

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Алгебраическая геометрия. Часть 2
по направлению:	Прикладная математика и физика
профиль подготовки:	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра дискретной математики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 0 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: А.Я. Белов, д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

Аннотация

Целью данного курса является изучение основных положений и методов алгебраической геометрии. Первая часть курса (осенний семестр) представляет собой по существу введение в коммутативную алгебру.

Второй семестр представляет собой введение в теорию алгебраических многообразий и начала теории схем. Изучаются следующие понятия: аффинные и проективные алгебраические множества и многообразия, регулярные функции, морфизмы, рациональные отображения, особые точки, неособые кривые; предпучки и пучки на топологических пространствах, локально окольцованные пространства и схемы, морфизмы.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

освоение продвинутого курса алгебраической геометрии.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области алгебраической геометрии;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области алгебраической геометрии;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области алгебраической геометрии.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-4 Способен применять современные коммуникативные технологии, в том числе на иностранном(ых) языке(ах), для академического и профессионального взаимодействия	УК-4.3 Способен представлять результаты академической и профессиональной деятельности на различных научных мероприятиях, включая международные
	УК-4.4 Способен использовать современные средства информационно-коммуникационных технологий для академического и профессионального взаимодействия
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.2 Оценивает свою деятельность, соотносит цели, способы и средства выполнения деятельности с её результатами
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
ОПК-5 Способен и готов к повышению квалификации, профессиональному росту и руководству коллективом в сфере своей профессиональной деятельности, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия	ОПК-5.3 Стремится к получению новых знаний, профессиональному и личностному росту
	ОПК-5.1 Способен работать в коллективе, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы, теории алгебраической геометрии;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов алгебраической геометрии;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач алгебраической геометрии.

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач алгебраической геометрии;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов алгебраической геометрии;
- ☐ предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	(Ко)касательное пространство Зариского.		12		6
2	Алгебраические векторные расслоения.		12		6
3	Введение в теорию когомологий когерентных пучков.		12		6
4	Линейные системы и отображения в проективное пространство, задаваемые линейными системами.		12		6
5	Подвижность и обильность.		12		6
Итого часов			60		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. (Ко)касательное пространство Зариского.

Конормальное расслоение и нормальный конус подмногообразию.

2. Алгебраические векторные расслоения.

1-мерные когомологии Чеха с коэффициентами в GL.

3. Введение в теорию когомологий когерентных пучков.

Когомологии обратимых пучков на проективных пространствах.

4. Линейные системы и отображения в проективное пространство, задаваемые линейными системами.

Теорема Вигдерсона о моделировании контактных схем схемами чётности.

5. Подвижность и обильность.

Дивизоры Вейля и (псевдо)дивизоры Картье.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Алгебраическая геометрия для всех [Текст] = Undergraduate algebraic geometry/М. Рид, -М., Мир, 1991
2. Основы алгебраической геометрии [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / И. Р. Шафаревич. — 3-е изд., доп. — М. : МЦНМО, 2007. — 589 с. : ил. — (Классические направления в математике). - Список лит. к истор. очерку: с. 580-582. - Предм. указ.: с. 583-588. - 2000 экз. - ISBN 978-5-94057-085-1 (в пер.) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

Дополнительная литература

1. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Е. Умнов ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т). — 3-е изд., испр. и доп. — М. : МФТИ, 2011. — 544 с. +pdf. версия. - Библиогр.: с. 528. - Предм. указ.: с. 529-543. - 400 экз. - ISBN 978-5-7417-0378-6 (в пер.) .— Полный текст (Режим доступа : доступ из сети МФТИ).

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций. В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладные математика и физика
профиль подготовки: Общая и прикладная физика
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
кафедра дискретной математики
курс: 1
квалификация: магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: А.Я. Белов, д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-4 Способен применять современные коммуникативные технологии, в том числе на иностранном(ых) языке(ах), для академического и профессионального взаимодействия	УК-4.3 Способен представлять результаты академической и профессиональной деятельности на различных научных мероприятиях, включая международные
	УК-4.4 Способен использовать современные средства информационно-коммуникационных технологий для академического и профессионального взаимодействия
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.2 Оценивает свою деятельность, соотносит цели, способы и средства выполнения деятельности с её результатами
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
ОПК-5 Способен и готов к повышению квалификации, профессиональному росту и руководству коллективом в сфере своей профессиональной деятельности, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия	ОПК-5.3 Стремится к получению новых знаний, профессиональному и личностному росту
	ОПК-5.1 Способен работать в коллективе, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Алгебраическая геометрия. Часть 2» обучающийся должен:

знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы, теории алгебраической геометрии;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов алгебраической геометрии;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач алгебраической геометрии.

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач алгебраической геометрии;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов алгебраической геометрии;
- ☐ предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Форма контроля: второй семестр -- дифференцированный зачет. В течение курса студенты решают и сдают листочки с задачами. Образцы задач приведены ниже.

1. (Насыщенные системы) Мультипликативная система $S \subseteq A$ называется насыщенной, если $x, y \in S \implies xy \in S$.

1). Пусть S насыщена и не содержит нулевой элемент (то есть не совпадает со всем кольцом A). Докажите, что $A \setminus S$ - объединение простых идеалов.

2). Всякая мультипликативная система S содержится в некоторой насыщенной системе S' . Для любой S существует наименьшая содержащая ее насыщенная система \overline{S} (она называется насыщением S).

3). Если $0 \notin S$, то дополнение к \overline{S} совпадает с объединением простых идеалов, не пересекающихся с S .

4). $S^{-1}A \cong \varprojlim S^{-1}A$.

2. Пусть Y -- проективное многообразие с однородным координатным кольцом $S(Y)$. Докажите, что размерность Крулля $\dim S(Y)$ равна $\dim Y + 1$.

3. Пусть Y -- аффинное многообразие. Докажите, что Y нормально тогда и только тогда, когда его аффинное координатное кольцо $A(Y)$ целозамкнуто.

4. Пусть φ -- рациональное отображение многообразия X в Y . Докажите, что существует наибольшее открытое подмножество U , на котором φ представлено морфизмом.

5.. Докажите, что многообразие $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (аффинная плоскость без начала координат) не является аффинным многообразием.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1) Существует ли комплексная 2×4 -матрица 2×2 -миноры которой (выписанные в случайном порядке) суть а) 2,3,4,5,6,7 б) 3,4,5,6,7,8 ? Если да, приведите пример такой матрицы, если нет, объясните почему.

2) Покажите, что поле, аддитивная группа которого конечно-порождена, конечно как множество.

3) Покажите, что гладкая плоская кватрика имеет 28 бикасательных или одну 4-кратную касательную.

4) Покажите, что классы пропорциональных $m \times n$ -матриц ранга не больше k образуют неприводимое проективное многообразие и найдите его размерность.

5) Обозначим через P проективное пространство плоских кубических кривых, проходящих через заданные 6 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой, а все 6 не лежат на конике. Отображение f сопоставляет каждой точке плоскости, отличной от 6 данных, гиперплоскость в P , образованную всеми кубическими кривыми из P , проходящими через эту точку. Найдите $\dim P$, покажите, что отображение f корректно определено и замыкание его образа (в проективном пространстве, двойственном к P) является гладкой кубической поверхностью, и явно опишите 27 пучков кубических кривых из P , которые переходят в 27 прямых на этой поверхности.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.