

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**и.о. директора физтех-школы
физики и исследований им.
Ландау**

А.А. Воронов

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Классические и квантовые случайные процессы
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау Физтех-кластер академической и научной карьеры
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

- 1 (осенний) - Дифференцированный зачет
- 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

- лекции: 60 час.
- семинары: 0 час.
- лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: Г.Г. Амосов, д-р физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании Физтех-кластера академической и научной карьеры 08.06.2020

Аннотация

В курсе рассматриваются ключевые понятия и методы теории случайных процессов. Развивается спектральная теория случайных процессов. Особое внимание уделяется гауссовским и пуассоновскому процессам. Вводятся квантовые процессы рождения, уничтожения и числа частиц в симметричном пространстве Фока. Доказывается стохастическая эквивалентность для броуновского движения и пуассоновского процесса квантовым случайным процессам в пространстве Фока.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Дать студентам знания о классических и квантовых случайных процессах. Определить основные типы процессов. Обсудить, чем квантовые процессы сходны и чем отличаются от классических.

Задачи дисциплины

- изучить основные виды классических и квантовых случайных процессов.
- изучить способы вычисления основных характеристик случайных процессов.
- изучить процессы классического и квантового белого шума.
- изучить возможность представления классических и квантовых процессов в виде стохастических интегралов.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны
знать:

- основные виды классических и квантовых случайных процессов;
- основные свойства случайных процессов, сходные в классическом и квантовом случае;
- основные свойства случайных процессов, различающие их в классическом и квантовом случае.

уметь:

- вычислять основные характеристики случайных процессов;
- анализировать свойства случайного процесса по его характеристикам;
- записывать классические и квантовые процессы в виде стохастических интегралов.

владеть:

- методами вычисления характеристических функций квантовых состояний;
- основными методами описания случайных процессов и их свойств;
- методами сравнения классических и квантовых корреляций.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Случайный процесс. Функция распределения, характеристическая функция, Среднее значение и корреляционная функция. Гауссовские случайные процессы.	4			2
2	Процессы с независимыми приращениями. Винеровский процесс.	4			2
3	Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс.	4			2
4	Представление случайных процессов, непрерывных в среднеквадратичном (разложение Карунена-Лоэва).	4			2
5	Стационарные случайные процессы. Спектральная функция процесса.	4			2
6	Теорема Бохнера-Хинчина. Спектральное представление.	4			2
7	Стохастический интеграл. Белый шум.	4			2
8	Спектральная плотность с конечным носителем. Теорема Котельникова-Шеннона.	2			1
9	Характеристическая функция квантового состояния. Гауссовские состояния. Гиббсовские состояния.	6			6
10	Квантовые случайные процессы. Характеристическая функция, среднее значение и корреляционная функция.	4			4
11	Двухточечные корреляции квантового случайного процесса. Неравенство Белла.	4			4

12	Симметричное (бозонное) пространство Фока над одночастичным гильбертовым пространством. Операторы рождения, уничтожения и числа частиц.	4			4
13	Квантовые случайные процессы рождения, уничтожения и числа частиц в симметричном пространстве Фока.	4			4
14	Стохастическая эквивалентность процессов рождения, уничтожения и числа частиц винеровскому и пуассоновскому процессам.	4			4
15	Квантовый стохастический интеграл.	4			4
Итого часов		60			45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Случайный процесс. Функция распределения, характеристическая функция, Среднее значение и корреляционная функция. Гауссовские случайные процессы.

Введение основных определений, используемых в курсе. Примеры построения гауссовских случайных процессов с заданными средними и корреляционными функциями.

2. Процессы с независимыми приращениями. Винеровский процесс.

Описание винеровского процесса и его основных свойств.

3. Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс.

Описание пуассоновского процесса и его основных свойств.

4. Представление случайных процессов, непрерывных в среднеквадратичном (разложение Карунена-Лоэва).

Представление случайного процесса в виде суммы по некоррелированным случайным величинам.

5. Стационарные случайные процессы. Спектральная функция процесса.

Преобразование Фурье корреляционной функции процесса.

6. Теорема Бохнера-Хинчина. Спектральное представление.

Общий вид корреляционной функции процесса.

7. Стохастический интеграл. Белый шум.

Интегрирование по процессам с независимыми приращениями.

8. Спектральная плотность с конечным носителем. Теорема Котельникова-Шеннона.

Теорема о представлении случайного процесса, имеющего конечную спектральную плотность.

Семестр: 2 (Весенний)

9. Характеристическая функция квантового состояния. Гауссовские состояния. Гиббсовские состояния.

Условия, при которых заданная функция является характеристической для некоторого состояния. Примеры характеристических функций.

10. Квантовые случайные процессы. Характеристическая функция, среднее значение и корреляционная функция.

Примеры квантовых случайных процессов с заданными характеристическими функциями.

11. Двухточечные корреляции квантового случайного процесса. Неравенство Белла.

Неравенство Белла и граница Цирельсона в применении к квантовым случайным процессам.

12. Симметричное (бозонное) пространство Фока над одночастичным гильбертовым пространством. Операторы рождения, уничтожения и числа частиц.

Построение симметричного пространства Фока. Экспоненциальные векторы и их полнота.

13. Квантовые случайные процессы рождения, уничтожения и числа частиц в симметричном пространстве Фока.

Основные квантовые случайные процессы в пространстве Фока и их свойства.

14. Стохастическая эквивалентность процессов рождения, уничтожения и числа частиц винеровскому и пуассоновскому процессам.

Реализация классических случайных процессов в виде семейств операторов в пространстве Фока.

15. Квантовый стохастический интеграл.

Интегрирование по основным процессам в пространстве Фока.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

При наличии такой возможности, аудитория с мультимедиа оборудованием (экран). Доска, мел или маркеры.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика [Текст] : учебник для вузов / Ю. А. Розанов .— 2-е изд., доп. — М. : Наука, 1989 .— 312 с.
2. Введение в квантовую теорию информации [Текст] : [лекции для студентов вузов] / А. С. Холево ; Независимый Моск. ун-т ; Высший колледж математ. физики .— М : МЦНМО, 2002 .— 128 с.

3. Лекции по математическим основаниям квантовой механики, учебное пособие /Г. Г. Амосов ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет). Москва, МФТИ, 2019

Дополнительная литература

An introduction to quantum stochastic calculus [Текст]: [монография]/K.R. Parthasarathy — Birkhaeuser Basel, 1992.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

www.arxiv.org Препринты по квантовой физике

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций. Для проведения дистанционных занятий и консультаций могут быть использованы zoom, Google Hangouts.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен, с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения и понятия, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау Физтех-кластер академической и научной карьеры (Фундаментальные проблемы физики квантовых технологий)
курс:	1
квалификация:	магистр
Семестры, формы промежуточной аттестации:	
1 (осенний) - Дифференцированный зачет	
2 (весенний) - Экзамен	
Разработчик:	Г.Г. Амосов, д-р физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Классические и квантовые случайные процессы» обучающийся должен:

знать:

- основные виды классических и квантовых случайных процессов;
- основные свойства случайных процессов, сходные в классическом и квантовом случае;
- основные свойства случайных процессов, различающие их в классическом и квантовом случае.

уметь:

- вычислять основные характеристики случайных процессов;
- анализировать свойства случайного процесса по его характеристикам;
- записывать классические и квантовые процессы в виде стохастических интегралов.

владеть:

- методами вычисления характеристических функций квантовых состояний;
- основными методами описания случайных процессов и их свойств;
- методами сравнения классических и квантовых корреляций.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Дайте определение случайного процесса, его функции распределения и характеристической функции.
2. Приведите общий вид функции распределения гауссовского случайного процесса.
3. Дайте определение процесса с независимыми приращениями.
4. Дайте определение винеровского случайного процесса.
5. Дайте определение пуассоновского случайного процесса.
6. Что такое спектральная функция стационарного случайного процесса?
7. Приведите формулировку и докажите теорему Бохнера-Хинчина.
8. Что такое спектральное представление стационарного случайного процесса?
9. Каковы особенности стационарных процессов, для которых спектральная плотность имеет конечный носитель?
10. Дайте определение стохастического интеграла.
11. Дайте определение белого шума.

Семестр 10.

1. Сформулируйте и докажите теорему Котельникова-Шеннона.
2. Что такое характеристическая функция квантового состояния?
3. Напишите общий вид характеристической функции квантового гауссовского состояния.
4. Что такое гиббсовское состояние?
5. Дайте определение квантового случайного процесса, его характеристической и корреляционной функций.
6. Что такое неравенство Белла и как его можно применить для исследования корреляций случайного процесса?
7. Дайте определение симметричного пространства Фока над одночастичным гильбертовым пространством.
8. Дайте определения операторов рождения, уничтожения и числа частиц в симметричном пространстве Фока.
9. Дайте определение квантовых случайных процессов рождения, уничтожения и числа частиц.
10. Докажите, что квантовые процессы рождения и уничтожения стохастически эквивалентны винеровскому процессу.
11. Докажите, что квантовый процесс числа частиц стохастически эквивалентен пуассоновскому процессу.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов и заданий

- 1) Определите, может ли данная матрица быть корреляционной функцией гауссовского случайного процесса.
- 2) Восстановить характеристическую функцию гауссовского случайного процесса по заданным средним и корреляционной матрице.
- 3) По характеристической функции гауссовского случайного процесса найти его моменты.
- 4) По заданному семейству некоррелированных случайных величин (x_n , $n=1,2,3,4,\dots$) построить непрерывный в среднеквадратичном процесс с заданной корреляционной функцией и средними значениями.
- 5) По заданной корреляционной функции стационарного случайного процесса восстановить его спектральную плотность.
- 6) По заданному представлению стационарного случайного процесса в виде стохастического интеграла, найти спектральную плотность процесса.
- 7) Вычислить характеристические функции для когерентных и сжатых когерентных состояний.
- 8) Вычислить характеристическую функцию гиббсовского состояния.
- 9) Найдите корреляционную функцию квантового случайного процесса, представленного в виде стохастического интеграла.

Примеры экзаменационных билетов

Билет 1.

1. Гауссовские случайные процессы. Средний, матрица ковариаций, характеристическая функция.
2. Восстановить матрицу ковариаций по заданной характеристической функции.

Билет 2.

1. Стационарные случайные процессы. Представление ковариационной функции.
2. Пусть случайная величина f имеет нормальное распределение. Найти ковариационную функцию случайного процесса $X(t)=tf+a$, где a — действительное число.

Билет 3.

1. Квантовые корреляции. Неравенства Белла и Цирельсона.
2. Привести пример квантовой корреляционной матрицы, для которой нарушается неравенство Белла, но выполняется неравенство Цирельсона.

Билет 4.

1. Представление Винеровского процесса в симметричном пространстве Фока.
2. Построить семейство операторов в симметричном пространстве Фока, стохастически эквивалентное гауссовскому случайному процессу с нулевыми средними и заданной корреляционной функцией.

Билет 5.

1. Представление Пуассоновского процесса в симметричном пространстве Фока.
2. Вычислить стохастический интеграл от заданной функции по процессу сохранения числа частиц в симметричном пространстве Фока.

Критерии оценивания

- оценка "отлично (10)" выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка "отлично (9)" выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка "отлично (8)" выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка "хорошо (7)" выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применить полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка "хорошо (6)" выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применить полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка "хорошо (5)" выставляется студенту, если он знает материал, по существу излагает его, умеет применить полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- оценка "удовлетворительно (4)" выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировка базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом владеющему основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и способному применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка "удовлетворительно (3)" выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировка базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом владеющему фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и способному применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка "неудовлетворительно (2)" выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка "неудовлетворительно (1)" выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета и экзамена обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.

При проведении дифференцированного зачета и экзамена обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов.