Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе и довузовской подготовке
А.А. Воронов

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Уравнения математической физики
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Программная инженерия
	передовая инженерная школа радиолокации, радионавигации и программной инженерии
	кафедра высшей математики
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

5 (осенний) - Дифференцированный зачет

6 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 135 всего, в том числе:
лекции: 75 час.
семинары: 60 час.
лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 105 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 270, всего зач. ед.: 6

Количество контрольных работ, заданий: 4

Программу составил: В.И. Зубов, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 21.05.2020

Аннотация

В курсе изучаются основные краевые задачи математической физики. Приводится классификация линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, основанная на их приведении к каноническому виду. Вводится понятие характеристической поверхности.

Подробно рассматривается классическая задача Коши для уравнения колебаний струны. Выводится формула Даламбера, определяется область зависимости классического решения от начальных данных, доказывается корректность задачи. Рассматривается смешанная задача для полубесконечной струны.

Рассматриваются элементы теории обобщённых функций: преобразование Фурье и свёртка и обобщённых функций, дифференцирование преобразования Фурье и свёртки обобщённых функций. Вводится понятие обобщённого по Л. Шварцу решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в заданной области и его вычисления с помощью фундаментального решения. Постановка обобщённой задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с частными производными с постоянными коэффициентами.

Фундаментальное решение трёхмерного волнового уравнения. Обобщённая задача Коши для трёхмерного волнового уравнения, формула Кирхгофа. Единственность классического решения задачи Коши.

Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Формула Пуассона обобщённого решения задачи Коши для уравнения теплопроводности как свёртка источника с фундаментальным решением. Принцип максимума и единственность решения для уравнения теплопроводности.

Классическая и обобщённая постановки смешанной задачи для одномерного волнового уравнения и уравнения теплопроводности на отрезке. Решение этих задач методом Фурье.

Спектр и собственные функции оператора Лапласа в круге при тривиальном граничном условии. Уравнение и функции Бесселя. Метод Фурье построения обобщённого решения смешанной задачи о колебаниях закреплённой круглой мембраны.

Спектр и собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами на сфере трёхмерного пространства. Сферические функции. Метод Фурье построения обобщённого решения задачи Дирихле в шаре.

Интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с квадратично-интегрируемым ядром.

Гармонические функции и их свойства. Теорема о среднем и принцип максимума для гармонических функций в трёхмерном пространстве. Потенциалы, их применение для решения основных краевых задач для уравнения Лапласа.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Изучение методов решения и исследования уравнений в частных производных второго порядка, а также интегральных уравнений, которыми описываются процессы и явления в гидродинамике, аэродинамике, теории упругости, квантовой механике, электродинамике, астрофизике и др.

Задачи дисциплины

- изучение различных типов линейных дифференциальных уравнений с частными производными и свойств решений краевых задач для этих уравнений, характерных для каждого типа;
- изучение корректных постановок краевых задач для линейных дифференциальных уравнений с частными производными разных типов;
- овладение аналитическими методами решения краевых задач для линейных дифференциальных уравнений с частными производными.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи

применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные типы линейных дифференциальных уравнений в частных производных;
- определение характеристической поверхности;
- основные краевые задачи для уравнений гиперболического типа, параболического типа, эллиптического типа;
- понятие классического и обобщённого решений, корректность обобщённого решения;
- преобразование Фурье и свёртку обобщённых функций из пространства Шварца;
- понятие фундаментального решения (функции Грина) линейного дифференциального оператора, и его применение для построения обобщённого решения;
- фундаментальные решения волнового уравнения, уравнения теплопроводности, уравнения Лапласа;
- формулы Даламбера, Пуассона, Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения;
- формулу Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности;
- метод Фурье решения смешанных задач для уравнения теплопроводности и волнового уравнения на отрезке;
- функции Бесселя и метод Фурье решения смешанных задач для уравнения теплопроводности и волнового уравнения в круге;
- метод Фурье решения краевых задач для уравнения Лапласа в круге и кольце;
- сферические функции и метод Фурье решения краевых задач для уравнения Лапласа в шаре;
- гармонические функции и их свойства;
- формулу Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре;
- основные свойства оператора Лапласа при однородных краевых условиях;
- первую и вторую формулы Грина;
- интегральные уравнения Фредгольма второго рода с квадратично-интегрируемыми ядрами, теоремы Фредгольма.

уметь:

- приводить линейные уравнения в частных производных к каноническому виду, в частности выписывать характеристическое уравнение (в случае двух переменных), и представлять решение через характеристические переменные;
- находить решение смешанной задачи волнового уравнения для полубесконечной струны;
- строить фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, используя преобразование Фурье обобщённых функций;
- вычислять свёртку финитной обобщённой функции с произвольной, и строить обобщённое решение линейного уравнения в частных производных с финитным источником;
- применять метод Фурье для построения решений смешанных задач на отрезке, в кольцевых областях, а также в задачах, где используются функции Бесселя и сферические функции;
- находить характеристические числа и собственные функции, а также решать интегральные уравнения Фредгольма с вырожденным ядром;
- строить для интегрального уравнения Фредгольма с квадратично-интегрируемым ядром эквивалентное интегральное уравнение с вырожденным ядром.

владеть:

- специальными частными методами, применяемыми при построении решения задачи Коши для трехмерного волнового уравнения и трехмерного уравнения теплопроводности, в частности, в случае полиномиальных начальных данных;
- методами вычисления обобщенных производных и методами отыскания преобразования Фурье обобщённых функций;
- методами вычисления фундаментального решения линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами;
- методами вычисления резольвенты самосопряжённого интегрального оператора с квадратично-интегрируемым ядром.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Классическая постановка основных краевых задач математической физики. Классификация линейных уравнений в частных производных.	4	4		4
2	Классическая задача Коши для уравнения колебаний струны, формула Даламбера.	2	2		4
3	Обобщённое решение (по Л. Шварцу) и его корректность.	3	4		3
4	Теория обобщённых функций: пространство Шварца, преобразование Фурье и свёртка обобщённых функций.	10	8		4
5	Фундаментальное решение (функция Грина) линейного дифференциального оператора.	3	4		3
6	Обобщённая задача Коши и её корректность.	2	2		4
7	Волновое уравнение: фундаментальное решение и задача Коши.	3	3		4
8	Уравнение теплопроводности: фундаментальное решение и задача Коши.	3	3		4
9	Метод Фурье решения смешанных начально-краевых задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности.	7	6		15
10	Метод Фурье решения краевых задач для уравнения Лапласа в круге, кольце и шаре.	12	8		14
11	Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с квадратично-интегрируемым ядром.	12	8		16
12	Задача Штурма–Лиувилля.	7	4		15

13	Гармонические функции и краевые задачи для уравнения Лапласа в трёхмерном случае.	7	4		15
Итого часов		75	60		105
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		270 час., 6 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

1. Классическая постановка основных краевых задач математической физики. Классификация линейных уравнений в частных производных.

Основные уравнения и классическая постановка основных краевых задач атематической физики. Классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Преобразование уравнения второго порядка с помощью гладкой замены переменных и приведение его к каноническому виду. Характеристическая поверхность уравнения. Преобразование уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными с помощью характеристической замены.

2. Классическая задача Коши для уравнения колебаний струны, формула Даламбера.

Классическая задача Коши для уравнения колебаний струны (одномерное волновое уравнение), формула Даламбера. Область зависимости классического решения от начальных данных. Корректность задачи Коши для одномерного волнового уравнения (непрерывная зависимость решения от правой части и начальных данных). Пример Адамара некорректной задачи Коши. Смешанная задача для полубесконечной струны. Условия согласования начальных и граничных данных для существования классического решения. Появление обобщённого решения по Л. Шварцу смешанной задачи при отказе от условий согласования начальных и граничных данных.

3. Обобщённое решение (по Л. Шварцу) и его корректность.

Понятие обобщённого решения по Л. Шварцу линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в заданной области. Корректность обобщённого решения по отношению к классическому решению.

4. Теория обобщённых функций: пространство Шварца, преобразование Фурье и свёртка обобщённых функций.

Элементы теории обобщённых функций Л. Шварца. Пространства Шварца основных и обобщённых функций. Преобразование Фурье и свёртка и обобщённых функций. Преобразование Фурье производной обобщённой функции. Дифференцирование преобразования Фурье и свёртки обобщённых функций.

5. Фундаментальное решение (функция Грина) линейного дифференциального оператора.

Фундаментальное решение (функция Грина) линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Вычисление обобщённого решения линейного дифференциального уравнения в частных производных с помощью фундаментального решения. Вычисление фундаментального решения на примере трёхмерного оператора Лапласа и построение обобщённого решения трёхмерного уравнения Пуассона.

6. Обобщённая задача Коши и её корректность.

Постановка обобщённой задачи Коши для линейного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. Корректность обобщённой задачи Коши по отношению к классической задаче Коши.

7. Волновое уравнение: фундаментальное решение и задача Коши.

Обобщённая задача Коши для одномерного волнового уравнения. Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения. Формула Даламбера для обобщённого решения одномерного волнового уравнения как свёртка источника с фундаментальным решением. Обобщённая задача Коши для трёхмерного волнового уравнения.

Фундаментальное решение трёхмерного волнового уравнения. Формула Кирхгофа обобщённого решения задачи Коши для трёхмерного волнового уравнения как свёртка источника с фундаментальным решением. Выражение классического решения задачи Коши формулой Кирхгофа. Единственность классического решения задачи Коши.

8. Уравнение теплопроводности: фундаментальное решение и задача Коши.

Обобщённая задача Коши для уравнения теплопроводности.

Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Формула Пуассона обобщённого решения задачи Коши для уравнения теплопроводности как свёртка источника с фундаментальным решением. Выражение классического решения задачи Коши формулой Пуассона. Принцип максимума и единственность классического решения для уравнения теплопроводности.

Семестр: 6 (Весенний)

9. Метод Фурье решения смешанных начально-краевых задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности.

Классическая и обобщённая постановки смешанной задачи для одномерного волнового уравнения и уравнения теплопроводности на отрезке. Корректность обобщённого решения смешанной задачи. Единственность классического решения. Метод Фурье решения обобщённой смешанной задачи. Условия, при которых обобщённое решение является классическим.

10. Метод Фурье решения краевых задач для уравнения Лапласа в круге, кольце и шаре.

Классическая и обобщённая краевая задача Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в круге и кольце. Метод Фурье решения обобщённой краевой задачи. Условия, при которых обобщённое решение этих задач является классическим. Необходимое условие существования классического решения задачи Неймана.

Спектр и собственные функции оператора Лапласа в круге при тривиальном граничном условии. Уравнение и функции Бесселя. Представление функций Бесселя в виде степенного ряда. Свойство ортогональности и свойства нулей функций Бесселя. Ортогональный базис из собственных функций оператора Лапласа в пространстве функций, квадратично интегрируемых в круге. Метод Фурье построения обобщённого решения смешанной задачи о колебаниях закреплённой круглой мембраны.

Спектр и собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами на сфере трёхмерного пространства. Сферические функции, полиномы Лежандра и присоединённые функции Лежандра. Ортогональный базис из собственных функций оператора Лапласа–Бельтрами в пространстве функций, квадратично интегрируемых на сфере. Метод Фурье построения обобщённого решения задачи Дирихле в шаре.

11. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с квадратично-интегрируемым ядром.

Интегральные операторы с квадратично-интегрируемым ядром. Норма интегрального оператора и её оценка нормой интегрального ядра. Конечномерные интегральные операторы. Аппроксимация по операторной норме интегрального оператора с квадратично-интегрируемым ядром конечномерным интегральным оператором.

Интегральные уравнения Фредгольма второго рода (УФ). Разрешимость УФ с конечномерным интегральным оператором, теоремы Фредгольма. Разрешимость УФ с интегральным оператором малой нормы, ряд Неймана. Эквивалентность УФ для интегрального оператора с квадратично-интегрируемым ядром и УФ с конечномерным интегральным оператором. Теоремы Фредгольма для УФ с квадратично-интегрируемым ядром.

Самосопряжённые интегральные операторы с квадратично-интегрируемым ядром. Свойства собственных значений и собственных функций самосопряжённого интегрального оператора. Теорема Гильберта–Шмидта. Резольвента самосопряжённого интегрального оператора.

12. Задача Штурма–Лиувилля.

Задача Штурма–Лиувилля. Функция Грина задачи Штурма–Лиувилля. Сведение задачи Штурма–Лиувилля к интегральному уравнению Фредгольма. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма–Лиувилля. Теорема Стеклова.

13. Гармонические функции и краевые задачи для уравнения Лапласа в трёхмерном случае.

Формулы Грина для гладких функций в ограниченной области трёхмерного пространства. Потенциалы, представление гладкой функции в ограниченной области трёхмерного пространства в виде суммы потенциалов. Теорема о среднем и принцип максимума для гармонических функций в трёхмерном пространстве.

Основные краевые задачи для уравнения Лапласа. Единственность решения внутренний задачи Дирихле. Условие разрешимости внутренней задачи Неймана.

Функция Грина оператора Лапласа в ограниченной области из трёхмерного пространства. Решение внутренней задачи Дирихле с помощью функции Грина.

Функция Грина оператора Лапласа в шаре. Формула Пуассона решения внутренней задачи Дирихле для шара.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиапроектором и экраном.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

Сборник задач по уравнениям математической физики [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. С. Владимиров [и др.] .— 5-е изд., перераб. и доп. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2016 .— 520 с. - Библиогр.: с. 516-517. - 1500 экз. - ISBN 978-5-9221-1692-3 (в пер.) .— Полный текст (Режим доступа : доступ из сети МФТИ).

Тихонов, А. Н.
Уравнения математической физики [Текст] : учебник для вузов / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова .— 7-е изд. — М. : Изд-во МГУ : Наука, 2004 .— 798 с. — (Классический университетский учебник :посвящ. 250-летию Московского университета). - Библиогр.: с. 791. - Предм. указ.: с. 792-798. - 5000 экз. - ISBN 5-211-04843-1 (в пер.) .

Уроев, В. М.
Уравнения математической физики [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. М. Уроев .— М. : Яуза, 1998 .— 373 с. - 5000 экз. - ISBN 5-88923-026-3

Дополнительная литература

Владимиров, В. С.
Уравнения математической физики [Текст] : учебник для вузов / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов .— 2-е изд., стереотип. — М. : Физматлит, 2000, 2004, 2008 .— 400 с. - Библиогр.: с. 399. - 3000 экз. - ISBN 5-9221-0310-5 (в пер.) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

Михайлов, В. П.
Лекции по уравнениям математической физики [Текст] : учеб. пособие : рек. Учеб.-метод. советом МФТИ / В. П. Михайлов .— М : Физматлит, 2001 .— 206 с. — (Лекции кафедры высшей математики МФТИ). - Библиогр.: с. 202-203. - Предм. указ.: с. 204-206. - 1000экз. - ISBN 5-94052-026-X) .

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. http://lib.mipt.ru/catalogue/1604/?t=492 – электронная библиотека Физтеха, раздел «Уравнения математической физики».
2. http://www.exponenta.ru – образовательный математический сайт.
3. http://mathnet.ru – общероссийский математический портал.
4. http://www.edu.ru – федеральный портал «Российское образование».
5. http://benran.ru –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
6. http://www.i-exam.ru – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над каждой темой.
Самостоятельная работа включает в себя:
– изучение лекций и рекомендованной литературы,
– проработку учебного материала (по конспектам лекций и учебной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
– решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и практических занятиях,
– подготовку к практическим занятиям, диференцированному зачёту, экзамену.
Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме

индивидуальных консультаций. Показателем владения материалом служит умение решать практические и теоретические задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике, студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения. При подготовке к практическим занятиям необходимо повторять ранее изученные основные определения, формулировки теорем. В начале занятия, как правило, проводится короткий (10-15 минут) опрос по материалу прошедших занятий в устной или письменной форме. Обычно придерживаются следующей схемы: изучение материала лекции по конспекту в тот же день, когда была прослушана лекция (10-15 минут); повторение материала накануне следующей лекции (10-15 минут), проработка учебного материала по конспектам лекций, учебной и научной литературе, подготовка ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения (1 час неделю), подготовка к практическому занятию, решение задач (1 час). Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия. Обязательным требованием является выполнение домашних работ, которые оформляются в специально отведённой для этого тетради и систематически сдаются на проверку. Промежуточный контроль знаний проводится в виде промежуточных мини-контрольных работ, на которых студенту предлагается письменно ответить на теоретический вопрос и решить две задачи по сдаваемой теме.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Программная инженерия
	передовая инженерная школа радиолокации, радионавигации и программной инженерии
	кафедра высшей математики
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

5 (осенний) - Дифференцированный зачет

6 (весенний) - Экзамен

Разработчик: В.И. Зубов, д-р физ.-мат. наук, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Уравнения математической физики» обучающийся должен:

знать:

- основные типы линейных дифференциальных уравнений в частных производных;
- определение характеристической поверхности;
- основные краевые задачи для уравнений гиперболического типа, параболического типа, эллиптического типа;
- понятие классического и обобщённого решений, корректность обобщённого решения;
- преобразование Фурье и свёртку обобщённых функций из пространства Шварца;
- понятие фундаментального решения (функции Грина) линейного дифференциального оператора, и его применение для построения обобщённого решения;
- фундаментальные решения волнового уравнения, уравнения теплопроводности, уравнения Лапласа;
- формулы Даламбера, Пуассона, Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения;
- формулу Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности;
- метод Фурье решения смешанных задач для уравнения теплопроводности и волнового уравнения на отрезке;
- функции Бесселя и метод Фурье решения смешанных задач для уравнения теплопроводности и волнового уравнения в круге;
- метод Фурье решения краевых задач для уравнения Лапласа в круге и кольце;
- сферические функции и метод Фурье решения краевых задач для уравнения Лапласа в шаре;
- гармонические функции и их свойства;
- формулу Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре;
- основные свойства оператора Лапласа при однородных краевых условиях;
- первую и вторую формулы Грина;
- интегральные уравнения Фредгольма второго рода с квадратично-интегрируемыми ядрами, теоремы Фредгольма.

уметь:

- приводить линейные уравнения в частных производных к каноническому виду, в частности выписывать характеристическое уравнение (в случае двух переменных), и представлять решение через характеристические переменные;
- находить решение смешанной задачи волнового уравнения для полубесконечной струны;
- строить фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, используя преобразование Фурье обобщённых функций;
- вычислять свёртку финитной обобщённой функции с произвольной, и строить обобщённое решение линейного уравнения в частных производных с финитным источником;
- применять метод Фурье для построения решений смешанных задач на отрезке, в кольцевых областях, а также в задачах, где используются функции Бесселя и сферические функции;
- находить характеристические числа и собственные функции, а также решать интегральные уравнения Фредгольма с вырожденным ядром;
- строить для интегрального уравнения Фредгольма с квадратично-интегрируемым ядром эквивалентное интегральное уравнение с вырожденным ядром.

владеть:

- специальными частными методами, применяемыми при построении решения задачи Коши для трехмерного волнового уравнения и трехмерного уравнения теплопроводности, в частности, в случае полиномиальных начальных данных;
- методами вычисления обобщенных производных и методами отыскания преобразования Фурье обобщённых функций;
- методами вычисления фундаментального решения линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами;
- методами вычисления резольвенты самосопряжённого интегрального оператора с квадратично-интегрируемым ядром.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы и учитываются в БРС.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Какие уравнения называют эллиптическими, гиперболическими, параболическими?
2. Какие порядки могут иметь эллиптические и гиперболические уравнения с вещественными коэффициентами?
3. Сформулировать определение характеристического направления и характеристической поверхности (характеристической кривой).
4. Сформулировать теорему о среднем по сфере (по шару) для гармонической функции.
5. Сформулировать слабый принцип максимума для гармонической функции.
6. Сформулировать строгий принцип максимума для гармонической функции.
7. Сформулировать теорему об устранимой особенности гармонической функции.
8. Преобразование Кельвина и его свойства (в R2 и в R3).
9. Свойства собственных чисел и собственных функций симметричного оператора.

10. Корректность постановки задачи математической физики (по Адамару). Пример Адамара для уравнения Лапласа. Пример Адамара для уравнения теплопроводности.

11. Определение слабого решения краевой задачи для уравнения теплопроводности и проверка корректности такого определения.

12. Определение слабого решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности и проверка корректности такого определения.

13. Сформулировать принцип максимума для уравнения теплопроводности.

14. Класс единственности в задаче дифракции (на примере полосы и полуполосы). Условие излучения Зоммерфельда.

Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Дифференцированный зачет проводится по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, предусмотренных программой дисциплины, с учетом набранных очков по БРС.

Время проведения письменного экзамена составляет четыре астрономических часа. Во время проведения письменного экзамена обучающиеся могут пользоваться только ручкой, карандашом и бумагой.

3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Промежуточная аттестация по дисциплине «Уравнения математической физики» осуществляется в форме экзамена. Экзамен проводится в письменной и устной форме.

Примеры контрольных вопросов:

1. Какие уравнения называют эллиптическими, гиперболическими, параболическими?
2. Какие порядки могут иметь эллиптические и гиперболические уравнения с вещественными коэффициентами?
3. Сформулировать определение характеристического направления и характеристической поверхности (характеристической кривой).
4. Сформулировать теорему о среднем по сфере (по шару) для гармонической функции.
5. Сформулировать слабый принцип максимума для гармонической функции.
6. Сформулировать строгий принцип максимума для гармонической функции.
7. Сформулировать теорему об устранимой особенности гармонической функции.
8. Преобразование Кельвина и его свойства (в R^2 и в R^3).
9. Свойства собственных чисел и собственных функций симметричного оператора.
10. Корректность постановки задачи математической физики (по Адамару). Пример Адамара для уравнения Лапласа. Пример Адамара для уравнения теплопроводности.
11. Определение слабого решения краевой задачи для уравнения теплопроводности и проверка корректности такого определения.
12. Определение слабого решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности и проверка корректности такого определения.
13. Сформулировать принцип максимума для уравнения теплопроводности.
14. Класс единственности в задаче дифракции (на примере полосы и полуполосы). Условие излучения Зоммерфельда.

4. Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;
оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении письменного экзамена обучающемуся предоставляется _4 астрономических часа.

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется _1 астрономический час_ на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.

Примеры контрольных заданий

1. Определить тип уравнения с комплексными коэффициентами

$$\alpha u_t + \beta u_{tt} = u_{xx} + i u_x - u, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

2. Найти область единственности для задачи Коши

$$\begin{cases} u_{yy} = 4u_{xx}\,, \;\; x, y \in \mathbb{R}, \\ u|_{y=0} = u_0(x),\; u_y|_{y=0} = u_1(x), \;\; x \in [1,3]. \end{cases}$$

3. Найти область единственности для начально-краевой задачи

$$\begin{cases} u_{yy} = 9u_{xx}\,, \;\; x \in \mathbb{R},\; y > 0, \\ u|_{y=0} = u_0(x), \;\; u_y|_{y=0} = u_1(x), \;\; x \in [0,3], \\ u|_{x=0} = \varphi(t), \;\; t \in [0,1]. \end{cases}$$

4. Доказать, что для задачи Коши

$$\begin{cases} u_{yy} = u_{xx}\,, \;\; x, y \in \mathbb{R}, \\ u|_{y=0} = 2\sqrt{|x|}, \;\; u_y|_{y=0} = 0, \;\; x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

функция $u(x,y) = \sqrt{|x-y|} + \sqrt{|x+y|}$ является единственным слабым решением класса C.

5. Найти необходимое и достаточное условие разрешимости задачи Коши

$$\begin{cases} u_{yy} = 4u_{xx}\,, \;\; x, y \in \mathbb{R}, \\ u|_{y=2x} = \varphi(x), \;\; u_y|_{y=0} = 0, \;\; x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

и установить общий вид решения этой задачи в случае выполнения найденного условия.

6. Найти решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}\,, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; 0 < t < 1/4, \\ u|_{t=0} = e^{x^2}, \;\; x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

7. Решить задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, \;\; x \in (0,1), \\ X(0) = X'(1) - X(1) = 0. \end{cases}$$

8. Решить задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, \;\; x \in (0,1), \\ X'(0) = X'(1) + X(1) = 0. \end{cases}$$

9. Найти класс единственности для задачи дифракции

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u = f(x,y), \;\; x > 0,\, y \in (0,\pi), \\ u_y|_{y=0} = u_y|_{y=\pi} = 0,\; u|_{x=0} = \varphi(x),\; x > 0. \end{cases}$$

10. Найти класс единственности для задачи дифракции

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + 2u = f(x,y), \;\; x > 0,\; y \in (0,\pi), \\ u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0,\; u_x|_{x=0} = \varphi(x),\; x > 0. \end{cases}$$

11. Решить начально-краевую задачу

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{\partial^{2014} u}{\partial x^{2014}} + e^{-t}\sin x, \;\; x \in (0,\pi),\; t > 0, \\ \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}\Big|_{x=0} = \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}\Big|_{x=\pi},\; m = 0, \ldots, 1007,\; t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \sin x,\, x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

12. В круге $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$ решить задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2},\; (x,y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 2xy. \end{cases}$$

«СОГЛАСОВАНО»
Проректор по учебной работе и довузовской подготовке
_____________________________ А. А. Воронов
«____» _____________________________ 2018

Балльно-рейтинговая система оценки знаний студентов

по дисциплине «Уравнения математической физики», 3 курс, 5 семестр,
дифференцированный зачет, кафедра высшей математики

Виды заданий	Сумма баллов
1. Контрольная работа № 1 по 1-му заданию	0 – 9
2. Контрольная работа № 2 по 2-му заданию	0 – 9
3. Задание № 1 (тетрадь и ее защита)	0 – 3
4. Задание № 2 (тетрадь и ее защита)	0 – 3
5. Проверка теоретических знаний (не более трёх лекционных контрольных)	0 – 3
6. Работа на семинарах	0 – 3
ИТОГО	0 – 30

Дифференцированный зачет выставляется по результатам работы в семестре в соответствии со следующей шкалой

<table>
<tr><th>Баллы БРС</th><th colspan="2">Оценки</th></tr>
<tr><td>29-30</td><td>10</td><td rowspan="3">отлично</td></tr>
<tr><td>27-28</td><td>9</td></tr>
<tr><td>25-26</td><td>8</td></tr>
<tr><td>23-24</td><td>7</td><td rowspan="3">хорошо</td></tr>
<tr><td>21-22</td><td>6</td></tr>
<tr><td>19-20</td><td>5</td></tr>
<tr><td>17-18</td><td>4</td><td rowspan="2">удовлетворительно</td></tr>
<tr><td>15-16</td><td>3</td></tr>
<tr><td>10 – 14</td><td>2</td><td rowspan="2">неудовлетворительно</td></tr>
<tr><td>0 – 9</td><td>1</td></tr>
</table>

Если сумма баллов за работу в семестре меньше 15, то в зачетную неделю студенту предоставляется возможность повысить свою оценку. Итоговая оценка не может быть повышена более чем на два балла по десятибалльной шкале.

Студенты, имеющие неудовлетворительную оценку к началу экзаменационной сессии, ликвидируют академическую задолженность в установленные для этого сроки. При этом итоговая оценка студента не может быть повышена более чем на два балла по десятибалльной шкале.

Регламент принятия домашних заданий и проведения зачета определяется «Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов на кафедре высшей математики».

Зав. кафедрой ___________________ Г.Е. Иванов

«СОГЛАСОВАНО»

Проректор по учебной работе и экономическому развитию

______________________ А.А. Воронов

«_____»_____________________2019

Балльно-рейтинговая система оценки знаний студентов

Дисциплина: Уравнения математической физики, 3 курс, 6 семестр, экзамен.

Кафедра: высшей математики

№	Виды занятий	Сумма баллов
1.	Контрольная работа № 1 по сдаче 1 задания	0 – 9
2.	Контрольная работа № 2 по сдаче 2 задания	0 – 9
3.	Задание № 1	0 – 3
4.	Задание № 2	0 – 3
5.	Проверка теоретических знаний	0 – 3
6.	Работа на семинарах	0 – 3
7.	Письменная работа	0 – 30
8.	Итоговый контроль. Экзамен (устный ответ)	0 – 60
	ИТОГО	**0 – 120**

Сумма баллов $\sum$ промежуточной аттестации вычисляется по формуле :
$\sum = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 \le 120$, где $\sum_1$- за работу в семестре, ($0 \le \sum_1 \le 30$); $\sum_2$- за письменную работу; $\sum_2 = 3 \cdot К$, $1 \le К \le 10$, К-оценка за письменную работу. Если письменная работа написана на 0 баллов, то $\sum_2 = 0$. $\sum_3$- за устный экзамен; $\sum_3 = 6 \cdot n$, $3 \le n \le 10$, где n-оценка за устный экзамен. Если n=1 или 2, то итоговая оценка совпадает с n, при этом $\sum_3$ не вычисляется.

Соответствие оценок итоговой академической успеваемости балльно-рейтинговой системы.

Баллы БРС	Оценки	
112– 120	10	отлично
103 – 111	9	
94 – 102	8	
85 – 93	7	хорошо
76 – 84	6	
67 – 75	5	
54 – 66	4	удовлетворительно
41 – 53	3	
28 – 40	2	неудовлетворительно
0 – 27	1	

Регламент принятия домашних заданий и проведения экзамена определяется «Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов на кафедре высшей математики».

Зав. кафедрой ___________________Г.Е. Иванов