

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Probability Theory and Applications/Теория вероятностей
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра машинного обучения и цифровой гуманитаристики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: А.А. Глибичук, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры машинного обучения и цифровой гуманитаристики 05.03.2020

Аннотация

Курс предназначен для магистров математики, интересующихся современными методами дискретной математики и вероятностными приложениями в информатике. Курс включает в себя все основные определения и положения теории вероятностей: аксиоматику Колмогорова, распределения, случайные величины и векторы, математическое ожидание, вероятностные неравенства, законы больших чисел и центральную предельную теорему.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

овладение основными современными методами теории вероятностей.

Задачи дисциплины

- студенты овладевают базовыми знаниями (понятиями, концепциями, методами и моделями) теории вероятностей;
- приобретение теоретических знаний и практических навыков по теории вероятностей;
- консультирование и помощь студентам в проведении собственных теоретических исследований по теории вероятностей.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы теории вероятностей;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов теории вероятностей;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательства и доказательства основных теорем в разделах, входящих в основную часть цикла;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы решения типовых прикладных задач теории вероятностей.

уметь:

- ☐ понять задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- ☐ оценить правильность постановки задачи;
- ☐ строго доказывать или опровергать заявление;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения проблем, в том числе нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть последствия результатов;
- ☐ точно представлять математические знания по теории вероятностей в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыки усвоения большого количества информации и решения задач (в том числе сложных);
- ☐ навыки самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культура постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих использования математических подходов и методов их решения;
- ☐ предметный язык теории вероятностей и навыки грамотного описания решения задач и представления результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Дискретные вероятностные пространства.	6	6		9
2	Независимость от произвольного набора случайных величин.	6	6		9
3	Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах.	6	6		8
4	Случайные элементы, случайные величины и векторы.	6	6		6
5	Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (доказательство единственности).	2	2		6
6	Условные вероятности.	4	4		7
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Дискретные вероятностные пространства.

Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры.

2. Независимость от произвольного набора случайных величин.

Независимость от произвольного набора случайных величин. Критерий независимости, теорема о независимости борелевских функций от непересекающихся множеств независимых случайных величин.

3. Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах.

Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах. Независимость от случайных величин. Математическое ожидание случайной величины, ее основные свойства. Дисперсия, ковариантность и их свойства.

4. Случайные элементы, случайные величины и векторы.

Случайные элементы, случайные величины и векторы. Достаточное условие измеримости отображения, следствие для случайных величин и векторов. Действия со случайными величинами.

5. Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (доказательство единственности).

Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (доказательство единственности).
Теорема Лебега о функции распределения

6. Условные вероятности.

Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Примеры

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Комбинаторика и теория вероятностей [Текст] / А. М. Райгородский - М.МФТИ,2012
Вероятность [Текст]. В 2 т. Т. 1. Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы : учебник для вузов / А. Н. Ширяев .— 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Изд-во МЦНМО, 2007, 2011 .— 552 с. - Библиогр.: с. 527-533. - Предм. указ.: с. 534-547. - ISBN 978-5-94057-752-2 (в пер.) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

Дополнительная литература

1. Вероятностные процессы [Текст]. Вып. 2/К. Ито , -М., Изд-во иностранной лит., 1963

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Мультимедийные технологии можно использовать на лекциях и практических занятиях, в том числе на презентациях.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего использовать лекционные материалы.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра машинного обучения и цифровой гуманитаристики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Разработчик: А.А. Глибичук, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Probability Theory and Applications/Теория вероятностей» обучающийся должен:

знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы теории вероятностей;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов теории вероятностей;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательства и доказательства основных теорем в разделах, входящих в основную часть цикла;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы решения типовых прикладных задач теории вероятностей.

уметь:

- ☐ понять задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- ☐ оценить правильность постановки задачи;
- ☐ строго доказывать или опровергать заявление;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения проблем, в том числе нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть последствия результатов;
- ☐ точно представлять математические знания по теории вероятностей в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыки усвоения большого количества информации и решения задач (в том числе сложных);
- ☐ навыки самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культура постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих использования математических подходов и методов их решения;
- ☐ предметный язык теории вероятностей и навыки грамотного описания решения задач и представления результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры домашних заданий

1. Точка x выбирается случайным образом из прямоугольника со сторонами длиной 1 и 2. Найдите вероятность того, что ближайшая к x сторона имеет длину 1.
2. $2I(x + y \leq 1, x > 0, y > 0)$ - плотность случайного вектора (ξ, η) . Пусть $p_\xi, p_\eta, p_{\xi + \eta}$ - плотности (непрерывные на $(0,1)$) $\xi, \eta, \xi + \eta$ соответственно. Найдите $p_\xi(1/2), p_\eta(1/2), p_{\xi + \eta}(1/2)$.
3. Пусть $\xi \sim \text{Bern}(p)$ и F - его функция распределения. Какое распределение имеет $F(\xi)$?

4. Пусть $S_n, n \in \mathbb{Z}^+$ - симметричное случайное блуждание на \mathbb{Z} . Пусть X - число $k \in \{1, \dots, 10\}$ таких, что $S_k = 0$. Найдите $\text{Var}X$.

5. Пусть $(\xi_n - \xi) \xrightarrow{P} 0$. Верно ли, что а) $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$? б) $\xi_n^2 \xrightarrow{P} \xi^2$? в) $\xi_n^3 \xrightarrow{P} \xi^3$?

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов к экзамену:

1. Вероятностное пространство. Аксиомы Колмогорова. Теорема о непрерывности в «нуле» вероятностной меры.
2. Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры.
3. Геометрические вероятности. Примеры.
4. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Примеры формул Байеса.
5. Теорема о монотонных классах.
6. Независимость событий и систем событий. Пример Бернштейна. Лемма о достаточном условии независимости сигма-алгебр.
7. Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (доказательство единственности).
8. Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах. Независимость от случайных величин. Математическое ожидание случайной величины, ее основные свойства. Дисперсия, ковариантность и их свойства.
9. Случайные элементы, случайные величины и векторы. Достаточное условие измеримости отображения, следствие для случайных величин и векторов. Действия со случайными величинами.
10. Независимость от произвольного набора случайных величин. Критерий независимости, теорема о независимости борелевских функций от непересекающихся множеств независимых случайных величин.
11. Математическое ожидание случайной величины (интеграл Лебега в вероятностной мере): определение простых, неотрицательных и произвольных случайных величин. Проверка определений.
12. Основные свойства математического ожидания. Теорема о математическом ожидании для произведения независимых случайных величин.
13. Дисперсия, ковариантность и их свойства. Неравенство Коши-Буняковского. Дисперсия суммы независимых случайных величин. Ковариационная матрица случайного вектора, ее неотрицательная определенность.
14. Неравенство Маркова, неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Неравенство Дженсена.
15. Типы сходимости случайных величин, их взаимосвязь. Критерий Коши сходимости с вероятностью 1.
16. Неравенство Колмогорова. Теорема сходимости для почти наверняка серии случайных величин.
17. Усиленный закон больших чисел для независимых случайных величин с ограниченными дисперсиями.
18. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Теорема о монотонной сходимости, лемма Фату, теорема Лебега о мажорированной сходимости.
19. Лемма Бореля Кантелли. Усиленный закон больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин с ограниченным математическим ожиданием.
20. Формула пересчета математических ожиданий. Теорема о замене переменной в интеграле Лебега.
21. Прямое произведение вероятностных пространств. Теорема Фубини (b / d). Совместное распределение конечного набора случайных величин. Свертка распределений.
22. Слабая сходимость и сходимость в основном вероятностных мер. Теорема Александрова (б / г). Теорема об эквивалентности сходимости по распределению случайных величин и сходимости функций распределения во всех точках непрерывности предельной функции.
23. План тестов Бернулли и полиномиальный план. Предельные теоремы для схемы Бернулли: теорема Пуассона и теорема Муавра-Лапласа (b / d).
24. Характеристические функции вероятностных мер. функции распределения, случайные величины и векторы. Примеры. Основные свойства характеристических функций случайных величин.

25. Теорема единственности для характеристических функций вероятности. Независимость компонент случайного вектора в терминах характеристических функций.
26. Теорема непрерывности для характеристических функций (b / d). Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин.
27. Теорема Берри Эссеена о скорости сходимости в центральной предельной теореме (b / d). Оценки константы в теореме Берри Эссеена.

Билет 1

1. Дизайн тестов Бернулли и полиномиальный дизайн. Предельные теоремы для схемы Бернулли: теорема Пуассона и теорема Муавра-Лапласа (b / d)
2. Неравенство Маркова, неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Неравенство Дженсена

Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется студенту, проявившему всестороннее, систематическое и глубокое знание материала образовательной программы, самостоятельно выполнившему все задания, предусмотренные программой, глубоко изучившему основную и дополнительную литературу, рекомендованную программой. , активно работает в классе и понимает основные научные концепции по изучаемой дисциплине, проявил творческий подход и научный подход в понимании и представлении материала образовательной программы, ответ на который характеризуется использованием богатых и адекватных терминов, а также последовательным и логичным изложением материала;

Оценка «отлично (9)» выставляется студенту, который продемонстрировал всестороннее систематическое знание материала образовательной программы, самостоятельно выполнил все задачи, предусмотренные программой, глубоко усвоил основную литературу и знаком с рекомендуемой дополнительной литературой. по программе, активно проработал на занятиях, показал системность знаний по дисциплине, достаточную для дальнейшего изучения, а также умение самостоятельно расширять ее, ответ которой отличается точностью используемых терминов, а изложение материала в нем последовательное и логичное;

Оценка «отлично (8)» выставляется студенту, который проявил полное знание материала образовательной программы, не допускает существенных неточностей в своем ответе, самостоятельно выполнил все задания, предусмотренные программой, изучил основную литературу, рекомендованную учебной программой. программа, активно проработанная на занятиях, показала системность его знаний по дисциплине, достаточных для дальнейшего изучения, а также способность самостоятельно их расширять;

Оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, который проявил достаточно полное знание материала образовательной программы, не допускает существенных неточностей в ответе, самостоятельно выполнил все задания, предусмотренные программой, изучил основную рекомендованную литературу по программе, активно работал на занятиях, показал системность своих знаний по дисциплине, достаточных для дальнейшего изучения, а также умение самостоятельно их усиливать;

Оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, который проявил достаточно полное знание материала образовательной программы, не допускает существенных неточностей в своем ответе, самостоятельно выполнил основные задачи, предусмотренные программой, изучил основную литературу. рекомендован программой, показал систематичность своих знаний по дисциплине, достаточную для дальнейшего изучения;

Оценка «хорошо (5)» дается студенту, продемонстрировавшему знание материала основной образовательной программы в объеме, необходимом для дальнейшего обучения и будущей работы по профессии, который, не проявляя достаточной активности на уроках, тем не менее самостоятельно выполнял, овладел основными задачами, предусмотренными программой, освоил основную литературу, рекомендованную программой, допустил ошибки в их выполнении и ответе во время тестирования, но имеет необходимые знания для исправления этих ошибок самостоятельно;

Оценка «удовлетворительно (4)» дается студенту, обнаружившему знание материала основной образовательной программы в объеме, необходимом для дальнейшего обучения и будущей работы по профессии, который, не проявляя достаточной активности на уроках, тем не менее самостоятельно выполнял, выполнил основные задачи, предусмотренные программой, изучил основную литературу, но допустил ошибки в их выполнении и в своем ответе во время теста, но имеет необходимые знания для исправления этих ошибок под руководством преподавателя;

Оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, проявившему знание материала основной образовательной программы в объеме, необходимом для дальнейшего обучения и будущей работы по профессии, не проявившего активности на занятиях, самостоятельно выполнившего основные задачи, предусмотренные программой, но допускающая ошибки в их выполнении и в ответе при тестировании, но обладающая необходимыми знаниями для устранения под руководством преподавателя наиболее существенных ошибок;

Оценка «неудовлетворительно (2)» дается студенту, который показал пробелы в знаниях или недостаток знаний по значительной части материала основной образовательной программы, не выполнил самостоятельно основные задачи, требуемые программой, допустил принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой задач, который не может продолжить учебу или начать профессиональную деятельность без дополнительной подготовки по рассматриваемой дисциплине;

Оценка «неудовлетворительно (1)» ставится студенту при отсутствии ответа (отказ от ответа), либо когда представленный ответ совсем не соответствует сути вопросов, содержащихся в задании.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время экзамена студенту разрешается использовать программу дисциплины.