

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Случайные процессы
<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Программная инженерия передовая инженерная школа радиолокации, радионавигации и программной инженерии кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: Д.А. Шабанов, д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 03.03.2023

## Аннотация

Курс посвящен изучению основных классов случайных процессов. Изучаются ветвящиеся процессы, процессы с независимыми приращениями, гауссовские процессы, мартингалы, марковские цепи, стационарные случайные процессы. В конце курса изучается слабая сходимость в функциональных пространствах и сходимость по распределению случайных процессов.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- изучение основ современной теории случайных процессов, а также подготовка слушателей к дальнейшей самостоятельной работе в области применения теории случайных процессов в задачах прикладной математики, физики и экономики.

#### Задачи дисциплины

- Изучение основ теории случайных процессов;
- изучение различных классов случайных процессов.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций

ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- Основные понятия теории случайных процессов;
- определение простейшего случайного блуждания на прямой, основные теоремы о случайном блуждании на прямой: теорема о вероятности возвращения в нуль, теорема об асимптотике времени, проведенного в нуле, теорема о распределении первого момента возвращения в нуль для симметричного случайного блуждания;
- основы теории ветвящихся процессов, процессы Гальтона-Ватсона и теорема о вероятности вырождения;
- теорему Колмогорова о существовании случайного процесса с заданными конечномерными распределениями;
- основы теории пуассоновских процессов и полей, определение, основные свойства и явную конструкцию пуассоновского процесса постоянной интенсивности;
- определение и главные свойства винеровского процесса: непрерывность траекторий, закон повторного логарифма, строго марковское свойство и принцип отражения;
- основы теории марковских цепей с дискретным временем: основные определения, уравнения Колмогорова-Чепмена, эргодическая теорема;
- основы теории марковских цепей с непрерывным временем: теорема о существовании, эргодическая теорема, прямые и обратные дифференциальные уравнения Колмогорова;
- основы теории марковских процессов;
- основы теории мартингалов: разложение Дуба, теорема об остановке;
- основы теории стационарных процессов;
- линейные преобразования случайных процессов.

уметь:

- Находить вероятности вырождения для ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона;
- исследовать асимптотическое поведение марковской цепи с дискретным временем с помощью эргодической теоремы;
- находить распределение марковской цепи с непрерывным временем с помощью дифференциальных уравнений Колмогорова;
- находить марковские и мартингальные свойства у случайных процессов;
- вычислять ковариационные характеристики стационарных случайных процессов с помощью спектральной плотности;
- вычислять ковариационные и корреляционные функции линейных преобразований от случайных процессов.

владеть:

- Основными аналитическими методами теории случайных процессов: комбинаторными, дифференциальными, спектральными, методами функционального анализа;
- навыками асимптотического анализа различных классов случайных процессов: ветвящихся процессов, марковских цепей, гауссовских процессов;
- навыками применения теорем теории случайных процессов в прикладных задачах физики и экономики.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Ветвящиеся процессы Гальтона - Ватсона.	6	4		5
2	Винеровский процесс (процесс броуновского движения).	4	4		5
3	Гауссовские случайные процессы.	2	4		5
4	Понятие случайного процесса (случайной функции).	6	4		5
5	Пространство траекторий случайного процесса, цилиндрическая сигмаалгебра на нем.	2	4		10
6	Процессы с независимыми приращениями	6	6		10
7	Эргодическая теорема для марковских цепей с дискретным временем.	4	4		5
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

###### 1. Ветвящиеся процессы Гальтона - Ватсона.

Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса.

###### 2. Винеровский процесс (процесс броуновского движения).

Теорема о двух эквивалентных определениях винеровского процесса.

###### 3. Гауссовские случайные процессы.

Доказательство существования гауссовского процесса с заданными функцией среднего и ковариационной функцией.

###### 4. Понятие случайного процесса (случайной функции).

Примеры: случайное блуждание, процессы восстановления, эмпирические меры, модель страхования Крамера-Лундберга.

5. Пространство траекторий случайного процесса, цилиндрическая сигмаалгебра на нем.

Эквивалентное определение случайного процесса, как одного измеримого отображения в пространство траекторий.

6. Процессы с независимыми приращениями

Критерий существования в терминах характеристических функций приращений.

7. Эргодическая теорема для марковских цепей с дискретным временем.

Стационарность и предельность эргодического распределения марковской цепи.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Стандартная учебная аудитория.

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

### **Основная литература**

1. Вероятность [Текст]. В 2 т. Т. 2. Суммы и последовательности случайных величин - стационарные, мартингалы, марковские цепи : учебник для вузов / А. Н. Ширяев .— 4-е перераб. и доп. — М. : МЦНМО, 2007, 2011 .— 416 с. - Библиогр.: с. 943-949. - Предм. указ.: с. 950-963. - 1500 экз. - ISBN 978-5-94057-106-3 (в пер.) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).
2. Теория случайных процессов [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев ; [Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова] .— М. : Физматлит, 2005 .— 402 с. : ил. — (Классический университетский учебник). - Библиогр.: с. 385-393. - Алф. указ.: с. 394-402. - ISBN 5-9221-0335-0 (в пер.) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

### **Дополнительная литература**

1. Вероятность в теоремах и задачах (с доказательствами и решениями) [Текст]. Кн. 1 : [учеб. пособие для вузов] / А. Н. Ширяев, И. Г. Эрлих, П. А. Яськов .— М. : МЦНМО, 2013 .— 648 с. - Библиогр.: с. 635-64. - Предм. указ.: с. 641-645. - Указ. имен: с. 646. - 1500 экз. - ISBN 978-5-4439-0227-2 (в пер.) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://dm.fizteh.ru>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Программная инженерия передовая инженерная школа радиолокации, радионавигации и программной инженерии кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Экзамен	
<b>Разработчик:</b>	Д.А. Шабанов, д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива



## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Случайные процессы» обучающийся должен:

### знать:

- Основные понятия теории случайных процессов;
- определение простейшего случайного блуждания на прямой, основные теоремы о случайном блуждании на прямой: теорема о вероятности возвращения в нуль, теорема об асимптотике времени, проведенного в нуле, теорема о распределении первого момента возвращения в нуль для симметричного случайного блуждания;
- основы теории ветвящихся процессов, процессы Гальтона-Ватсона и теорема о вероятности вырождения;
- теорему Колмогорова о существовании случайного процесса с заданными конечномерными распределениями;
- основы теории пуассоновских процессов и полей, определение, основные свойства и явную конструкцию пуассоновского процесса постоянной интенсивности;
- определение и главные свойства винеровского процесса: непрерывность траекторий, закон повторного логарифма, строго марковское свойство и принцип отражения;
- основы теории марковских цепей с дискретным временем: основные определения, уравнения Колмогорова-Чепмена, эргодическая теорема;
- основы теории марковских цепей с непрерывным временем: теорема о существовании, эргодическая теорема, прямые и обратные дифференциальные уравнения Колмогорова;
- основы теории марковских процессов;
- основы теории мартингалов: разложение Дуба, теорема об остановке;
- основы теории стационарных процессов;
- линейные преобразования случайных процессов.

### уметь:

- Находить вероятности вырождения для ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона;
- исследовать асимптотическое поведение марковской цепи с дискретным временем с помощью эргодической теоремы;
- находить распределение марковской цепи с непрерывным временем с помощью дифференциальных уравнений Колмогорова;
- находить марковские и мартингаловые свойства у случайных процессов;
- вычислять ковариационные характеристики стационарных случайных процессов с помощью спектральной плотности;
- вычислять ковариационные и корреляционные функции линейных преобразований от случайных процессов.

### владеть:

- Основными аналитическими методами теории случайных процессов: комбинаторными, дифференциальными, спектральными, методами функционального анализа;
- навыками асимптотического анализа различных классов случайных процессов: ветвящихся процессов, марковских цепей, гауссовских процессов;
- навыками применения теорем теории случайных процессов в прикладных задачах физики и экономики.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры задач в домашнем задании.

Пусть  $\xi$  – число потомков частицы в ветвящемся процессе Гальтона-Ватсона ( $X_{n,n} \in \mathbb{Z}_+$ ). Обозначим  $E\xi = \mu$ ,  $D\xi = \sigma^2$ . Найдите  $EX_n$  и  $DX_n$ .

Пусть  $(N_t, t \geq 0)$  – пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda$ . Найдите математическое ожидание числа таких его скачков на отрезке  $[0, T]$ , что а) в их правой  $\varepsilon$ -окрестности нет других скачков (эта окрестность может выходить и за пределы отрезка), б) в их левой  $\varepsilon$ -окрестности нет других скачков, в) в их  $\varepsilon$ -окрестности нет других скачков (эта окрестность может выходить и за пределы отрезка).

Пусть  $(N_t, t \geq 0)$  – пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda$ . Найдите предел п.н.  $N_t/t$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Пусть  $(W_t, t \geq 0)$  – винеровский процесс. Докажите, что следующие процессы тоже винеровские а)  $X_t = tW_{1/t}$   $I\{t > 0\}$ , б)  $X_t = \sqrt{c} W_{(t/c)}$ ,  $c > 0$ , в)  $X_t = W_{(t+a)} - W_a$ ,  $a > 0$ , г)  $X_t = W_t I\{t < T\} + (2W_T - W_t) I\{t \geq T\}$ .

Пусть задана фильтрация  $F = (F_n, n \in \mathbb{N})$ , а  $\tau_1, \tau_2, \dots$  – марковские моменты относительно  $F$ . Докажите, что случайные величины  $\sum_{k=1}^n m_{\tau_k}$ ,  $\prod_{k=1}^n m_{\tau_k}$ ,  $\sup_k \tau_k$ ,  $\inf_k \tau_k$  тоже являются марковскими моментами относительно  $F$ .

Пусть  $(S_n, n \in \mathbb{N})$  – простое случайное блуждание с вероятностью шага вправо  $p$ . Пусть  $a < x < b$  – целые числа, а  $X_n = x + S_n$ ,  $n \geq 1$ . Обозначим  $\tau = \min \{n : S_n \in [a, b]\}$  – момент выхода процесса  $X_n$  из полосы. Докажите, что  $E\tau < \infty$ .

Пусть  $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$  – ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона, построенный по случайной величине  $\lambda$ . Известно, что  $E\xi = \mu$ . Докажите, что процесс  $Y_n = X_n / \mu^n$  является мартингалом относительно своей естественной фильтрации.

Пусть  $(W_t, t \geq 0)$  – винеровский процесс, а  $\tau_x = \min \{t : W_t = x\}$  для  $x \geq 0$ . Докажите, что процесс  $\tau = (\tau_x, x \geq 0)$  является марковским.

Пусть  $f$  – периодическая функция на  $\mathbb{R}$  с периодом  $T > 0$ . Случайная величина  $\xi$  равномерно распределена на  $[0, T]$ . Случайный вектор  $(\zeta, \eta)$  не зависит от  $\xi$ . Докажите, что процесс  $X_t = \zeta f(\eta t + \xi)$  стационарен в узком смысле.

Пусть  $X_t$  – гауссовский процесс с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией  $r(s, t) = ae^{-(b|s-t|)}$ ,  $a, b > 0$ . Докажите, что такой процесс существует, и найдите его спектральную плотность.

#### Пример варианта на контрольной работе

Найдите вероятности вырождения для ветвящихся процессов с производящей функцией числа потомков одной частицы

а)  $(1-p)/(1-pz)$ , б)  $1-p(1-z)^\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , в)  $(1+z+z^2+z^3)/4$ .

2. Задан процесс  $Y_t = \sum_{i=1}^{N_t} \eta_i$ ,  $t \geq 0$ , где  $(\eta_i, i \in \mathbb{N})$  – независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие также от пуассоновского процесса  $N = (N_t, t \geq 0)$  интенсивности  $\lambda$ . Докажите, что процесс  $Y_t$  имеет независимые приращения.

3. Пусть  $(Y_t, t \in [0, 1])$  – гауссовский процесс с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией  $r(s, t) = \min(s, t) - st$ . Докажите, что такой процесс существует и что процесс  $X_t = (t+1)Y_{(t/(t+1))}$ ,  $t \geq 0$  является винеровским.

4. Пусть  $(W_t, t \geq 0)$  – винеровский процесс. Положим  $\tau = \min\{t : W_t = y\}$  для некоторого  $y > 0$ . Найдите плотность случайной величины  $Y_a = \sup_{t \in [\tau, \tau+a]} W_t$ .

5. Пусть  $(W_t, t \geq 0)$  – винеровский процесс. Докажите, что процесс  $Y_t = W_t^2 - t$  является мартингалом относительно естественной фильтрации процесса  $W_t$ .

Темы для курсовых работ:

1. Спектральное представление. Теорема Карунена (б/д). Ковариационная функция стационарной в широком смысле последовательности, ее основные свойства. Теорема Герглота (док-во достаточности). Спектральная мера и спектральная плотность стационарной в широком смысле последовательности. Вычисление спектральной плотности с помощью ряда Фурье. Теорема о спектральном представлении стационарной в широком смысле последовательности.

2. Спектральное представление. Теорема Карунена (б/д). Ковариационная функция стационарного в широком смысле процесса на прямой, ее основные свойства. Теорема Бохнера – Хинчина (док-во достаточности). Спектральная мера и спектральная плотность стационарного в широком смысле процесса. Вычисление спектральной плотности с помощью формулы обращения. Теорема о спектральном представлении стационарного в широком смысле случайного процесса на прямой.

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Общее понятие случайного процесса (случайной функции), траектории случайного процесса. Примеры случайных процессов: случайное блуждание, процессы восстановления, модель страхования Крамера – Лундберга. Лемма о конечности п.н. процесса восстановления.

2. Простейшее случайное блуждание на прямой. Использование чисел Каталана для подсчета числа “неотрицательных” и “положительных” траекторий случайного блуждания, приходящих в нуль за время  $2n$ . Теорема о распределении первого момента возвращения в нуль для простейшего случайного блуждания. Теорема о вероятности возвращения в нуль.
3. Равномерная интегрируемость семейства случайных величин. Критерий равномерной интегрируемости сходящейся по распределению последовательности случайных величин (б/д). Достаточное условие равномерной интегрируемости последовательности случайных величин. Теорема об асимптотическом поведении времени, проведенном симметричным случайным блужданием в нуле за время  $n$ .
4. Теорема Берри – Эссеена (б/д) и следствие о вероятности большого отклонения для симметричного случайного блуждания. Лемма Бореля – Кантелли (б/д) и лемма о вероятности большого отклонения для максимума сумм симметричных случайных величин. Закон повторного логарифма для простейшего симметричного случайного блуждания на прямой. Смысл закона повторного логарифма.
5. Производящие функции случайных величин, их основные свойства. Ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона. Соотношение между производящими функциями числа частиц в  $n$ -м и  $(n+1)$ -м поколениях. Вывод уравнения для вероятности вырождения процесса.
6. Ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса.
7. Пространство траекторий случайного процесса, цилиндрическая сигма-алгебра на нем. Эквивалентное определение случайного процесса, как одного измеримого отображения в пространство траекторий. Конечномерные распределения случайного процесса. Доказательство того, что конечномерные распределения однозначно определяют распределение всего процесса в целом.
8. Конечномерные распределения случайного процесса. Лемма об условиях симметрии и согласованности. Теорема Колмогорова о существовании случайного процесса (б/д). Условия согласованности вероятностных мер на  $(R^n, B(R^n))$  в терминах характеристических функций (б/д). Следствие для процессов, индексированных множеством  $T \subset R$ .
9. Процессы с независимыми приращениями. Критерий существования процесса с независимыми приращениями в терминах характеристических функций приращений.
10. Пуассоновский процесс постоянной интенсивности как процесс с независимыми приращениями, доказательство существования. Явная конструкция пуассоновского процесса: процесс восстановления для экспоненциальных случайных величин. Следствие из явной конструкции: свойства траекторий пуассоновского процесса.
11. Ковариационная и корреляционная функции случайного процесса, их симметричность и неотрицательная определенность. Гауссовские случайные процессы. Доказательство существования гауссовского процесса с заданными функцией среднего и ковариационной функцией.
12. Винеровский процесс (процесс броуновского движения). Доказательство существования. Теорема о двух эквивалентных определениях винеровского процесса.
13. Модификация случайного процесса. Теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации (б/д). Доказательство существования непрерывной модификации у винеровского процесса.
14. Закон повторного логарифма для винеровского процесса (б/д). Смысл закона повторного логарифма. Локальный закон повторного логарифма для винеровского процесса.
15. Понятие фильтрации на вероятностном пространстве, согласованность случайного процесса с фильтрацией, естественная фильтрация случайного процесса. Марковские моменты и моменты остановки. Строго марковское свойство винеровского процесса.
16. Принцип отражения для винеровского процесса (б/д). Момент достижения винеровским процессом уровня  $x$ . Доказательство того, что он является моментом остановки. Совместное распределение максимума винеровского процесса на отрезке  $[0, t]$  и его правого конца. Теорема Башелье.
17. Мартингалы, субмартингалы и супермартингалы. Критерий мартингальности для процессов с независимыми приращениями. Примеры мартингалов и субмартингалов. Разложение Дуба для согласованных процессов с дискретным временем.
18. Мартингалы. Теорема об остановке и следствие из нее. Аналог теоремы об остановке для случая непрерывного времени (б/д).
19. Общее понятие марковского процесса относительно фильтрации. Теорема об эквивалентных определениях марковского процесса.

20. Теорема о марковости процессов с независимыми приращениями. Критерий марковости для гауссовских процессов.
21. Переходная функция марковского процесса. Доказательство того, что марковский процесс “почти обладает” переходной функцией. Переходная плотность марковского процесса.
22. Марковские цепи с дискретным временем. Теорема о независимости “будущего” и “прошлого” при фиксированном “настоящем”. Примеры марковских цепей: простейшее случайное блуждание на прямой и ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона.
23. Фазовое пространство, матрицы переходных вероятностей и начальное распределение для марковской цепи с дискретным временем. Понятие однородной марковской цепи. Уравнения Колмогорова – Чепмена и следствия из них. Стационарное и предельное распределения однородной марковской цепи. Свойства цепи с начальным стационарным распределением.
24. Эргодическая теорема для марковских цепей с дискретным временем. Стационарность и предельность эргодического распределения марковской цепи.
25. Марковские цепи с непрерывным временем. Свойства переходных вероятностей. Теорема о существовании марковской цепи с заданными начальным распределением и переходными вероятностями.
26. Однородные марковские цепи с непрерывным временем. Стохастическая полугруппа матриц переходных вероятностей. Стационарное и предельное распределения марковской цепи. Эргодическая теорема (б/д). Три следствия из эргодической теоремы: свойства эргодического распределения.
27. Инфинитезимальная матрица марковской цепи с непрерывным временем. Существование инфинитезимальной матрицы для стандартной марковской цепи (б/д). Обратные дифференциальные уравнения Колмогорова.
28. Прямые дифференциальные уравнения Колмогорова для марковской цепи с непрерывным временем. Следствия из них: уравнения для нахождения распределения цепи в произвольный момент времени  $t$  и для нахождения эргодического распределения.
29. Пространство  $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  случайных величин, его основные свойства. Лемма о непрерывности скалярного произведения.
30. Стохастическая непрерывность и непрерывность в среднем квадратичном случайного процесса. Критерий непрерывности в среднем квадратичном для  $L$ -процесса. Критерий стохастической непрерывности случайного процесса.
31. Дифференцирование случайных процессов по вероятности и в среднем квадратичном. Критерий непрерывной дифференцируемости в среднем квадратичном случайного процесса на отрезке (б/д). Вычисление математического ожидания, корреляционной и ковариационной функций  $L$ .
32. Интегрирование случайных процессов в среднем квадратичном. Критерий интегрируемости в среднем квадратичном на отрезке и следствие из него. Вычисление математического ожидания, корреляционной и ковариационной функций  $L$  интеграла от случайного процесса.
33. Стационарные случайные процессы: стационарность в узком и широком смысле. Взаимосвязь между ними. Стационарность в узком смысле марковской цепи с начальным стационарным распределением. Теорема об эквивалентности двух понятий стационарности для гауссовских процессов.
34. Ортогональные случайные меры на полукольце подмножеств. Структурная мера ортогональной случайной меры. Теорема о взаимно однозначном соответствии ортогональных случайных мер на полукольце полуинтервалов в  $R^+$  и непрерывных процессов с ортогональными приращениями (док-во в одну сторону, идея док-ва в другую).
35. Стохастический интеграл по ортогональной случайной мере. Продолжение с полукольца  $K$  ортогональной случайной меры на алгебру  $\alpha(K)$  и ее структурной меры на сигма-алгебру  $\sigma(K)$ . Определение и основные свойства стохастического интеграла от простых функций.
36. Стохастический интеграл по ортогональной случайной мере. Построение стохастического интеграла для произвольной функции из  $L_2(\Lambda, \sigma(K), \mu)$ . Его основные свойства. Идея построения стохастического интеграла в случае, когда  $\Lambda \in K/$ .

Примеры экзаменационных билетов:

1. Конечномерные распределения случайного процесса. Лемма об условиях симметрии и согласованности. Теорема Колмогорова о существовании случайного процесса (б/д). Условия согласованности вероятностных мер на  $(R^n, B(R^n))$  в терминах характеристических функций (б/д). Следствие для процессов, индексированных множеством  $T \subset R$

## Билет №2

1. Инфинитезимальная матрица марковской цепи с непрерывным временем. Существование инфинитезимальной матрицы для стандартной марковской цепи (б/д). Обратные дифференциальные уравнения Колмогорова

## Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.