

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Математическая логика и теория алгоритмов
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Программная инженерия
	передовая инженерная школа радиолокации, радионавигации и программной инженерии
	кафедра дискретной математики
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

5 (осенний) - Дифференцированный зачет

6 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Количество контрольных работ, заданий: 8

Программу составили:

Д.В. Мусатов, канд. физ.-мат. наук, доцент

А.С. Милованов, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 03.03.2023

Аннотация

Годовой курс математической логики и теории алгоритмов преследует несколько целей. Во-первых, студентам на многих примерах показываются принципы формализации математических рассуждений. Показывается, что такое формальное определение, формальное утверждение и формальное доказательство. Во-вторых, для нескольких областей показывается взаимосвязь между синтаксисом языка, т.е. правилами построения корректных слов и предложений, и его семантикой, т.е. значением этих цепочек символов. В-третьих, даются основы теории вычислимости и показывается её связь с логикой и арифметикой. Наконец, отдельная часть курса посвящена теории множеств – основе всей математики.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- освоение общематематической терминологии (множества, отношения, функции).

Задачи дисциплины

- Выработать навык структурированного логического мышления;
- научиться давать формальные определения и приводить примеры определяемых объектов;
- научиться строить формальные записи математических утверждений и их доказательств и работать с этими записями;
- научиться проводить математические рассуждения, не основанные на конкретных свойствах рассматриваемых объектов.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- Фундаментальные понятия, законы, теории части дискретной математики;
- современные проблемы соответствующих разделов дискретной математики;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дискретной математики.

уметь:

- Понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области в устной и письменной форме.

владеть:

- Навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком дискретной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Арифметичные предикаты	6	6		
2	Булевы функции	8	8		
3	Выразимые предикаты	8	8		
4	Исчисление высказываний	8	8		30
5	Компактность в исчислении высказываний	6	6		
6	Однозначность разбора	8	8		
7	Пропозициональные формулы	8	8		
8	Формулы первого порядка	8	8		45
Итого часов		60	60		75
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		225 час., 5 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

1. Арифметичные предикаты

Теорема Мальцева о компактности.

2. Булевы функции

Мощности множеств.

3. Выразимые предикаты

Теории и модели. Выполнимость.

4. Исчисление высказываний

Формулы первого порядка.

Семестр: 6 (Весенний)

5. Компактность в исчислении высказываний

Выразимость предикатов.

6. Однозначность разбора

Операции над множествами.

7. Пропозициональные формулы

Отображения и соответствия.

8. Формулы первого порядка

Аutomорфизмы интерпретаций.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Вводный курс математической логики [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / В. А. Успенский, Н. К. Верещагин, Н. К. Плиско .— 2-е изд. — М. : Физматлит, 2002, 2007 .— 128 с.
2. Начала теории множеств [Текст] : лекции по мат. логике и теории алгоритмов. Ч.1 / Н. К. Верещагин, А. Шень .— 3-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2008 .— 128 с.
3. Языки и исчисления [Текст] : лекции по мат. логике и теории алгоритмов / Н. К. Верещагин, А. Шень .— 3-е изд., доп. — М. : МЦНМО, 2008 .— 288 с. - На обл. авт. не указаны .— (Современные лекционные курсы. Математическая логика и теория алгоритмов). - Библиогр.: с. 272-275. - Предм. указ.: с. 276-284. - Указ. имен: с. 285-288. - 1000 экз. - ISBN 978-5-94057-322-7) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

Дополнительная литература

1. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова .— 5-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2004, 2006 .— 256 с. - Библиогр.: с. 248-249. - Предм. указ.: с. 250-255.- ISBN 5-9221-0026-2 .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Программная инженерия передовая инженерная школа радиолокации, радионавигации и программной инженерии кафедра дискретной математики
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

5 (осенний) - Дифференцированный зачет
6 (весенний) - Экзамен

Разработчики:

Д.В. Мусатов, канд. физ.-мат. наук, доцент
А.С. Милованов, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов» обучающийся должен:

знать:

- Фундаментальные понятия, законы, теории части дискретной математики;
- современные проблемы соответствующих разделов дискретной математики;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дискретной математики.

уметь:

- Понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области в устной и письменной форме.

владеть:

- Навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком дискретной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры основных задач

Приведите формулу к наиболее коротким конъюнктивной и дизъюнктивной нормальным формам.

Не опираясь на теорему о полноте исчисления высказываний, докажите выводимость формулы.

Поделите с остатком $\omega^3 + \omega^2 \cdot 2 + \omega \cdot 4 + 2$ на $\omega + 3$.

Пусть $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ - неубывающая функция, стремящаяся к бесконечности. Докажите, что существует неразрешимое множество A , такое что для любого k множество $A \cap \{0, 1, \dots, k\}$ содержит не более $f(k)$ элементов.

Выразите в арифметике принадлежность к множеству чисел вида n^n .

Примеры дополнительных задач

Выразите формулой длины $O(\log N)$ предикат «у x есть ровно N различных простых делителей» в интерпретации $\langle \mathbb{N}, ', = \rangle$.

Докажите, что любая формула в интерпретации $\langle \mathbb{N}, 0, S, = \rangle$ эквивалентна некоторой бескванторной. Докажите, что предикат « x и y разной чётности» невыразим в этой интерпретации.

Выведите в исчислении предикатов с равенством формулу $\forall x \forall y (x=f(y) \rightarrow y=g(x)) \rightarrow \forall x g(f(x))=x$.

Пусть задана некоторая главная универсальная нумерация вычислимых функций. Классифицируйте множество номеров машин Тьюринга, которые вычисляют последовательность Фибоначчи в арифметической иерархии, доказав в том числе оценку снизу, и докажите или опровергните его m -полноту на соответствующем уровне.

Примеры простых утверждений из программы экзамена

Вывод правила обобщения в исчислении предикатов.

Сумма и произведение фундированных множеств фундированы, вполне упорядоченных – вполне упорядочены.

Замкнутость классов разрешимых и перечислимых множеств относительно пересечения и объединения, класса разрешимых относительно дополнения.

Построение комбинаторов сложения и умножения для нумералов Чёрча (с доказательством корректности).

Примеры теорем из программы экзамена

Теорема о дедукции для исчисления высказываний.

Теорема Тарского о неарифметичности множества истинных арифметических формул.

Теорема о делении с остатком вполне упорядоченных множеств.

Неперечислимость и некоперечислимость множества всюду определённых программ.

Примеры дополнительных вопросов из программы экзамена

Теорема Чёрча о неразрешимости множества общезначимых формул.

Теорема Гудстейна о сходимости к нулю последовательности чисел, полученных чередованием вычитания единицы и замены основания в полном разложении в сумму степеней с коэффициентами.

Любое счётное вполне упорядоченное множество изоморфно некоторому подмножеству действительных чисел.

Построение неглавной универсальной вычислимой функции

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень вопросов для сдачи дифференцированного зачета:

1. Элементарная теория множеств.
2. Понятия множества и подмножества, простейшие операции над множествами. Упорядоченные пары и кортежи, декартово произведение.
3. Отображения и соответствия. Понятия образа и прообраза. Инъекции, сюръекции и биекции. Композиция и обратное отображение.
4. Сравнение мощностей и понятие равномощности. Теорема Кантора-Бернштейна. Счётные и несчётные множества, их свойства.
5. Теорема Кантора. Отношения на множествах. Свойства бинарных отношений. Отношения эквивалентности, теорема о классах эквивалентности.

6. Отношения частичного и линейного порядка. Минимальные/максимальные и наименьшие/наибольшие элементы. Свойства упорядоченных множеств. Операции над упорядоченными множествами. Изоморфизмы упорядоченных множеств.
7. Логика высказываний. Булевы переменные и функции. Построение пропозициональных формул.
8. Вычисление значения формулы на наборе значений переменных. Таблицы истинности.
9. Тавтологии и противоречия. Приведение формул к КНФ и ДНФ. Многочлены Жегалкина.
10. Полные системы связок, теорема Поста.
11. Исчисление высказываний. Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Корректность исчисления высказываний.
12. Лемма о дедукции. Полнота исчисления высказываний. Непротиворечивые и совместные семейства формул.
13. Теорема о компактности для пропозициональных формул.
14. Языки первого порядка. Понятие сигнатуры. Построение формул первого порядка: теоремы, атомарные формулы, логические связки и кванторы.

Перечень контрольных вопросов для сдачи экзамена:

1. Параметры формулы. Понятие замкнутой формулы. Интерпретация сигнатуры. Истинность формулы в данной интерпретации на данной оценке.
2. Выполнимость и общезначимость формул первого порядка. Замена связанной переменной.
3. Предварённая нормальная форма. Выражение предикатов в данной интерпретации формулами первого порядка.
4. Изоморфизмы и автоморфизмы интерпретаций. Примеры невыразимых предикатов.
5. Метод элиминации кванторов. Элементарная эквивалентность интерпретаций. Игры Эренфойхта.
6. Исчисление предикатов и теория моделей. Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов.
7. Правило обобщения. Лемма о дедукции для исчисления предикатов. Корректность исчисления предикатов.
8. Непротиворечивые и совместные теории.
9. Теории и модели. Полные и экзистенциально полные теории. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов. Семантическое следование.
10. Теорема Мальцева о компактности.
11. Неклассические логики. Интуиционистское исчисление высказываний.
12. Конструктивное понимание логических связок. Модели Крипке. Модальная логика.
13. Системы аксиом для модальных логик. Семантика Крипке.
14. Формальные языки. Языки и грамматики. Иерархия Хомского.
15. Детерминированные и недетерминированные конечные автоматы. Лемма о разрастании.
16. Регулярные выражения. Контекстно-свободные грамматики.

Примеры экзаменационных билетов:

Билет №1

1. Выразите формулой длины $O(\log N)$ предикат «у x есть ровно N различных простых делителей» в интерпретации $\langle N, \cdot, = \rangle$.
2. Докажите, что любая формула в интерпретации $\langle N, 0, S, = \rangle$ эквивалентна некоторой бескванторной. Докажите, что предикат «x и y разной чётности» невыразим в этой интерпретации

Билет №2

1. Приведите формулу к наиболее коротким конъюнктивной и дизъюнктивной нормальным формам.
2. Не опираясь на теорему о полноте исчисления высказываний, докажите выводимость формулы.

оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений

оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений

оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений

оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета и экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.