Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе и довузовской подготовке
А.А. Воронов

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Функциональный анализ
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Программная инженерия
	передовая инженерная школа радиолокации, радионавигации и программной инженерии
	кафедра высшей математики
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:
- лекции: 30 час.
- семинары: 30 час.
- лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 1

Программу составил: М.А. Демьянов, ассистент

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 21.05.2020

Аннотация

Учебный курс «Функциональный анализ» направлен на ознакомление студентов с базовыми понятиями и результатами данной дисциплины. Первый раздел, посвященный теории множеств, сформирует у студентов более глубокое пониманием структуры упорядоченных множеств и иерархии их мощностей. В рамках второго раздела, студенты смогут освоить общие положения теории метрических пространств, изучить их основных представителей. Третий раздел направлен на изучение нормированных пространств, особое внимание уделено линейным функционалам и операторам, и вычислению их норм, что представляется важным навыком в прикладных аспектах курса. Далее следует разбор схемы построения меры Лебега и интеграла Лебега, исследуются их основные свойства, в частности связанные с дифференцированием интеграла Лебега по переменному пределу интегрирования. В рамках заключительного раздела студент сможет сформировать общий взгляд на понятие дифференцируемости в банаховых пространствах и следующие из него обобщения классических результатов куса математического анализа, имеющие важные значения при решении прикладных задач. Для успешного освоения курса студент должен владеть базовыми знаниями дисциплин математического анализа и линейной алгебры, читающихся не первых курсах университетов физико-математической направленности. Культура полученных знаний и навыков являются полезными при дальнейшем освоении таких дисциплин, как уравнения математической физики, теория экстремальных задач и теоретическая физика.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- ознакомление слушателей с основами теории функций и функционального анализа и подготовка к изучению других математических курсов – нелинейных уравнений математической физики, теоретической физики, теории экстремальных задач, а также подготовка слушателей к дальнейшей самостоятельной работе в области применения методов и результатов данной дисциплины.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) теории функций и функционального анализа;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в теории функций и функционального анализа;
- приобретение навыков в применении методов теории функций и функционального анализа в физике и других естественнонаучных дисциплинах.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия и законы теории функций и функционального анализа;
- современные проблемы соответствующих разделов теории функций и функционального анализа;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач, формализуемых с помощью теории функций и функционального анализа.

уметь:

- использовать свои знания для решения прикладных задач, формализуемых с применением понятий и аппарата функционального анализа;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, формализуемых с помощью теории функций и функционального анализа, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин, умением пользоваться необходимой литературой для решения задач повышенной трудности (в вариативной части курса);
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования методов функционального анализа;
- предметным языком функционального анализа и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Элементы теории множеств	6	6		5
2	Метрические пространства	6	6		8
3	Нормированные пространства	6	6		10
4	Линейные операторы	4	4		8
5	Теория меры, интеграл Лебега	4	4		6
6	Дифференциальное исчисление в линейных нормированных пространствах	4	4		8
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

1. Элементы теории множеств

Понятие множества, основные определения и операции. Отношения на множестве. Бинарные отношения на множестве, отношение порядка, отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Мощность множества, теорема Кантора - Бернштейна. Теорема про мощность булеана множества. Диагональная процедура Кантора. Булеан счетного множества. Упорядоченные множества, порядковый изоморфизм, порядковый тип. Вполне упорядоченные множества, порядковое число. Трансфинитные числа: упорядоченная сумма, упорядоченное произведение. Арифметика порядковых чисел. Сравнение порядковых чисел, начальный отрезок вполне упорядоченного множества. Теорема об сравнимости любой пары порядковых чисел, множество стандартный представитель порядкового числа. Теорема Цермело. Построение первого несчётного множества, континуум гипотеза. Трансфинитная индукция. Парадоксы наивной теории множеств: парадокс Рассела, парадокс Кантора, парадокс Бурали-Форти. Представление об различных аксиоматических теориях множеств.

2. Метрические пространства

Определение метрического пространства. Примеры метрических пространств: пространство изолированных точек. Неравенство Минковского, неравенство Гёльдера. Свойство непрерывности метрики и связанное с ним неравенство. Отображения метрических пространств. Непрерывность отображения метрических пространств. Гомеоморфизм метрических пространств. Изометрия метрических пространств. Классификация точек метрического пространства. Точки прикосновения: предельные точки, изолированные точки. Плотные подмножества, всюду плотное множество, нигде не плотное подмножество. Сепарабельное метрическое пространство. Пример не сепарабельного метрического пространства. Открытые и замкнутые множества. Структура замкнутых множеств на вещественное прямой. Канторово множество, точки первого и второго родов, их мощности. Полное метрическое пространство. Доказательство полноты для. Пример неполного метрического пространства. Теорема о вложенных шарах, замечание о стремлении к нулю радиусов вложенных замкнутых шаров. Лемма о полноте подпространства. Теорема Бэра. Пополнение метрического пространства. Теорема об пополнении метрического пространства.

3. Нормированные пространства

Определение линейного пространства. Линейная оболочка множества. Базис Гамеля, алгебраическая размерность линейного пространства. Фактор-пространство линейного пространства по его подпространству , коразмерность подпространства. Линейные функционалы, коразмерность ядра . Выпуклые множества и выпуклые тела. Однородно-выпуклые функционалы. Функционал Минковского. Теорема Хана-Банаха. Отделимость выпуклых множеств в линейном пространстве, как следствие теоремы Хана-Банаха. Нормированные пространства, определение нормы. Примеры нормированных пространств. Банахово пространство. Фактор-пространства нормированного пространства, норма в фактор-пространстве. Фактор-пространство банахова пространства, условие его полноты. Линейные функционалы на нормированных пространствах, норма линейного функционала. Продолжение линейного функционала, заданного на подпространстве, на все пространство с сохранением нормы, как следствие теоремы Хана-Банаха. Сопряженное пространство, полнота сопряженного пространства, второе сопряженное пространство, естественное отображение , пример . Евклидовы пространства. Ортогональный базис. Мощность ортогональной системы в сепарабельном пространстве. Существование ортогонального базиса в сепарабельном пространстве. Теорема Риса-Фишера. Критерий евклидовости нормированного пространства. Гильбертово пространство. Теорема об изоморфности всех сепарабельных гильбертовых пространств.

4. Линейные операторы

Связь ограниченности и непрерывности линейного оператора. Резольвентное множество, спектр оператора. Резольвента оператора, понятия точечного спектра и непрерывного спектра. Спектральный радиус оператора. Компактные операторы. Самосопряженные операторы. Теорема Гильберта-Шмидта. Положительные операторы, квадратный корень из положительного оператора. Спектральное разложение самосопряженного оператора. Теорема Брауэра. Принцип неподвижной точки Шаудера.

5. Теория меры, интеграл Лебега

Кольцо множеств. Минимальное кольцо для системы множеств. Полукольцо множеств. Кольцо, порожденное полукольцом. - алгебра и - кольцо. Неприводимая - алгебра по отношению к системе множеств. Минимальная неприводимая - алгебра. Борелевское множество. Определение меры. Продолжение меры с полукольца на кольцо. Лебегово продолжение меры. Пример неизмеримого по Лебегу множества, множество Витали. Пространство с мерой. Измеримые функции. Интеграл Лебега для простых функций, интегральная сумма Лебега. Связь измеримости функции с существованием равномерно сходящейся к ней последовательности простых функций. Интеграл Лебега. Связь между интегралами Лебега и Римана. Функции с ограниченным изменением. Производная неопределенного интеграла Лебега и восстановление функции по её производной, дискретная, абсолютно непрерывная и сингулярная компоненты.

6. Дифференциальное исчисление в линейных нормированных пространствах

Дифференциал Фреше. Дифференциал Гато. Интеграл, обобщенная формула Ньютона-Лейбница. Формула Тейлора. Теорема о неявной функции. Касательное многообразие, теорема Люстерника. Необходимое и достаточное условие экстремума функционала. Обобщенный метод Ньютона.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оборудованная письменной доской.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] : учебник для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В.Фомин .— 7-е изд. — М. : Физматлит, 2004, 2006, 2009, 2012 .— 572 с.
2. Лекции по функциональному анализу [Текст] : учеб. пособие для вузов / Р. В. Константинов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физико-техн. ин-т (гос. ун-т .— М. : МФТИ, 2009 .— 368 с.

Дополнительная литература

1. Краткий курс функционального анализа [Электронный ресурс], учебное пособие для ун-тов по специальности "Математика" / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — СПб. ; М. , Лань, 2009.— URL: https://e.lanbook.com/book/245 (дата обращения: 27.01.2021). - Полный текст (Режим доступа : из сети МФТИ / Удаленный доступ)
2. Треногин, В. А. Функциональный анализ [Текст] : учебник для вузов / В. А. Треногин .— 4-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2007 .— 488 с. + pdf-версия. - Библиогр.: с. 482-483. - Предм. указ.: с. 484-488. - 1500 экз. - ISBN 978-5-9221-0804-1 (в пер.) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. http://mathnet.ru – общероссийский математический портал.
2. http://www.edu.ru – федеральный портал «Российское образование».
3. http://benran.ru –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
4. http://www.i-exam.ru – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях в качестве дополнительного материала предлагается прослушать выделенные темы на ряде информационных источников с целью более глубокого освоения программы курса.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Программная инженерия
	передовая инженерная школа радиолокации, радионавигации и программной инженерии
	кафедра высшей математики
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Экзамен

Разработчик:	М.А. Демьянов, ассистент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Функциональный анализ» обучающийся должен:

знать:

- фундаментальные понятия и законы теории функций и функционального анализа;
- современные проблемы соответствующих разделов теории функций и функционального анализа;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач, формализуемых с помощью теории функций и функционального анализа.

уметь:

- использовать свои знания для решения прикладных задач, формализуемых с применением понятий и аппарата функционального анализа;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, формализуемых с помощью теории функций и функционального анализа, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин, умением пользоваться необходимой литературой для решения задач повышенной трудности (в вариативной части курса);
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования методов функционального анализа;
- предметным языком функционального анализа и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры 2-х экзаменационных билетов

Билет №1

Полнота метрического пространства. Доказательство полноты $R_p^n,\ l_p$. Теорема о вложенных шарах, замечание про стремление радиусов вложенных шаров к нулю. Теорема Бэра. Пополнение метрического пространства. Теорема о пополнении метрического пространства.

Задачи:

1) Является ли функция $\rho(m,n)=\dfrac{|m-n|}{m\cdot n}$ определенная на $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ метрикой?
2) Подпространство L_0 пространства l_2 , определяется как $L_0=\{x\in l_2 : x_1+x_2=0\}$. На L_0 задан функционал $f(x)=x_1+3x_2$. Продолжить функционал f на все l_2 с сохранением нормы.

Билет №2

Теорема Хана-Банаха и её основные следствия: продолжение линейного функционала с сохранением условия подчиненности однородно-выпуклому функционалу, отделимость выпуклых множеств, продолжение линейного функционала с сохранением нормы.

Задачи:

1) Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\rho(x_n,x_{n+1})$ сходится, то последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна.
2) Найти норму линейного оператора, заданного умножением на матрицу $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$,

   действующего в пространстве $\mathbb{R}^2_\infty$.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.
Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.
Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Понятие множества. Отношения на множестве. Бинарные отношения на множестве, отношение порядка, отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Мощность множества, теорема Кантора - Бернштейна. Теорема про мощность булеана множества. Булеан счетного множества.
2. Упорядоченные множества, порядковый изоморфизм, порядковый тип. Вполне упорядоченные множества, порядковое число. Трансфинитные числа: упорядоченная сумма,

упорядоченное произведение. Арифметика порядковых чисел. Сравнение порядковых чисел, начальный отрезок вполне упорядоченного множества. Теорема об сравнимости любой пары порядковых чисел, множество стандартный представитель порядкового числа. Теорема Цермело.
3. Построение первого несчётного множества, континуум гипотеза. Трансфинитная индукция. Парадоксы наивной теории множеств: парадокс Рассела, парадокс Кантора, парадокс Бурали-Форти. Представление об различных аксиоматических теориях множеств.
4. Определение метрического пространства. Примеры метрических пространств: пространство изолированных точек, $\mathbb{R}_p^n, C_p[a,b]$, l_p. Неравенство Минковского, неравенство Гёльдера.
5. Свойство непрерывности метрики и связанное с ним неравенство. Отображения метрических пространств. Непрерывность отображения метрических пространств. Гомеоморфизм метрических пространств. Изометрия метрических пространств. Классификация точек метрического пространства. Точки прикосновения: предельные точки, изолированные точки. Плотные подмножества, всюду плотное множество, нигде не плотное подмножество. Сепарабельное метрическое пространство. Пример не сепарабельного метрического пространства.
6. Открытые и замкнутые множества. Структура замкнутых множеств на вещественное прямой. Канторово множество, точки первого и второго родов, их мощности.
7. Полное метрическое пространство. $\mathbb{R}_p^n$, $C[a,b]$, l_p . Пример неполного метрического пространства. Теорема о вложенных шарах. Лемма о полноте подпространства. Теорема Бэра.
8. Пополнение метрического пространства. Теорема об пополнении метрического пространства.
9. Определение линейного пространства. Линейная оболочка множества. Базис Гамеля, алгебраическая размерность линейного пространства. Фактор-пространство линейного пространства по его подпространству $L/_{L'}$, коразмерность подпространства. Линейные функционалы, коразмерность ядра $\ker f$.
10. Выпуклые множества и выпуклые тела. Однородно-выпуклые функционалы. Функционал Минковского. Теорема Хана-Банаха. Отделимость выпуклых множеств в линейном пространстве, как следствие теоремы Хана-Банаха.
11. Нормированные пространства, определение нормы. Примеры нормированных пространств. Банахово пространство. Фактор-пространства нормированного пространства, норма в фактор-пространстве. Фактор-пространство банахова пространства, условие его полноты. Линейные функционалы на нормированных пространствах, норма линейного функционала. Продолжение линейного функционала, заданного на подпространстве, на все пространство с сохранением нормы.
12. Сопряженное пространство, полнота сопряженного пространства, второе сопряженное пространство, естественное отображение $\pi(E)$, пример $E \neq E^{**}$.
13. Евклидовы пространства. Ортогональный базис. Мощность ортогональной системы в сепарабельном пространстве. Существование ортогонального базиса в сепарабельном пространстве. Теорема Риса-Фишера. Критерий евклидовости нормированного пространства. Гильбертово пространство. Теорема об изоморфности всех сепарабельных гильбертовых пространств.
14. Связь ограниченности и непрерывности линейного оператора. Резольвентное множество, спектр оператора. Резольвента оператора, понятия точечного спектра и непрерывного спектра. Спектральный радиус оператора.
15. Компактные операторы. Самосопряженные операторы. Теорема Гильберта-Шмидта. Положительные операторы, квадратный корень из положительного оператора. Спектральное разложение самосопряженного оператора. Теорема Брауэра. Принцип неподвижной точки Шаудера.
16. Кольцо множеств. Минимальное кольцо для системы множеств. Полукольцо множеств. Кольцо, порожденное полукольцом. σ - алгебра и δ - кольцо. Неприводимая σ - алгебра по отношению к системе множеств. Минимальная неприводимая σ - алгебра. Борелевское множество.
17. Определение меры. Продолжение меры с полукольца на кольцо. Лебегово продолжение меры. Пример неизмеримого по Лебегу множества, множество Витали.
18. Пространство с мерой. Измеримые функции. Интеграл Лебега для простых функций, интегральная сумма Лебега. Связь измеримости функции с существованием равномерно

сходящейся к ней последовательности простых функций. Интеграл Лебега. Связь между интегралами Лебега и Римана.

19. Функции с ограниченным изменением. Производная неопределенного интеграла Лебега и восстановление функции по её производной, дискретная, абсолютно непрерывная и сингулярная компоненты.

20. Дифференциал Фреше. Дифференциал Гато. Интеграл, обобщенная формула Ньютона-Лейбница. Формула Тейлора.

21. Теорема о неявной функции. Касательное многообразие, теорема Люстерника. Необходимое и достаточное условие экстремума функционала. Обобщенный метод Ньютона.

Критерии оценивания

За ответ на контрольный вопрос студент получает от 0 до 4 баллов, за первое и второе задание – от 0 до 3 баллов в зависимости от полноты представленного ответа решения. Итоговая сумма и определяет оценку.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины. При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 1 час на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов.