

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Директор физтех-школы**  
**аэрокосмических технологий**  
**С.С. Негодяев**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Управление и оптимизация
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Космические технологии
	Физтех-школа Аэрокосмических Технологий
	кафедра механики и процессов управления
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 1

Программу составил: С.А. Решмин, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры механики и процессов управления 05.04.2024

## Аннотация

Программа курса предусматривает изучение широкого круга вопросов, связанных с управлением и оптимизацией динамических систем. Материал дается на строгом математическом уровне, важнейшие результаты сопровождаются полными доказательствами. Излагаются постановки задач оптимального управления и основные подходы к их решению. Центральными результатами, излагаемыми в курсе, являются принцип максимума Л.С. Понтрягина и метод динамического программирования Р. Беллмана. Принцип максимума дается для различных классов задач управления, приводится и доказывается формула для приращения функционала. Метод динамического программирования излагается для задач как с дискретным, так и с непрерывным временем. Подробно рассмотрена линейно-квадратичная задача оптимального управления.

Если в первом семестре главное внимание уделяется теории оптимальных управляемых процессов, то второй семестр посвящен вычислительным методам решения соответствующих задач. Излагаются методы, основанные на приведении к краевым задачам; методы, основанные на варьировании управления, включая градиентный метод; методы, основанные на варьировании траектории, включая метод локальных вариаций. Обсуждается ряд важных задач управления подвижными объектами (самолетами, ракетами).

Для освоения программы курса обучающиеся должны иметь базовые знания по математическому анализу, дифференциальным уравнениям, основам вариационного исчисления, численным методам. В результате усвоения курса студенты смогут формулировать, анализировать и решать задачи оптимального управления динамическими системами, пользуясь как аналитическими, так численными методами.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

- изучение основ теории оптимального управления и знакомство с методами решения различных классов задач оптимального управления через принцип максимума Л.С. Понтрягина и метод динамического программирования Р. Беллмана.

### Задачи дисциплины

- приобретение теоретических знаний в области теории оптимального управления;
- приобретение студентами базовых навыков использования принципа максимума Понтрягина и метода динамического программирования для решения задач оптимального управления;
- изучение методов численного решения задач с оптимального управления;
- приобретение знаний о связи принципа максимума с классическим вариационным исчислением и методом динамического программирования.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники)
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования

ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- общую постановку задач теории оптимального управления;
- применение принципа максимума Понтрягина и динамического программирования к решению задач оптимального управления;
- применение численных методов к решению задач оптимального управления.

уметь:

- применять на практике принцип максимума Понтрягина, метод динамического программирования и различные численные методы для решения задач оптимального управления;
- выбирать наиболее эффективный метод решения в зависимости от конкретной постановки оптимизационной задачи;
- приводить задачи оптимального управления к краевым задачам при помощи принципа максимума и решать их;
- осваивать новые предметные области, теоретические подходы и численные методы.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации;
- культурой постановки и моделирования физических задач;
- навыками решения задач оптимального управления динамическими системами, пользуясь как аналитическими, так численными методами.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Теория оптимального управления. Принцип максимума Л.С. Понтрягина.	10	10		15
2	Динамическое программирование.	10	10		15
3	Численные методы оптимального управления.	10	10		15
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

## 1. Теория оптимального управления. Принцип максимума Л.С. Понтрягина.

Постановка задач оптимального управления. Основные понятия. Примеры задач оптимального управления. Задачи со свободным правым концом траектории. Формула для приращения функционала. Принцип максимума Л.С. Понтрягина для задач со свободным правым концом. Формулировка и доказательство.

Линейные задачи со свободным правым концом. Принцип максимума как необходимое и достаточное условие. Формулировка принципа максимума для различных классов задач оптимального управления. Двухточечные задачи. Задача оптимального быстродействия.

Задачи с краевыми условиями. Условия трансверсальности. Автономные и неавтономные системы.

Задачи с фиксированным и нефиксированным временем окончания процесса. Задачи с интегральным и терминальным функционалом. Задачи с параметрами. Примеры задач оптимального управления. Задача быстродействия. Понятие синтеза оптимального управления.

Связь принципа максимума с классическим вариационным исчислением. Вывод уравнения Эйлера и условий Лежандра-Клебша из принципа максимума. Условие Якоби.

## 2. Динамическое программирование.

Управляемые многошаговые процессы. Принцип оптимальности. Метод динамического программирования для многошаговых процессов управления. Метод динамического программирования для задач оптимального управления.

Дифференциальное уравнение Беллмана. Постановка задач для уравнения Беллмана. Примеры. Связь метода динамического программирования с принципом максимума. Вывод условий трансверсальности при помощи метода динамического программирования.

Линейные управляемые системы с квадратичным функционалом. Построение синтеза оптимального управления.

## 3. Численные методы оптимального управления.

Численные методы, основанные на приведении задач оптимального управления к краевым задачам при помощи принципа максимума. Использование методов решения систем алгебраических уравнений для решения краевых задач. Метод Ньютона и его модификации.

Численные методы минимизации функций многих переменных. Понятие о линейном и нелинейном программировании. Градиентный метод. Метод штрафных функций.

Численные методы, основанные на варьировании управляющих функций. Градиентный метод в пространстве управлений. Учет ограничений на управляющие функции. Учет краевых условий и фазовых ограничений методом штрафных функций. Учет краевых условий методом проектирования градиента.

Метод последовательных приближений в пространстве управляющих функций. Способы улучшения сходимости и модификации метода. Примеры. Метод малого параметра для слабоуправляемых систем.

Численные методы, основанные на варьировании в пространстве фазовых координат. Метод динамического программирования. Полный и частичный перебор. Метод "блуждающей трубки". Понятие элементарной операции и приемы ее построения. Построение элементарной операции для задач динамики полета.

Метод локальных вариаций. Применение метода локальных вариаций к различным вариационным задачам. Вариационные задачи с неаддитивными функционалами. Вариационные задачи в частных производных.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Необходимое оборудование для лекций и практических занятий: учебная аудитория, персональные компьютеры и мультимедийное оборудование (проектор, интерактивная доска).

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Математическая теория оптимальных процессов [Текст]/Л. С. Понтрягин [и др.], -М., Наука, 1983
2. Математические методы оптимального управления [Текст]/В. Г. Болтянский , -М., Наука, 1969
3. Прикладные задачи динамического программирования [Текст]/Р. Беллман, С. Дрейфус , -М., Наука, 1965
1. Математическая теория оптимальных процессов.Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., М.: Наука, 1969.
2. Вариационное исчисление. Гельфанд И.М., Фомин С.В. , М.: Физматгиз, 1961.
3. Математические методы оптимального управления. Болтянский В.Г., М.: Наука, 1969.
4. Прикладные задачи динамического программирования. Беллман Р., Дрейфус С. , М.: Наука, 1965.
5. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
6. Черноушко Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. М.: Наука, 1973.
7. Черноушко Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.
8. Черноушко Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Физматлит, 1988.
9. Черноушко Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами.

### Дополнительная литература

1. Вариационное исчисление [Текст] : учебник для ун-тов / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин .— М. : Физматгиз, 1961 .— 228 с.
2. Математический анализ: задачи и решения [Текст] / Г. И. Просветов - М.БИНОМ. Лаб. знаний,2011

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://lib.mipt.ru/> – электронная библиотека Физтеха
2. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
3. <http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
4. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/> – электронная библиотека портала Eqworld

## 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Пакеты офисного программного обеспечения Microsoft Office (Word, Excel, PowerPoint, Windows Media Player),программный комплекс Maple.

## 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Успешное освоение курса «Управление и оптимизация» требует большой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, семинаров, учебной и научной литературе);
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и практических занятиях;
- подготовку к контрольным, самостоятельным работам и тестам.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в результате анализа итогов контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладные математика и физика  
**профиль подготовки:** Космические технологии  
Физтех-школа Аэрокосмических Технологий  
кафедра механики и процессов управления  
**курс:** 2  
**квалификация:** магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

**Разработчик:** С.А. Решмин, д-р физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники)
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Управление и оптимизация» обучающийся должен:

### знать:

- общую постановку задач теории оптимального управления;
- применение принципа максимума Понтрягина и динамического программирования к решению задач оптимального управления;
- применение численных методов к решению задач оптимального управления.

### уметь:

- применять на практике принцип максимума Понтрягина, метод динамического программирования и различные численные методы для решения задач оптимального управления;
- выбирать наиболее эффективный метод решения в зависимости от конкретной постановки оптимизационной задачи;
- приводить задачи оптимального управления к краевым задачам при помощи принципа максимума и решать их;
- осваивать новые предметные области, теоретические подходы и численные методы.

### владеть:

- навыками освоения большого объема информации;
- культурой постановки и моделирования физических задач;
- навыками решения задач оптимального управления динамическими системами, пользуясь как аналитическими, так численными методами.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется в форме контрольных работ в письменной форме по каждой теме.



#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Вычислительный метод решения задач оптимального управления, основанный на приведении к краевой задаче принципа максимума.
2. Связь принципа максимума и классического вариационного исчисления.
3. Метод Ньютона и его модификации. Применение метода Ньютона для решения краевых задач принципа максимума.
4. Принцип максимума для задачи оптимального управления со свободным правым концом (с доказательством).
5. Вычислительные методы поиска экстремума функции многих переменных. Градиентный метод. Учёт ограничений. Метод штрафных функций.
6. Метод динамического программирования для многошаговых процессов управления.
7. Градиентный метод в пространстве управлений.
8. Принцип максимума для линейной задачи оптимального управления со свободным правым концом.
9. Метод локальных вариаций для простейшей вариационной задачи.
10. Формула для приращения функционала в задаче оптимального управления (с выводом).

##### Экзаменационный билет 1

1. Метод динамического программирования для простейшей вариационной задачи (метод полного перебора).
2. Линейно-квадратичная задача оптимального управления.

##### Экзаменационный билет 2

1. Метод последовательных приближений в пространстве управлений для задач со свободным правым концом. Учёт краевых условий и фазовых ограничений.
2. Метод динамического программирования для задач оптимального управления.

##### Экзаменационный билет 3

1. Метод локальных вариаций для задачи оптимального управления. Понятие элементарной операции.
2. Принцип максимума для задач с краевыми условиями. Условия трансверсальности.

#### Критерии оценивания

оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;

оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;

оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему систематизированные, знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;

оценка «хорошо (7)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он твердо знает материал экзаменационного билета, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

оценка «хорошо (6)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он знает материал экзаменационного билета, по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе много неточностей;

оценка «хорошо (5)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он знает материал экзаменационного билета, излагает его, умеет применять полученные знания на практике, не допускает в ответе грубых ошибок;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета он показал фрагментарный, характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета он показал разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушение логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2-1)» выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета, он показал, что не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 60 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена при подготовке ответов на билеты, обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, конспектами лекций, семинаров и любой другой литературой.

Во время проведения экзамена при ответе обучающегося на вопросы по билету или по программе дисциплины, он не может пользоваться конспектами лекций и семинаров и любой другой литературой.

Экзамен проводится в устной форме.

Традиционная форма билета содержит два теоретических вопроса по программе курса.

Перед началом экзаменационной сессии студенты получают перечень вопросов, ответы на которые необходимо знать для успешной сдачи экзамена.

Ответ студента оценивается по 10-балльной шкале.