

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Директор физтех-школы**  
**аэрокосмических технологий**  
**С.С. Негодяев**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Вариационные методы в механике сплошных сред
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Космические технологии
	Физтех-школа Аэрокосмических Технологий
	кафедра механики и процессов управления
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

1 (осенний) - Дифференцированный зачет  
2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.  
семинары: 60 час.  
лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Программу составил: Г.В. Костин, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры механики и процессов управления 26.05.2023

## Аннотация

Главной целью курса является изучение основных понятий и постановок задач в механике сплошных сред, а также знакомство с вариационными подходами к решению задач с различными краевыми и начальными условиями для механических систем с распределенными параметрами. В курсе даются базовые концепции теории функциональных пространств и особенности обобщенных формулировок задач механики, обсуждаются вариационные принципы линейной теории упругости и численные методы решения статических и динамических задач, описываются подходы к разделению переменных, метод конечных элементов и модификации метода Галеркина.

Для успешного освоения программы обучающемуся необходимо иметь базовые знания по общей физике, математическому анализу, механике сплошных сред, теории управления. Курс предшествует изучению дисциплины «Актуальные проблемы механики и процессов управления». В результате обучения приобретаются теоретические знания в области функционального анализа статических и динамических характеристик механических систем, осваиваются базовые навыки использования аппарата вариационного исчисления, изучаются методы численного решения краевых и начально-краевых задач механики сплошных сред, осваиваются разнообразные алгоритмы нахождения приближений и оценки их качества.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

- изучение основных понятий и постановок задач в механике сплошных сред (МСС), а также знакомство с вариационными подходами к решению задач с различными краевыми и начальными условиями для механических систем с распределенными параметрами.

### Задачи дисциплины

- приобретение теоретических знаний в области функционального анализа статических и динамических характеристик механических систем;
- освоение базовых навыков использования аппарата вариационного исчисления;
- изучение методов численного решения краевых и начально-краевых задач в механике сплошных сред.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники)
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- классические постановки краевых и начально-краевых задач механики сплошных сред;
- основные вариационные методы решения задач для механических систем с распределенными параметрами;
- численные подходы к построению аппроксимации решения линейных задач в механике сплошных сред.

уметь:

- применять на практике математический аппарат вариационного исчисления и функционального анализа для решения статических и динамических задач механики;
- выбирать наиболее эффективный метод решения в зависимости от конкретной постановки задачи;
- ставить и решать вариационные задачи для различных граничных условий;
- осваивать новые предметные области, теоретические подходы и методики в механике сплошных сред .

владеть:

- навыками освоения большого объема информации;
- культурой постановки и моделирования физических задач;
- навыками решения типовых задач и задач повышенной трудности теоретического плана с использованием методов функционального анализа и вариационного исчисления;
- практикой исследования и решения теоретических и прикладных задач.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Основные понятия и постановки задач механики сплошных сред	10	10		10
2	Базовые концепции теории функциональных пространств и вариационные формулировки в механике сплошных сред	10	10		10
3	Вариационные принципы линейной теории упругости и численные методы решения статических задач	10	10		10
4	Метод конечных элементов для решения задач механики сплошных сред	8	6		3
5	Формулировка линейных динамических задач механики сплошных сред и метод Фурье	8	6		18
6	Особенности динамических и нелинейных задач для систем с распределенными параметрами	8	10		13
7	Актуальные вариационные подходы в статических и динамических задачах механики сплошных сред	6	8		11
Итого часов		60	60		75

Подготовка к экзамену	30 час.
Общая трудоёмкость	225 час., 5 зач.ед.

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

##### Семестр: 1 (Осенний)

##### 1. Основные понятия и постановки задач механики сплошных сред

Основные понятия механики сплошных сред. Гипотеза непрерывности. Описание Лагранжа и Эйлера. Одномерные задачи МСС. Уравнения продольно нагруженного упругого стержня на упругом основании. Многомерные задачи МСС. Области с границей Липшица. Упругая мембрана.

Геометрические и силовые переменные. Кинематические соотношения. Уравнение состояния. Уравнение равновесия.

##### 2. Базовые концепции теории функциональных пространств и вариационные формулировки в механике сплошных сред

Скалярное произведение и норма функции, расстояние. Соболевские (энергетические) пространства. Классификация функциональных пространств. Понятие классического и обобщенного решения. Обобщенная формулировка задач МСС. Примеры вариационных формулировок для стержня и мембраны. Главные и естественные граничные условия.

##### 3. Вариационные принципы линейной теории упругости и численные методы решения статических задач

Граничные задачи линейной теории упругости. Тензоры деформаций и напряжений. Тензор модулей упругости. Закон Гука. Типы граничных условий. Принцип виртуальной работы и принцип минимума потенциальной энергии. Принцип дополнительной виртуальной работы и принцип минимума дополнительной энергии. Обобщенные принципы Ху–Васидзу и Хеллингера–Рейсснера. Численные методы решения статических задач МСС.

Аппроксимации полей перемещений. Базисные функции. Ортогональный базис.

Кусочно-полиномиальные аппроксимации (сплайны) для одномерного и многомерного случая. Регулярная триангуляция областей.

##### Семестр: 2 (Весенний)

##### 4. Метод конечных элементов для решения задач механики сплошных сред

Вариационные и проекционные подходы к численному решению задач МСС. Методы Бубнова–Галеркина и Релея–Ритца. Метод конечного элемента. Априорные и апостериорные оценки точности приближенного решения. Уточнение решения. Измельчение и адаптация сеток.

Вложенность решений. Понятие  $p$ - и  $h$ -сходимости.

##### 5. Формулировка линейных динамических задач механики сплошных сред и метод Фурье

Линейные динамические задачи МСС. Постановка начально-краевой задачи. Принцип Гамильтона–Остроградского. Свободные и вынужденные колебания упругих систем с распределенными параметрами. Метод Фурье и его связь с проекционными подходами.

Собственные частоты и формы колебаний. Примеры задач на собственные значения.

Колебания стержня, мембраны. Ненулевые граничные условия. Метод Гринберга.

6. Особенности динамических и нелинейных задач для систем с распределенными параметрами

Уравнения движения упругой балки и пластины. Типы граничных условий. Определение собственных форм и частот колебаний. Решение задач для балки и пластины методом конечного элемента. Межэлементные условия стыковки решения. Гладкие аппроксимации.

Геометрически и физически нелинейные уравнения упругости. Тензоры деформаций Коши–Грина и Грина–Сен-Венана. Тензоры напряжений Коши и Пиолы–Кирхгофа. Уравнение равновесия. Особенности задания граничных условий. Вариационная формулировка задачи нелинейной теории упругости.

7. Актуальные вариационные подходы в статических и динамических задачах механики сплошных сред

Задачи управления движениями механических систем с распределенными параметрами.

Распределенные управляющие воздействия. Метод декомпозиции. Оптимизация движений.

Сосредоточенные управления. Алгоритмы построения приближенных законов управления.

Метод интегро-дифференциальных соотношений в линейных задачах МСС. Семейства неотрицательных энергетических функционалов. Вариационные формулировки динамических задач упругости.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Необходимое оборудование для лекций и практических занятий: компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, маркерная доска, связь с Интернетом).

## **6. Перечень рекомендуемой литературы**

### **Основная литература**

1. Вариационные задачи механики и управления [Текст], Численные методы/Ф. Л. Черноусько, Н. В. Баничук, -М., Наука, 1973
2. Метод конечных элементов для эллиптических задач [Текст] = The finite element method for elliptic problems/Ф. Сьярле, -М., Мир, 1980
3. Вариационные принципы механики сплошной среды [Текст]/В. Л. Бердичевский, -М., Наука, 1983
1. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. Васидзу К., М.: Мир, 1987.

### **Дополнительная литература**

1. Вариационные методы в математической физике и технике [Текст]/К. Ректорис, -М., Мир, 1985
1. Математическая теория упругости. Сьярле Ф., М.: Мир, 1992. 472 с.
2. Schwab C. H. p- and hp-Finite Element Methods: Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics. Oxford: Clarendon Press, 1998.
3. Методы управления нелинейными механическими системами. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006, 328 с.
4. Integrodifferential relations in linear elasticity. De Gruyter Studies in Mathematical Physics 10 [Текст]/G. V. Kostin, V. V. Saurin, -Berlin, De Gruyter, 2012

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

1. <http://lib.mipt.ru/> – электронная библиотека Физтех
2. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
3. <http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
4. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/> – электронная библиотека портала Eqworld

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Необходимое программное обеспечение: Microsoft Office (Word, Excel, PowerPoint), программный комплекс Maple.

Обеспечение самостоятельной работы: электронные ресурсы, в том числе веб-сайт ИПМех РАН (<https://ipmnet.ru/>), базы журналов издательств Springer, Elsevier, AMS

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- подготовку к дифференцированному зачету и экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Космические технологии Физтех-школа Аэрокосмических Технологий кафедра механики и процессов управления
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

- 1 (осенний) - Дифференцированный зачет
- 2 (весенний) - Экзамен

**Разработчик:** Г.В. Костин, д-р физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники)
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Вариационные методы в механике сплошных сред» обучающийся должен:

### знать:

- классические постановки краевых и начально-краевых задач механики сплошных сред;
- основные вариационные методы решения задач для механических систем с распределенными параметрами;
- численные подходы к построению аппроксимации решения линейных задач в механике сплошных сред.

### уметь:

- применять на практике математический аппарат вариационного исчисления и функционального анализа для решения статических и динамических задач механики;
- выбирать наиболее эффективный метод решения в зависимости от конкретной постановки задачи;
- ставить и решать вариационные задачи для различных граничных условий;
- осваивать новые предметные области, теоретические подходы и методики в механике сплошных сред .

### владеть:

- навыками освоения большого объема информации;
- культурой постановки и моделирования физических задач;
- навыками решения типовых задач и задач повышенной трудности теоретического плана с использованием методов функционального анализа и вариационного исчисления;
- практикой исследования и решения теоретических и прикладных задач.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется в форме самостоятельных работ или тестов в письменной форме, устных опросов по каждой теме.



#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Примерные задания для дифференцированного зачета:

Вариант № 1

1. Соболевские пространства. Классификация функциональных пространств.
2. Кусочно-полиномиальные аппроксимации (сплайны) для одномерного случая.

Вариант № 2

1. Описание Лагранжа и Эйлера.
2. Аппроксимации полей перемещений. Базисные функции. Ортогональный базис.

Вариант № 3

1. Уравнения продольно нагруженного упругого стержня на упругом основании.
2. Примеры вариационных формулировок для мембраны.

Вариант № 4

1. Система уравнений для задачи нагружения упругой мембраны.
2. Примеры вариационных формулировок для стержня.

Вариант № 5

1. Области с границей Липшица.
2. Понятие классического и обобщенного решения задач МСС.

Вариант № 6

1. Основные понятия механики сплошных сред.
2. Гильбертово пространство.

Вариант № 7

1. Система уравнений для задачи нагружения упругой мембраны.
2. Скалярное произведение и норма функции, расстояние.

Примеры экзаменационных билетов:

Экзаменационный билет № 1

1. Граничные задачи линейной теории упругости. Типы граничных условий.
2. Определение собственных форм и частот колебаний упругой балки.

Экзаменационный билет № 2

1. Тензоры деформаций и напряжений. Тензор модулей упругости. Закон Гука.
2. Уравнения движения упругой балки. Типы граничных условий.

Экзаменационный билет № 3

1. Принцип минимума потенциальной энергии в линейной теории упругости.
2. Собственные частоты и формы колебаний упругого стержня. Метод Фурье.

Экзаменационный билет № 4

1. Принцип минимума дополнительной энергии в линейной теории упругости.
2. Свободные и вынужденные колебания систем на примере упругого стержня.

Экзаменационный билет № 5

1. Аппроксимации полей перемещений. Базисные функции. Ортогональный базис.
2. Принцип Гамильтона–Остроградского для задачи о движении упругого стержня.

#### Экзаменационный билет № 6

1. Кусочно-полиномиальные аппроксимации (сплайны) для одномерного случая.
2. Постановка начально-краевой задачи динамики для упругого стержня.

#### Экзаменационный билет № 7

1. Регулярная триангуляция областей. Сплайны для многомерного случая.
2. Метод конечных элементов для решения задач линейной теории упругости.

#### Критерии оценивания

оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;

оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;

оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему систематизированные, знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;

оценка «хорошо (7)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он твердо знает материал экзаменационного билета, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

оценка «хорошо (6)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он знает материал экзаменационного билета, по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе много неточностей;

оценка «хорошо (5)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он знает материал экзаменационного билета, излагает его, умеет применять полученные знания на практике, не допускает в ответе грубых ошибок;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета он показал фрагментарный, характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета он показал разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушение логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2-1)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета, он показал, что не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Дифференцированный зачет проводится по итогам текущей успеваемости: по результатам контрольных, самостоятельных работ/тестов по каждой теме.

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 60 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена при подготовке ответов на билеты, обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, конспектами лекций, семинаров и любой другой литературой.

Во время проведения экзамена при ответе обучающегося на вопросы по билету или по программе дисциплины, он не может пользоваться конспектами лекций и семинаров и любой другой литературой.

Экзамен проводится в устной форме.

Традиционная форма билета содержит два теоретических вопроса по программе курса.

Перед началом экзаменационной сессии студенты получают перечень вопросов, ответы на которые необходимо знать для успешной сдачи экзамена.

Ответ студента оценивается по 10-балльной шкале.