# УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ПЕРВОГО РОДА
# ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ
# ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

## СОДЕРЖАНИЕ

# §1.УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕСВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ (УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ПЕРВОГО РОДА)

**1. Необходимые сведения из кинематики несвободных систем.** Рассмотрим движение системы материальных точек $P_\nu$ $(\nu = 1, 2, ..., N)$ относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат, предполагаемой неподвижной. Положение точки $P_\nu$ задается ее радиус-вектором $\mathbf{r}_\nu$; $\mathbf{r}_\nu' = (x_\nu, y_\nu, z_\nu)$; штрихом обозначена операция транспонирования. Векторы $\mathbf{v}_\nu$ и $\mathbf{w}_\nu$ — скорость и ускорение точки $P_\nu$; $\mathbf{v}_\nu' = (\dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu)$, $\mathbf{w}_\nu' = (\ddot{x}_\nu, \ddot{y}_\nu, \ddot{z}_\nu)$; точкой обозначено дифференцирование по времени $t$. Систему предполагаем несвободной. На нее наложено r геометрических и s дифференциальных удерживающих связей, аналитическое представление которых имеет вид

$$f_\alpha(\mathbf{r}_\nu, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, ..., r), \tag{1.1}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{a}_{\beta\nu}(\mathbf{r}_\nu, t) \cdot \mathbf{v}_\nu + a_\beta(\mathbf{r}_\nu, t) = 0 \quad (\beta = 1, 2, ..., s). \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{a}_{\beta\nu}'(\mathbf{r}_\nu, t) = (a_{\beta\nu x}, a_{\beta\nu y}, a_{\beta\nu z})$, точкой между векторами обозначается их скалярное произведение. Величины $f_\alpha(\mathbf{r}_\nu, t), \mathbf{a}_{\beta\nu}(\mathbf{r}_\nu, t), a_\beta(\mathbf{r}_\nu, t)$ — функции от $\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N, t$. В общем случае они имеют $3N + 1$ аргумент: $3N$ координат точек $P_\nu$ и время $t$. Функции считаются достаточно гладкими, например, дважды непрерывно дифференцируемыми. Предполагается также, что $r+s$ уравнений связей (1.1),(1.2) независимы. Заметим еще, что величина $3N-r-s$ должна быть положительной, иначе ограничения, налагаемые связями, были бы настолько жесткими, что движение точек системы было бы либо вообще невозможным, либо должно было происходить по заранее заданному закону во времени.

Точки $P_\nu$ не могут двигаться в пространстве совершенно произвольно. Их совместимые со связями (или допускаемые связями; или кинематически возможные; или, для краткости, *возможные*) координаты, скорости, ускорения должны удовлетворять некоторым соотношениям, вытекающим из уравнений связей (1.1),(1.2).

Для заданного момента времени *возможными положениями* системы являются, очевидно, такие ее положения, в которых радиус-векторы $\mathbf{r}_\nu$ точек системы удовлетворяют уравнениям геометрических связей (1.1).

Продифференцируем обе части равенств (1.1) по времени, считая $\mathbf{r}_\nu$ функциями $t$. Тогда получим следующие дифференциальные связи, вытекающие из геометрических связей (1.1):

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, ..., r). \tag{1.3}$$

Совокупность векторов $\mathbf{v}_\nu$, удовлетворяющая линейным уравнениям (1.2) и (1.3) в возможном для данного момента времени положении системы, называется *возможными скоростями* для этого момента времени.

Продифференцировав равенства (1.3) и (1.2) по времени, получим такие соотношения:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{w}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N}\left(\sum_{\mu=1}^{N} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\mu \partial \mathbf{r}_\nu}\mathbf{v}_\mu\right) \cdot \mathbf{v}_\nu + 2\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t \partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu + \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t^2} = 0 \tag{1.4}$$

$$(\alpha = 1, 2, ..., r),$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot \mathbf{w}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N}\left(\sum_{\mu=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{a}_{\beta\nu}}{\partial \mathbf{r}_\mu}\mathbf{v}_\mu\right) \cdot \mathbf{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{a}_{\beta\nu}}{\partial t} \cdot \mathbf{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial a_\beta}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu + \tag{1.5}$$

$$+\frac{\partial a_\beta}{\partial t} = 0 \quad (\beta = 1, 2, ..., s).$$

Совокупность векторов $\mathbf{w}_\nu$, удовлетворяющая линейным уравнениям (1.4), (1.5) при возможных в данный момент времени положении и скоростях точек системы, называется *возможными ускорениями* для этого момента времени.

Ввиду независимости связей (1.1), (1.2), $s + r$ уравнений (1.3), (1.2) относительно компонент $\dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu$ векторов возможных скоростей являются независимыми. Аналогичное утверждение справедливо и для системы (1.4),(1.5) для компонент $\ddot{x}_\nu, \ddot{y}_\nu, \ddot{z}_\nu$ векторов возможных ускорений. Независимость упомянутых уравнений удобно выразить, введя матрицу $\mathbf{K}$ размером $(r + s) \times 3N$ вида

$$\mathbf{K} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} & \frac{\partial f_1}{\partial y_N} & \frac{\partial f_1}{\partial z_N} \\ . & . & . & \cdots & . & . & . \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \frac{\partial f_r}{\partial y_1} & \frac{\partial f_r}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_N} & \frac{\partial f_r}{\partial y_N} & \frac{\partial f_r}{\partial z_N} \\ a_{11x} & a_{11y} & a_{11z} & \cdots & a_{1Nx} & a_{1Ny} & a_{1Nz} \\ . & . & . & \cdots & . & . & . \\ a_{s1x} & a_{s1y} & a_{s1z} & \cdots & a_{sNx} & a_{sNy} & a_{sNz} \end{Vmatrix}. \tag{1.6}$$

Независимость уравнений системы (1.3),(1.2) (а также уравнений системы (1.4),(1.5)) означает, что ранг матрицы $\mathbf{K}$ равен $r+s$, т.е. ее строки линейно независимы.

Используя матрицу $\mathbf{K}$, уравнения (1.3),(1.2) и (1.4),(1.5) можно записать более компактно. Пусть $3N$ - мерные векторы-столбцы $\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ и $(r+s)$ - мерный вектор-столбец $\mathbf{k}$ определяются равенствами

$$\mathbf{r}^{'} = (x_1, y_1, z_1, ..., x_N, y_N, z_N), \quad \mathbf{v}^{'} = (\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, ..., \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N),$$

$$\mathbf{w}^{'} = (\ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{z}_1, ..., \ddot{x}_N, \ddot{y}_N, \ddot{z}_N), \quad \mathbf{k}^{'} = (\partial f_1/\partial t, ..., \partial f_r/\partial t, a_1, ..., a_s).$$

Тогда соотношения (1.3),(1.2) и (1.4),(1.5), определяющие возможные скорости и ускорения точек системы запишутся в виде

$$\mathbf{Kv} + \mathbf{k} = 0, \tag{1.7}$$

$$\mathbf{Kw} + \frac{d\mathbf{K}}{dt}\mathbf{v} + \frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0. \tag{1.8}$$

Отметим, что число $r+s$ линейных уравнений, определяющих проекции возможных скоростей и ускорений, меньше числа $3N$ этих проекций. Следовательно, для данного момента времени существует бесконечное множество возможных скоростей $\mathbf{v}_\nu$ и возможных ускорений $\mathbf{w}_\nu$.

Пусть в момент времени $t$ система занимает некоторое свое возможное положение. *Виртуальным перемещением* системы называется совокупность величин $\delta\mathbf{r}_\nu$, удовлетворяющая линейным однородным уравнениям

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0 \quad (\alpha = 1, 2, ..., r), \tag{1.9}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0 \quad (\beta = 1, 2, ..., s). \tag{1.10}$$

В векторно-матричных обозначениях эти уравнения записываются в виде

$$\mathbf{K}\delta\mathbf{r} = 0, \tag{1.11}$$

где $\delta\mathbf{r}^{'} = (\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, ..., \delta x_N, \delta y_N, \delta z_N)$. Величины $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$ называют *вариациями* координат $x_\nu, y_\nu, z_\nu$. Так как число неизвестных вариаций $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$ превосходит число уравнений (1.9),(1.10), которым они удовлетворяют, то количество виртуальных перемещений бесконечно. Число $n$ независимых виртуальных перемещений называется *числом степеней свободы* системы. Очевидно, что $n = 3N - r - s$.

**2. О задаче динамики несвободных систем.** Пусть $m_\nu$ — масса точки $P_\nu$ материальной системы, а $\mathbf{F}_\nu$ и $\mathbf{R}_\nu$ — равнодействующие соответственно активных сил и реакций связей, приложенных к этой точке. Дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$m_\nu \mathbf{w}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, ..., N). \tag{2.1}$$

Реакции $\mathbf{R}_\nu$ таковы, что ускорения $\mathbf{w}_\nu$, содержащиеся в левых частях уравнений (2.1), являются кинематически возможными, т.е. удовлетворяют $r + s$ уравнениям (1.4),(1.5). Никакие другие требования к реакциям $\mathbf{R}_\nu$ пока не предъявляются.

Задача динамики рассматриваемой несвободной системы может быть сформулирована следующим образом. Заданы активные силы $\mathbf{F}_\nu$, приложенные к точкам $P_\nu$ материальной системы, массы $m_\nu$ точек, связи, возможные начальные положения и скорости точек системы. Требуется найти положения точек $\mathbf{r}_\nu$ и реакции связей $\mathbf{R}_\nu$ как функции времени. Таким образом, требуется найти $6N$ скалярных неизвестных ($3N$ координат $x_\nu, y_\nu, z_\nu$ точек системы и $3N$ компонент $R_{\nu x}, R_{\nu y}, R_{\nu z}$ векторов $\mathbf{R}_\nu$ реакций связей).

Для решения этой задачи мы имеем $3N+r+s$ скалярных уравнений: $3N$ уравнений из векторных уравнений движения (2.1) и $r+s$ уравнений связей (1.1) и (1.2). Число неизвестных превосходит число уравнений (на число степеней свободы $n = 3N-r-s = 6N-(3N+r+s)$), и сформулированная задача неопределенна.

Таким образом, задание связей их уравнениями (1.1) и (1.2) недостаточно, чтобы сделать задачу динамики несвободной системы определенной. Связи, очевидно, должны удовлетворять каким-то дополнительным требованиям. Задача становится определенной, если предположить, что связи рассматриваемой несвободной системы являются *идеальными*. Так называют удерживающие связи, если сумма работ всех их реакций на любом виртуальном перемещении равна нулю, т.е. когда выполняется равенство

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{R}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0. \tag{2.2}$$

Отметим, что свойство идеальности связей не вытекает из их уравнений, а вводится дополнительно.

Выделением класса систем с идеальными связями мы делаем задачу определенной, так как одно равенство (2.2) эквивалентно $n$ уравнениям.

Для их получения нужно в правой части равенства (2.2) выразить зависимые из вариаций где $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, ..., \delta x_N, \delta y_N, \delta z_N$ через независимые и затем приравнять нулю коэффициенты при этих независимых вариациях. Число же последних равно числу степеней свободы, т.е. числу недостающих уравнений $n$.

Остановимся на этом подробнее.

**3. Реакции идеальных удерживающих связей. Их выражение при помощи неопределенных множителей.** Пусть уравнения связей заданы соотношениями (1.1),(1.2). Ответим на вопрос: какими должны быть реакции $\mathbf{R}_\nu$, чтобы выполнялось требование (2.2) идеальности связей.

Если бы величины $\delta\mathbf{r}_\nu$ были произвольными (случай *свободной* системы, т.е. системы без связей), то, очевидно, что все $\mathbf{R}_\nu$ были бы равны нулю. Но в рассматриваемой нами несвободной материальной системе величины $\delta\mathbf{r}_\nu$ не вполне произвольны: они удовлетворяют соотношениям (1.9),(1.10) (или эквивалентному им равенству (1.11)). Так как ранг матрицы $\mathbf{K}$ равен $r + s$, то $3N - r - s$ из вариаций $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, ..., \delta x_N, \delta y_N, \delta z_N$ могут быть выбраны произвольно (назовем их независимыми), а остальные $r + s$ вариаций (зависимые от этих выбранных) могут быть выражены через них из системы линейных уравнений (1.9),(1.10). Сделав это, подставим выражения для зависимых вариаций в соотношение (2.2). В получающееся при этом равенство войдут только независимые вариации, причем линейным образом. Приравнивание нулю коэффициентов при них дает $3N - r - s$ равенств между величинами $R_{\nu x}, R_{\nu y}, R_{\nu z}$.

Описанная процедура обладает рядом неудобств. При ее осуществлении мы должны, например, довольно произвольно подразделять вариации на независимые и зависимые, т.е. предпочитать одни координаты другим, что приводит к несимметрии получающихся результатов. Кроме того, для различного числа связей описанная процедура приводит к различным формам результата исключения зависимых вариаций из соотношения (2.2).

Упомянутые неудобства преодолеваются методом неопределенных множителей Лагранжа. Метод Лагранжа позволяет найти выражения реакций $\mathbf{R}_\nu$ через уравнения связей и неопределенные множители. Получим эти выражения. Для этого умножим каждое из равенств (1.9) на скалярный множитель $\lambda_\alpha\,(\alpha = 1,2,...,r)$, а каждое из равенств (1.10) на скалярный множитель $\mu_\beta\,(\beta = 1,2,...,s)$ и вычтем получающиеся при этом равенства из равенства (2.2). Тогда придем к соотношению

$$\sum_{\nu=1}^{N}\Bigg(\mathbf{R}_\nu - \sum_{\alpha=1}^{r}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} - \sum_{\beta=1}^{s}\mu_\beta\,\mathbf{a}_{\beta\nu}\Bigg)\cdot\delta\mathbf{r}_\nu = 0 \tag{3.1}$$

или, если выразить векторы $\mathbf{R}_\nu, \mathbf{a}_{\beta\nu},\ \delta\mathbf{r}_\nu$ через их проекции,

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=1}^{N}\Bigg(R_{\nu x} - \sum_{\alpha=1}^{r}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu} - \sum_{\beta=1}^{s}\mu_\beta\,a_{\beta\nu x}\Bigg)\delta x_\nu + \\ + \sum_{\nu=1}^{N}\Bigg(R_{\nu y} - \sum_{\alpha=1}^{r}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu} - \sum_{\beta=1}^{s}\mu_\beta\,a_{\beta\nu y}\Bigg)\delta y_\nu + \\ + \sum_{\nu=1}^{N}\Bigg(R_{\nu z} - \sum_{\alpha=1}^{r}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu} - \sum_{\beta=1}^{s}\mu_\beta\,a_{\beta\nu z}\Bigg)\delta z_\nu = 0.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Множители $\lambda_\alpha$, $\mu_\beta$ пока произвольны. Мы распорядимся ими так, чтобы коэффициенты при $r+s$ зависимых вариациях обратились в нуль. Тогда в соотношении (3.2) останутся лишь слагаемые с независимыми вариациями. Коэффициенты при них должны равняться нулю, иначе равенство (3.2) не будет справедливо при любом выборе независимых вариаций. Иными словами, коэффициенты при $r+s$ зависимых вариациях равны нулю за счет выбора $R_{\nu x}$, $R_{\nu y}$, $R_{\nu z}$, а коэффициенты при $3N-r-s$ независимых вариациях — потому, что иначе левая часть равенства (3.2) не может быть всегда равной нулю. И получается так, что подразделение вариаций на зависимые и независимые становится неважным. Для удовлетворения уравнения (3.2) надо приравнять нулю все коэффициенты при вариациях $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, ..., \delta x_N, \delta y_N, \delta z_N$. И, таким образом, для реакций $\mathbf{R}_\nu$ мы получаем следующие выражения:

$$\mathbf{R}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{r}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} + \sum_{\beta=1}^{s}\mu_\beta\,\mathbf{a}_{\beta\nu} \qquad (\nu = 1,2,...,N) \tag{3.3}$$

В правой части этих выражений каждое слагаемое представляет собой реакцию какой - либо одной из связей (1.1),(1.2), приложенную к точке $P_\nu$, а в целом правая часть выражения (3.3) – равнодействующая реакций всех связей, приложенных к этой точке.

Величины $\lambda_\alpha$, $\mu_\beta\,(\alpha = 1, 2, ..., r;\ \beta = 1, 2, ..., s)$ называются *множителями связей.* Если через $\mathbf{R}$ обозначить $3N$-мерный вектор-столбец реакций, а через $\mathbf{p}$ — $(r+s)$-мерный вектор-столбец множителей связей,

$$\mathbf{R}^{'} = (R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}, ..., R_{Nx}, R_{Ny}, R_{Nz}), \quad \mathbf{p}^{'} = (\lambda_1, ..., \lambda_r, \mu_1, ..., \mu_s)\,,$$

то выражения (3.3) для реакций связей запишутся в виде одного равенства

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}^{'}\,\mathbf{p} \tag{3.4}$$

Мы получили выражения (3.3) для реакций идеальных связей через уравнения самих связей и множители связей. Почти очевидно и обратное утверждение: если для реакций связей (1.1),(1.2) справедливо представление (3.3), то связи идеальные, т.е. для их реакций имеет место равенство (2.2). В самом деле, умножим каждое из равенств (3.3) скалярно на виртуальное перемещение $\delta\mathbf{r}_\nu$ и сложим их. В результате получим

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{R}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha \left( \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu \right) + \sum_{\beta=1}^{s} \mu_\beta \left( \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu \right). \tag{3.5}$$

Но выражения, заключенные в круглые скобки в правой части этого равенства, обращаются в нуль в силу уравнений (1.9),(1.10), определяющих виртуальные перемещения. Поэтому из (3.5) следует, что при любых $\delta\mathbf{r}_\nu$ имеет место равенство (2.2), т.е. связи (1.1),(1.2) идеальные.

**4. Уравнения Лагранжа первого рода.** Используя выражения (3.3) для реакций связей, уравнения движения (2.1) рассматриваемой несвободной системы с идеальными удерживающими связями (1.1),(1.2) можно записать в виде

$$m_\nu \mathbf{w}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} + \sum_{\beta=1}^{s} \mu_\beta\, \mathbf{a}_{\beta\nu} \qquad (\nu = 1, 2, ..., N) \tag{4.1}$$

или в проекциях на оси координат

$$m_\nu \ddot{x}_\nu = F_{\nu x} + \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu} + \sum_{\beta=1}^{s} \mu_\beta\, a_{\beta\nu x},$$

$$m_\nu \ddot{y}_\nu = F_{\nu y} + \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu} + \sum_{\beta=1}^{s} \mu_\beta\, a_{\beta\nu y},$$

$$m_\nu \ddot{z}_\nu = F_{\nu z} + \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu} + \sum_{\beta=1}^{s} \mu_\beta \, a_{\beta\nu z} \qquad (\nu = 1, 2, ..., N) \tag{4.2}$$

Уравнения (4.1) (или эквивалентные им уравнения(4.2)) называют уравнениями движения несвободной системы с множителями, или *уравнениями Лагранжа первого рода.* Они должны рассматриваться вместе с уравнениями связей (1.1),(1.2). Система уравнений (1.1),(1.2) и (4.2) содержит $3N + r + s$ неизвестных функций времени $x_\nu, y_\nu, z_\nu, \lambda_\alpha, \mu_\beta$, т.е. столько же, сколько имеется уравнений.

Опишем процедуру интегрирования уравнений Лагранжа первого рода. Для сокращения записи, помимо введенных ранее векторно-матричных обозначений, введем еще $3N$-мерный вектор-столбец $\mathbf{F}$ активных сил, $\mathbf{F}' = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, ..., F_{Nx}, F_{Ny}, F_{Nz})$ и диагональную матрицу $\mathbf{M}$ размером $3N \times 3N$ (матрицу масс), $\mathbf{M} = \mathrm{diag}(m_1, m_1, m_1, ..., m_N, m_N, m_N)$. С учетом равенства (3.4), уравнения (4.1) можно тогда записать в виде одного векторно-матричного уравнения

$$\mathbf{M}\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{K}' \, \mathbf{p}. \tag{4.3}$$

Разрешив это равенство относительно $\mathbf{w}$(это всегда можно сделать, так как матрица $\mathbf{M}$, очевидно, имеет обратную $\mathbf{M}^{-1}$), получим

$$\mathbf{w} = \mathbf{M}^{-1}\big(\mathbf{F} + \mathbf{K}' \, \mathbf{p}\big). \tag{4.4}$$

Подставив это выражение для $\mathbf{w}$ в соотношение (1.8), определяющее кинематически возможные ускорения точек системы, получим следующее уравнение для вектора $\mathbf{p}$ множителей связей:

$$\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}' \, \mathbf{p} = -\big(\frac{d\mathbf{K}}{dt}\mathbf{v} + \frac{d\mathbf{k}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}\big). \tag{4.5}$$

Это уравнение однозначно разрешимо относительно $\mathbf{p}$, так как определитель матрицы $\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}'$ размером $(r+s) \times (r+s)$ отличен от нуля. Действительно, если бы это было не так, то существовало бы нетривиальное решение системы уравнений

$$\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}' \, \mathbf{x} = 0 \tag{4.6}$$

где $\mathbf{x}$ — $(r+s)$-мерный вектор-столбец, хотя бы одна компонента которого отлична от нуля. Умножив обе части равенства (4.6) скалярно на $\mathbf{x}$, получим $\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}' \, \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$, или $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}' \, \mathbf{x} \cdot \mathbf{K}'\mathbf{x} = 0$. Ввиду того, что $\mathbf{M}^{-1} = \mathrm{diag}(m_1^{-1}, m_1^{-1}, m_1^{-1}, ..., m_N^{-1}, m_N^{-1}, m_N^{-1})$, из последнего равенства следует, что $\mathbf{K}'\mathbf{x}$=0. Но это равенство при $\mathbf{x} \neq 0$ невозможно, так как строки матрицы $\mathbf{K}$ линейно независимы.

Таким образом, из уравнения (4.5) однозначно находятся множители связей как функции $t, x_\nu, y_\nu, z_\nu, \dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu$ (всегда предполагается, что активные силы зависят только от этих переменных),

$$\mathbf{p} = -\big(\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}'\big)^{-1}\big(\frac{d\mathbf{K}}{dt}\mathbf{v} + \frac{d\mathbf{k}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}\big). \tag{4.7}$$

Подставив это выражение для $\mathbf{p}$ в правую часть равенства (4.3), придем к системе $3N$ уравнений относительно функций $x_\nu, y_\nu, z_\nu$ ($\nu = 1, 2, ..., N$). При интегрировании этой системы появятся $6N$ произвольных постоянных. Но независимыми среди них будет только $6N - 2r - s$, так как функции $x_\nu, y_\nu, z_\nu$ должны удовлетворять $2r + s$ соотношениям (1.1)–(1.3), определяющим возможные положения и скорости рассматриваемой несвободной системы. После получения величин $x_\nu, y_\nu, z_\nu$ как функций времени реакции связей находятся по формулам (4.7) и (3.4)(или (3.3)).

Таким образом, уравнения Лагранжа первого рода позволяют найти и движение материальной системы, и реакции связей.

Напомним, что уравнения Лагранжа первого рода получены для материальных систем с идеальными удерживающими связями. Причем система может быть как голономной, так и неголономной. В последнем случае дифференциальные связи считались линейными относительно компонент скоростей точек системы.

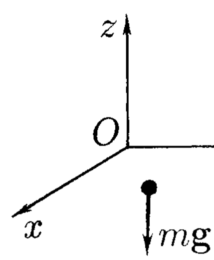
Уравнения (4.2), содержащие множители связей, симметричны относительно координат всех точек системы (все координаты в системе уравнений (4.2) равноправны). В некоторых случаях это удобно при анализе динамики системы. Аналогичные удобства можно отметить и в процедуре вычисления реакций связей.

Но алгоритм интегрирования уравнений (4.2) весьма громоздок. А сам метод множителей связей имеет существенный недостаток, состоящий в том, что при уменьшении числа степеней свободы системы (т.е. при добавлении новых связей)число необходимых для исследования уравнений $3N + r + s$ увеличивается. Но часто важно знать лишь движение самой материальной системы, а реакции связей могут не представлять интереса. Поэтому естественно бы было искать методы, которые при увеличении числа связей приводили бы к уменьшению числа уравнений движения. Хорошо бы иметь такие уравнения движения, которые вовсе не содержали бы реакции связей. В аналитической динамике получено несколько типов таких уравнений. С одним из них (а именно, с уравнениями Лагранжа второго рода) мы познакомимся в дальнейшем.

Если связи не являются идеальными, то их реакции (или часть реакций, приводящих к нарушению условия (2.2)) можно включить в систему активных сил. При этом нужно иметь дополнительные данные о физических свойствах связей, порождающих их неидеальность. Таким образом, обобщение уравнений (4.2) на материальные системы с неидеальными связями внешне выглядит очень просто. Но сами эти уравнения могут довольно неэлементарно отличаться от уравнений в случае идеальных связей. Может возникнуть, например, проблема разрешимости уравнений движения относительно ускорений.

**5. Примеры.** Рассмотрим несколько примеров на составление и интегрирование уравнений Лагранжа первого рода.

**1.** Материальная точка массы $m$ движется по гладкой горизонтальной плоскости $Oxy$ в однородном поле тяжести. Ускорение свободного падения равно $g$.




Система имеет две степени свободы. Активная сила — сила тяжести точки $m\mathbf{g}$. Уравнение связи

$$f = z = 0. \tag{5.1}$$

Система уравнений (4.2) такова:

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}\,. \tag{5.2}$$

Из (5.1) и (5.2) следует, что $\lambda = mg$, а $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$. Точка движется в плоскости $z = 0$ равномерно и прямолинейно, а реакция плоскости равна $-m\mathbf{g}$.

**2.** Точка массы $m$ движется в однородном поле тяжести по прямой, являющейся пересечением плоскостей $x + y = 2$ и $z - y = -1$ (ось $Oz$ неподвижной декартовой прямоугольной системы координат направлена вертикально вверх). Трение пренебрежимо мало. Требуется написать уравнения движения точки, проинтегрировать их и найти реакции связей.

Уравнения связей:

$$f_1 = x + y - 2 = 0, \qquad f_2 = z - y + 1 = 0. \tag{5.3}$$

Система имеет одну степень свободы. Уравнения (4.2) имеют вид

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = \lambda_1, \quad m\ddot{y} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = \lambda_1 - \lambda_2,$$

$$m\ddot{z} = -mg + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = -mg + \lambda_2, \tag{5.4}$$

а проекции равнодействующей реакций связей вычисляются по формулам

$$R_x = \lambda_1, \qquad R_y = \lambda_1 - \lambda_2, \qquad R_z = \lambda_2. \tag{5.5}$$

Дифференцирование соотношений (5.3) по времени дает уравнения для возможных скоростей и ускорений точки:

$$\dot{x} + \dot{y} = 0, \qquad \dot{z} - \dot{y} = 0, \tag{5.6}$$

$$\ddot{x} + \ddot{y} = 0, \qquad \ddot{z} - \ddot{y} = 0. \tag{5.7}$$

Из уравнений (5.4),(5.7) находим проекции ускорения точки

$$\ddot{x} = \frac{1}{3}\,g, \qquad \ddot{y} = -\frac{1}{3}\,g, \qquad \ddot{z} = -\frac{1}{3}\,g \tag{5.8}$$

и множители связей

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}\,mg, \qquad \lambda_2 = \frac{2}{3}\,mg. \tag{5.9}$$

Подставив выражения (5.9) в равенства (5.5), получим

$$R_x = \frac{1}{3}\,mg, \qquad R_y = -\frac{1}{3}\,mg, \qquad R_z = \frac{2}{3}\,mg, \tag{5.10}$$

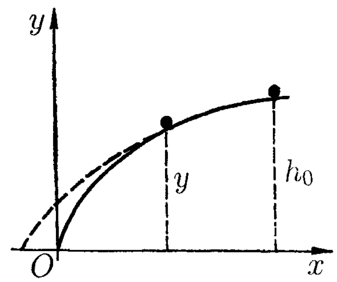
а интегрирование уравнений (5.8) дает выражения

$$x = \frac{1}{6}\,gt^2 + c_1 t + c_2,\ y = -\frac{1}{6}\,gt^2 + c_3 t + c_4,\ z = -\frac{1}{6}\,gt^2 + c_5 t + c_6. \tag{5.11}$$

Из шести постоянных $c_1, c_2, ..., c_6$ независимыми здесь являются только две, так как функции (5.11) должны при всех $t$ удовлетворять четырем уравнениям (5.3),(5.6). Это условие приводит к соотношениям $c_3 = c_5 = -c_1$, $c_4 = 2 - c_2$, $c_6 = c_4 - 1$, и зависящее от двух произвольных постоянных решение уравнений движения записывается в следующем виде:

$$x = \frac{1}{6}gt^2 + c_1 t + c_2,\ y = -\frac{1}{6}gt^2 + 2 - c_1 t - c_2,\ z = -\frac{1}{6}gt^2 + 1 - c_1 t - c_2.$$

**3.** Точка движется в однородном поле тяжести по гладкой неподвижной параболе, задаваемой уравнением $y^2 = x$ (ось параболы горизонтальна). В начальный момент времени скорость точки равна нулю, а ее расстояние $h_0$ до оси $Ox$ равно 7/2. На какой высоте $h$ точка оторвется от параболы?




Пусть $x, y$ — координаты движущейся точки. Они подчинены уравнению связи

$$f = y^2 - x = 0. \tag{5.12}$$

Уравнения движения имеют вид

$$m\ddot{x} = -\lambda, \qquad m\ddot{y} = -mg + 2\lambda y, \tag{5.13}$$

где $mg$ — сила тяжести точки.

Из интеграла энергии имеем

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = mg(h_0 - y). \tag{5.14}$$

Но из уравнения связи (5.12) следуют уравнения для возможных скоростей и ускорений

$$2y\dot{y} - \dot{x} = 0, \qquad 2y\ddot{y} - \ddot{x} + 2\dot{y}^2 = 0. \tag{5.15}$$

Первое из этих уравнений и соотношение (5.14) дают (учтено, что по условию задачи $h_0 = 7/2$)

$$\dot{y}^2 = \frac{g(7 - 2y)}{1 + 4y^2}. \tag{5.16}$$

Из уравнений (5.13) находим

$$\ddot{x} = -\frac{\lambda}{m}, \qquad \ddot{y} = -g + 2\frac{\lambda}{m}y.$$

Подставив эти выражения для $\ddot{x}$,$\ddot{y}$ и выражение (5.16) для $\dot{y}^2$ во второе из равенств (5.15), получим уравнение для множителя $\lambda$. Решив его, найдем

$$\lambda = \frac{2mg}{(1+4y^2)^2}\,(4y^3 + 3y - 7).$$

В момент отрыва точки от параболы реакция обращается в нуль. Следовательно, высота $h$ отрыва — вещественный положительный корень уравнения $4y^3 + 3y - 7 = 0$. Но у этого уравнения есть только один вещественный корень $y = 1$. Поэтому $h = 1$.

**4.** Материальная точка массы $m$ движется по гладкому неподвижному эллипсоиду с полуосями $a, b, c$ под действием центральной силы притяжения $\mathbf{F} = -\gamma\mathbf{r}$ ($\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, $\mathbf{r}' = (x, y, z)$; $\gamma$ — положительная постоянная). Требуется найти реакцию связи $\mathbf{R}$ как функцию положения и скорости точки.

Уравнение связи

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Отсюда найдем

$$\frac{1}{2}\ddot{f} = \frac{\dot{x}^2}{a^2} + \frac{\dot{y}^2}{b^2} + \frac{\dot{z}^2}{c^2} + \frac{x\ddot{x}}{a^2} + \frac{y\ddot{y}}{b^2} + \frac{z\ddot{z}}{c^2} = 0. \tag{5.17}$$

Уравнения движения:

$$m\ddot{x} = -\gamma x + 2\lambda\frac{x}{a^2}, \quad m\ddot{y} = -\gamma y + 2\lambda\frac{y}{b^2}, \quad m\ddot{z} = -\gamma z + 2\lambda\frac{z}{c^2}. \tag{5.18}$$

Найдя из (5.18) величины $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ и подставив их в (5.17), получим выражение множителя связи $\lambda$ через координаты $x, y, z$ точки и проекции $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ее скорости:

$$\lambda = \frac{m\left(\frac{\gamma}{m} - \frac{\dot{x}^2}{a^2} - \frac{\dot{y}^2}{b^2} - \frac{\dot{z}^2}{c^2}\right)}{2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)}.$$

Для реакции эллипсоида имеем выражение

$$\mathbf{R}' = 2\lambda\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right).$$

**5.** Пусть по окружности, являющейся пересечением сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ и плоскости $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1)$, движется по инерции материальная точка массы $m$. Трение отсутствует. Требуется, исключив множители связей из уравнений Лагранжа первого рода, составить дифференциальные уравнения движения точки.

Уравнения Лагранжа первого рода таковы:

$$m\ddot{x}=2\lambda_1 x+\lambda_2\alpha, \quad m\ddot{y}=2\lambda_1 y+\lambda_2\beta, \quad m\ddot{z}=2\lambda_1 z+\lambda_2\gamma. \tag{5.19}$$

Из уравнений связей имеем

$$x\ddot{x}+y\ddot{y}+z\ddot{z}+\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=0, \quad \alpha\ddot{x}+\beta\ddot{y}+\gamma\ddot{z}=0. \tag{5.20}$$

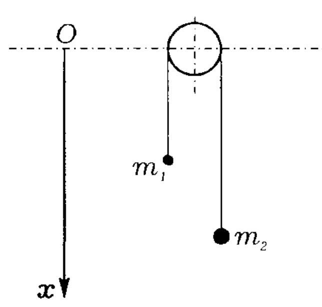
При помощи уравнений (5.19) исключим из соотношений (5.20) величины $\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}$ и придем к двум уравнениям относительно $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Решив эти уравнения, получим

$$\lambda_1=-\frac{m}{2a^2}\,(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2), \qquad \lambda_2=0. \tag{5.21}$$

Подставив выражения (5.21) в систему (5.19), придем к искомым уравнениям движения:

$$m\ddot{x}=-\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}{a^2}x,\ m\ddot{y}=-\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}{a^2}y,\ m\ddot{z}=-\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}{a^2}z.$$

**6.** Две материальные точки, имеющие массы $m_1$ и $m_2$ $(m_2>m_1)$, соединены идеальной нитью, перекинутой через гладкий стержень, и движутся в поле тяжести в вертикальной плоскости. Требуется найти ускорения точек и натяжение нити.




Пусть $x_1$ и $x_2$ — абсциссы первой и второй точек соответственно. В силу нерастяжимости нити имеет место геометрическая связь

$$x_1+x_2+\pi a=const, \tag{5.22}$$

где $a$ — радиус сечения стержня.

Уравнения Лагранжа первого рода имеют вид:

$$m_1\ddot{x}_1 = m_1 g + \lambda, \qquad m_2\ddot{x}_2 = m_2 g + \lambda. \tag{5.23}$$

Из уравнения связи (5.22) находим $\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$. Отсюда и из уравнений (5.23) находим

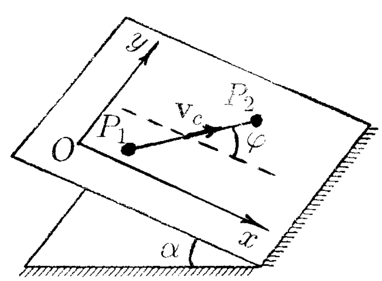
$$\ddot{x}_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g, \qquad \lambda = -2\frac{m_1 m_2}{m_2 + m_1} g.$$

Величина $\lambda$ есть реакция нити — ее натяжение ($R_{x_1} = R_{x_2} = \lambda$). Знак минус указывает на то, что сила натяжения нити направлена противоположно оси $Ox$, т.е. вверх.

**7.** Рассмотрим движение саней по неподвижной плоскости (ледяной поверхности), наклоненной под углом $\alpha$ к горизонтальной плоскости. Трением пренебрегаем.

Система является неголономной, если считать, что сани не могут перемещаться в направлении, перпендикулярном к их полозьям.

Будем моделировать сани двумя материальными точками $P_1$ и $P_2$ массы $m$ каждая, связанными невесомым стержнем длины $\ell$. Точки могут двигаться только так, что скорость $\mathbf{v}_C$ середины стержня $C$ (центра масс саней) направлена вдоль самого стержня. Пусть $x_1, y_1$ и $x_2, y_2$ — координаты точек $P_1$ и $P_2$ в плоскости их движения $Oxy$. Ось $Ox$ направлена вдоль линии наибольшего ската.




Уравнения связей задаются соотношениями:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - \ell^2 = 0, \tag{5.24}$$

$$(x_2 - x_1)(\dot{y}_2 + \dot{y}_1) - (\dot{x}_2 + \dot{x}_1)(y_2 - y_1) = 0. \tag{5.25}$$

Уравнения Лагранжа первого рода с множителями связей $\lambda$ и $\mu$ имеют вид

$$m\ddot{x}_1 = mg\sin\alpha - 2\lambda(x_2 - x_1) - \mu(y_2 - y_1), \tag{5.26}$$

$$m\ddot{y}_1 = -2\lambda(y_2 - y_1) + \mu(x_2 - x_1), \tag{5.27}$$

$$m\ddot{x}_2 = mg\sin\alpha + 2\lambda(x_2 - x_1) - \mu(y_2 - y_1), \tag{5.28}$$

$$m\ddot{y}_2 = 2\lambda(y_2 - y_1) + \mu(x_2 - x_1). \tag{5.29}$$

Перейдем к новым переменным — координатам $x, y$ центра масс и углу $\varphi$, который составляет стержень с осью $Ox$. Тогда

$$2x = x_1 + x_2, \qquad 2y = y_1 + y_1, \qquad (y_2 - y_1) = \operatorname{tg}\varphi\,(x_2 - x_1), \tag{5.30}$$

и уравнение связи (5.25) запишется в виде

$$\dot{y} = \operatorname{tg}\varphi\,\dot{x}. \tag{5.31}$$

После несложных выкладок из равенств (5.26) – (5.31) находим уравнения движения в новых переменных:

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha + \nu\operatorname{tg}\varphi, \qquad m\ddot{y} = -\nu, \qquad \ddot{\varphi} = 0. \tag{5.32}$$

Здесь для удобства записи вместо $\mu$ введен новый неопределенный множитель $\nu = -(x_2 - x_1)\mu$.

Проинтегрируем уравнения (5.31),(5.32), считая, что при $t = 0$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega_0, \tag{5.33}$$

т.е. в начальный момент стержень расположен вдоль оси $Ox$, его центр масс находится в начале координат и имеет нулевую скорость, а стержню сообщена угловая скорость $\omega_0$; для определенности считаем величину $\omega_0$ положительной.

Отметим, что (как и должно быть) начальные условия (5.33) согласованы с уравнением связи: при заданных значениях $\varphi$ и $\dot{x}$ величина $\dot{y}$ определяется равенством (5.32).

Исключив $\nu$ из первых двух уравнений системы (5.32), получим

$$\ddot{x} + \operatorname{tg}\varphi\,\ddot{y} = g\sin\alpha. \tag{5.34}$$

Но из (5.31) следует, что

$$\ddot{y} = \operatorname{tg}\varphi\,\ddot{x} + \frac{1}{\cos^2\varphi}\dot{x}\dot{\varphi}.$$

Подставив это выражение в равенство (5.34), придем к уравнению

$$\ddot{x} + \operatorname{tg}\varphi\,\dot{x}\dot{\varphi} = g\sin\alpha\cos^2\varphi. \tag{5.35}$$

Из третьего уравнения системы (5.32) с учетом начальных условий (5.33) находим

$$\varphi = \omega_0 t. \tag{5.36}$$

Подставив это значение $\varphi$ в уравнение (5.35), придем к уравнению

$$\ddot{x} + \omega_0 \operatorname{tg} \omega_0 t \, \dot{x} = g \sin\alpha \cos^2 \omega_0 t.$$

Это линейное неоднородное уравнение легко интегрируется (например, методом вариации произвольных постоянных). Учитывая начальные условия (5.33), находим

$$\dot{x} = \frac{g \sin\alpha}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t. \tag{5.37}$$

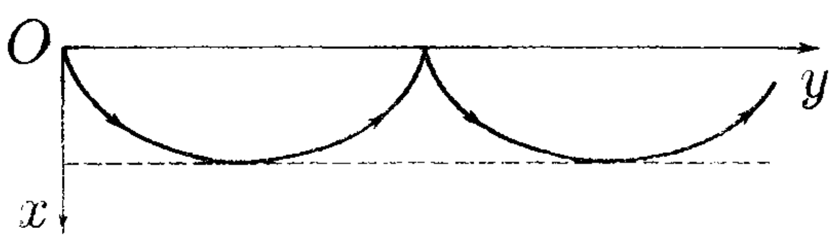
Отсюда и из (5.31),(5.36) имеем

$$\dot{y} = \frac{g \sin\alpha}{\omega_0} \sin^2 \omega_0 t. \tag{5.38}$$

Интегрируя уравнения (5.37),(5.38) с учетом начальных условий (5.33), получаем окончательно такую зависимость $x$ и $y$ от времени:

$$x = \frac{g \sin\alpha}{4\omega_0^2}(1 - \cos 2\omega_0 t), \qquad y = \frac{g \sin\alpha}{4\omega_0^2}(2\omega_0 t - \sin 2\omega_0 t). \tag{5.39}$$

Равенства (5.36),(5.39) описывают движение саней.




Сани равномерно вращаются вокруг их центра масс $C$, а сам центр масс описывает циклоиду с точками возврата на оси $Oy$. В этих точках

$$t = \frac{n\pi}{\omega_0}, \qquad x = 0, \qquad y = \frac{n\pi g \sin\alpha}{2\omega_0^2} \quad (n = 0, 1, 2, ...).$$

Интересно, что сани в среднем смещаются вдоль горизонтали. Максимальное расстояние, на которое центр масс саней отклоняется от горизонтальной оси $Oy$, равно $(g \sin\alpha)/(2\omega_0^2)$.

Из решения (5.36),(5.39) и первых двух уравнений системы (5.32) можно найти реакцию $\mathbf{R}$ неголономной связи (5.31). Пусть $R_x, R_y$ — проекции $\mathbf{R}$ на оси $Ox$,$Oy$. Из уравнений (5.32) имеем

$$R_x = \nu \operatorname{tg} \varphi = m\ddot{x} - mg \sin \alpha, \qquad R_y = -\nu = m\ddot{y}.$$

Подставив сюда значения $\varphi, x, y$ из (5.36),(5.39), получим зависимости множителя связи $\nu$ и величин $R_x, R_y$ от времени:

$$\nu = -mg \sin \alpha \sin 2\omega_0 t, \;\; R_x = -mg \sin \alpha (1 - \cos 2\omega_0 t), \;\; R_y = mg \sin \alpha \sin 2\omega_0 t.$$

Реакция $\mathbf{R}$ перпендикулярна вектору $\mathbf{v}_C$ скорости центра масс саней и имеет величину $R = 2mg \sin \alpha |\sin \omega_0 t|$.

## §2.ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ (ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА — ЛАГРАНЖА)

**6. Понятие о вариационных принципах механики.** Вариационные принципы механики представляют собой выраженные языком математики условия, которые выделяют действительное движение системы среди других кинематически возможных, т.е. допускаемых связями, движений.

Вариационные принципы подразделяются на дифференциальные и интегральные. Первые дают критерий действительного движения для данного фиксированного момента времени, а вторые — на конечном интервале времени. В этом параграфе рассматривается дифференциальный вариационный принцип Даламбера — Лагранжа.

**7. Общее уравнение динамики (принцип Даламбера — Лагранжа).** Рассмотрим систему, состоящую из $N$ материальных точек $P_\nu$ ($\nu = 1, 2, ..., N$). Система может быть как свободной, так и несвободной. В последнем случае предполагается, что связи, наложенные на систему, являются удерживающими и задаются уравнениями (1.1),(1.2) (см.п.1 §1). Кинематически возможные скорости определяются уравнениями (1.2),(1.3), а кинематически возможные ускорения — уравнениями (1.4),(1.5). Количество кинематически возможных положений, скоростей и ускорений точек системы бесконечно.

Пусть $\mathbf{F}_\nu$ — равнодействующая всех активных сил, приложенных к точке $P_\nu$. Как из бесконечного множества кинематически возможных движений системы выделить ее действительное движение? Ответ на этот вопрос дает дифференциальный вариационный принцип Даламбера — Лагранжа.

Пусть $\mathbf{R}_\nu$ — равнодействующая реакций связей, приложенных к точке $P_\nu$. Имеют место следующие уравнения движения:

$$m_\nu \mathbf{w}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, ..., N), \tag{7.1}$$

где $m_\nu$ — масса точки $P_\nu$, а $\mathbf{w}_\nu$ — ее ускорение в инерциальной системе координат. Будем считать, что связи идеальные, т.е. для любых виртуальных перемещений $\delta \mathbf{r}_\nu$ выполняется равенство (см. п.2)

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{R}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0. \tag{7.2}$$

Получим критерий, позволяющий среди всех кинематически возможных движений выделить ее действительное движение (под действием активных сил $\mathbf{F}_\nu$).

*Теорема (принцип Даламбера — Лагранжа).* Пусть $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(t)$ такие вектор-функции, что (в некоторый момент времени $t$) величины $\mathbf{r}_\nu$, $\mathbf{v}_\nu = \dot{\mathbf{r}}_\nu$, $\mathbf{w}_\nu = \ddot{\mathbf{r}}_\nu$ являются кинематически возможными. Тогда, чтобы $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, ..., N)$ определяли действительное движение, необходимо и достаточно, чтобы для любых виртуальных перемещений $\delta\mathbf{r}_\nu$ (соответствующих моменту времени $t$) выполнялось равенство

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{w}_\nu) \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0. \tag{7.3}$$

Сначала покажем н е о б х о д и м о с т ь условия (7.3) для действительного движения. Если вектор-функции $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(t)$ отвечают действительному движению, то они удовлетворяют уравнениям движения (7.1). Перепишем их в виде

$$\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{w}_\nu = -\mathbf{R}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, ..., N).$$

Умножим каждое из этих равенств скалярно на $\delta\mathbf{r}_\nu$ и произведем суммирование по $\nu$. Тогда, приняв во внимание условие (7.2), получим

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{w}_\nu) \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = -\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{R}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0,$$

т.е. равенство (7.3) выполняется.

Пусть вектор-функции $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(t)$ удовлетворяют уравнениям связей. Для доказательства д о с т а т о ч н о с т и условия (7.3) нужно лишь убедиться, что при выполнении этого условия функции $\mathbf{r}_\nu(t)$ удовлетворяют уравнениям движения. Введем обозначение

$$\boldsymbol{\Phi}_\nu = m_\nu \mathbf{w}_\nu - \mathbf{F}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, ..., N). \tag{7.4}$$

Тогда условие (7.3) можно переписать в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\Phi}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0. \tag{7.5}$$

По условиям теоремы последнее равенство выполняется для любых виртуальных перемещений $\delta\mathbf{r}_\nu$. Но виртуальные перемещения задаются уравнениями (1.9),(1.10). Поэтому, согласно п.3 §1, равенство (7.5) имеет место тогда и только тогда, когда величины $\mathbf{\Phi}_\nu$ представимы в виде

$$\mathbf{\Phi}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{r} \gamma_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} + \sum_{\beta=1}^{s} \chi_\beta \, \mathbf{a}_{\beta\nu} \qquad (\nu = 1, 2, ..., N), \tag{7.6}$$

где $\gamma_\alpha$, $\chi_\beta$ — неопределенные множители.

Из (7.6) и (7.4) следуют уравнения

$$m_\nu \mathbf{w}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \sum_{\alpha=1}^{r} \gamma_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} + \sum_{\beta=1}^{s} \chi_\beta \, \mathbf{a}_{\beta\nu} \qquad (\nu = 1, 2, ..., N). \tag{7.7}$$

Но эти уравнения только обозначениями для множителей связей отличаются от уравнений движения рассматриваемой материальной системы, записанных в форме уравнений Лагранжа первого рода (4.1). Следовательно, функции $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, ..., N)$ определяют действительное движение системы. Теорема доказана.

Равенство (7.3) называют *общим уравнением динамики.* Оно дает необходимое и достаточное условие того, что движение, совместимое со связями, соответствует заданной системе активных сил $\mathbf{F}_\nu$ $(\nu = 1, 2, ..., N)$.

Входящие в уравнение (7.3) величины $-m_\nu \mathbf{w}_\nu$, представляющие собой произведения масс точек системы на их ускорения, взятые с обратным знаком, называют *силами инерции.* Используя этот термин, можно так сформулировать принцип Даламбера — Лагранжа: *действительное движение из всех кинематически возможных выделяется тем, что для него и только для него в данный момент времени сумма работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.*

Общее уравнение динамики получено в предположении (7.2) об идеальности связей. Если же связи таковы, что все или часть их реакций $\mathbf{G}_\nu$ не удовлетворяют требованию (7.2), то можно к системе активных сил добавить реакции $\mathbf{G}_\nu$, и уравнение (7.3) примет вид

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu + \mathbf{G}_\nu - m_\nu \mathbf{w}_\nu) \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0. \tag{7.8}$$

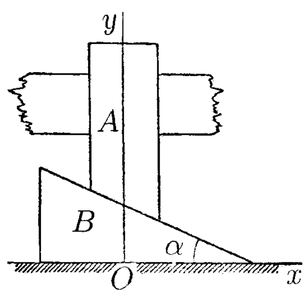
В общем случае силы $\mathbf{G}_\nu$ неизвестны. Эта неопределенность должна компенсироваться дополнительными данными о физических свойствах и характере связей, порождающих реакции $\mathbf{G}_\nu$.

Важным свойством общего уравнения динамики является то, что оно не содержит реакций идеальных связей.

Соотношение (7.3) на самом деле является не одним уравнением, а содержит в себе число уравнений, равное $n$, т.е. числу степеней свободы рассматриваемой системы.

Общее уравнение динамики (7.3) содержит в себе всю информацию о движении данной материальной системы с идеальными удерживающими связями под действием заданных активных сил. В аналитической динамике оно обычно лежит в основе методов получения дифференциальных уравнений движения как голономных, так и неголономных материальных систем.

**8. Примеры. 1.** Брусок $A$ массы $m$ может скользить в вертикальной прорези, опираясь своим нижним концом на гладкую плоскую поверхность клина, наклоненную под углом $\alpha$ к горизонту. Клин имеет массу $M$ и может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Найти ускорение клина.




Брусок и клин движутся поступательно. Между перемещениями $\delta y$ и $\delta x$ бруска и клина, их скоростями и ускорениями существуют соотношения

$$\delta y = \mathrm{tg}\alpha\, \delta x, \qquad \dot{y} = \mathrm{tg}\alpha\, \dot{x}, \qquad \ddot{y} = \mathrm{tg}\alpha\, \ddot{x}.$$

Приложим к бруску и клину их силы инерции $-m\ddot{y}$ и $-M\ddot{x}$ и, в соответствии с уравнением (7.3), приравняем нулю сумму работ всех сил на виртуальном перемещении клина $\delta x$. Получим

$$(mg - m\ddot{y})\delta y - M\ddot{x}\delta x = 0.$$

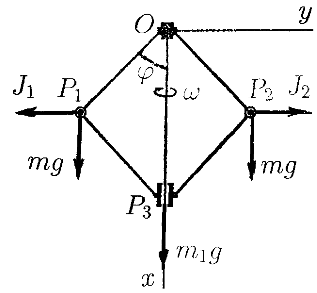
Или

$$(mg - m\mathrm{tg}\alpha\, \ddot{x})\mathrm{tg}\alpha\, \delta x - M\ddot{x}\delta x = 0,$$

откуда

$$\ddot{x} = \frac{mg\mathrm{tg}\alpha}{M + m\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

**2.** Центробежный регулятор вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega$. Рассматривается такой режим работы, при котором угол $\varphi$ отклонения ручек $OP_1$ и $OP_2$ от вертикали постоянен. Определить возможные значения этого угла, принимая во внимание только массу $m$ каждого из шаров $P_1$ и $P_2$ и массу $m_1$ муфты $P_3$; длина каждого из стержней равна $\ell$.




Для активных сил (сил тяжести), приложенных к точкам $P_1, P_2, P_3$ имеем такие выражения:

$$\mathbf{F}_1^{'} = (mg,\, 0), \qquad \mathbf{F}_2^{'} = (mg,\, 0), \qquad \mathbf{F}_3^{'} = (m_1 g,\, 0), \tag{8.1}$$

а для сил инерции, отвечающим этим точкам , выражения

$$\mathbf{J}_1^{'} = m\omega^2\ell(0,\, -\sin\varphi), \qquad \mathbf{J}_2^{'} = m\omega^2\ell(0,\, \sin\varphi), \qquad \mathbf{J}_3^{'} = (0,\, 0), \tag{8.2}$$

Радиус-векторы точек $P_1, P_2, P_3$ таковы:

$$\mathbf{r}_1^{'} = \ell(\cos\varphi,\, -\sin\varphi), \qquad \mathbf{r}_2^{'} = \ell(\cos\varphi,\, \sin\varphi), \qquad \mathbf{r}_3^{'} = 2\ell(\cos\varphi,\, 0). \tag{8.3}$$

Дадим углу $\varphi$ приращение $\delta\varphi$. Из равенств (8.3) следует, что тогда

$$\delta\mathbf{r}_1^{'} = -\ell\delta\varphi(\sin\varphi, \cos\varphi),\ \delta\mathbf{r}_2^{'} = \ell\delta\varphi(-\sin\varphi, \cos\varphi), \delta\mathbf{r}_3^{'} = -2\ell\delta\varphi(\sin\varphi, 0). \tag{8.4}$$

Общее уравнение динамики (7.3) записывается в виде

$$\mathbf{F}_1\cdot\delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2\cdot\delta\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_3\cdot\delta\mathbf{r}_3 + \mathbf{J}_1\cdot\delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{J}_2\cdot\delta\mathbf{r}_2 + \mathbf{J}_3\cdot\delta\mathbf{r}_3 = 0,$$

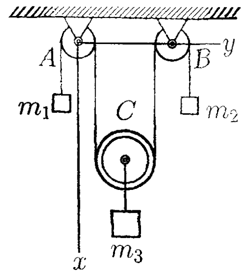
или, если принять во внимание равенства (8.1),(8.2) и (8.4), в виде

$$[(m+m_1)g - m\omega^2\ell\cos\varphi]\sin\varphi\delta\varphi = 0.$$

Отсюда следует, что $\varphi = 0$ , а также , если величина $\omega$ достаточно велика ($\omega^2 > (m+m_1)g/(m\ell)$),

$$\varphi = \arccos\frac{(m+m_1)g}{m\omega^2\ell}.$$

**3.** Через неподвижные блоки $A$ и $B$ перекинут нерастяжимый шнур, поддерживающий подвижный блок $C$; части шнура, не лежащие на блоках, вертикальны. К концам шнура прикреплены точечные грузы массами $m_1 = m$ и $m_2 = 2m$. В центре блока $C$ подвешен груз массы $m_3 = 3m$. Определить ускорения всех трех грузов, пренебрегая массами блоков и шнура и трением на осях.




Пусть $x_1$ и $x_2$ — абсциссы грузов $m_1$ и $m_2$, а $x_3$ — абсцисса центра подвижного блока. Общее уравнение динамики (7.3):

$$(m_1 g - m_1\ddot{x}_1)\delta x_1 + (m_2 g - m_2\ddot{x}_2)\delta x_2 + (m_3 g - m_3\ddot{x}_3)\delta x_3 = 0 \qquad (8.5)$$

Данная система имеет две степени свободы, так как в силу нерастяжимости шнура величины $x_1$, $x_2$, $x_3$ связаны соотношением

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = const.$$

Из этого соотношения следует, что

$$\delta x_3 = -\frac{1}{2}(\delta x_1 + \delta x_2), \qquad \ddot{x}_3 = -\frac{1}{2}(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2). \qquad (8.6)$$

Подставив эти выражения в равенство (8.5), получим

$$m_1(g - \ddot{x}_1)\delta x_1 + m_2(g - \ddot{x}_2)\delta x_2 - \frac{1}{2}m_3\big(g + \frac{1}{2}(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)\big)(\delta x_1 + \delta x_2) = 0$$

Собирая здесь коэффициенты при $\delta x_1$ и $\delta x_2$ и учитывая, что по условию $m_2/m_1 = 2, m_3/m_1 = 3$, приходим к уравнению

$$(7\ddot{x}_1 + 3\ddot{x}_2 + 2g)\delta x_1 + (3\ddot{x}_1 + 11\ddot{x}_2 - 2g)\delta x_2 = 0 \qquad (8.7)$$

Так как величины $\delta x_1$ и $\delta x_2$ независимы и произвольны, то последнее уравнение справедливо лишь тогда, когда в (8.7) каждое из выражений, заключенных в круглые скобки, обращается в нуль:

$$7\ddot{x}_1 + 3\ddot{x}_2 + 2g = 0, \qquad 3\ddot{x}_1 + 11\ddot{x}_2 - 2g = 0$$

Эти уравнения и второе из равенств (8.6) дают искомые ускорения:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{7}{17}g, \qquad \ddot{x}_2 = \frac{5}{17}g, \qquad \ddot{x}_3 = \frac{1}{17}g.$$

**4.** Рассмотрим задачу о вычислении главного вектора и главного момента сил инерции. Для произвольной системы материальных точек $P_\nu\,(\nu = 1, 2, ..., N)$ имеем следующее выражение для главного вектора $\mathbf{J}$ сил инерции:

$$\mathbf{J} = -\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{w}_\nu = -M\mathbf{w}_C,$$

где $M$ – масса системы,

$$M = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu,$$

а $\mathbf{w}_C$ – ускорение центра масс. Видим, что *главный вектор сил инерции произвольной системы по величине и направлению совпадает с силой инерции материальной точки, обладающей массой всей системы и помещенной в ее центр масс.*

При вычислении главного момента сил инерции точек системы относительно ее центра масс полезно следующее утверждение: *главный момент сил инерции точек системы относительно ее центра масс $C$ в абсолютном движении $\mathbf{M}_{CJ}^{(a)}$ и в ее движении относительно центра масс $\mathbf{M}_{CJ}^{(r)}$ (т.е относительно покоящейся или движущейся поступательно системы координат с началом в центре масс $C$) одинаковы.*

Действительно, пусть $\boldsymbol{\rho}_{\nu r}$ — радиус-вектор точки $P_\nu$ системы относительно центра масс $C$, $\mathbf{w}_{\nu r}$ — ее относительное ускорение, а $\mathbf{w}_C$ — ускорение центра масс. На основании теоремы о сложении ускорений при поступательном переносном движении имеем $\mathbf{w}_\nu{=}\mathbf{w}_C{+}\mathbf{w}_{\nu r}$. Поэтому

$$\mathbf{M}_{CJ}^{(a)} = -\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_{\nu r} \times m_\nu \mathbf{w}_\nu = -\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_{\nu r} \times m_\nu (\mathbf{w}_C + \mathbf{w}_{\nu r}) =$$

$$= -\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{\rho}_{\nu r}\right) \times \mathbf{w}_C - \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_{\nu r} \times m_\nu \mathbf{w}_{\nu r} \qquad (8.8)$$

Но $\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{\rho}_{\nu r}{=}M\boldsymbol{\rho}_{Cr}{=}0$, так как центр масс системы в относительном движении неподвижен ($\boldsymbol{\rho}_{Cr} = 0$). Поэтому из (8.8) следует, что

$$\mathbf{M}_{CJ}^{(a)} = -\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_{\nu r} \times m_\nu \mathbf{w}_{\nu r} = \mathbf{M}_{CJ}^{(r)} \qquad (8.9)$$

В качестве конкретного примера рассмотрим движение тела, являющегося плоской фигурой. Будем представлять себе это тело образованным материальными точками $P_\nu\,(\nu = 1, 2, ..., N)$, взаимные расстояния между которыми постоянны. Пусть фигура движется в своей плоскости. Движением такого тела относительно центра масс будет его вращение вокруг оси, перпендикулярной к плоскости фигуры и проходящей через ее центр масс $C$. Поэтому $\mathbf{w}_{\nu r} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu r} - \omega^2 \boldsymbol{\rho}_{\nu r}$, где $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ — векторы мгновенных угловой скорости и углового ускорения фигуры. Эти векторы перпендикулярны плоскости фигуры, а вектор $\boldsymbol{\rho}_{\nu r}$ лежит в ней. Для главного момента сил инерции имеем

$$\mathbf{M}_{CJ}^{(a)} = \mathbf{M}_{CJ}^{(r)} = -\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{\rho}_{\nu r} \times m_\nu(\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu r} - \omega^2 \boldsymbol{\rho}_{\nu r}) =$$

$$= \omega^2 \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{\rho}_{\nu r} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu r} - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{\rho}_{\nu r} \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu r}). \tag{8.10}$$

Первая сумма в последнем из цепочки равенств (8.10), очевидно, равна нулю. Вторая сумма преобразуется при помощи правила для двойного векторного произведения трех векторов:

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{\rho}_{\nu r} \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu r}) = \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \rho_{\nu r}^2\right)\boldsymbol{\varepsilon} - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{\rho}_{\nu r}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\rho}_{\nu r}) = J_C \boldsymbol{\varepsilon},$$

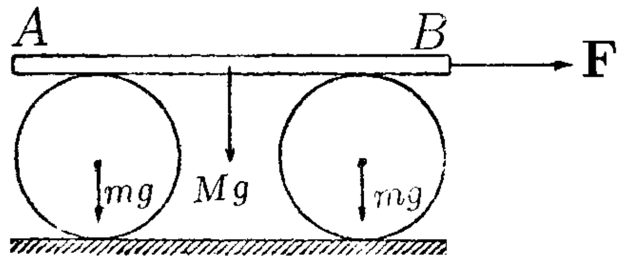
где $J_C$ — момент инерции фигуры относительно оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через ее центр масс.

Таким образом,

$$\mathbf{M}_{CJ}^{(a)} = \mathbf{M}_{CJ}^{(r)} = -J_C \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{8.11}$$

Но произвольная система сил, приложенных к твердому телу, может быть заменена на силу, приложенную в какой-либо точке тела и пару сил, момент которой равен главному моменту системы сил относительно этой точки (теорема Пуансо). Поэтому *для плоской фигуры, движущейся в своей плоскости, силы инерции можно заменить одной силой, равной* $-M\mathbf{w}_C$ *и проходящей через центр масс фигуры, и одной парой сил с моментом* $-J_C\boldsymbol{\varepsilon}$.

**5.** Стержень $AB$ массы $m$ лежит на двух одинаковых круглых однородных дисках массы $m$ каждый, расположенных в вертикальной плоскости. Скольжение между стержнем и дисками, а также между дисками и неподвижной горизонтальной плоскостью отсутствует. На стержень вдоль его оси действует сила $\mathbf{F}$ и приводит в движение стержень и диски. Найдем ускорение стержня.




Пусть $\ddot{x}$ — ускорение стержня. Тогда $\frac{\ddot{x}}{2}$ — ускорение центра каждого из дисков, а $\varepsilon = \frac{\ddot{x}}{2R}$ — их угловое ускорение ( $R$ — радиус дисков). Если $\delta\varphi$ — угол поворота дисков вокруг их центров, то виртуальное перемещение стержня $\delta x = 2R\delta\varphi$, а виртуальное перемещение центров дисков $R\delta\varphi$.

Работа активных сил (сил тяжести и силы $\mathbf{F}$) на виртуальном перемещении системы

$$\delta A_F = F\delta x = 2FR\delta\varphi.$$

Опираясь на результаты предыдущего примера, получаем следующее выражение для для работы $\delta A_J$ сил инерции на виртуальном перемещении:

$$\delta A_J = -M\ddot{x}\delta x - 2\Big(m\frac{\ddot{x}}{2}R\delta\varphi + \frac{1}{2}mR^2\frac{\ddot{x}}{2R}\delta\varphi\Big) = -\frac{1}{2}(4M+3m)\ddot{x}R\delta\varphi.$$

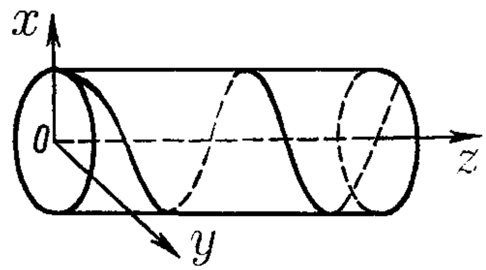
Согласно общему уравнению динамики $\delta A_F + \delta A_J = 0$, т.е.

$$[2F - \frac{1}{2}(4M+3m)\ddot{x}]R\delta\varphi = 0,$$

откуда

$$\ddot{x} = \frac{4F}{4M+3m}\,.$$

**6.** Материальная точка массы $m$ движется в однородном поле тяжести по поверхности цилиндра радиуса $R$, не отрываясь от нее. Трение пренебрежимо мало. Уравнение поверхности в декартовых координатах $x^2+y^2=a^2$; ось $Oz$ горизонтальна, ось $Ox$ вертикальна. Требуется получить дифференциальные уравнения движения точки.




Активной силой здесь является сила тяжести $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, приложенная к точке,

$$F_x = -mg, \qquad F_y = 0, \qquad F_z = 0. \tag{8.12}$$

Общее уравнение динамики

$$(F_x - m\ddot{x})\delta x + (F_y - m\ddot{y})\delta y + (F_z - m\ddot{z})\delta z = 0. \tag{8.13}$$

Система имеет две степени свободы. Положение точки на поверхности цилиндра зададим ее координатой $z$ и углом $\varphi$, который составляет с отрицательным направлением оси $Ox$ отрезок $OQ$, соединяющий начало координат и проекцию $Q$ движущейся точки на плоскость $Oxy$. Тогда имеем

$$x = -a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi; \quad \delta x = a\sin\varphi\delta\varphi, \quad \delta y = a\cos\varphi\delta\varphi. \tag{8.14}$$

$$\ddot{x} = a(\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\ddot{\varphi}), \qquad \ddot{y} = a(-\sin\varphi\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi\ddot{\varphi}). \tag{8.15}$$

Учитывая соотношения (8.12),(8.14) и (8.15), уравнение (8.13) можно переписать в виде

$$a(a\ddot{\varphi} + g\sin\varphi)\delta\varphi + \ddot{z}\delta z = 0. \tag{8.16}$$

Но величины $\delta z$ и $\delta\varphi$ независимы и произвольны. Поэтому общее уравнение динамики (8.16) дает следующие два дифференциальных уравнения, описывающих движение точки по поверхности цилиндра:

$$\ddot{z} = 0, \qquad \ddot{\varphi} + \frac{g}{a}\sin\varphi = 0. \tag{8.17}$$

Отсюда видно, что координата $z$ точки изменяется во времени по закону $z = \dot{z}_0 t + z_0$, а изменение угла $\varphi$ происходит по закону математического маятника.

Если сила тяжести отсутствует ($g = 0$), то траекторией материальной точки на поверхности цилиндра будет винтовая линия с осью $Oz$ (см. рис.). Шаг винтовой линии $h = 2\pi\frac{\dot{z}_0}{\dot{\varphi}_0}$.

## §3.ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ СТАТИКИ (ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ)

Рассмотрим систему материальных точек $P_\nu \, (\nu = 1, 2, ..., N)$. Под состоянием равновесия системы понимается такое ее состояние, когда скорость $\mathbf{v}_\nu$ каждой точки системы равна нулю на некотором промежутке времени, т.е. когда $\mathbf{v}_\nu \equiv 0 \, (\nu = 1, 2, ..., N)$ при $t_0 \leq t \leq t_1$.

Состояние равновесия изучается в разделе динамики, называемым *статикой.* В этом параграфе рассмотрены некоторые вопросы статики произвольной несвободной материальной системы с идеальными удерживающими связями.

**9. Постановка задачи о существовании состояния равновесия.** Пусть связи задаются уравнениями (см. п.1 §1):

$$f_\alpha(\mathbf{r}_\nu, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, ..., r), \tag{9.1}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{a}_{\beta\nu}(\mathbf{r}_\nu, t) \cdot \mathbf{v}_\nu + a_\beta(\mathbf{r}_\nu, t) = 0 \quad (\beta = 1, 2, ..., s). \tag{9.2}$$

Каким условиям должны удовлетворять, связи, чтобы система при $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_{\nu 0}$ могла находиться в состоянии равновесия на интервале времени $t_0 \leq t \leq t_1$?

В состоянии равновесия имеем $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_{\nu 0}$, а $\mathbf{v}_\nu = 0$ при всех $t$ из интервала $t_0 \leq t \leq t_1$. Поэтому из равенств (9.1) и (9.2) следует, что система может находиться в состоянии равновесия в каком-либо ее возможном положении $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_{\nu 0}$ только тогда, когда связи удовлетворяют условиям

$$f_\alpha(\mathbf{r}_{\nu 0}, t) = 0, \quad a_\beta(\mathbf{r}_{\nu 0}, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, ..., r; \, \beta = 1, 2, ..., s). \tag{9.3}$$

для любого значения $t$ из интервала $t_0 \leq t \leq t_1$.

Пусть тождества (9.3) выполнены, т.е. состояние равновесия $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_{\nu 0}$ допускается связями, и пусть при $t = t_0$ имеем $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_{\nu 0}, \mathbf{v}_\nu = 0$. Будет ли система при выполнении условий (9.3) находиться в состоянии равновесия, зависит от приложенных к ней сил.

**10. Общее уравнение статики (принцип виртуальных перемещений.** В основе статики материальных систем лежит *принцип виртуальных перемещений*, или *принцип Лагранжа.* Сформулируем его в виде теоремы.

*Теорема.* Чтобы некоторое допускаемое идеальными удерживающими связями состояние равновесия системы действительно было ее состоянием равновесия на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, необходимо и достаточно, чтобы для любого момента времени из этого интервала элементарная работа активных сил на любом виртуальном перемещении равнялась нулю, т.е. чтобы выполнялось условие

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0 \qquad (t_0 \leq t \leq t_1). \tag{10.1}$$

Уравнение (10.1) называется *общим уравнением статики.*

При доказательстве н е о б х о д и м о с т и условия (10.1) для равновесия системы воспользуемся общим уравнением динамики (7.3) из §1, которое справедливо в любой момент времени для систем с идеальными удерживающими связями. Если при $t_0 \leq t \leq t_1$ система находится в состоянии равновесия, то $\mathbf{w}_\nu = 0$ и из уравнения (7.3) сразу следует условие (10.1).

Покажем, что условие (10.1) д о с т а т о ч н о для того, чтобы система была в состоянии равновесия. Итак, пусть условия (9.3) и (10.1) выполнены и пусть при $t = t_0$ имеем $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_{\nu 0}, \mathbf{v}_\nu = 0 \, (\nu = 1, 2, ..., N)$. Докажем, что тогда на всем промежутке времени $t_0 \leq t \leq t_1$ система находится в состоянии равновесия, т.е. для любого значения $t$ из этого промежутка $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_{\nu 0} \, (\nu = 1, 2, ..., N)$.

В обозначениях п.3 и п.4 §1 уравнения движения (2.1) можно записать в форме одного векторно-матричного уравнения

$$\mathbf{Mw} = \mathbf{F} + \mathbf{R}. \tag{10.2}$$

Покажем, что если кинематические условия (9.3) и уравнение (10.1) выполняются, то уравнения движения допускают при $t_0 \leq t \leq t_1$ частное решение $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_{\nu 0} \, (\nu = 1, 2, ..., N)$.

Так как связи идеальные, то, согласно п.3 §1, $3N$-мерный вектор-столбец $\mathbf{R}$ реакций связей представим в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}' \mathbf{p}, \tag{10.3}$$

где $\mathbf{K}$ — матрица, задаваемая равенством (1.6), а $\mathbf{p}$ — $(r+s)$-мерный вектор-столбец неопределенных множителей.

Но если выполняется равенство (10.1), то $3N$-мерный вектор-столбец $\mathbf{F}$ активных сил, очевидно, также представим в виде, аналогичном (10.3):

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{'}\mathbf{p}_*, \tag{10.4}$$

где $\mathbf{p}_*$ — $(r+s)$-мерный вектор-столбец неопределенных множителей (вообще, отличный от $\mathbf{p}$).

Уравнение (10.2) при учете представлений (10.3) и (10.4) принимает вид

$$\mathbf{Mw} = \mathbf{K}^{'}(\mathbf{p}_* + \mathbf{p}). \tag{10.5}$$

При выполнении кинематических условий (9.3) $3N$-мерный вектор-столбец $\mathbf{w}$ возможных ускорений $\mathbf{w}_\nu$ удовлетворяет уравнению (см. уравнения (1.4),(1.5) или (1.8))

$$\mathbf{Kw} = 0. \tag{10.6}$$

Разрешив уравнение (10.5) относительно $\mathbf{w}$, получим

$$\mathbf{w} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}^{'}(\mathbf{p}_* + \mathbf{p}).$$

Если это значение $\mathbf{w}$ подставить в (10.6), то придем к соотношению

$$\mathbf{KM}^{-1}\mathbf{K}^{'}(\mathbf{p}_* + \mathbf{p}) = 0. \tag{10.7}$$

Но, как показано в п.4 §1, определитель матрицы $\mathbf{KM}^{-1}\mathbf{K}^{'}$ отличен от нуля, поэтому из (10.7) получаем $\mathbf{p}_* + \mathbf{p} = 0$. Отсюда следует, что $\mathbf{F} + \mathbf{R} = 0$, т.е. уравнения движения допускают частное решение $\mathbf{w} = 0$, отвечающее состоянию равновесия системы $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_{\nu 0}\,(\nu = 1, 2, ..., N)$.

Достаточность условий принципа виртуальных перемещений следует теперь из *принципа детерминированности Ньютона — Лапласа.* Согласно этому принципу, движение системы материальных точек является вполне детерминированным: задание начальных положений $\mathbf{r}_{\nu 0}$ и скоростей $\mathbf{v}_{\nu 0}$ точек единственным образом определяет их дальнейшее движение, т.е функции $\mathbf{r}_\nu(t)\,(\nu = 1, 2, ..., N)$.

*Замечание.* Требование единственности решений уравнений движения является существенным. В качестве примера рассмотрим движение материальной точки единичной массы вдоль оси $Ox$ под действием силы $F = \alpha\sqrt[3]{x}$ $(\alpha > 0)$. Уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} = \alpha\sqrt[3]{x}. \tag{10.8}$$

Положение равновесия $x = 0$ допускается связями, а условие (10.1) выполнено при всех $t$, так как в положении равновесия $F = 0$. Тем не менее точка, находясь при $t = 0$ в начале координат и имея при этом нулевую скорость, может не оставаться в нем при $t > 0$. Действительно, при начальных условиях $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ уравнение (10.8) помимо решения $x \equiv 0$ имеет еще решения

$$x = \pm \frac{\alpha\sqrt{6\alpha}}{36}\, t^3.$$

Выясним, как записываются условия равновесия материальной системы в обобщенных координат. Будем считать, что система голономна и имеет $n$ степеней свободы. Через $\mathbf{q}$ обозначим $n$-мерный вектор-столбец обобщенных координат, $\mathbf{q}^{'} = (q_1, q_2, ..., q_n)$. Пусть $Q_i$ — обобщенная сила, отвечающая обобщенной координате $q_i$. Уравнение (10.1) запишется в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = 0. \tag{10.9}$$

Так как система голономна, то вариации $\delta q_i$ независимы. Приравнивая нулю коэффициенты при $\delta q_i$ в уравнении (10.9), получаем, что в положении равновесия системы $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ (и только в нем) обобщенные силы равны нулю:

$$Q_i = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{10.10}$$

Равенства (10.10) образуют систему $n$ уравнений относительно неизвестных $q_{10}, q_{20}, ..., q_{n0}$, задающих положение равновесия системы.

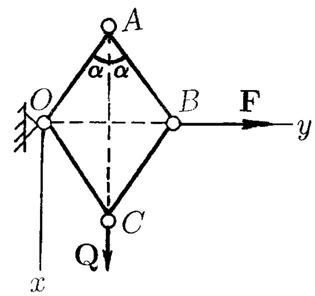
Если все активные силы потенциальны и $\Pi$ — потенциальная энергия системы, то уравнения (10.10) записываются в виде

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{10.11}$$

Отсюда следует, что необходимые и достаточные условия равновесия голономной системы (с идеальными связями, в потенциальном поле сил) совпадают с необходимыми условиями экстремума потенциальной энергии в рассматриваемом положении равновесия системы.

В частности, если система движется в однородном поле тяжести, то необходимые и достаточные условия ее равновесия совпадают с необходимыми условиями экстремальности высоты ее центра тяжести над горизонтальной плоскостью.

**11. Примеры. 1.** Ромб $OABC$, составленный из четырех шарнирно соединенных стержней, лежит на гладкой горизонтальной плоскости. Вершина $O$ ромба закреплена, а к вершинам $B$ и $C$ приложены силы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{Q}$, направленные вдоль диагоналей ромба $OB$ и $AC$ соответственно. Угол при вершине $A$ ромба равен $2\alpha$. Каково соотношение между величинами сил $\mathbf{F}$ и $\mathbf{Q}$, если ромб находится в состоянии равновесия?




Дадим системе виртуальное перемещение, при котором абсцисса $x$ вершины $C$ ромба получает приращение $\delta x$. Соответствующее приращение ординаты $y$ вершины $B$ обозначим через $\delta y$. Из общего уравнения статики (10.1) следует, что

$$Q\delta x + F\delta y = 0. \tag{11.1}$$

Величины $\delta x$ и $\delta y$ не являются независимыми, так как $x$ и $y$ связаны соотношением

$$4x^2 + y^2 = \ell^2,$$

где $\ell$ — длина каждого из стержней, составляющих ромб. Из последнего соотношения следует, что

$$4x\delta x + y\delta y = 0. \tag{11.2}$$

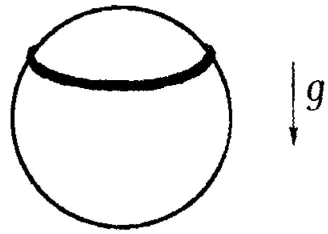
Получив из (11.2) выражение $\delta y$ через $\delta x$ и подставив его в уравнение (11.1), придем к равенству

$$(Q\,y - 4\,F\,x)\delta x = 0.$$

Это равенство должно выполняться при любых значениях $\delta x$. Отсюда следует, что коэффициент при $\delta x$ должен равняться нулю., т.е $Q = 4Fx/y$, или

$$Q = 2\,F\,\mathrm{ctg}\alpha\,.$$

**2.** Упругая нить веса $P$ надета на гладкую сферу радиуса $R$. При этом нить имеет форму окружности радиуса $r$ и занимает горизонтальное положение. Найти натяжение нити $T$.




Дадим нити виртуальное перемещение, при котором ее плоскость опустится на $\delta h$. Тогда радиус нити получит приращение $\delta r$, и ее длина увеличится на $2\pi\delta r$. Так как радиус нити $r$ и расстояние $h$ от ее плоскости до горизонтальной плоскости, проходящей через центр сферы, удовлетворяют равенству $r^2 + h^2 = R^2$, то

$$r\delta r - h\delta h = 0. \tag{11.3}$$

Условие равновесия (10.1) записывается в виде

$$P\delta h - T 2\pi\delta r = 0,$$

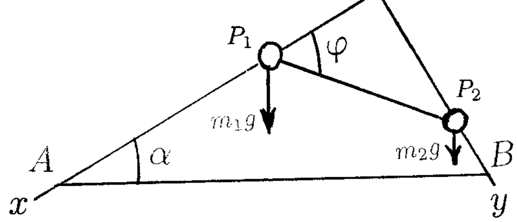
или, если принять во внимание соотношение (11.3),

$$(P\frac{r}{h} - 2\pi T)\delta r = 0,$$

откуда $T = Pr/(2\pi h)$, или

$$T = \frac{Pr}{2\pi\sqrt{R^2 - r^2}}\,.$$

**3.** По катетам $AO$ и $BO$ неподвижного прямоугольного треугольника $AOB$, расположенного в вертикальной плоскости, могут скользить без трения две материальные точки $P_1$ и $P_2$, имеющие массы $m_1$ и $m_2$ и связанные между собой невесомым нерастяжимым стержнем. Гипотенуза треугольника горизонтальна, угол $OAB$ равен $\alpha$. Найти величину $\varphi$ угла $OP_1P_2$ при равновесии.



Направим оси координат вдоль катетов $OA$ и $OB$. Активными силами $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ являются силы тяжести материальных точек $P_1$ и $P_2$:

$$\mathbf{F}_1^{'} = m_1 g(\sin\alpha,\, \cos\alpha), \qquad \mathbf{F}_2^{'} = m_2 g(\sin\alpha,\, \cos\alpha). \tag{11.4}$$

Пусть $a$ — длина стержня $P_1P_2$. Для радиус-векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ точек $P_1$ и $P_2$ имеем выражения:

$$\mathbf{r}_1^{'} = a(\cos\varphi,\, 0), \qquad \mathbf{r}_2^{'} = a(0,\, \sin\varphi). \tag{11.5}$$

Дадим углу $\varphi$ приращение $\delta\varphi$. Из равенств (11.5) получаем тогда выражения для виртуальных перемещений точек $P_1$ и $P_2$:

$$\delta\mathbf{r}_1^{'} = -a\delta\varphi(\sin\varphi,\, 0), \qquad \delta\mathbf{r}_2^{'} = a\delta\varphi(0,\, \cos\varphi). \tag{11.6}$$

Общее уравнение статики (10.1)

$$\mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{r}_2 = 0$$

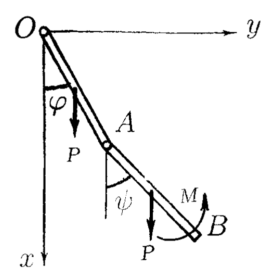
при учете равенств (11.4) и (11.6) записывается в виде

$$(m_2 \cos\varphi \cos\alpha - m_1 \sin\varphi \sin\alpha)\delta\varphi = 0.$$

Отсюда, ввиду произвольности значения $\delta\varphi$, находим

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{m_2}{m_1}\,\mathrm{ctg}\alpha\,.$$

**4.** Однородные стержни $OA$ и $AB$ веса $P$ и длины $2a$ каждый скреплены шарниром $A$. Конец $O$ закреплен неподвижным шарниром. К стержню $AB$ приложена в плоскости рисунка пара сил, момент которой равен $M$. Положение системы определяется двумя углами $\varphi$ и $\psi$, которые образуют стержни $OA$ и $AB$ с вертикалью. Найти значения углов $\varphi$ и $\psi$ при равновесии.




Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат возьмем углы $\varphi$ и $\psi$. Подсчитаем соответствующие им обобщенные силы

$Q_\varphi$ и $Q_\psi$. Если через $x_1$ и $x_2$ обозначить абсциссы середин стержней $OA$ и $AB$, то

$$x_1 = a\cos\varphi, \qquad x_2 = 2a\cos\varphi + a\cos\psi,$$

$$\delta x_1 = -a\sin\varphi\delta\varphi, \qquad \delta x_2 = -2a\sin\varphi\delta\varphi - a\sin\psi\delta\psi.$$

Для работы $\delta A$ активных сил (сил тяжести стержней и сил, образующих пару с моментом $M$) на виртуальном перемещении получаем выражение

$$\delta A = P\delta x_1 + P\delta x_2 + M\delta\psi = -3Pa\sin\varphi\delta\varphi + (M - Pa\sin\psi)\delta\psi,$$

откуда

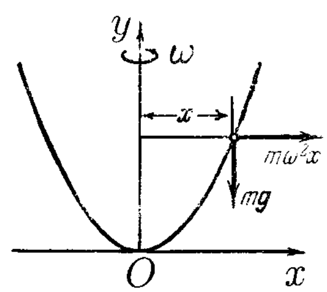
$$Q_\varphi = -3Pa\sin\varphi, \qquad Q_\psi = M - Pa\sin\psi.$$

При равновесии $Q_\varphi = 0$, $Q_\psi = 0$, поэтому

$$\varphi = 0, \qquad \psi = \arcsin\frac{M}{Pa}.$$

Если $|M| > Pa$, то равновесие невозможно.

**5.** Проволока, изогнутая в форме параболы $y = a\,x^2$, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega$ вокруг вертикальной оси $Oy$. По проволоке может скользить без трения надетое на нее колечко. Требуется найти все возможные положения относительного равновесия колечка.




Система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты примем абсциссу $x$ колечка. Пусть масса колечка равна $m$. В относительном равновесии колечка на нее действуют (помимо реакции проволоки, которая не совершает работы) вертикальная сила тяжести $mg$ и горизонтальная переносная сила инерции $m\omega^2 x$. Эти силы имеют потенциалы $\Pi_g = mgy = mgax^2$ и $\Pi_e = -m\omega^2 x^2/2$ соответственно. Обобщенная сила $Q_x$ определяется по формуле

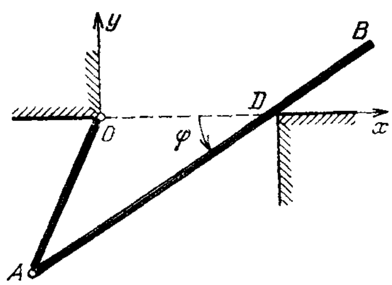
$$Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \qquad \bigl(\Pi = \Pi_g + \Pi_e\bigr).$$

Положения равновесия определяются из уравнения $Q_x = 0$, или

$$(\omega^2 - 2ga)x = 0.$$

Отсюда следует, что, если $\omega^2 = 2ga$, то любое положение колечка на проволоке будет ее положением относительного равновесия. Если же $\omega^2 \neq 2ga$, то существует только одно положение равновесия $x = 0$.

**6.** Два однородных стержня $OA$ и $AB$, из которых второй вдвое длиннее и тяжелее первого, соединены в точке $A$ шарниром. Первый стержень может вращаться около неподвижной точки $O$, второй опирается о край $D$ стола, расположенного так, что линия $OD$ горизонтальна и $OD = OA$. Найти положение равновесия системы.




Обозначим вес стержня $OA$ через $P$, а его длину через $\ell$. Потенциальная энергия системы

$$\Pi = P\,y_1 + 2P\,y_2, \tag{11.7}$$

где $y_1$ и $y_2$ — ординаты центров тяжестей стержней $OA$ и $AB$ соответственно. Они выражаются через $\ell$ и угол $\varphi$ по формулам (см. рис):

$$y_1 = -\frac{1}{2}\ell\sin 2\varphi, \qquad y_2 = -\ell\sin 2\varphi + \ell\sin\varphi. \tag{11.8}$$

Подставив выражения (11.8) в (11.7), получим

$$\Pi = -\frac{1}{2}P\ell\,(5\sin 2\varphi - 4\sin\varphi). \tag{11.9}$$

Равновесные значения $\varphi$ находятся из уравнения $\partial\Pi/\partial\varphi = 0$, которое, при учете формулы (11.9), выглядит так:

$$5\cos 2\varphi - 2\cos\varphi = 0,$$

или

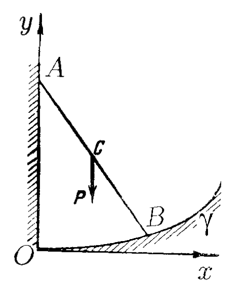
$$10\cos^2\varphi - 2\cos\varphi - 5 = 0.$$

Отсюда находим

$$\varphi = \arccos \frac{1 + \sqrt{51}}{10}.$$

Угол $\varphi$ острый, поэтому решение со знаком минус у радикала отброшено.

**7.** Однородный стержень $AB$ длины $2\ell$ одним своим концом опирается на гладкую вертикальную ось $Oy$, а другим на гладкую кривую $\gamma$, лежащую в вертикальной плоскости (см. рисунок). В любом таком положении стержень может оставаться в равновесии. Какой для этого должна быть форма кривой $\gamma$?




Пусть лежащая на кривой $\gamma$ точка $B$ стержня имеет координаты $x, y$. Для определения формы кривой $\gamma$ надо найти связь между величинами $x$ и $y$.

Обозначим через $y_A$ и $y_C$ ординаты точки $A$ стержня и его центра тяжести $C$. Так как длина стержня равно $2\ell$, то

$$x^2 + (y - y_A)^2 = 4\ell^2. \tag{11.10}$$

Но из определения центра тяжести имеем $y_A = 2y_C - y$. Поэтому равенство (11.10) записывается в виде

$$x^2 + 4(y - y_C)^2 = 4\ell^2. \tag{11.11}$$

Примем $x$ за обобщенную координату. Потенциальная энергия $\Pi = Py_C$, где $y_C$ определяется из равенства (11.11). В положении равновесия

$$\frac{d\Pi}{dx} = \frac{d\Pi}{dy_C}\,\frac{dy_C}{dx} = P\,\frac{dy_C}{dx} = 0.$$

По условию задачи последнее в этой цепочке равенств выполняется при любом значении $x$. Это означает, что $y_C$ — постоянная величина, т.е. при изменении положения стержня его центр тяжести получает только горизонтальное смещение.

Так как точка $x = 0$, $y = 0$ принадлежит кривой $\gamma$, то из (11.11) следует, что $y_C = \ell$. Таким образом, кривая $\gamma$ является дугой эллипса, уравнение которого в системе координат $Oxy$, показанной на рисунке, имеет вид

$$\frac{x^2}{4\ell^2} + \frac{(y-\ell)^2}{\ell^2} = 1.$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. Якоби К. Лекции по динамике. Л.;М.: ОНТИ, 1936, 271 с.

2. Суслов Г.К. Теоретическая механика. М.;Л.: Гостехиздат, 1946, 655 с.

3. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике, М.: Физматлит, 1966, 300 с.

4. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть II, М. Физматлит, 1972, 332 с.

5. Невзглядов В.Г. Теоретическая механика. М.: Физматлит, 1959, 584 с.

6.Лидов М. Л. Курс лекций по теоретической механике. М.: Физматлит, 2010, 495 с.

7. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.- Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2007, 592 с.

8. Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н., Сборник задач по аналитической механике.М.:Физматлит, 2002, 396 с.

9. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. С.- Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2008, 448 с.

10. Зернов В.С. Сборник задач по теоретической механике. Часть вторая. Динамика. М.;Л.: ОГИЗ, 1931, 168 с.

11. Веселовский И.Н. Сборник задач по теоретической механике. М.: Гостехиздат, 1956, 500 с.

12. Баринова М.Ф., Голубева О.В. Задачи и упражнения по классической механике. М.: Высшая школа, 1980, 176 с.

13. Ольховский И.И., Павленко Ю.Г., Кузьменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. С.- Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2008, 390 с.