

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы физики  
и исследований им. Ландау  
А.В. Рогачев**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Методы решения некорректных обратных задач
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра прикладной геофизики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Программу составил: Н.В. Дубиня, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры прикладной геофизики 15.03.2021

## Аннотация

Курс посвящен методам решения некорректных задач математической физики, в частности, математической геофизики. В случае невозможности непосредственных измерений характеристик изучаемых объектов геологической среды экспериментатору приходится решать так называемые обратные задачи. По косвенной информации об исследуемом объекте нужно установить природу тех или иных сигналов. В геофизической практике существенно дешевле построить математическую модель явления с помощью теории некорректных задач, чем заниматься бурением глубоких скважин. В процессе освоения курса слушатели познакомятся с основными принципами теории некорректных задач, типами постановок, различными регуляризирующими алгоритмами. Большое внимание будет уделено проблемам интерпретации больших и сверхбольших объемов данных о геопотенциальных полях и функции, описывающей рельеф земной поверхности. Обучающиеся смогут применять для решения линейных и нелинейных обратных задач так называемый метод интегральных представлений, который позволяет наиболее полно учитывать априорную информации о геологической среде, обрабатывать разнородные и разноточные данные.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

Целью дисциплины является подготовка специалистов в области математической геофизики и геоинформатики в эпоху суперкомпьютеров, параллельных вычислений и больших массивов данных. Методы, применяемые в геоинформатике, позволяют адекватно интерпретировать огромные массивы непрерывно меняющихся данных о рельефе земной поверхности (данные спутниковой альтиметрии и т.п.), решать геоморфологические задачи, создавать аналитические аппроксимации потенциальных полей Земли. Математическая геофизика основана на классических математических методах и подходах, разработанных исследователями в области математического анализа, дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными), функционального анализа. Важнейшим «структурным элементом» математической геофизики является теория некорректных задач. Специфика геофизической практики требует развития методов регуляризации, адаптации уже существующих алгоритмов к решению задач интерпретационного характера, создания новых подходов и концепций.

### Задачи дисциплины

Обеспечить высокий уровень математической культуры обучающихся, который является совершенно необходимым условием успешного решения сложных задач интерпретационного характера в условиях резкого роста объема информации об окружающей среде. Знание теории обратных и некорректных задач, в особенности приложений этой теории к геофизике, позволит будущим специалистам не только анализировать уже имеющуюся информацию о природных и антропогенных факторах, но и планировать новые эксперименты и экспедиции с максимальной степенью энерго- и ресурсосбережения.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук

ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники)
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в составе научного коллектива
ПК-3 Способен профессионально работать с исследовательским и испытательным оборудованием (приборами и установками, специализированными пакетами прикладных программ) в избранной предметной области	ПК-3.1 Понимает принципы работы используемого оборудования (специализированных пакетов прикладных программ)
	ПК-3.3 Способен оценивать точность полученных экспериментальных (численных) результатов

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Понятие корректных и некорректных задач математической физики

уметь:

Строить регуляризирующие алгоритмы

владеть:

Методами численного решения обратных задач

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Определение некорректных задач	1	1		1
2	Элементы теории линейных операторов	1	1		1
3	Примеры некорректно поставленных задач	1	1		1
4	Понятие регуляризирующего алгоритма	1	1		1
5	Некорректные задачи на компактах	1	1		1
6	Задачи минимизации. Постановка экстремальных задач	1	1		1
7	Выпуклые функционалы	1	1		1
8	Разрешимость задачи выпуклого программирования	1	1		1
9	Сведения о матрицах	1	1		1
10	Метод наименьших квадратов	1	1		1
11	Итерационные методы минимизации функционалов	1	1		1
12	Численные методы решения некорректных задач. Компактные множества специального вида	1	1		1
13	Регуляризирующий алгоритм А.Н.Тихонова	1	1		1
14	Интегральные уравнения Фредгольма	1	1		1
15	Метод линейных интегральных представлений	1	1		1
Итого часов		15	15		15
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		45 час., 1 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

###### Семестр: 1 (Осенний)

###### 1. Определение некорректных задач

Понятие корректно поставленной по Адамару задачи. Метрические, нормированные и линейные пространства. Скалярное произведение. Гильбертовы пространства.

###### 2. Элементы теории линейных операторов

Свойства операторов. Определение линейного оператора.

Ограниченные и неограниченные операторы. Вполне непрерывные операторы.

### 3. Примеры некорректно поставленных задач

Примеры некорректно поставленных задач. Уравнения Фредгольма 1 типа. Уравнения Вольтерра 1 и 2 типов. Суммирование рядов Фурье. Нахождение производных приближенно заданной функции.

### 4. Понятие регуляризирующего алгоритма

Понятие регуляризирующего алгоритма. Регуляризируемые задачи. Условно регуляризируемые задачи. Сравнение регуляризирующих алгоритмов.

### 5. Некорректные задачи на компактах

Некорректные задачи на компактах. Определение компакта. Понятие квазирешения. Виды квазирешений.

### 6. Задачи минимизации. Постановка экстремальных задач

Задачи минимизации. Постановка экстремальных задач. Разрешимость задачи оптимизации. Выпуклые множества.

### 7. Выпуклые функционалы

Выпуклые функционалы. Выпуклые комбинации элементов векторного пространства. Надграфик функционала. Сильно выпуклые и строго выпуклые функционалы.

### 8. Разрешимость задачи выпуклого программирования

Разрешимость задачи выпуклого программирования. Теорема Вейерштрасса. Критерии выпуклости и сильной выпуклости.

### 9. Сведения о матрицах

Сведения о матрицах. Вырожденные матрицы. Плохо обусловленные системы линейных алгебраических уравнений. Особенности матриц систем, возникающих при решении задач интерпретационного характера в геофизике.

### 10. Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов. Определение. Функциональные пространства, рассматриваемые при применении метода наименьших квадратов. Метод псевдообращения. Минимизирующие последовательности.

### 11. Итерационные методы минимизации функционалов

Итерационные методы минимизации функционалов. Градиентные и безградиентные методы. Метод сопряженных градиентов. Метод скорейшего спуска. Метод Розенброка. Метод случайного поиска.

### 12. Численные методы решения некорректных задач. Компактные множества специального вида

Численные методы решения некорректных задач. Компактные множества специального вида. Истокопредставимость решения. Метод расширяющихся компактов. Нахождение решения обратной задачи на последовательности компактов.

### 13. Регуляризирующий алгоритм А.Н.Тихонова

Регуляризирующий алгоритм А.Н.Тихонова. Метод обобщенной невязки. Несовместные некорректные задачи.

### 14. Интегральные уравнения Фредгольма

Интегральные уравнения Фредгольма. Постановка задачи. Интегральные уравнения Фредгольма с неперiodическим ядром. Способы решения методом расширяющихся компактов интегральных уравнений Фредгольма с неперiodическим ядром, возникающих при решении задач сейсмического каротажа.

### 15. Метод линейных интегральных представлений

Метод линейных интегральных представлений. Локальная и региональная версии метода. S-F- R-аппроксимации потенциальных полей и рельефа в рамках метода линейных интегральных представлений. Модифицированные аппроксимации.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Проектор для демонстрации презентаций.

## 6.Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Численные методы решения некорректных задач [Текст] / А. Н. Тихонов [и др.] .— М. : Наука, 1990 .— 230 с.
2. Некорректные задачи математической физики и анализа [Текст]/М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский , -М., Наука, 1980
3. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] : учебник для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В.Фомин .— 7-е изд. — М. : Физматлит, 2004, 2006, 2009, 2012 .— 572 с.
4. Ряды Фурье [Текст]/Г. П. Толстов, -М., Наука, 1980
5. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М. Наука. 1978. 206 с.

### Дополнительная литература

1. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. А.Г.Ягола. Ван Янфей. И.Э.Степанова. В.Н.Титаренко. М. Бином. Лаб. Знаний. 2014, 214 с.
2. Степанова И.Э., Раевский Д.Н. «Модифицированный метод S-аппроксимаций. Региональный вариант» // Физика Земли. 2015. № 2. С.1–11 DOI:10.7868/S0002333715020106
3. Страхов В.Н., Степанова И.Э. Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант). //Физика Земли, 2002, Т.38, № 2, с.3-19.
4. Страхов В.Н., Степанова И.Э. Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (региональный вариант). //Физика Земли, 2002, Т.38, № 7, с.3-12.
5. Степанова И.Э. Об интегральном уравнении обратной трехмерной задачи потенциала // Математическое моделирование. 1997. Т. 9, № 4. С. 77-84.

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

## 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Студент, изучающий дисциплину, должен, с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения и понятия, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладные математика и физика  
**профиль подготовки:** Общая и прикладная физика  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
кафедра прикладной геофизики  
**курс:** 1  
**квалификация:** магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** Н.В. Дубиня, канд. физ.-мат. наук



## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники)
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в составе научного коллектива
ПК-3 Способен профессионально работать с исследовательским и испытательным оборудованием (приборами и установками, специализированными пакетами прикладных программ) в избранной предметной области	ПК-3.1 Понимает принципы работы используемого оборудования (специализированных пакетов прикладных программ)
	ПК-3.3 Способен оценивать точность полученных экспериментальных (численных) результатов

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Методы решения некорректных обратных задач» обучающийся должен:

### знать:

Понятие корректных и некорректных задач математической физики

### уметь:

Строить регуляризирующие алгоритмы

### владеть:

Методами численного решения обратных задач

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Решить задачи на свойства метрических пространств: доказать, что в произвольном метрическом пространстве выполняется второе неравенство треугольника).
2. Привести примеры метрик и определить, является ли метрикой предложенная преподавателем функция.
3. Проверить сходимость функций в различных функциональных пространствах.
4. Сравнить различные нормы линейного оператора  $A$ .
5. Сравнить различные нормы матриц.

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов:

1. Дать определение корректной по Адамару задачи.
2. Дать определение регуляризирующего алгоритма (оператора).
3. Привести примеры некорректных задач. Объяснить, почему интегральное уравнение Фредгольма 2 рода может быть решено в рамках корректной постановки.
4. Описать несколько градиентных и безградиентных методов минимизации функционалов. Сколько точек минимума может быть а) у выпуклого функционала; б) у сильно выпуклого функционала и в) у строго выпуклого функционала.
5. Дать определение положительно полуопределенной матрицы и плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений.
6. Изложить основные принципы метода интегральных представлений. Указать область применения этого метода.
7. Дать определение уравнения типа свертки с неперiodическим ядром. Сформулировать обратную задачу сейсмического каротажа.
8. Что такое несовместные обратные задачи. Дать определение и привести примеры.

Примеры контрольных заданий:

1. Дайте определение открытого и замкнутого множества.
2. Может ли некоторое множество  $A$  метрического пространства  $M$  быть открытым и замкнутым одновременно?
3. Постройте пример, когда из сходимости в среднем не следует не только равномерная, но даже и поточечная сходимость.

4. Докажите, что единичный шар в произвольном линейном нормированном пространстве является выпуклым множеством.
5. Что представляет собой а) выпуклая комбинация двух кругов; б) выпуклая комбинация круга и треугольника?
6. Докажите, что сумма выпуклого и сильно выпуклого функционалов с непустой областью определения является сильно выпуклым функционалом.

#### Критерии оценивания

Оценка "отлично" (10 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка "отлично" (9 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка "отлично" (8 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочётами.

Оценка "хорошо" (7 баллов) выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка "хорошо" (6 баллов) выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка "хорошо" (5 баллов) выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка "удовлетворительно" (4 балла) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка "удовлетворительно" (3 балла) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка "неудовлетворительно" (2 балла) выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка "неудовлетворительно" (1 балл) выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

#### 5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Дифференцированный зачёт проводится в устной форме по билетам. В каждом билете представлено два теоретических вопроса. При проведении зачёта обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося не должен превышать одного астрономического часа.