

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Проректор по учебной работе и
довузовской подготовке**

А.А. Воронов

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Математическая статистика
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Программная инженерия передовая инженерная школа радиолокации, радионавигации и программной инженерии кафедра высшей математики
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: Г.Е. Иванов, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 11.04.2023

Аннотация

Математическая статистика – раздел математики, разрабатывающий методы регистрации, описания и анализа данных наблюдений и экспериментов с целью построения математических моделей физических явлений, включающих в себя случайные величины. В курсе рассматриваются основные понятия математической статистики, методы оценивания параметров вероятностной модели явления, методы проверки статистических гипотез, методы проведения регрессионного анализа многомерной совокупности данных.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Изучение математических и теоретических основ современного статистического анализа, а также подготовка слушателей к дальнейшей самостоятельной работе в области анализа статистических задач прикладной математики, физики и экономики.

Задачи дисциплины

- Изучение математических основ математической статистики;
- приобретение слушателями теоретических знаний в области современного статистического анализа.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- Основные понятия математической статистики;
- основные подходы к сравнению оценок параметров неизвестного распределения;
- асимптотические и неасимптотические свойства оценок параметров неизвестного распределения;
- основные методы построения оценок с хорошими асимптотическими свойствами: метод моментов, метод максимального правдоподобия, метод выборочных квантилей;
- понятие эффективных оценок и неравенство информации Рао-Крамера;
- определение и главные свойства условного математического ожидания случайной величины относительно сигма-алгебры или другой случайной величины;
- определение общей линейной регрессионной модели и метод наименьших квадратов;
- многомерное нормальное распределение и его основные свойства;
- базовые понятия теории проверки статистических гипотез;
- лемму Неймана – Пирсона и теорему о монотонном отношении правдоподобия;
- критерий хи-квадрат Пирсона для проверки простых гипотез в схеме Бернулли.

уметь:

- Обосновывать асимптотические свойства оценок с помощью применения предельных теорем теории вероятностей;
- строить оценки с хорошими асимптотическими свойствами для параметров неизвестного распределения по заданной выборке из него;
- находить байесовские оценки по заданному априорному распределению;
- вычислять условные математические ожидания с помощью условных распределений;
- находить оптимальные оценки с помощью полных достаточных статистик;
- строить точные и асимптотические доверительные интервалы, и области для параметров неизвестного распределения;
- находить оптимальные оценки и доверительные области в гауссовской линейной модели;
- строить равномерно наиболее мощные критерии в случае параметрического семейства с монотонным отношением правдоподобия;
- строить F-критерий для проверки линейных гипотез в линейной гауссовской модели.

владеть:

- Основными методами математической статистики построения точечных и доверительных оценок:
- методом моментов, выборочных квантилей, максимального правдоподобия, методом наименьших квадратов, методом центральной статистики;
- навыками асимптотического анализа статистических критериев;
- навыками применения теорем математической статистики в прикладных задачах физики и экономики.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Вероятностно-статистическая модель.	4	4		14
2	Основная задача математической статистики.	4	4		6
3	Различные виды сходимостей случайных векторов.	6	6		12
4	Статистики и оценки.	6	6		14
5	Эмпирическое распределение и эмпирическая функция распределения.	6	6		12

6	F-критерий для проверки линейных гипотез в гауссовской линейной модели.	4	4		17
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

1. Вероятностно-статистическая модель.

Примеры несмещенных и состоятельных оценок (моменты, дисперсия); смещенных, но состоятельных оценок; несостоятельных, но несмещенных оценок. Оценки функций от параметров. Пример ситуации, в которой не существует несмещенной оценки некоторой функции от параметра.

2. Основная задача математической статистики.

Байесовская и минимаксная стратегии. Минимаксность байесовской стратегии с постоянным риском.

3. Различные виды сходимостей случайных векторов.

Теоремы об асимптотической нормальности выборочного среднего и медианы в модели симметричного распределения с неизвестным параметром сдвига.

4. Статистики и оценки.

Напоминание правила трех сигм и пояснения в терминах этого правила. Пример со «смешанным» нормальным распределением (медиана vs. выборочное среднее).

5. Эмпирическое распределение и эмпирическая функция распределения.

Оценки максимального правдоподобия (о.м.п.) и их свойства (состоятельность, асимптотическая нормальность и эффективность). О.м.п. для параметра сдвига в распределении Лапласа как пример асимптотически нормальной о.м.п. в нерегулярной модели.

6. F-критерий для проверки линейных гипотез в гауссовской линейной модели.

Несмещенность, состоятельность и эффективность оценки коэффициентов регрессии. Оценка остаточной дисперсии. Закон распределения коэффициентов регрессии. Закон распределения остаточной суммы квадратов. Статистический анализ коэффициентов регрессии: проверка значимости коэффициентов, проверка простейших линейных гипотез. Проверка значимости всей регрессии, сравнение двух уравнений регрессии.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Введение в математическую статистику [Текст] : [учебник для вузов] / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев .— М. : ЛКИ, 2010, 2014, 2015 .— 600 с.

Боровков, А. А.

Математическая статистика [Текст] : [учебник для вузов] / А. А. Боровков. — [3-е изд., испр.]. — М. : Физматлит, 2007. — 704 с. - Библиогр.: с. 692-697. - Список основных обозначений: с. 698-700. - Предм. указ.: с. 701-703. - 3000 экз. - ISBN 978-5-94052-141-X (в пер.)

Асанов, М. О.

Дискретная математика [Электронный ресурс] : графы, матроиды, алгоритмы : учеб. пособие / М. О. Асанов, В. А. Барановский, В. В. Расин .— 3-е изд., стереотип. — СПб. : Лань, 2020 .— (Учебники для вузов. Специальная литература) .— Электрон. версия печ. публикации .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

Дополнительная литература

1. Алгебра [Текст] : Определения, теоремы, формулы : [учебник для вузов] / Б. Л. Ван дер Варден ; пер. с нем. А. А. Бельского .— 3-е изд., стереотип. — СПб. : Лань, 2004 .— 624 с.

Ильин, В. А.

Линейная алгебра [Текст] : учебник для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк .— 6-е изд., стереотип. — М. : Физматлит, 2006, 2007 .— 280 с. — (Классический университетский учебник) (Курс высшей математики и математической физики ; под ред. А. Н. Тихонова [и др.] ; вып. 4). - Предм. указ.: с. 274-278. - 3000 экз. - ISBN 5-9221-0481-0 (в пер.) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.

Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Программная инженерия передовая инженерная школа радиолокации, радионавигации и программной инженерии кафедра высшей математики
курс:	2
квалификация:	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет	
Разработчик:	Г.Е. Иванов, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математическая статистика» обучающийся должен:

знать:

- Основные понятия математической статистики;
- основные подходы к сравнению оценок параметров неизвестного распределения;
- асимптотические и неасимптотические свойства оценок параметров неизвестного распределения;
- основные методы построения оценок с хорошими асимптотическими свойствами: метод моментов, метод максимального правдоподобия, метод выборочных квантилей;
- понятие эффективных оценок и неравенство информации Рао-Крамера;
- определение и главные свойства условного математического ожидания случайной величины относительно сигма-алгебры или другой случайной величины;
- определение общей линейной регрессионной модели и метод наименьших квадратов;
- многомерное нормальное распределение и его основные свойства;
- базовые понятия теории проверки статистических гипотез;
- лемму Неймана – Пирсона и теорему о монотонном отношении правдоподобия;
- критерий хи-квадрат Пирсона для проверки простых гипотез в схеме Бернулли.

уметь:

- Обосновывать асимптотические свойства оценок с помощью применения предельных теорем теории вероятностей;
- строить оценки с хорошими асимптотическими свойствами для параметров неизвестного распределения по заданной выборке из него;
- находить байесовские оценки по заданному априорному распределению;
- вычислять условные математические ожидания с помощью условных распределений;
- находить оптимальные оценки с помощью полных достаточных статистик;
- строить точные и асимптотические доверительные интервалы, и области для параметров неизвестного распределения;
- находить оптимальные оценки и доверительные области в гауссовской линейной модели;
- строить равномерно наиболее мощные критерии в случае параметрического семейства с монотонным отношением правдоподобия;
- строить F-критерий для проверки линейных гипотез в линейной гауссовской модели.

владеть:

- Основными методами математической статистики построения точечных и доверительных оценок:
- методом моментов, выборочных квантилей, максимального правдоподобия, методом наименьших квадратов, методом центральной статистики;
- навыками асимптотического анализа статистических критериев;
- навыками применения теорем математической статистики в прикладных задачах физики и экономики.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе выполнения студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Основная задача математической статистики. Параметрическая статистика. Оценки («статистики»). Вариационный ряд и порядковые статистики. Напоминание о распределении порядковых статистик.
2. Несмещенность и состоятельность оценок. Примеры несмещенных и состоятельных оценок (моменты, дисперсия); смещенных, но состоятельных оценок; несостоятельных, но несмещенных оценок. Оценки функций от параметров. Пример ситуации, в которой не существует несмещенной оценки некоторой функции от параметра.
3. Эмпирическая функция распределения. Ее несмещенность и состоятельность по отношению к теоретической функции распределения.
4. Функция штрафа (потерь) и функция риска. Байесовская и минимаксная стратегии. Минимаксность байесовской стратегии с постоянным риском.
5. Байесовская оценка в схеме Бернулли. Минимаксная оценка в схеме Бернулли (статистика Ходжеса – Лемана). Сравнение статистики Ходжеса – Лемана с выборочным средним.
6. Асимптотическая нормальность оценки. Теоремы об асимптотической нормальности выборочного среднего и медианы в модели симметричного распределения с неизвестным параметром сдвига.
7. Относительная асимптотическая эффективность. Напоминание правила трех сигм и пояснения в терминах этого правила. Пример со «смешанным» нормальным распределением (медиана vs. выборочное среднее).
8. Условия регулярности и неравенство Рао – Крамера (случай несмещенной оценки). Информация Фишера. Эффективные и сверхэффективные оценки.
9. Метод моментов. Состоятельность оценки.
10. Метод максимального правдоподобия. Оценки максимального правдоподобия (о.м.п.) и их свойства (состоятельность, асимптотическая нормальность и эффективность). О.м.п. для параметра сдвига в распределении Лапласа как пример асимптотически нормальной о.м.п. в нерегулярной модели.
11. О.м.п. в стандартных моделях (биномиальная, нормальная, Коши и др.).
12. Достаточные статистики в дискретном случае. Критерий факторизации. Примеры.
13. Условное математическое ожидание относительно разбиения. Условные плотности. Свойства условного математического ожидания (б/д в «непрерывном» случае, но с доказательством в случае условного математического ожидания относительно разбиения).
14. Достаточные статистики в общем случае: общий критерий факторизации как определение. Примеры.

15. Экспоненциальное семейство. Пессимистическая теорема (б/д).
16. Теорема Колмогорова – Блекуэлла – Рао об улучшении несмещенной оценки.
17. Полные статистики. Критерий полноты и достаточности для экспоненциального семейства (б/д).
18. Теорема Гливленко – Кантелли (формулировка). Общая задача о равномерной сходимости в законах больших чисел. Задача о треугольниках на плоскости. Размерность Вапника – Червоненкиса. Пример с пространством и открытыми полупространствами. Две теоремы Вапника – Червоненкиса (б/д). Теорема Гливленко – Кантелли как частный случай теоремы Вапника – Червоненкиса. Теорема о треугольниках как частный случай теоремы Вапника – Червоненкиса.
19. Статистика Колмогорова и ее независимость от вида непрерывной функции распределения (только строго монотонный случай). Асимптотическая теорема Колмогорова (б/д).
20. Точные и асимптотические доверительные интервалы. Односторонние и двусторонние интервалы.
21. Квантили распределений. Напоминание распределения хи-квадрат. Распределение Стьюдента.
22. Построение доверительных интервалов для параметров нормального распределения: для среднего при известной дисперсии, для дисперсии при известном среднем и для одновременно неизвестных среднего и дисперсии.
23. Доверительные интервалы для квантилей.
24. Критерий согласия Колмогорова.
25. Критерий согласия хи-квадрат Пирсона.
26. Сравнение двух простых гипотез. Ошибки первого и второго рода.
27. Случай абсолютно непрерывных распределений: отношение правдоподобия и теорема Неймана – Пирсона.
28. Критерий однородности Смирнова для двух независимых выборок.
29. Критерий однородности хи-квадрат для нескольких независимых выборок.
30. Проверка равенства средних у двух нормальных выборок с известными дисперсиями; с неизвестными дисперсиями. Проверка равенства дисперсий у двух нормальных выборок с неизвестными средними. Распределение Фишера.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку. Опрос обучающегося по билету не должен превышать двух астрономических часов. Во время проведения дифференциального зачета обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.