

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

| | |
|----------------------------|---|
| | Рабочая программа дисциплины (модуля) |
| по дисциплине: | Алгебраическая геометрия. Часть 1 |
| по направлению: | Прикладная математика и физика |
| профиль подготовки: | Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра дискретной математики |
| курс: | 1 |
| квалификация: | магистр |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 45 всего, в том числе:

лекции: 0 час.

семинары: 45 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 60 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: А.Я. Белов, д-р физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

Аннотация

Целью данного курса является изучение основных положений и методов алгебраической геометрии. Первая часть курса (осенний семестр) представляет собой по существу введение в коммутативную алгебру. В осеннем семестре происходит изучение следующих разделов коммутативной алгебры: коммутативные кольца, топология Зарисского на спектре кольца, модули, аддитивные функторы, кольца частных, целая зависимость, примарное разложение, нетеровы кольца и модули.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

освоение алгебраической геометрии.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области алгебраической геометрии;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области алгебраической геометрии;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических ис-следований в области алгебраической геометрии.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|---|--|
| УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий | УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними |
| УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки | УК-6.2 Оценивает свою деятельность, соотносит цели, способы и средства выполнения деятельности с её результатами |
| ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук | ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности |
| ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения | ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники) |

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы, теории алгебраической геометрии;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов алгебраической геометрии;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач алгебраической геометрии.

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач алгебраической геометрии;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов алгебраической геометрии;
- ☐ предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

| № | Тема (раздел) дисциплины | Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час. | | | |
|-----------------------|--|---|----------|-----------------|----------------|
| | | Лекции | Семинары | Лаборат. работы | Самост. работа |
| 1 | Абстрактные алгебраические многообразия над замкнутым полем | | 8 | | |
| 2 | Геометрические схемы; делимость и собственность | | 10 | | |
| 3 | Многообразия Сегре, Веронезе и Грассмана: проективные вложения и задание квадратичными уравнениями | | 8 | | |
| 4 | Пространство проективных гиперповерхностей | | 9 | | |
| 5 | Размерность алгебраического многообразия | | 10 | | 60 |
| Итого часов | | | 45 | | 60 |
| Подготовка к экзамену | | 30 час. | | | |
| Общая трудоёмкость | | 135 час., 3 зач.ед. | | | |

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Абстрактные алгебраические многообразия над замкнутым полем

Сложность «самых сложных функций» от n аргументов

2. Геометрические схемы; делимость и собственность

Формула разложения булевой функции по нескольким переменным

3. Многообразия Сегре, Веронезе и Грассмана: проективные вложения и задание квадратичными уравнениями

Решение дискретной задачи как вычисление набора булевых функций

4. Пространство проективных гиперповерхностей

Теорема о рекуррентном неравенстве

5. Размерность алгебраического многообразия

Вычисление определителя и обращение матриц в классе NC

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютерами, доской и маркерами.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Алгебраическая геометрия для всех [Текст] = Undergraduate algebraic geometry/М. Рид, -М., Мир, 1991
2. Основы алгебраической геометрии [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / И. Р. Шафаревич .— 3-е изд., доп. — М. : МЦНМО, 2007 .— 589 с. : ил. — (Классические направления в математике). - Список лит. к истор. очерку: с. 580-582. - Предм. указ.: с. 583-588. - 2000 экз. - ISBN 978-5-94057-085-1 (в пер.) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

Дополнительная литература

1. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Е. Умнов ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т .— 3-е изд., испр. и доп. — М. : МФТИ, 2011 .— 544 с. +pdf. версия. - Библиогр.: с. 528. - Предм. указ.: с. 529-543. - 400 экз. - ISBN 978-5-7417-0378-6 (в пер.) .— Полный текст (Режим доступа : доступ из сети МФТИ).

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций. В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладные математика и физика
профиль подготовки: Общая и прикладная физика
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
кафедра дискретной математики
курс: 1
квалификация: магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Разработчик: А.Я. Белов, д-р физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|---|--|
| УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий | УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними |
| УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки | УК-6.2 Оценивает свою деятельность, соотносит цели, способы и средства выполнения деятельности с её результатами |
| ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук | ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности |
| ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения | ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники) |

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Алгебраическая геометрия. Часть 1» обучающийся должен:

знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы, теории алгебраической геометрии;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов алгебраической геометрии;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач алгебраической геометрии.

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач алгебраической геометрии;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов алгебраической геометрии;
- ☐ предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Форма контроля: первый семестр -- экзамен, второй семестр -- дифференцированный зачет. В течение курса студенты решают и сдают листочки с задачами. Образцы задач приведены ниже.

1. Пусть кольцо A таково, что любой его элемент x удовлетворяет уравнению $x^n = x$ для некоторого $n > 1$, зависящего от x . Покажите, что любой простой идеал в A максимален.
2. Пусть A - коммутативное кольцо. Следующие утверждения эквивалентны:
 - 1). Пространство $\text{Spec } A$ несвязно.
 - 2). $A \cong A_1 \times A_2$, где $A_1, A_2 \neq 0$.
 - 3). A содержит идемпотентный элемент $e \neq 0, 1$.
3. Пусть $K \subset L$ - расширение полей, $\alpha, \beta \in L$ - алгебраические элементы. Тогда элементы $\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta$ тоже алгебраические.
4. Пусть $0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow 0$ - точная последовательность A -модулей. Если M' и M'' конечно порождены, то и M конечно порожден. Верно ли обратное?
5. Пусть $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ - кольцо вычетов по модулю $n > 1$. Каждому делителю d числа n соответствует точная последовательность

$$0 \rightarrow d\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n \rightarrow d\mathbb{Z}_n \rightarrow 0,$$
 где $d' = n/d$. Покажите, что эта последовательность расщепляется (или, что то же, $d'\mathbb{Z}_n$ - проективный \mathbb{Z}_n -модуль) тогда и только тогда, когда числа d и d' взаимно просты. Приведите пример проективного модуля, не являющегося свободным.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

- 1) Индекс пересечения и теорема Безу для плоских проективных кривых.
- 2) Особенности плоских проективных кривых. Двойственная кривая. Соотношения Плюккера для кривых с простейшими особенностями.
- 3) Описание линейной оболочки данного тензора. Квадратичные уравнения, задающие образ вложений Плюккера, Сегре и Веронезе.
- 4) Пересечение клеток дополнительной размерности на грассманиане. Формулы Пьерри.
- 5) Свойства целых и нормальных расширений колец. Конечно порождённая алгебра над полем является полем только если она целая.
- 6) Теоремы Гильберта о базисе и о нулях полиномиального идеала. Конечно порождённая алгебра над полем нётерова.
- 7) Антиэквивалентность категории аффинных алгебраических многообразий над алгебраически замкнутым полем K и категории конечно порождённых приведённых K -алгебр. Прямое произведение многообразий.
- 8) Топология Зариского на спектре кольца. Разложение на неприводимые компоненты.
- 9) Свойства конечных морфизмов: замкнутость, собственные замкнутые подмножества переходят в собственные, конечная сюръекция на нормальное многообразие открыта.
- 10) Собственность проективных многообразий. Существование конечной эпиморфной проекции проективного (соотв. аффинного) многообразия на проективное (соотв. аффинное) пространство.
- 11) Теоремы о размерности пересечения и о размерностях слоёв морфизма. Неприводимость многообразия, расслоенного над неприводимым многообразием с неприводимыми равноразмерными слоями.
- 12) Группы Пикара аффинного факториального многообразия и грассманиана.
- 13) Тривиальность векторных расслоений над аффинной прямой. Теорема Биркгофа-Гротендика о расщепимости векторного расслоения на проективной прямой.
- 14) Связь между дивизорами Вейля, дивизорами Картье и обратимыми пучками. Теорема о вырезании.
- 15) Рациональное отображение в проективное пространство, задаваемое линейной системой дивизоров.
- 16) Свойства гладких многообразий: локальная факториальность и Коэн-маколеевость, подмногообразие коразмерности m в гладком многообразии гладко тогда и только тогда, когда оно задаётся m уравнениями с линейно независимыми дифференциалами.

17) Принцип постоянства: количество элементов в слоях этального морфизма постоянно; степень конечного доминантного морфизма многообразия X на нормальное многообразие Y не меньше числа прообразов произвольной точки; если Y гладкое, то морфизм локально свободен тогда и только тогда, когда X коэн-маколеево.

18) Когомологии Чеха обратимых пучков на проективном пространстве.

19) Двойственность Серра и теорема Римана-Роха на гладкой кривой.

20) Кривая рода g вкладывается в трёхмерное проективное пространство как кривая степени $> g+2$

21) Формула Гурвица.

22) Групповая структура на эллиптической кривой. Пространство модулей эллиптических кривых.

Примеры билетов:

Билет 1:

1. Индекс пересечения и теорема Безу для плоских проективных кривых.

2. Группы Пикара аффинного факториального многообразия и грассманиана.

Билет 2:

1. Формула Гурвица.

2. Связь между дивизорами Вейля, дивизорами Картье и обратимыми пучками. Теорема о вырезании.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач

- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.