-6.1 Применяет естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, методы вычислительной математики для анализа моделей и решения научных и технических задач
ПК-1 Способен проводить исследование систем управления и их компонент	ПК-1.1 Владеет фундаментальными понятиями, законами и теориями системного анализа

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Вычислительная математика» обучающийся должен:

### знать:

Область применения, теоретические основы, основные принципы, особенности и современные тенденции развития методов вычислительной математики.

### уметь:

Применять методы численного анализа для приближенного решения задач в области своей научно-исследовательской работы.

### владеть:

Программными средствами разработки вычислительных алгоритмов и программ, способами их отладки, тестирования и практической проверки соответствия реализованного алгоритма теоретическим оценкам.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

см. файл

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

см. файл

Критерии оценивания

см. файл

## 5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

см. файл

### 3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Промежуточная аттестация по дисциплине «Вычислительная математика» осуществляется в форме дифференцированного зачета. Дифференцированный зачет проводится по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, лабораторных и других видов работ, предусмотренных программой дисциплины или путем организации специального опроса, проводимого в устной или письменной форме.

Перечень контрольных вопросов:

1. Специфика машинных вычислений.
2. Что такое машинный эпсилон? Как эта величина связана с конечной длиной мантиссы?
3. Элементы теории погрешностей. Абсолютная и относительная ошибки. Как эволюционируют погрешности при выполнении арифметических операций? Погрешность вычисления функций от величины, заданной с абсолютной погрешностью.
4. Численное дифференцирование. Простейшие формулы численного дифференцирования. Оценка погрешности формул численного дифференцирования. Оптимальный шаг численного дифференцирования.
5. Вывод формулы численного дифференцирования с помощью метода неопределенных коэффициентов.
6. Решение систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы: Гаусса, Гаусса с выбором главного элемента.
7. Обусловленность матрицы линейной системы.
8. Оценка погрешности прямых численных методов решения алгебраических систем.
9. Итерационные методы решения линейных систем. Метод простых итераций, метод Зейделя, метод верхней релаксации.
10. Проблема поиска собственных значений матрицы. Метод вращений для поиска собственных значений самосопряженной матрицы.
11. Задача алгебраической интерполяции. Существование и единственность решения. Интерполяционный полином в форме Лагранжа и в форме Ньютона.
12. Оценка погрешности интерполяционных формул, остаточный член интерполяции.
13. Функция Лебега, константа Лебега. Оценка погрешности интерполяции для функций, заданных с ошибками.
14. Оптимальный выбор узлов интерполяции. Полином Чебышёва.
15. Сплаины. Интерполяция сплайнами.
16. Численное интегрирование. Простейшие квадратурные формулы (прямоугольников, трапеций, Симпсона) и оценка их погрешности.
17. Квадратурные формулы Гаусса.
18. Методы приближенного решения нелинейных алгебраических уравнений.
19. Принцип сжимающих отображений. Метод простой итерации.
20. Метод Ньютона. Теорема о квадратичной сходимости метода Ньютона.
21. Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Простейшие численные методы (явный метод Эйлера, неявный метод Эйлера, метод Эйлера с пересчетом).
22. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Теорема о связи аппроксимации, устойчивости, сходимости.
23. Методы Рунге–Кутты решения систем ОДУ. Устойчивость методов Рунге–Кутты. Экспоненциальная оценка устойчивости, устойчивость при различных типах поведения решения (на устойчивых и «не устойчивых» траекториях).
24. Правило Рунге оценки погрешности.
25. Понятие жесткой задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ЖС ОДУ). Методы численного решения жестких систем ОДУ: одношаговые

- ( неявные методы Рунге-Кутты, методы Розенброка) и многошаговые (формулы дифференцирования назад).
26. А-устойчивость, L-устойчивость и монотонность. Функция устойчивости и область устойчивости методов Рунге-Кутты.
  27. Линейные многошаговые методы.
  28. Численное решение краевых задач для ОДУ. Методы решения линейных краевых задач (метод численного построения общего решения, конечно-разностный метод для линейного уравнения второго порядка, метод прогонки).
  29. Методы решения нелинейных краевых задач (метод стрельбы, метод квазилинеаризации).
  30. Разностные методы решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Методы построения аппроксимирующих разностных уравнений для уравнений в частных производных. Аппроксимация, устойчивость, сходимость.
  31. Приемы исследования разностных задач на устойчивость. Принцип максимума, спектральный признак устойчивости. Принцип замороженных коэффициентов.
  32. Численные методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа на примере уравнения переноса и волнового уравнения.
  33. Монотонные разностные схемы.
  34. Системы дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Характеристики, инварианты Римана. Корректная постановка краевых условий для системы уравнений с частными производными гиперболического типа.
  35. Численные методы решения линейных уравнений в частных производных параболического типа. Явная и неявная схемы. Схема Кранка-Никольсон.
  36. Квазилинейное уравнение теплопроводности, его свойства. Консервативные разностные схемы. Приемы построения консервативных разностных схем.
  37. Разностные схемы для решения многомерных уравнений теплопроводности. Понятие о методах расщепления. Метод переменных направлений.
  38. Численные методы решения уравнений в частных производных эллиптического типа. Разностная схема “крест” для численного решения уравнений Лапласа, Пуассона.
  39. Итерационные методы для численного решения возникающих систем линейных уравнений. Принцип установления для решения стационарных задач.

#### 4. Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если за семестровую контрольную работу набрано 20 и более баллов и средняя оценка за работу в семестре не ниже 4,75;

Оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если за семестровую контрольную работу набрано 20 и более баллов и средняя оценка за работу в семестре больше 4,5, но меньше 4,75;

Оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если за семестровую контрольную работу набрано 20 и более баллов и средняя оценка за работу в семестре больше 4,25, но меньше 4,5;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если за семестровую контрольную работу набрано 15 и более баллов и средняя оценка за работу в семестре больше 4,0, но меньше 4,25;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если за семестровую контрольную работу набрано 15 и более баллов и средняя оценка за работу в семестре больше 3,75, но меньше 4,0;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если за семестровую контрольную работу набрано 15 и более баллов и средняя оценка за работу в семестре больше 3,5, но меньше 3,75;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, если за семестровую контрольную работу набрано 12 и более баллов и средняя оценка за работу в семестре больше 3,25, но меньше 3,5;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, если за семестровую контрольную работу набрано 12 и более баллов и средняя оценка за работу в семестре больше 3,0, но меньше 3,25;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, если не выполнен какой-нибудь пункт учебной программы, не сданы лабораторные работы или задания, не написана семестровая контрольная работа

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Дифференцированный зачет проводится по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, лабораторных и других видов работ, предусмотренных программой дисциплины и путем организации специального опроса, проводимого в устной и письменной форме.

Время проведения письменной контрольной составляет 80 минут.