

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы физики  
и исследований им. Ландау**

**А.В. Рогачев**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Многообразия, расслоения, связности и когомологии
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау Физтех-кластер академической и научной карьеры
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

1 (осенний) - Зачет

2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Программу составил: А.И. Бондал, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Физтех-кластера академической и научной карьеры 24.05.2022

## Аннотация

Работа современного исследователя в области теоретической и математической физики требует серьезной математической эрудиции. Важнейшие современные статьи по теорфизике используют широкий спектр математических терминов, понятий, конструкций. К важнейшим разделам математики с этой точки зрения относятся дифференциальная геометрия и топология.

Данный курс направлен на то, чтобы подготовить студентов-физиков к пониманию математического языка современной теорфизики. В курсе объясняются наиболее фундаментальные геометрические понятия и конструкции, относящиеся к теории гладких многообразий, дифференциальному и интегральному исчислению на многообразиях, топологии и геометрии векторных расслоений, римановой геометрии. По своему содержанию курс чисто математический, но его не следует сравнивать с полномасштабными курсами, например, по дифференциальной геометрии, как ее преподают студентам-математикам. Это чисто вводный курс по указанным разделам математики для студентов-физиков.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Изучение основ дифференциальной геометрии и топологии в объеме, необходимом будущим физикам-теоретикам.

#### Задачи дисциплины

Сформировать представление о дифференциальной геометрии и топологии. Обучить студентов основным методам решения задач по этому разделу, связанных с проблемами теоретической физики

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

основы дифференциальной геометрии и топологии

уметь:

вычислять основные геометрические и топологические характеристики в базовых случаях

владеть:

методами решения задач по дифференциальной геометрии и топологии

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Линейная алгебра.	4	4		4
2	Координаты, замены координат. Многообразия.	4	4		4
3	Гладкие отображения, диффеоморфизмы.	4	4		4
4	Векторные поля и инфинитезимальные диффеоморфизмы.	4	4		4
5	Подмногообразия	4	4		4
6	Комплекс де Рама, локальная теория.	5	5		5
7	Интегрирование дифференциальных форм.	5	5		5
8	Комплекс де Рама, глобальная теория.	4	4		6
9	Векторные расслоения.	4	4		6
10	Гомотопические группы.	4	4		6
11	Связность в расслоении.	4	4		6
12	Риманова геометрия.	4	4		7
13	Метрическая форма объема.	5	5		7
14	Метрическая связность. Кручение и кривизна.	5	5		7
Итого часов		60	60		75
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		225 час., 5 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Линейная алгебра.

Тензорная алгебра, симметрические и кососимметрические тензоры, операции с тензорами, кольца, дифференцирования.

## 2. Координаты, замены координат. Многообразия.

Замены координат в (области в)  $R^n$ , касательные векторы, векторные и тензорные поля. Многообразия, касательное расслоение, векторные и тензорные поля, операции с ними. Дифференциальные операторы.

## 3. Гладкие отображения, диффеоморфизмы.

Инвариантные относительно диффеоморфизмов операции и дифференциальные операторы.

## 4. Векторные поля и инфинитезимальные диффеоморфизмы.

Обыкновенное дифф.уравнение и экспонента векторного поля. Коммутатор векторных полей. Производная Ли. Группы Ли.

## 5. Подмногообразия

Распределения в касательном расслоении, условие интегрируемости, теорема Фробениуса.

## 6. Комплекс де Рама, локальная теория.

Лемма Пуанкаре.

## 7. Интегрирование дифференциальных форм.

Интегрирование дифференциальных форм по подмногообразиям. Теорема Стокса.

## Семестр: 2 (Весенний)

## 8. Комплекс де Рама, глобальная теория.

Когомологии Бетти, эйлерова характеристика. Гомологии. Фундаментальная группа. Накрытия.

## 9. Векторные расслоения.

Определение и примеры векторных расслоений. Основные конструкции расслоений.

## 10. Гомотопические группы.

Определения, примеры вычислений, применение в теории векторных расслоений.

## 11. Связность в расслоении.

Связность, кривизна связности, упорядоченная экспонента. Группа голономии, локальная и глобальная. Плоская связность.

## 12. Риманова геометрия.

Метрика, геодезические, изометрии, векторы Киллинга.

## 13. Метрическая форма объёма.

Функционалы действия в теории поля на римановом многообразии. Оператор Лапласа. Псевдориманова геометрия.

14. Метрическая связность. Кручение и кривизна.

Оператор ковариантной производной, спин-связность и символ Кристоффеля. Тензор Римана, тождества Риччи и Бьянки.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, доска, медиапроектор, экран.

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

Основная литература

1. Современная геометрия : Методы и приложения [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко .— 5-е изд., испр. — М. : Эдиториал УРСС ; Добросвет, 2001 .— Т. 2 : Геометрия и топология многообразий. - 2001. - 296 с.
2. M. Nakahara, Geometry, Topology and Physics (2003)
3. L.W. Tu, An Introduction to Manifolds (2011)
4. L.W. Tu, Differential Geometry (2017)

Дополнительная литература

1. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях [Текст]= Differential analysis on complex manifolds/Р. Уэллс, -М., Мир, 1976
2. Принципы алгебраической геометрии [Текст]. В 2 т. Т.1, монография/Ф. Гриффитс, Дж. Харрис , -М., Мир, 1982
3. Принципы алгебраической геометрии [Текст]. В 2 т. Т. 2, монография/Ф. Гриффитс, Дж. Харрис , -М., Мир, 1982
4. М.О.Катанаев, Геометрические методы в математической физике

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Zoom, Skype

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Студент, изучающий дисциплину, должен, с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения и понятия, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;

- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау Физтех-кластер академической и научной карьеры (Современная фундаментальная математика)
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр
Семестры, формы промежуточной аттестации:	
	1 (осенний) - Зачет
	2 (весенний) - Экзамен
<b>Разработчик:</b>	А.И. Бондал, д-р физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Многообразия, расслоения, связности и когомологии» обучающийся должен:

### знать:

основы дифференциальной геометрии и топологии

### уметь:

вычислять основные геометрические и топологические характеристики в базовых случаях

### владеть:

методами решения задач по дифференциальной геометрии и топологии

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся



#### Перечень контрольных вопросов

1. Ассоциативность произведения в алгебре симметрических и кососимметрических тензоров.
- 2.Связь тождества Якоби и понятия дифференцирования.
- 3.Условие интегрируемости распределения в касательном расслоении.
- 4.Фундаментальная группа. Примеры неодносвязных многообразий.
- 5.Оператор Лапласа на римановом многообразии.

#### Примеры контрольных заданий

- 1.Вычислить метрику двумерной сферы в угловых координатах и в координатах стереографической проекции.
- 2.Вычислить кривизну двумерной сферы и двумерных гиперboloидов.
- 3.“Найти” изометрии двумерной сферы (явно проверить выполнение уравнения Киллинга).
- 4.Обобщение формулы Картана для внешней производной 3-формы.
- 5.Доказать единственность метрической связности без кручения.

#### Примеры экзаменационных билетов

##### Билет 1.

- 1.Вычислить фундаментальную группу тора.
- 2.Пространства постоянной кривизны. Примеры таких пространств (с доказательством).

##### Билет 2.

- 1.Классификация комплексных векторных расслоений на сферах.
- 2.Основные тождества для производной Ли. Гомотопическая формула Картана.

#### Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Экзамен проводится в устной форме по билетам. В каждом билете представлено два теоретических вопроса. При проведении зачёта и экзамена обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося не должен превышать одного астрономического часа.