

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы физики  
и исследований им. Ландау  
А.В. Рогачев**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Введение в современную алгебру
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау Физтех-кластер академической и научной карьеры
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

1 (осенний) - Зачет  
2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.  
семинары: 60 час.  
лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Программу составил: И.В. Каржеманов, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Физтех-кластера академической и научной карьеры 24.05.2022

## Аннотация

Данный курс посвящен основным понятиям и методам в современной алгебре. В него включено много практической работы, в том числе самостоятельной, для усвоения материала.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Научить студентов языку и технике современной высшей алгебры, дать примеры ее применений в геометрии, физике и других науках.

#### Задачи дисциплины

Научить студентов пользоваться языком и техникой теории групп и их представлений, равно как теории колец и модулей, а также способам вычислений их простейших гомологических инвариантов.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

основы теории групп, их представлений, а также колец и модулей.

уметь:

определять структуру конечных групп, находить их представления, и то же для полупростых колец.

владеть:

языком и техникой теории групп, их представлений, а также колец и модулей.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Определение группы	3	3		3
2	Орбиты	3	3		3
3	Нормальные группы	4	4		4
4	Вторая и третья теорема о гоморфизме	4	4		4
5	Вторая и третья теоремы Силова	4	4		4
6	Строение конечнопорожденных абелевых групп.	4	4		4
7	Коммутант и разрешимые группы	4	4		4
8	Неразрешимость групп $S_n$ и $A_n$	4	4		4
9	Представления конечных групп. Теоремы Машке и Шура. Примеры.	4	4		6
10	Характеры представлений	4	4		6
11	Коммутативные кольца и идеалы (предварительные сведения)	4	4		6
12	Существование максимального идеала	4	4		6
13	Делители нуля и локализация	4	4		7
14	Нетеровы кольца	5	5		7
15	Кольца главных идеалов	5	5		7
Итого часов		60	60		75
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		225 час., 5 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

###### 1. Определение группы

Определение группы и действия группы на множестве. Примеры.

###### 2. Орбиты

Орбиты, стабилизатор, теорема Лагранжа. Примеры

###### 3. Нормальные группы

Нормальные группы. Первая теорема о гомоморфизме. Примеры

#### 4. Вторая и третья теорема о гоморфизме

Вторая и третья теорема о гоморфизме. Первая теорема Силова

#### 5. Вторая и третья теоремы Силова

Вторая и третья теоремы Силова. Приложения к строению конечных групп.  $p$ -группы.

#### 6. Строение конечнопорожденных абелевых групп.

Строение конечнопорожденных абелевых групп. Примеры вычисления.

#### 7. Коммутант и разрешимые группы

Коммутант и разрешимые группы. Основные свойства и теоремы. Примеры.

#### 8. Неразрешимость групп $S_n$ и $A_n$

Неразрешимость групп  $S_n$  и  $A_n$ . Приложения к решению уравнений в радикалах.

Семестр: 2 (Весенний)

#### 9. Представления конечных групп. Теоремы Машке и Шура. Примеры.

Представления конечных групп. Теоремы Машке и Шура. Примеры.

#### 10. Характеры представлений

Характеры представлений. Соотношение ортогональности и следствия из нее (теорема Бернсайда и делимость степеней представлений). Примеры.

#### 11. Коммутативные кольца и идеалы (предварительные сведения)

Коммутативные кольца и идеалы (предварительные сведения). Теоремы о гомоморфизме. Построения колец. Примеры.

#### 12. Существование максимального идеала

Существование максимального идеала. Теорема Гильберта о нулях. Примеры.

#### 13. Делители нуля и локализация

Делители нуля и локализация. Примеры и приложения.

#### 14. Нетеровы кольца

Нетеровы кольца. Теорема Гильберта. Примеры и приложения.

#### 15. Кольца главных идеалов

Кольца главных идеалов. Теорема о факториальности. Примеры.

### **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, доска, при необходимости медиапроектор, экран.

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

### Основная литература

1. Категории для работающего математика [Текст]/С. Маклейн , -М., Физматлит, 2004
2. Гомология [Текст], монография/С. Маклейн , -М., Мир, 1966
3. Алгебраическая топология и теория пучков [Текст], монография/Р. Годеман , -М., Изд-во иностр. лит., 1961

### Дополнительная литература

1. Когомологии групп [Текст]/К. С. Браун , -М., Наука, 1987
2. С.И. Гельфанд, Ю.И. Манин Методы гомологической алгебры (том I) М.: Наука, 1988
3. С.М. Львовский Введение в когомологии пучков М.: МЦНМО, 2000

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

А.В. Ершов Функторные морфизмы <http://window.edu.ru/resource/166/77166>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Zoom, Skype

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Студент, изучающий дисциплину, должен, с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения и понятия, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау Физтех-кластер академической и научной карьеры (Современная фундаментальная математика)
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр
Семестры, формы промежуточной аттестации:	
	1 (осенний) - Зачет
	2 (весенний) - Экзамен
<b>Разработчик:</b>	И.В. Каржеманов, канд. физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Введение в современную алгебру» обучающийся должен:

### знать:

основы теории групп, их представлений, а также колец и модулей.

### уметь:

определять структуру конечных групп, находить их представления, и то же для полупростых колец.

### владеть:

языком и техникой теории групп, их представлений, а также колец и модулей.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

- Докажите, что фундаментальная группа топологической группы коммутативна.
- Найдите левый сопряженный к функтору из категории ассоциативных  $k$ -алгебр с единицей в категорию векторных пространств над  $k$ , забывающему умножение.
- Пусть  $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$  – точная последовательность комплексов. Покажите, что комплекс  $LM$  квазиизоморфен конусу  $SC(i)$ .

4. Пусть  $G$  – группа,  $A$  –  $G$ -модуль. Постройте биекцию между множеством классов эквивалентности расширений группы  $G$  при помощи  $A$ , индуцирующих данное действие группы  $G$  в  $A$  и множеством  $H^2(G, A)$ .
5. Докажите факториальность кольца главных идеалов.

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

##### Перечень контрольных вопросов

1. Докажите, что фундаментальная группа топологической группы коммутативна.
2. Найдите левый сопряженный к функтору из категории ассоциативных  $k$ -алгебр с единицей в категорию векторных пространств над  $k$ , забывающему умножение.
3. Пусть  $0 \rightarrow K \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{\beta} M \rightarrow 0$  – точная последовательность комплексов. Покажите, что комплекс  $M$  квазиизоморфен конусу  $C(\alpha)$ .
4. Пусть  $G$  – группа,  $A$  –  $G$ -модуль. Постройте биекцию между множеством классов эквивалентности расширений группы  $G$  при помощи  $A$ , индуцирующих данное действие группы  $G$  в  $A$  и множеством  $H^2(G, A)$ .
5. Докажите факториальность кольца главных идеалов.

##### Примеры экзаменационных билетов

###### Билет 1.

1. Докажите, что фундаментальная группа топологической группы коммутативна.
2. Пусть  $G$  – группа,  $A$  –  $G$ -модуль. Постройте биекцию между множеством классов эквивалентности расширений группы  $G$  при помощи  $A$ , индуцирующих данное действие группы  $G$  в  $A$  и множеством  $H^2(G, A)$ .

###### Билет 2.

1. Найдите левый сопряженный к функтору из категории ассоциативных  $k$ -алгебр с единицей в категорию векторных пространств над  $k$ , забывающему умножение.
2. Докажите факториальность кольца главных идеалов.

##### Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.



Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Экзамен проводится в устной форме по билетам. В каждом билете представлено два теоретических вопроса. При проведении зачёта и экзамена обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося не должен превышать одного астрономического часа.