

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Директор физтех-школы**  
**аэрокосмических технологий**  
**С.С. Негодяев**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Дополнительные главы механики твердого тела
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Космические технологии
	Физтех-школа Аэрокосмических Технологий
	кафедра механики и процессов управления
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Программу составил: И.Г. Горячева, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры механики и процессов управления 05.04.2024

## Аннотация

Целью курса является изучение основ механики деформируемого твердого тела и знакомство с методами решения краевых задач теории упругости и вязкоупругости в плоской и пространственной постановках. В курсе даются общая постановка краевой задачи линейной теории упругости, формулировка и методы решения плоской задачи теории упругости, основанные, в частности, на применении аппарата ТФКП, постановка и методы решения пространственных краевых задач для упругих тел, в том числе с граничными условиями смешанного типа, модели вязкоупругих материалов. В курсе также излагаются методы исследования контактных задач с трением и изнашиванием поверхностей взаимодействующих упругих и вязкоупругих тел.

Для успешного освоения программы обучающемуся необходимо иметь базовые знания по математическому анализу, уравнениям математической физики, теории функций комплексного переменного, а также в области механики сплошных сред.

Курс предшествует изучению дисциплины «Вариационные методы в механике сплошных сред». В результате обучения дается возможность применять на практике математический аппарат вариационного исчисления для решения краевых задач теории упругости, выбирать наиболее эффективный метод решения в зависимости от конкретной постановки краевой задачи, ставить и решать краевые задачи для различных сопряжений, используемых в технике.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- изучение основ механики деформируемого твердого тела и знакомство с методами решения граничных задач теории упругости и вязкоупругости в плоской и пространственной постановках.

#### Задачи дисциплины

- приобретение теоретических знаний в области решения краевых задач теории упругости в плоской и пространственной постановках;
- приобретение студентами базовых навыков использования аппарата функций комплексной переменной для решения плоской задачи теории упругости;
- изучение студентами методов решения задач контактного взаимодействия деформируемых тел;
- приобретение знаний о влиянии свойств поверхности и тонких поверхностных слоев на характер взаимодействий тел и их разрушение при трении.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- общую постановку основных краевых задач механики деформируемого твердого тела;
- основные методы решения плоской задачи теории упругости;
- постановку и решение контактной задачи Герца.

уметь:

- применять на практике математический аппарат теории функций комплексной переменной для решения плоских задач теории упругости;
- выбирать наиболее эффективный метод решения в зависимости от конкретной постановки краевой задачи;
- ставить и решать краевую задачу для различных сопряжений, используемых в технике;
- осваивать новые предметные области, теоретические подходы и экспериментальные методики.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации;
- культурой постановки и моделирования физических задач;
- навыками решения типовых задач и задач повышенной трудности теоретического и экспериментального плана с использованием методов математического анализа и теории функций комплексной переменной;
- практикой исследования и решения теоретических и прикладных задач.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Общая теория деформаций и напряжений. Определяющие соотношения. Математическая постановка задачи линейной теории упругости.	4			1
2	Плоская задача теории упругости. Плоское напряженное состояние; плоская деформация.	2			1
3	Метод решения плоской задачи с помощью функции напряжений.	4			2
4	Применение метода ТФКП к решению плоской задачи теории упругости.	4			2
5	Пространственная задача теории упругости и методы ее решения.	4			2
6	Постановка контактных задач. Теория Герца.	2			2
7	Динамические задачи теории упругости.	4			2
8	Постановка и метод решения контактных задач с трением и изнашиванием поверхностей взаимодействующих тел.	2			1
9	Теория вязкоупругости.	4			2
Итого часов		30			15
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		45 час., 1 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Общая теория деформаций и напряжений. Определяющие соотношения. Математическая постановка задачи линейной теории упругости.

Теория деформаций. Определение перемещений в трехмерном евклидовом пространстве.

Тензор деформаций. Понятие малых деформаций. Смысл компонент тензора деформаций.

Инварианты тензора деформаций. Теория напряжений. Уравнение движения произвольного объема сплошной среды. Тензор напряжений. Определение силы, действующей на произвольную площадку, через тензор напряжений. Необходимые условия симметрии тензора напряжений. Разложение тензора на девиаторную и гидростатическую составляющие. Главные оси тензора напряжений. Определение максимальных касательных напряжений. Определяющие соотношения. Модели упругого, вязкоупругого, идеально пластического и упругопластического материалов. Понятие об однородных и изотропных телах. Математическая постановка краевой задачи для линейно-упругого тела.

Уравнения теории упругости в перемещениях и напряжениях. Вариационная постановка краевых задач теории упругости. Функционалы Рейснера, Лагранжа, Кастильяно.

Методы решения задач теории упругости, основанные на вариационных принципах.

2. Плоская задача теории упругости. Плоское напряженное состояние; плоская деформация.

Вывод системы уравнения для случая плоской деформации. Реализуемость модели плоского деформированного состояния. Краевая задача для тонкой пластинки, нагруженной по боковой поверхности. Общая система уравнений плоской задачи, связь коэффициентов с параметрами Ляме. Теорема Мориса-Леви.

3. Метод решения плоской задачи с помощью функции напряжений.

Постановка краевой задачи с помощью функции напряжений. Задача о действии сосредоточенных нормальной и касательной нагрузок на границу упругой полуплоскости.

Задача о действии распределенной нормальной и касательной нагрузок на границу упругой полуплоскости.

Интегральные соотношения между напряжениями и перемещениями границы полуплоскости.

Решение задачи о вдавлении штампа с плоским основанием в границу упругой полуплоскости с различными условиями в области контакта (сцепление, трение, отсутствие касательных напряжений).

Решение краевой задачи для упругой полуплоскости с помощью преобразования Фурье.

4. Применение метода ТФКП к решению плоской задачи теории упругости.

Утверждение Гурса. Комплексное представление смещений и напряжений (формулы Колосова-Мусхелишвили). Случай многосвязных и бесконечных областей. Применение конформных отображений. Методы степенных рядов, функциональных уравнений, сведения к задаче сопряжен. Задачи о растяжении пластинки с круговым и эллиптическим отверстиями.

Определение напряженного состояния в вершине трещины. Напряженное состояние пластинки со вставленной в нее шайбой.

5. Пространственная задача теории упругости и методы ее решения.

Решение уравнений Ляме в форме Папковича-Нейбера. Сосредоточенная сила в изотропной неограниченной упругой среде. Нормальная нагрузка на границе полупространства (задача Буссинеска). Осесимметричное нагружение полупространства. Распределение напряжений внутри упругого полупространства.

6. Постановка контактных задач. Теория Герца.

Граничные условия в области контакта при разных условиях взаимодействия. Условия равновесия. Условие непрерывности на границе площадки контакта. Постановка задачи и основные предположения Герца. Метод решения. Определение контактных характеристик и их анализ. Задачи для штампов с угловыми точками. Контакт согласованных поверхностей.

Контактные задачи с трением и с адгезией. Применение модели Винклера в контактных задачах.

Контактные задачи для тел с покрытиями.

## 7. Динамические задачи теории упругости.

Постановка динамических задач теории упругости. Свободные и вынужденные колебания.

Дифференциальное уравнение движения упругого тела. Скорости распространения продольных и поперечных волн в изотропной упругой среде.

## 8. Постановка и метод решения контактных задач с трением и изнашиванием поверхностей взаимодействующих тел.

Постановка контактных задач с учетом поверхностной микроструктуры. Методы решения задачи дискретного контакта. Метод решения задачи с учетом шероховатого слоя (континуальный подход). Постановка износоконтактной задачи. Уравнение износа. Метод решения задачи в линейной постановке. Анализ эволюции контактных характеристик при изнашивании. Моделирование контактно-усталостного разрушения поверхностных слоев взаимодействующих тел.

## 9. Теория вязкоупругости.

Простейшие реологические модели и их свойства. Общая теория наследственности и операторы Вольтерра. Принцип Вольтерра. Внедрение штампа в вязкоупругое основание. Задача о движущемся штампе.

# 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Необходимое оборудование для лекций: учебная аудитория. персональные компьютеры и мультимедийное оборудование (проектор, интерактивная доска).

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Механика деформируемого твердого тела [Текст] : учебное пособие для ун-тов : доп. М-вом высш. и сред. спец. образов. СССР / Ю. Н. Работнов. — М. : Наука, 1979. — 744 с.
2. Пространственные задачи теории упругости и пластичности [Текст] : в 6 т., монография/В. Т. Головчан [и др.] , -Киев, Наукова думка, 1986
1. Механика деформируемого твердого тела. Работнов Ю.Н. ,М.: Наука, 1979.
2. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Мусхелишвили Н.И.,М.: Наука, 1966.
3. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. Галин Л.А., М.: Наука, 1980.
4. Пространственные задачи теории упругости. Лурье А.И. , М.: Гостехиздат, 1955.
5. Механика фрикционного взаимодействия. Горячева И.Г. , М.: Наука, 2001.

### Дополнительная литература

1. Теория упругости. Амензаде Ю.А., Баку, Азерб. ГИ УПЛ, 1968.
2. Механика контактного взаимодействия. Джонсон К. ,М.: Мир, 1989.
3. Элементы наследственной механики твердых тел.Работнов Ю.Н., М.: Физматгиз, 1963.

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://lib.mipt.ru/> – электронная библиотека Физтех
2. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
3. <http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
4. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/> – электронная библиотека портала Eqworld

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Пакеты офисного программного обеспечения Microsoft Office (Word, Excel, PowerPoint, Windows Media Player), программный комплекс Maple.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Успешное освоение курса «Дополнительные главы механики твердого тела» требует большой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе);
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях;
- подготовку к контрольным, самостоятельным работам и тестам.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в результате анализа итогов контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладные математика и физика  
**профиль подготовки:** Космические технологии  
Физтех-школа Аэрокосмических Технологий  
кафедра механики и процессов управления  
**курс:** 2  
**квалификация:** магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** И.Г. Горячева, д-р физ.-мат. наук, профессор

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дополнительные главы механики твердого тела» обучающийся должен:

### знать:

- общую постановку основных краевых задач механики деформируемого твердого тела;
- основные методы решения плоской задачи теории упругости;
- постановку и решение контактной задачи Герца.

### уметь:

- применять на практике математический аппарат теории функций комплексной переменной для решения плоских задач теории упругости;
- выбирать наиболее эффективный метод решения в зависимости от конкретной постановки краевой задачи;
- ставить и решать краевую задачу для различных сопряжений, используемых в технике;
- осваивать новые предметные области, теоретические подходы и экспериментальные методики.

### владеть:

- навыками освоения большого объема информации;
- культурой постановки и моделирования физических задач;
- навыками решения типовых задач и задач повышенной трудности теоретического и экспериментального плана с использованием методов математического анализа и теории функций комплексной переменной;
- практикой исследования и решения теоретических и прикладных задач.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется в форме самостоятельных работ или тестов в письменной форме по каждой теме.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в результате анализа итогов контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также индивидуальных консультаций.

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Определение перемещений в трехмерном евклидовом пространстве. Тензор деформаций. Понятие малых деформаций. Смысл компонент тензора деформаций. Инварианты тензора деформаций.
2. Распределение напряжений в упругой полуплоскости при действии на нее сосредоточенной нормальной силы.



3. Уравнение движения произвольного объема сплошной среды. Тензор напряжений. Определение силы, действующей на произвольную площадку, через тензор напряжений.
4. Распределение напряжений в упругой полуплоскости при действии на нее сосредоточенной касательной силы.
5. Определяющие соотношения для линейно упругого тела. Вид этих соотношений для случаев изотропного и ортотропного материалов.
6. Решение контактной задачи о вдавлении штампа с плоским основанием в упругую полуплоскость (случай сцепления поверхностей контактирующих поверхностей).
7. Математическая постановка краевой задачи для линейно упругого тела. Уравнения теории упругости в перемещениях и напряжениях.
8. Решение контактной задачи о вдавлении штампа с плоским основанием в упругую полуплоскость (случай отсутствия сил трения).
9. Вариационная постановка краевых задач теории упругости. Функционалы Рейснера, Лагранжа, Кастильяно. Методы решения задач теории упругости, основанные на вариационных принципах.
10. Решение контактной задачи о вдавлении штампа с плоским основанием в упругую полуплоскость при наличии касательных напряжений, удовлетворяющих закону трения Кулона-Амонтона.
11. Вывод системы уравнения для случая плоской деформации. Реализуемость модели плоского деформированного состояния.
12. Решение задачи о действии распределенной нормальной нагрузки на упругую полуплоскость с помощью преобразования Фурье.
13. Обобщенное плоское напряженное состояние. Общая система уравнений плоской задачи, связь коэффициентов с параметрами Ляме.
14. Задача о растяжении пластинки с круговым отверстием.
15. Постановка и методы решения краевой задачи с помощью функции напряжений.
16. Задача о растяжении пластинки с эллиптическим отверстием.

Примеры экзаменационных билетов:

Экзаменационный билет 1

1. Контактная задача Герца. Постановка задачи и основные предположения Герца. Метод решения. Определение контактных характеристик и их анализ.
2. Утверждение Гурса. Комплексное представление смещений и напряжений (формулы Колосова-Мусхелишвили).
3. Распределение напряжений в упругой полуплоскости при действии на нее сосредоточенной нормальной силы.

Экзаменационный билет 2

1. Применение модели Винклера в контактных задачах. Контактные задачи для тел с покрытиями.
2. Комплексное представление аналитических функций в многосвязных и бесконечных областях при решении краевых задач методом ТФКП. Применение конформных отображений.
3. Распределение напряжений в упругой полуплоскости при действии на нее сосредоточенной касательной силы.

Экзаменационный билет 3

1. Простейшие реологические модели и их свойства. Общая теория наследственности и операторы Вольтерра. Принцип Вольтерра.
2. Метод степенных рядов решения краевых задач с помощью аналитических функций.
3. Решение контактной задачи о вдавлении штампа с плоским основанием в упругую полуплоскость (случай сцепления поверхностей контактирующих поверхностей).

Экзаменационный билет 4

1. Математическая постановка краевой задачи для линейно упругого тела. Уравнения теории упругости в перемещениях и напряжениях.
2. Метод функциональных уравнений, используемый при решении плоской задачи теории упругости.

3. Решение контактной задачи о вдавлении штампа с плоским основанием в упругую полуплоскость (случай отсутствия сил трения).

#### Экзаменационный билет 5

1. Вариационная постановка краевых задач теории упругости. Функционалы Рейснера, Лагранжа, Кастильяно. Методы решения задач теории упругости, основанные на вариационных принципах.
2. Метод сведения к задаче сопряжения, используемый при решении плоской задачи теории упругости.
3. Решение контактной задачи о вдавлении штампа с плоским основанием в упругую полуплоскость при наличии касательных напряжений, удовлетворяющих закону трения Кулона-Амонтона.

#### Экзаменационный билет 6

1. Вывод системы уравнения для случая плоской деформации. Реализуемость модели плоского деформированного состояния.
2. Решение уравнений Ляме пространственной задачи теории упругости в форме Папковича-Нейбера.
3. Решение задачи о действии распределенной нормальной нагрузки на упругую полуплоскость с помощью преобразования Фурье.

#### Экзаменационный билет 7

1. Обобщенное плоское напряженное состояние. Общая система уравнений плоской задачи, связь коэффициентов с параметрами Ляме.
2. Нормальная нагрузка на границе полупространства (задача Буссинеска).
3. Задача о растяжении пластинки с круговым отверстием.

#### Экзаменационный билет 8

1. Постановка и методы решения краевой задачи с помощью функции напряжений.
2. Осесимметричное нагружение полупространства. Распределение напряжений внутри упругого полупространства.
3. Задача о растяжении пластинки с эллиптическим отверстием.

#### Критерии оценивания

оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;

оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;

оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему систематизированные, знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;

оценка «хорошо (7)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он твердо знает материал экзаменационного билета, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

оценка «хорошо (6)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он знает материал экзаменационного билета, по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе много неточностей;

оценка «хорошо (5)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он знает материал экзаменационного билета, излагает его, умеет применять полученные знания на практике, не допускает в ответе грубых ошибок;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета он показал фрагментарный, характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета он показал разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушение логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2-1)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета, он показал, что не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Дифференцированный зачет проводится по итогам текущей успеваемости: по результатам контрольных, самостоятельных работ/тестов по каждой теме.

При проведении дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется 60 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения дифференцированного зачета при подготовке ответов на билеты, обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, конспектами лекций и любой другой литературой.

Во время проведения дифференцированного зачета при ответе обучающегося на вопросы по билету или по программе дисциплины, он не может пользоваться конспектами лекций и любой другой литературой.