0. ВВЕДЕНИЕ

Уже давно выявилась необходимость повсеместного изучения механики сплошных сред как общей основы изучения термодинамики, теории электричества, гидродинамики, газовой динамики, теории упругости, теории пластичности и многих других разделов механики и физики. К настоящему моменту накоплен огромный опыт в экспериментальном изучении равновесия и движения газов, жидкостей, плазмы, деформируемых и твёрдых тел.

Великое разнообразие этих явлений с одной стороны требует общих основ для ориентации в имеющейся богатой информации, с другой стороны чрезмерная общность и оторванность от конкретной ситуации могут породить беспредметные рассуждения. В связи с этим следует чётко осознавать, что вводимые и применяемые понятия имеют смысл только в рамках некоторого множества явлений, объединяемых понятием модели. Любая модель описывает некоторые свойства реальности только приближенно, а её уточнение — процесс, связанный с технологическим и научным прогрессом.

0.1. Предмет механики сплошных сред

Механика сплошных сред – обширнейшая область механики, посвящённая изучению деформации и прочности тел, конструкций, изучению движения газов, жидкостей, обтеканию тел.

В теоретической механике изучаются движение материальной точки, абсолютно твёрдого тела и дискретной системы материальных точек, тел. В механике сплошных сред на основе методов теоретической механики рассматриваются состояния объектов, которые представляют собой области пространства непрерывно, сплошным образом, заполненные материальными точками и телами, расстояния между которыми меняются. Количество материальных точек и тел в любой малой области пространства настолько велико, что моделировать их дискретной совокупностью некорректно.

Методы механики сплошных сред позволяют к задаче анализа состояния объектов, заполняющих рассматриваемый объём, подойти с позиции анализа свойств полей – областей пространства, лишенных материальных точек и тел, но обладающих специфическими свойствами: электромагнитными, силовыми и др.

0.2. Задачи механики сплошных сред

Отметим некоторые наиболее разработанные проблемы.

Вычисление сил, действующих на тело, движущееся в жидкости, газе требует знания движения самой жидкости, газа. Решение этой проблемы связано с решением технических задач о движении самолётов, вертолётов, снарядов, ракет, кораблей, с задачами создания водяных и воздушных винтов и пр.

Знание законов взаимодействия жидкости, газа с границами потока при движении по трубам необходимо при проектировании турбин, насосов, нефтепроводов, газопроводов и других гидравлических машин.

Понимание процессов фильтрации, связанных с движением жидкости и газа через пористую среду, необходимо при проектировании плотин, мостов, туннелей в нефтяном деле.

Большое значение имеют работы, посвящённые общей задаче о прочности и разрушении конструкций.

Огромную роль в нашей жизни играют волновые движения: волны в упругих телах, волны на поверхностях жидкости, звуковые колебания, проблема шума и пр.

Во многих случаях состояние сплошной среды есть турбулентный процесс, то есть быстрое, хаотическое, неупорядоченное во времени и пространстве состояние среды. Исследования по турбулентности к настоящему моменту никак нельзя считать достаточными для понимания закономерностей природы такого сложного состояния.

Многие механические процессы сопровождаются изменением физического состояния элементов среды на молекулярном уровне. Макроскопическое описание таких процессов вообще требует введения новых категорий и соответственно математического аппарата.

Очень важной является проблема защиты твёрдых тел от сгорания и сильного оплавления при входе тел с большими скоростями в плотные слои атмосферы.

Понимание процессов с химическими превращениями при взрывах, детонации и горении необходимо при проектировании, как поршневых машин, так и реактивных двигателей и т. д.

Практика постоянно ставит всё новые и новые требующие решения задачи, и упомянутые проблемы и приблизительно не отражают всё их многообразие.

0.3. Понятие сплошной среды

В действительности все среды имеют дискретное строение и состоят из частиц разной природы, находящихся на очень большом по сравнению с размером самих частиц расстоянии:

$-$например, радиус атома водорода $\approx 10^{-8}$ *см.*, а радиус его ядра в котором фактически сосредоточена вся масса $\approx 10^{-13}$ *см.* (размер ядра в $100\,000$ раз меньше размера атома);

$-$расстояние между молекулами в газе $\approx 10^{-5}$ *см.* (в $1\,000$ раз больше размера молекулы); например, в кубике воздуха со стороной

$0.001\,см.$ содержится $2.7 \cdot 10^{10}$ молекул;

– например, отношение плотности железа к плотности его ядерного вещества равно $7 \cdot 10^{-14}$, то есть в основном оно состоит из пустоты.

В то же время расстояние между макроскопическими фрагментами вещества, заполняющего рассматриваемый объём обычно много меньше размеров самого объема.

Между частицами имеются определённые взаимодействия, описание которых составляет одну из главных задач физики. Огромное количество частиц не позволяет следить за положением каждой отдельной частицы, однако для практики требуются только некоторые средние, суммарные или глобальные характеристики. Одним из общих методов определения характеристик сплошной среды является статистический метод. Однако, статистические методы обычно требуют введения дополнительных гипотез о свойствах частиц. Другим общим методом исследования сплошной среды является феноменологический подход, основанный на добытых из опыта закономерностях.

Оказалось, что, несмотря на дискретность строения среды, если область, в которой анализируется изучаемое явление, много больше расстояния между частицами и размерами самих частиц, массу можно считать распределённой по всей области, занятой средой. Например, сход лавин снега на склонах гор, поток зерна, если ширина и глубина потока много больше размера частиц, можно рассматривать как потоки сплошной среды,

Итак, ***сплошная среда — это множество частиц, непрерывно заполняющих пространство, то есть в любом сколь угодно малом объёме ΔV области пространства содержится нечто по своим свойствам отличное от свойств пространства.***

Это означает, что ΔV много меньше всего объёма V (можно пользоваться методами дифференциального и интегрального исчисления) и в то же время ΔV содержит достаточно большое количество взаимодействующих элементарных частиц, что позволяет охарактеризовать его состояние макроскопическими величинами (давление, температура). Пусть единица объёма среды содержит n частиц, то есть n^{-1} – объём, приходящейся на одну частицу. Тогда

$$n^{-1} \ll \Delta V \ll V \qquad (0.1)$$

– требование, предъявляемое к ***сколь угодно малому объёму*** ΔV .

В газах молекулы большую часть времени пребывают в состоянии свободного движения с различными скоростями. Среднее расстояние между двумя последовательными столкновениями, называемое длиной свободного пробега оценивается равенством $l \approx 1/\left(nd^2\right)$, где n – число молекул в единице объёма, $d \approx 10^{-10}$ *м.* – эффективный диаметр молекул.

Таким образом, ***сколь угодно малый объём*** для газовой среды должен удовлетворять условию

$$l^3 \ll \Delta V \ll V \,. \tag{0.2}$$

Аналогичным образом ***сколь угодно малый промежуток времени*** Δt, с одной стороны должен быть мал по сравнению с характерным временем процесса (временем релаксации, периодом τ_P), а с другой стороны он должен быть много больше времени взаимодействия частиц τ_M, обеспечивающего выравнивание значения любой физической величины по всему выделенному ***малому объёму***:

$$\tau_M \ll \Delta t \ll \tau_P \,. \tag{0.3}$$

Итак, необходимость вводимой идеализация диктуется тем, что при изучении сплошной среды используют аппарат непрерывных функций, дифференциальное и интегральное исчисления.

Любая ***величина, определённая во всех точках рассматриваемой области пространства, задаёт поле*** этой ***величины***.

0.4. Некоторые основные величины

Положим, что в некотором объёме V среды заключена масса M, тогда можно найти её среднюю плотность: $\rho_{ср} = M/V$. Плотность среды в данной точке понимается как предел

$$\rho = \lim_{V \to 0} \rho_{ср} = \lim_{V \to 0} \frac{M}{V} \,. \tag{0.4}$$

Пусть $\mathbf{Q}$ – главный вектор количества движения массы M, заключённой в объёме V. Определим среднюю по объёму скорость: $\mathbf{v}_{ср} = \mathbf{Q}/M$. Скорость точки, к которой стягивается объём, будет

$$\mathbf{v} = \lim_{V \to 0} \mathbf{v}_{ср} = \lim_{V \to 0} \frac{\mathbf{Q}}{M} \,. \tag{0.5}$$

Аналогичным образом, пусть $\mathbf{K}$ – главный момент количества движения массы, заключённой в объёме V. Определим среднюю по объёму угловую скорость: $\boldsymbol{\omega}_{ср} = \mathbf{K}/J$, где J – параметр, характеризующий инерционные свойства частиц. Угловая скорость элементарного фрагмента, к которому стягивается объём, будет

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{V \to 0} \boldsymbol{\omega}_{ср} = \lim_{V \to 0} \frac{\mathbf{K}}{J} \,. \tag{0.6}$$

Действие среды, находящейся вне поверхности S, на среду, находящуюся внутри S, может быть представлено действием сил и моментов, распределённых по поверхности S. Обозначим через $\mathbf{P}_n, \mathbf{M}_n$ силу и момент на площадке ΔS с внешней нормалью $\mathbf{n}$, с которой внешняя среда действует на среду, находящуюся внутри S. Средними поверхностной силой и моментом будут векторы $\mathbf{P_n}_{\,cp} = \dfrac{\mathbf{P_n}}{\Delta S}$, $\mathbf{M_n}_{\,cp} = \dfrac{\mathbf{M_n}}{\Delta S}$. Пределы, к которым стремятся эти векторы, когда ΔS стягивается к точке

$$\mathbf{p}_n = \lim_{\Delta S \to 0} \mathbf{P}_{\mathbf{n}cp} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\mathbf{P}_n}{\Delta S} \tag{0.7}$$

$$\mathbf{m}_n = \lim_{\Delta S \to 0} \mathbf{M}_{\mathbf{n}cp} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\mathbf{M}_n}{\Delta S} \tag{0.8}$$

определяют напряжение в рассматриваемой точке на площадке с нормалью $\mathbf{n}$. Основные теоремы теоретической механики определяют количество движения и момент количества движения, переносимых через единичную площадку с нормалью $\mathbf{n}$ в единицу времени:

$$\mathbf{P}_n = \frac{d\mathbf{Q}_n}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{Q}_n}{\Delta t}, \qquad \mathbf{p}_n = \lim_{\Delta S \to 0,\ \Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{Q}_n}{\Delta S \Delta t}, \tag{0.9}$$

$$\mathbf{M}_n = \frac{d\mathbf{K}_n}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{K}_n}{\Delta t} \qquad \mathbf{m}_n = \lim_{\Delta S \to 0,\ \Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{K}_n}{\Delta S \Delta t} \tag{0.10}$$

Естественно, макроскопические свойства частиц, непрерывно заполняющих пространство, не ограничиваются отмеченными векторами. Их многообразие определяется алгеброй сопоставляемой рассматриваемому состоянию среды.

Важной характеристикой состояния среды является температура. Если в среде протекают тепловые процессы, то в качестве одного из основных параметров выступает и температура T.

Пример. При изучении явления переноса в газах часто используют метод «двух объёмов» (две камеры, соединённые капилляром). Объём заполнен аргоном при температуре $T = 293\,K.$ Молярная масса аргона $M = 0,0399\,\text{кг./моль.}$, молекулы аргона – твёрдые сферы с эффективным диаметром $d = 3,42 \cdot 10^{-10}\,\text{м.}$

Можно ли моделировать газ как сплошную среду, если среднее давление равно $p = 8\,\text{кПа.}$, радиус и длина капилляра соответственно равны $a = 10^{-3}\,\text{м.}$ и $L = 5 \cdot 10^{-2}\,\text{м.}$, объём камеры $V = 10^{-3}\,\text{м}^3.$, время установления стационарного состояния $\tau_P = 60\,\text{сек.}$

Решение. Из курса общей физики длина свободного пробега газовых молекул, моделируемых твёрдыми шариками, равна $l = 1\Big/\left(\sqrt{2}\pi n d^2\right)$, где $n = p\big/\left(kT\right)$, $k = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ $Дж/К$ – постоянная Больцмана. Для данных задачи получаем $l = kT\Big/\left(\sqrt{2}\pi p d^2\right) \approx 10^{-6}$ $м.$

Из макроскопических размеров выберем наименьший (радиус капилляра a). Поскольку $l^3 \approx 10^{-18}$ $м^3$ $\ll$ $a^3 = 10^{-9}$ $м^3$ всегда можно выбрать такой элемент объёма, что условие (0.2) будет выполнено.

Среднее время свободного пробега молекул оценивается равенством $\tau_M = \dfrac{l}{\langle v \rangle}$, где $\langle v \rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}$, $R = 8{,}31\, Дж/\left(К \cdot моль\right)$. Характерное макроскопическое время задачи $\tau_P = 60\, сек. \gg \tau_M = 2{,}5\cdot 10^{-9}$ $сек.$ Таким образом можно выбрать такой сколь угодно малый интервал времени Δt, чтобы выполнялось условие (0.3). Таким образом, *для рассматриваемых экспериментальных условий газ можно считать сплошной средой*.

Пример. *Применим ли метод механики сплошных сред для вычисления силы сопротивления искусственного спутника Земли*, двигающегося по эллиптической орбите с перигеем $h_{\min} = h_1 = 100\, км.$ и апогеем $h_{\max} = h_2 = 300\, км.$ Диаметр спутника $d = 1\, м.$, температура среды $T = 300\, К.$, молярная масса газа $M = 0{,}029\, кг/моль$, эффективный диаметр молекул $d = 3\cdot 10^{-10}$ $м.$, число молекул в единице объёма около поверхности Земли $n_0 = 2{,}7\cdot 10^{25}$ $м^{-3}$.

Решение. Количество молекул в единице объёма на высоте h оценивается барометрической формулой $n = n_0 \exp\left(-\dfrac{M g_h h}{RT}\right)$, $g_h = g\left(\dfrac{R_0}{R_0 + h}\right)^2$. Длины свободного пробега вычисляем по формуле $l = 1\Big/\left(\sqrt{2}\pi n d^2\right)$. Здесь $R_0 = 6{,}37\cdot 10^6$ $м.$ – средний радиус Земли, $g = 9{,}81\, м.\big/сек.^2$ – ускорение свободного падения на поверхности Земли. Ускорения свободного падения, плотности молекул и длины свободного пробега:

в перигее – $g_1 = 9{,}51\, м.\big/сек.^2$, $n_1 = 3{,}24\cdot 10^{20}$ $м^{-3}$, $l_1 = 7{,}7\cdot 10^{-3}$ $м.$;

в апогее – $g_2 = 8{,}95\, м.\big/сек.^2$, $n_2 = 7{,}43\cdot 10^{11}$ $м^{-3}$, $l_2 = 3{,}4\cdot 10^6$ $м.$

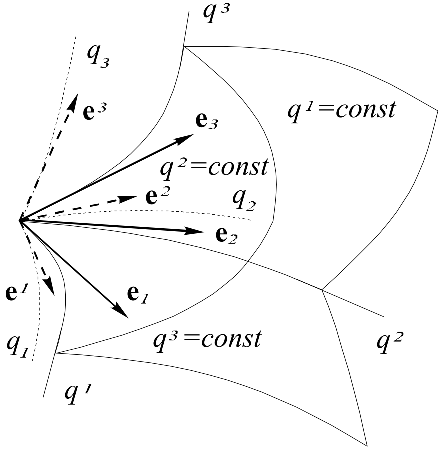
Поскольку объём спутника $V \approx 1\, м.^3$, то условие (0.2) выполняется только вблизи перигея, то есть *сопротивление среды можно оценивать методами механики сплошных сред только на части орбиты, близкой к перигею*.

Вопросы сопротивления среды на части орбиты, близкой к апогею, должны решаться с учётом молекулярного строения газа и кинетических уравнений для функций распределения молекул.

1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

Во многих задачах выгодно определять положение точки не тремя декартовыми координатами x^1, x^2, x^3, а тремя другими числами q^1, q^2, q^3, которые называются криволинейными координатами точки. Криволинейные координаты вводятся преобразованием общего вида

$$x^i = x^i(q), \quad i = 1,2,3\,, \tag{1.1}$$



в котором функции $x^i(q)$ принадлежат к классу C^2, и якобиан преобразования в некоторой области евклидова пространства E_3 отличен от нуля $J = \left|\partial x^i / \partial q^j\right| \neq 0$.

Это условие обеспечивает локальную разрешимость уравнений (1.1) относительно q^1, q^2, q^3, поэтому обратное преобразование

$$q^i = q^i(x), \quad i = 1,2,3 \tag{1.2}$$

однозначно. Уровни функции $q^i = q^i(x) = \text{const}, \quad i = 1,2,3$ образуют семейство поверхностей, которые называют координатными. Условие $J \neq 0$ выражает тот факт, что через каждую точку пространства проходит по одной поверхности каждого семейства. Линии пересечения координатных поверхностей называют координатными линиями.

1.1. Исходный и взаимный базисы

В выражении дифференциала радиуса-вектора

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}_\alpha dx^\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i \qquad (1.3)$$

векторы

$$\partial \mathbf{r} / \partial q^i = \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (1.4)$$

направлены по касательным к координатным линиям и рассматриваются как базис (*исходный базис*). Объем параллелепипеда, образованного векторами $\mathbf{e}_i$, равен якобиану преобразования (1.1)

$$\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \right) = \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right) = J .$$

Квадрат элемента дуги между двумя близкими точками определяет метрику криволинейной системы координат

$$dS^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \, dq^i dq^j = g_{ij} dq^i dq^j .$$

Элементы симметричной неособенной матрицы g_{ij}, называемой *метрической*, определяются формулой

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^i} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^j} , \qquad (1.5)$$

а её определитель равен квадрату якобиана преобразования

$$g_{..} = \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^i} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^j} \right| = \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^i} \right| \cdot \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^j} \right| = J^2. \qquad (1.6)$$

Заметим, что векторы $\mathbf{e}_i$ $i = 1, 2, 3$, во-первых, не единичной длины, во-вторых, вообще не ортогональны и, в-третьих, их длины и взаимное положение меняется от точки к точке. Необходимое и достаточное условие ортогональности криволинейной системы координат состоит в диагональности матрицы g_{ij}.

Вводят *взаимный базис*, систему трех векторов, направленных по нормалям к координатным поверхностям $q^\beta = \mathrm{const}$:

$$\mathbf{e}^\beta = \mathrm{grad}\, q^\beta (x) = \mathbf{i}_\alpha \, \partial q^\beta / \partial x^\alpha . \qquad (1.7)$$

Матрица, построенная из произведений элементов взаимного базиса

$$g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = \frac{\partial q^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial q^j}{\partial x^\alpha} , \qquad (1.8)$$

также неособенная, поскольку симметричные матрицы g_{sj}, g^{jm} – взаимно обратные:

$$g_{sj}g^{jm} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^s}\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial x^\beta}\frac{\partial q^m}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^s}\delta^\alpha_\beta\frac{\partial q^m}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^s}\frac{\partial q^m}{\partial x^\alpha} = \delta^m_s \qquad (1.9)$$

Матрицы $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij}$, $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = g^{ij}$ называют *матрицами Грама*.

Произведения элементов исходного и взаимного базисов образуют единичную матрицу:

$$\begin{gathered}\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j}\cdot \operatorname{grad} q^k = \frac{\partial x^i}{\partial q^j}\frac{\partial q^k}{\partial x^i} = \delta^k_j . \\ \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^j = \sqrt{g_{jj}}\sqrt{g^{jj}}\cos\left(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}^j\right) = 1\end{gathered} \qquad (1.10)$$

Имеют место равенства

$$\begin{gathered}\left|\partial x^i / \partial q^j\right| = \sqrt{g_{..}}, \quad \left|\partial q^j / \partial x^\alpha\right| = \sqrt{g^{..}}, \quad \sqrt{g_{..}}\sqrt{g^{..}} = 1, \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \sqrt{g_{..}}\,\mathbf{e}^3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \sqrt{g_{..}}\,\mathbf{e}^1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \sqrt{g_{..}}\,\mathbf{e}^2, \\ \mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2 = \sqrt{g^{..}}\,\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3 = \sqrt{g^{..}}\,\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1 = \sqrt{g^{..}}\,\mathbf{e}_2.\end{gathered} \qquad (1.11)$$

Используя символ Леви-Чивита $\ni_{jks}$, $\ni^{jks}$, эти векторные произведения однотипных векторов можно записать компактно: $\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k = \ni_{jks}\sqrt{g_{..}}\mathbf{e}^s$, $\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k = \ni^{jks}\sqrt{g^{..}}\mathbf{e}_s$.

Символы $\ni_{jks}$, $\ni^{jks}$ равны $+1$, если все индексы j,k,s различны и имеют правильную последовательность $1,2,3,12$, и равны -1, если они различны и последовательность неправильная. В справедливости равенств (1.11) убеждаемся прямым вычислением: (площадь равна частному объёма и высоты)

$$\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k = \ni_{jks} S^{jk}\mathbf{n}^s = \ni_{jks}\frac{\sqrt{g_{..}}}{\sqrt{g_{ss}}\cos\left(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}^s\right)}\mathbf{n}^s = \sqrt{g_{..}}\sqrt{g^{ss}}\mathbf{n}^s = \sqrt{g_{..}}\mathbf{e}^s,$$

$$\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k = \ni^{jks} S_{jk}\mathbf{n}_s = \ni^{jks}\frac{\sqrt{g^{..}}}{\sqrt{g^{ss}}\cos\left(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}^s\right)}\mathbf{n}_s = \sqrt{g^{..}}\sqrt{g_{ss}}\mathbf{n}_s = \sqrt{g^{..}}\mathbf{e}_s .$$

Если же перемножаются элементы разных базисов, то

$$\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}^m = \mathbf{e}_j \times g^{mk}\mathbf{e}_k = \ni_{jks} g^{mk}\sqrt{g_{..}}\mathbf{e}^s,$$

$$\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}_m = \mathbf{e}^j \times g_{mk}\mathbf{e}^k = \ni^{jks} g_{mk}\sqrt{g^{..}}\mathbf{e}_s.$$

Любой вектор $\mathbf{A}$ может быть представлен в двух видах $\mathbf{A} = \mathbf{e}_i A^i = \mathbf{e}^i A_i$. Умножение вектора на какой-либо элемент исходного базиса дает соответствующую компоненту вектора во взаимном базисе:

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{A}_{.} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i A_i = A_j = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i A^i = g_{ji} A^i. \qquad (1.12)$$

Аналогичным образом умножение вектора на какой-либо элемент взаимного базиса дает соответствующую компоненту вектора в исходном базисе
$$\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{A}^{\cdot} = \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i A^i = A^j = \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}^i A_i = g^{ji} A_i.. \qquad (1.13)$$

Равенства (1.12) и (1.13) дают формулы преобразования компонент вектора $\mathbf{A}$:
$$A_j = g_{ji} A^i, \quad A^j = g^{ji} A_i$$
(1.14)

Два ряда величин A^i, A_i $i = 1,2,3$ представляют собой набор компонент одного и того же вектора $\mathbf{A}$, отнесенного к двум различным базисам. Компоненты вектора − величины, на которые нужно умножить элементы соответствующего базиса, чтобы получившийся параллелепипед имел своей диагональю рассматриваемый вектор.

1.2. Ковариантное и контравариантное дифференцирование. Символы Кристоффеля

Вычислим теперь производные вектора $\mathbf{A}$ по координатам q^i :
$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^i} = \mathbf{e}_j \frac{\partial A^j}{\partial q^i} + A^j \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^i} = \mathbf{e}^j \frac{\partial A_j}{\partial q^i} + A_j \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial q^i}.$$

Так как $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$, можем записать
$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^k} \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k},$$
$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} = \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^i} \cdot \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^i},$$
$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} = \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j} \cdot \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j}$$

и поскольку $\dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} = \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^j \partial q^i} = \dfrac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^i}$ имеем
$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right) = \mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} = \mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^i}. \qquad (1.15)$$

Произведение вектора на элемент исходного базиса даёт соответствующую компоненту вектора во взаимном базисе, поэтому заключаем, что $k-$ой компонентой вектора $\dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} = \dfrac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^i}$ во взаимном базисе является $\Gamma_{k,ij}$ – символ Кристоффеля первого рода:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^i} = \mathbf{e}^k \Gamma_{k,ij} = \mathbf{e}^k \Gamma_{k,ji} \,. \tag{1.16}$$

Однако нам нужно представление этой производной в исходном базисе. Формулы преобразования элементов базиса и составляющих вектора дают

$$\Gamma^s{}_{ij} = g^{sk}\Gamma_{k,ij}, \quad \Gamma_{k,ij} = g_{ks}\Gamma^s{}_{ij} \,, \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^i} = \mathbf{e}_s g^{sk}\Gamma_{k,ij} = \mathbf{e}_s \Gamma^s{}_{ij} = \mathbf{e}_s \Gamma^s{}_{ji} \,, \tag{1.18}$$

где

$$\Gamma^s{}_{ij} = \frac{g^{sk}}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right) - \tag{1.19}$$

символ Кристоффеля второго рода, s – я компонента вектора $\dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} = \dfrac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^i}$ в исходном базисе. Таким образом,

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^i} = \mathbf{e}_j \frac{\partial A^j}{\partial q^i} + \mathbf{e}_s \Gamma^s{}_{ij} A^j = \mathbf{e}_s \left(\frac{\partial A^s}{\partial q^i} + \Gamma^s{}_{ij} A^j\right) = \mathbf{e}_s \frac{DA^s}{Dq^j} \,. \tag{1.20}$$

Если дифференцируемый вектор $\mathbf{A} = \mathbf{e}^i A_i$ представлен во взаимном базисе, то из соотношения $\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_s = \delta^j_s$ получаем

$$\frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial q^i}\cdot \mathbf{e}_s + \mathbf{e}^j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial q^i} = 0$$

и, следовательно, имеем

$$\frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial q^i}\cdot \mathbf{e}_s = -\mathbf{e}^j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial q^i} = -\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_k \Gamma^k{}_{si} = -\delta^j{}_k \Gamma^k{}_{si} = -\Gamma^j{}_{si}$$

Итак,

$$\frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial q^i} = -\mathbf{e}^s \Gamma^j{}_{si} \,, \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^i} = \mathbf{e}^j \frac{\partial A_j}{\partial q^i} - \mathbf{e}^s \Gamma^j{}_{si} A_j = \mathbf{e}^s \left(\frac{\partial A_s}{\partial q^i} - \Gamma^j{}_{si} A_j\right) = \mathbf{e}^s \frac{DA_s}{Dq^i} \,. \tag{1.22}$$

1.3. Задачи

1.3.1. Построить исходные $\mathbf{e}_j = \partial \mathbf{r}/\partial q^j$ и взаимные базисы $\mathbf{e}^k = \operatorname{grad} q^k$. Убедиться в справедливости соотношений

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^k = \delta^k_j, \quad g_{js}\cdot g^{sk} = \delta^k_j, \quad j,s,k = 1,2,3$$

и проверить равенства

$$\det\left(g_{js}\right)\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3, \quad \det\left(g_{js}\right)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1, \quad \det\left(g_{js}\right)\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2,$$

$$\det\left(g^{sk}\right)\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3, \quad \det\left(g^{sk}\right)\mathbf{e}^2 = \mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1, \quad \det\left(g^{sk}\right)\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2$$

для следующих криволинейных координат:

а) цилиндрические координаты r, φ, z:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z\ ;\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

б) сферические координаты r, θ, φ:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta\ ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\Big/z\right), \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(y/x\right).$$

в) координаты параболического цилиндра σ, τ, z:

$$x = \sigma\tau, \ \ y = \left(\tau^2 - \sigma^2\right)\Big/2, \ \ z = z\ ;\ \tau^2 = \sqrt{y^2 + x^2} + y, \quad \sigma^2 = \sqrt{y^2 + x^2} - y.$$

г) параболические координаты σ, τ, φ:

$$x = \sigma\tau\cos\varphi, \quad y = \sigma\tau\sin\varphi, \quad z = (\tau^2 - \sigma^2)/2\ ;$$

$$\tau^2 = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} + z, \ \ \sigma^2 = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} - z, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(y/x\right).$$

1.3.2. Построить исходный и взаимный базисы, а также соответствующие матрицы Грама для области, описанной трёхмерным сплайном Эрмита $\mathbf{r}\left(u,v,w\right)$ $\left(0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 1, \quad 0 \le w \le 1\right)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}\left(u,v,w\right) = {} & \mathbf{r}_{000}R_0\left(u\right)R_0\left(v\right)R_0\left(w\right) + \mathbf{u}_{000}T_0\left(u\right)R_0\left(v\right)R_0\left(w\right) + \\
& + \mathbf{v}_{000}R_0\left(u\right)T_0\left(v\right)R_0\left(w\right) + \mathbf{w}_{000}R_0\left(u\right)R_0\left(v\right)T_0\left(w\right) + \\
& + \mathbf{r}_{100}R_1\left(u\right)R_0\left(v\right)R_0\left(w\right) + \mathbf{u}_{100}T_1\left(u\right)R_0\left(v\right)R_0\left(w\right) + \\
& + \mathbf{v}_{100}R_1\left(u\right)T_0\left(v\right)R_0\left(w\right) + \mathbf{w}_{100}R_1\left(u\right)R_0\left(v\right)T_0\left(w\right) + \\
& + \mathbf{r}_{010}R_0\left(u\right)R_1\left(v\right)R_0\left(w\right) + \mathbf{u}_{010}T_0\left(u\right)R_1\left(v\right)R_0\left(w\right) + \\
& + \mathbf{v}_{010}R_0\left(u\right)T_1\left(v\right)R_0\left(w\right) + \mathbf{w}_{010}R_0\left(u\right)R_1\left(v\right)T_0\left(w\right) + \\
& + \mathbf{r}_{001}R_0\left(u\right)R_0\left(v\right)R_1\left(w\right) + \mathbf{u}_{001}T_0\left(u\right)R_0\left(v\right)R_1\left(w\right) + \\
& + \mathbf{v}_{001}R_0\left(u\right)T_0\left(v\right)R_1\left(w\right) + \mathbf{w}_{001}R_0\left(u\right)R_0\left(v\right)T_1\left(w\right) + \\
& + \mathbf{r}_{111}R_1\left(u\right)R_1\left(v\right)R_1\left(w\right) + \mathbf{u}_{111}T_1\left(u\right)R_1\left(v\right)R_1\left(w\right) + \\
& + \mathbf{v}_{111}R_1\left(u\right)T_1\left(v\right)R_1\left(w\right) + \mathbf{w}_{111}R_1\left(u\right)R_1\left(v\right)T_1\left(w\right) + \\
& + \mathbf{r}_{011}R_0\left(u\right)R_1\left(v\right)R_1\left(w\right) + \mathbf{u}_{011}T_0\left(u\right)R_1\left(v\right)R_1\left(w\right) + \\
& + \mathbf{v}_{011}R_0\left(u\right)T_1\left(v\right)R_1\left(w\right) + \mathbf{w}_{011}R_0\left(u\right)R_1\left(v\right)T_1\left(w\right) +
\end{aligned}$$

$$+\mathbf{r}_{101}R_1(u)R_0(v)R_1(w)+\mathbf{u}_{101}T_1(u)R_0(v)R_1(w)+$$
$$+\mathbf{v}_{101}R_1(u)T_0(v)R_1(w)+\mathbf{w}_{101}R_1(u)R_0(v)T_1(w)+$$
$$+\mathbf{r}_{110}R_1(u)R_1(v)R_0(w)+\mathbf{u}_{110}T_1(u)R_1(v)R_0(w)+$$
$$+\mathbf{v}_{110}R_1(u)T_1(v)R_0(w)+\mathbf{w}_{110}R_1(u)R_1(v)T_0(w),$$

где $R_0(s)=(1+2s)(1-s)^2$, $R_1(s)=(3-2s)s^2$,

$T_0(s)=s(1-s)^2$, $T_1(s)=-(1-s)s^2$ и $0\le s\le 1$ – параметр. В каждой из восьми вершин криволинейного параллелепипеда

$$\mathbf{r}(0,0,0)=\mathbf{r}_{000},\quad \mathbf{r}(1,0,0)=\mathbf{r}_{100},\quad \mathbf{r}(0,1,0)=\mathbf{r}_{010},\quad \mathbf{r}(0,0,1)=\mathbf{r}_{001},$$
$$\mathbf{r}(1,1,1)=\mathbf{r}_{111},\quad \mathbf{r}(0,1,1)=\mathbf{r}_{011},\quad \mathbf{r}(1,0,1)=\mathbf{r}_{101},\quad \mathbf{r}(1,1,0)=\mathbf{r}_{110}$$

заданы соответственно три вектора $\mathbf{u}_{ijk},\mathbf{v}_{ijk},\mathbf{w}_{ijk}$, $i,j,k=0,1$, касательные к его рёбрам. Каждая пара из этих трёх векторов касается соответствующей грани параллелепипеда.

1.3.3. Каждые два нормированных вектора исходного базиса образуют равные углы π/k $(k-$натуральное число). Построить взаимный базис.

1.3.4. Выразить элементы базиса декартовой системы координат в исходном и взаимном базисах систем координат, перечисленных в задаче 1.3.1. и 1.3.2.

1.3.5. Найти размерности исходного и взаимного базисов для систем координат задачи 1.3.1 и 1.3.2. ????

1.3.6. Найти контравариантные и ковариантные компоненты кватерниона, описывающего винтовое движение твёрдого тела: $\mathbf{r}_A(a,b,c)-$ радиус вектор полюса A тела, $\mathbf{e}(\alpha,\beta,\gamma)-$ единичный вектор оси кватерниона, $\varphi,s-$ угол поворота и смещение тела.

1.3.7. Покажите, что ортонормированный базис не может быть локальным нормированным базисом криволинейной системы координат.

1.3.8. Для систем координат задач 1.3.1 и 1.3.2 найти символы Кристоффеля первого и второго рода.

1.3.9. Убедитесь в справедливости равенства $\Gamma^j_{jk}=\partial\ln\sqrt{g_{..}}\big/\partial q^k$.

1.3.10. Вычислить символы Кристоффеля для криволинейной системы координат, заданной трёхмерным сплайном Эрмита 1.3.2.

2. ТЕНЗОРЫ КАК ОБЪЕКТЫ РЕАЛЬНОСТИ

Обобщением понятий скалярная величина и вектор, заданных в линейном трёхмерном пространстве, является понятие тензор. В отличие от скалярной величины, которая характеризуется только своим значением $f(t,q)$, вектор – это совокупность трёх скалярных величин при заданном базисе: $\mathbf{f}(t,q)=\mathbf{e}_i f^i(t,q)$.

Именно обобщение понятия базис, приводит к понятию тензор. Таким обобщением являются диады $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, триады $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$, полиады $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k..\mathbf{e}_s$, то есть вместо однобуквенных слов $\mathbf{e}_i$, $i=1,2,3$ вводят двухбуквенные слова $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, $i,j=1,2,3$, трёхбуквенные слова $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$, $i,j,k=1,2,3$ и так далее.

Объекты
$$\mathbf{f}(t,q)=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j f^{ij}(t,q),$$
$$\mathbf{f}(t,q)=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k f^{ijk}(t,q),$$
$$\mathbf{f}(t,q)=\underbrace{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k...\mathbf{e}_s}_{m} f^{ijk...s}(t,q)$$

соответственно называют тензорами второго, третьего, m–ранга. В связи с такой терминологией скалярная величина есть тензор нулевого ранга, а вектор –тензор первого ранга. Одно из определений тензора – ***линейная комбинация полиад, составленных из элементов базиса*** (коэффициенты линейной комбинации – компоненты тензора). Размерность такого пространства равна произведению размерностей векторных пространств, из которых формируются полиады $n=n_1\cdot n_2\cdot ...\cdot n_m$, а компоненты объектов формируются по правилу $R=R_1\otimes...\otimes R_m$ ($\otimes$– тензорное произведение), которое подразумевает простое перемножение многочленов:
$$\mathbf{A}=a^j\mathbf{e}_j\otimes...\otimes a^k\mathbf{e}_k=a^j\,...\,a^k\mathbf{e}_j\otimes...\otimes\mathbf{e}_k\,.$$

Например, с понятием симметричного тензора второго ранга встречаемся при рассмотрении динамики твёрдого тела с неподвижной точкой:
$$\mathbf{K}_0=\sum\nolimits_\sigma \mathbf{r}_{0\sigma}\times m_\sigma\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{0\sigma}\right)=\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega},$$
$$2T=\sum\nolimits_\sigma m_\sigma\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{0\sigma}\right)^2=\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{K}_0=\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}.$$

Отметим некоторые свойства тензорного произведения

– тензорное произведение зависит от порядка перемножаемых тензоров: $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\otimes\mathbf{c}\neq\mathbf{b}\otimes\mathbf{a}\otimes\mathbf{c}$;

– тензорное произведение – линейная операция: пусть $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{c} + \mu\mathbf{d}$ тогда $\mathbf{A}\otimes\mathbf{b} = \lambda\mathbf{A}\otimes\mathbf{c} + \mu\mathbf{A}\otimes\mathbf{d}$;

– тензорное произведение есть линейная комбинация тензорных произведений элементов базиса:

$$\begin{gathered}\mathbf{A}\otimes\mathbf{B} = A^{ij..k}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_k\otimes B^{lm\ldots n}\mathbf{e}_l\otimes\mathbf{e}_m\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_n = \\ = A^{ij..k}B^{lm\ldots n}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l\otimes\mathbf{e}_m\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_n.\end{gathered};$$

Если тензорное произведение любых двух элементов базиса обладает свойством анти коммутативности $\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_j$, то оно записывается в виде $\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_k \equiv \mathbf{e}_j\wedge\mathbf{e}_k$, а соответствующий объект называют внешней формой: $\mathbf{A} = a^j\mathbf{e}_j\wedge\ldots\wedge a^k\mathbf{e}_k = a^j\ \ldots\ a^k\mathbf{e}_j\wedge\ldots\wedge\mathbf{e}_k$.

Справедливы следующие утверждения:

1. При перестановке двух любых векторов во внешнем произведении, его знак меняется на противоположный.
2. Внешнее произведение нескольких векторов, среди которых хотя бы два совпадают, равно нулю.
3. Если U – внешняя форма порядка p, а V – внешняя форма порядка q, то $U\wedge V = (-1)^{pq}\,V\wedge U$.
4. Каждая внешняя форма, порядок которой больше размерности пространства, равна нулю.
5. Количество базисных элементов порядка m в пространстве размерности n равно числу сочетаний из n элементов по m: C_n^m.

В связи с тем, что в криволинейной системе координат имеют место два типа базисов (исходный и взаимный), в представлении тензора любой элемент исходного базиса может быть заменён соответствующим элементом взаимного базиса и наоборот:

$$\mathbf{f}(t,q) = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j f^{ij} = \begin{cases} g_{ik}\mathbf{e}^k\mathbf{e}_j f^{ij} = \mathbf{e}^k\mathbf{e}_j f_{k.}^{.j} & \to \quad g_{ki}f^{ij} = f_{k.}^{.j}, \\ \mathbf{e}_i g_{js}\mathbf{e}^s f^{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}^s f_{.s}^{i.} & \to \quad g_{sj}f^{ij} = f_{.s}^{i.}, \\ g_{ik}\mathbf{e}^k g_{js}\mathbf{e}^s f^{ij} = \mathbf{e}^k\mathbf{e}^s f_{ks} & \to \quad g_{ki}g_{sj}f^{ij} = f_{ks}, \end{cases}$$

$$\mathbf{f}(t,q) = \mathbf{e}^k\mathbf{e}^s f_{ks} = \begin{cases} g^{ki}\mathbf{e}_i\mathbf{e}^s f_{ks} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}^s f_{.s}^{i.} & \to \quad g^{ik}f_{ks} = f_{.s}^{i.}, \\ \mathbf{e}^k g^{sj}\mathbf{e}_j f_{ks} = \mathbf{e}^k\mathbf{e}_j f_{k.}^{.j} & \to \quad g^{js}f_{ks} = f_{k.}^{.j}, \\ g^{ki}\mathbf{e}_i g^{sj}\mathbf{e}_j f_{ks} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j f^{ij} & \to \quad g^{ik}g^{js}f_{ks} = f^{ij}. \end{cases}$$

Примером тензора второго ранга является метрический тензор, компонентами которого являются элементы метрических матриц

$$\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}^j = g^{ij},\quad \mathbf{e}^j\cdot\mathbf{e}_k = \delta_k^j,\quad \mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_s = g_{ks}:$$

$$\mathbf{g}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j g^{ij}=g_{ik}\mathbf{e}^k\mathbf{e}_j g^{ij}=\mathbf{e}^k\mathbf{e}_j\delta_k^j=\mathbf{e}^k g_{js}\mathbf{e}^s\delta_k^j=\mathbf{e}^k\mathbf{e}^s g_{ks}.$$

Полиадное представление тензора допускает действия аналитической геометрии и действия различных алгебр. Пусть, например, $\mathbf{u}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k u^{ijk}$, $\mathbf{v}=\mathbf{e}^s\mathbf{e}^m v_{sm}$ тогда

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}^s\mathbf{e}^m u^{ijk}v_{sm}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\delta_k^s\mathbf{e}^m u^{ijk}v_{sm}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}^m w^{ij.}_{..m},$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{e}^s\mathbf{e}^m\cdot\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k v_{sm}u^{ijk}=\mathbf{e}^s\delta_i^m\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k v_{sm}u^{ijk}=\mathbf{e}^s\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k w_{s..}^{.jk},$$

$$\mathbf{u}\cdot\cdot\mathbf{v}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\cdot\cdot\mathbf{e}^s\mathbf{e}^m u^{ijk}v_{sm}=\mathbf{e}_i\delta_j^m\delta_k^s u^{ijk}v_{sm}=\mathbf{e}_i w^i,$$

$$\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{u}=\mathbf{e}^s\mathbf{e}^m\cdot\cdot\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k v_{sm}u^{ijk}=\delta_j^s\delta_i^m\mathbf{e}_k v_{sm}u^{ijk}=\mathbf{e}_k w^k,$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_s\mathbf{e}_m u^{ijk}v^{sm}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j g_{ks}\mathbf{e}_m u^{ijk}v^{sm}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_m w^{ijm},$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{e}_s\mathbf{e}_m\cdot\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k v^{sm}u^{ijk}=\mathbf{e}_s g_{mi}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k v^{sm}u^{ijk}=\mathbf{e}_s\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k w^{sjk},$$

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\times\mathbf{e}_s\mathbf{e}_m u^{jk}v^{sm}=\mathbf{e}_j\ Э_{\alpha ks}\sqrt{g_{..}}\,\mathbf{e}^\alpha\mathbf{e}_m u^{jk}v^{sm}=\mathbf{e}_j\mathbf{e}^\alpha\mathbf{e}_m w^{j.m}_{.\alpha.},$$

$$\mathbf{v}\times\mathbf{u}=\mathbf{e}_s\mathbf{e}_m\times\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k v^{sm}u^{jk}=\mathbf{e}_s\ Э_{\beta mj}\sqrt{g_{..}}\,\mathbf{e}^\beta\mathbf{e}_k v^{sm}u^{jk}=\mathbf{e}_s\mathbf{e}^\beta\mathbf{e}_k w^{s.k}_{.\beta.},$$

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{e}^j\mathbf{e}^k\times\mathbf{e}^s\mathbf{e}^m u_{jk}v_{sm}=\mathbf{e}^j\ Э_{\alpha ks}\sqrt{g^{..}}\,\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}^m u^{jk}v^{sm}=\mathbf{e}^j\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}^m w_{j.m}^{.\alpha.},$$

$$\mathbf{v}\times\mathbf{u}=\mathbf{e}^s\mathbf{e}^m\times\mathbf{e}^j\mathbf{e}^k v_{sm}u_{jk}=\mathbf{e}^s\ Э_{\beta mj}\sqrt{g^{..}}\,\mathbf{e}_\beta\mathbf{e}^k v_{sm}u_{jk}=\mathbf{e}^s\mathbf{e}_\beta\mathbf{e}^k w_{s.k}^{.\beta.},$$

$$\mathbf{u}\circ\mathbf{v}=\mathbf{e}^j\mathbf{e}^k\circ\mathbf{e}^s\mathbf{e}^m u_{jk}v_{sm}=\mathbf{e}^j p_{ksr}\mathbf{e}^r\mathbf{e}^m u^{jk}v^{sm}=\mathbf{e}^j\mathbf{e}^r\mathbf{e}^m w_{jrm}.$$

Отмечаем не коммутативность умножения. Скалярное произведение тензоров $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\neq\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$ называют ***свёрткой*** по двум индексам (ранг произведения уменьшился на две единицы). Двойное скалярное произведение, обозначаемое двумя точками $\mathbf{u}\cdot\cdot\mathbf{v}\neq\mathbf{v}\cdot\cdot\mathbf{u}$ $(\mathbf{u}:\mathbf{v}\neq\mathbf{v}:\mathbf{u})$, уменьшает ранг на четыре единицы и называется свёрткой по четырём индексам. Векторное произведение уменьшает ранг на единицу. В последнем равенстве $\mathbf{e}^k\circ\mathbf{e}^s=p_{ksr}\mathbf{e}^r$ – дуальная операция, соответствующая используемой алгебре.

2.1. Преобразование тензора

Рассмотрим теперь формулы преобразования элементов базисов и компонент тензора при переходе от старой криволинейной системы координат ξ к новой η. Прямое преобразование координат определяется формулами $\xi^j=\xi^j\left(\eta^1,\eta^2,\eta^3\right)$ $j=1,2,3$. Якобиан преобразования отличен от нуля $J_{\xi\to\mu}=\det\left(\partial\xi^i/\partial\eta^j\right)\neq 0$, и имеет место обратное преобразование $\eta^j = \eta^j\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right)$ $j = 1,2,3$, якобиан которого также отличен от нуля $J_{\eta \to \xi} = \det\left(\partial\eta^i / \partial\xi^j\right) \neq 0$. Итак,

$\partial\xi^i / \partial\eta^j$ – матрица прямого преобразования координат $\xi = \xi(\eta)$,

$\partial\eta^i / \partial\xi^j$ – матрица обратного преобразования координат $\eta = \eta(\xi)$.

По определению

$$\mathbf{e}_{\xi^k} = \frac{\partial \mathbf{r}\left[\eta(\xi)\right]}{\partial\xi^k} = \frac{\partial\mathbf{r}(\eta)}{\partial\eta^j}\frac{\partial\eta^j}{\partial\xi^k} = \mathbf{e}_{\eta^j}\frac{\partial\eta^j}{\partial\xi^k},$$

$$\mathbf{e}^{\xi^k} = grad\left[\xi^k(\eta)\right] = \frac{\partial\xi^k}{\partial\eta^j} grad\eta^j = \frac{\partial\xi^k}{\partial\eta^j}\mathbf{e}^{\eta^j}$$

и далее

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}^{\eta^j} A_{\eta^j} = \mathbf{e}^{\xi^k}\frac{\partial\eta^j}{\partial\xi^k} A_{\eta^j} = \mathbf{e}^{\xi^k} A_{\xi^k} \quad \to \quad A_{\xi^k} = \frac{\partial\eta^j}{\partial\xi^k} A_{\eta^j},$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_{\eta^j} A^{\eta^j} = \mathbf{e}_{\xi^k}\frac{\partial\xi^k}{\partial\eta^j} A^{\eta^j} = \mathbf{e}_{\xi^k} A^{\xi^k} \quad \to \quad A^{\xi^k} = \frac{\partial\xi^k}{\partial\eta^j} A^{\eta^j},$$

то есть все объекты (элементы базиса и компоненты тензора) при прямом преобразовании, имеющие нижний индекс ξ_k, преобразуются по формулам обратного преобразования координат, а все объекты с верхним индексом ξ^k – по формулам прямого преобразования координат.

Это и объясняет смысл терминов контравариантный, ковариантный.

Расстановка индексов в полиадном представлении тензора не произвольна: количество нижних и верхних индексов одинаково, а это означает, что при преобразовании координат прямая и обратная матрицы преобразования применяются также одинаковое количество раз и полиадная структура тензора не нарушается.

Наличие двух базисов порождает два типа преобразований тензоров, индуцируемых преобразованием координат, что позволяет дать другое определение понятия тензор.

1. *Подстановочное преобразование* $A(\xi) = A[\xi(\eta)] \equiv \equiv A(\eta) = A\left[\eta(\xi)\right]$, ***называется преобразованием, индуцированным инвариантностью, если значение скалярной функции*** $A[\mathbf{r}(\xi)] = A[\mathbf{r}(\eta)]$***, называемой тензором нулевого ранга, определяется точкой пространства.***

2. *Ковариантным тензором ранга один называется набор величин* $A_{\xi^i}(\xi)$, $A_{\eta^\alpha}(\eta)$, ***ассоциированных соответственно с***

координатными системами ξ, η ***и связанных между собой преобразованием*** $A_{\eta^\alpha}(\eta)=\dfrac{\partial\xi^i}{\partial\eta^\alpha}A_{\xi^i}(\xi)$ (***ковариантный закон***).

3. ***Контравариантным тензором ранга один называется набор величин*** $A^{\xi^i}(\xi)$, $A^{\eta^\alpha}(\eta)$, ***ассоциированных соответственно с координатными системами*** ξ, η ***и связанных между собой преобразованием***

$A^{\eta^\alpha}(\eta)=\dfrac{\partial\eta^\alpha}{\partial\xi^i}A^{\xi^i}(\xi)$ (***контравариантный закон***).

4. ***Набор величин*** $A^{\xi^i\xi^j\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot\xi^p\xi^r}(\xi)$, $A^{\eta^\alpha\eta^\beta\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot\eta^\gamma\eta^\delta}(\eta)$, ***ассоциированных соответственно с координатными системами*** ξ, η ***и связанных преобразованием*** $A^{\eta^\alpha\eta^\beta\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot\eta^\gamma\eta^\delta}(\eta)=\dfrac{\partial\eta^\alpha}{\partial\xi^i}\dfrac{\partial\eta^\beta}{\partial\xi^j}\ldots\dfrac{\partial\xi^p}{\partial\eta^\gamma}\dfrac{\partial\xi^r}{\partial\eta^\delta}A^{\xi^i\xi^j\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot\xi^p\xi^r}(\xi)$, ***представляет собой смешанный тензор.***

2.2. Скалярные инварианты тензора второго ранга. Главные значения и направления

Для линейных пространств со скалярным произведением тензор второго ранга отождествляется с оператором: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{b}$, где $\mathbf{A}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_jA^{ij}$, $\mathbf{a}=\mathbf{e}_ka^k$, $\mathbf{b}=\mathbf{e}_sa^s$.

Тензор второго ранга называется симметрическим, если $A_{ij}=A_{ji}$ и кососимметрическим, если $A_{ij}=-A_{ji}$.

Важным свойством симметричного тензора второго ранга является наличие у него трёх взаимно ортогональных собственных направления. Собственные направления тензора определяются условием $\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}$. В декартовой системе координат это условие равносильно трём уравнениям

$$\begin{aligned}(A_{xx}-\lambda)\,u_x+A_{xy}u_y+A_{xz}u_z&=0,\\ A_{yx}u_x+(A_{yy}-\lambda)\,u_y+A_{yz}u_z&=0,\\ A_{zx}u_x+A_{zy}u_y+(A_{zz}-\lambda)\,u_z&=0.\end{aligned}$$

Имеет место нетривиальное решение этих уравнений, если определитель системы равен нулю:

$$\det\begin{pmatrix} A_{xx}-\lambda & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy}-\lambda & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz}-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2\left(A_{xx}+A_{yy}+A_{zz}\right) -$$

$$-\lambda\left(\begin{vmatrix} A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zy} & A_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xz} \\ A_{zx} & A_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{vmatrix}\right) + \begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{vmatrix} = 0.$$

Если квадратичная форма $A_{jk}q^j q^k \geq 0$ положительно определённая, то корни этого уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ вещественные и величины

$$I_1 = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = A_{xx}+A_{yy}+A_{zz},$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1 = \begin{vmatrix} A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zy} & A_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xz} \\ A_{zx} & A_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{vmatrix}.$$

не изменяются при преобразованиях координат, то есть являются инвариантами тензора. Инвариантность следует из инвариантности скалярного произведения в линейном пространстве.

Поскольку $\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_j = \lambda_j\mathbf{u}_j$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_k = \lambda_k\mathbf{u}_k$ для симметрического тензора имеем $\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_j$ и, следовательно, $\mathbf{u}_k\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_k = \left(\lambda_j-\lambda_k\right)\mathbf{u}_k\cdot\mathbf{u}_j = 0$. Для различных собственных значений собственные направления ортогональны.

Если какие-либо два собственных значения равны, то им соответствует плоскость, ортогональная третьему направлению, и любые два ортогональных между собой направления в этой плоскости могут быть приняты за собственные.

Если все собственные значения равны, то любые взаимно ортогональные направления могут быть приняты за собственные. Соответствующий тензор называют *шаровым*.

Итак, *для любого симметрического тензора второго ранга существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов*: $\mathbf{A} = \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1\lambda_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2\lambda_2 + \mathbf{u}_3\mathbf{u}_3\lambda_3$, $\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{u}_k = \delta_{jk}$ (*спектральная теорема*).

Квадратичная форма, составленная из произвольных векторов $\mathbf{r} = \mathbf{u}_j x^j$ в базисе собственных векторов, имеет вид $\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = \lambda_1 x^1 x^1 + \lambda_2 x^2 x^2 + \lambda_3 x^3 x^3 = r \geq 0 \quad \to \quad \lambda_j > 0$ (это – эллипсоид).

Тензоры второго ранга, у которых инвариант I_1 равен нулю, называются *девиаторами*. Любой симметрический тензор второго ранга $\mathbf{A}$ можно представить в виде суммы шарового тензора $\mathbf{A}_{sph} = (tr\mathbf{A}/3)\mathbf{I}$ и девиатора $\mathbf{A}_{dev} = \mathbf{A} - (tr\mathbf{A}/3)\mathbf{I}$.

Симметрические тензоры с компонентами $\delta^i{}_j$, g_{ij}, g^{ij} называют единичными: $\mathbf{I} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{e}_i \delta^i{}_j \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_k b^k = \mathbf{e}_i \delta^i{}_j \delta^j{}_k b^k = \mathbf{e}_i \delta^i{}_k b^k = \mathbf{e}_i b^i = \mathbf{b},$

$$\mathbf{g}_{..} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{e}^s g_{sj} \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_k b^k = \mathbf{e}^s g_{sj} \delta^j{}_k b^k = \mathbf{e}^s g_{sj} b^j = \mathbf{e}^s b_s = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{g}^{..} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{e}_j g^{js} \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}^k b_k = \mathbf{e}_j g^{js} \delta_s{}^k b_k = \mathbf{e}_j g^{js} b_s = \mathbf{e}_j b^j = \mathbf{b}.$$

Ориентированный объём (объём ориентированного параллелепипеда) определяется как смешанное произведение трёх векторов

$$V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

$$V(\alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha V(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \beta V(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = -V(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}).$$

Пусть симметрический тензор второго ранга $\mathbf{A}$ переводит элементы базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ в набор векторов $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{a}, \ \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}, \ \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{c}$, тогда *детерминантом тензора* $\mathbf{A}$ *называют отношение ориентированных объёмов*

$$\det \mathbf{A} = V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) / V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \det(A_{jk}).$$

Кососимметрический тензор второго ранга $\mathbf{\Omega}$ в трёхмерном пространстве ассоциирован с бивектором $\boldsymbol{\omega}$ (аксиальным вектором)

$$\mathbf{\Omega} = -\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \omega_z + \mathbf{e}_x \mathbf{e}_z \omega_y + \mathbf{e}_y \mathbf{e}_x \omega_z - \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z \omega_x - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_x \omega_y + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_y \omega_x =$$

$$= (\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z) \times (\mathbf{e}_x \omega_x + \mathbf{e}_y \omega_y + \mathbf{e}_z \omega_z) = \mathbf{I} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Например, поле скоростей твёрдого тела с неподвижной точкой, может быть представлено в виде $\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{I} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{I} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

Для кососимметрического тензора имеем $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = \lambda \mathbf{r} \quad \to$

$$\begin{aligned} -\lambda r_x - \omega_z r_y + \omega_y r_z &= 0, & -\lambda^3 + \lambda^2 I_1 - \lambda I_2 + I_3 = 0 \quad &\to \\ \omega_z r_x - \lambda r_y - \omega_x r_z &= 0, & -\lambda^3 - \lambda\left(\omega_x{}^2 + \omega_y{}^2 + \omega_z{}^2\right) = 0 \quad &\to \\ -\omega_y r_x + \omega_x r_y - \lambda r_z &= 0, & \to \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\omega. & \end{aligned}$$

В 1827 г Коши, рассматривая равновесие элементарного тетраэдра, ввел понятие тензора напряжения.

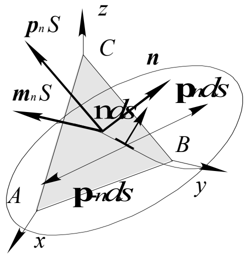


Рис. 2.1.

Условие равновесия любой ориентированной площадки $\mathbf{n}dS$, разделяющей среду на две части, означает равенство векторов и моментов напряжения:

$$\mathbf{p}_{-n}dS = -\mathbf{p}_n dS, \quad \mathbf{m}_{-n}dS = -\mathbf{m}_n dS, \qquad (2.1)$$

описывающих силовые воздействия частей среды друг на друга. Индекс n не означает, что сила направлена по внешней нормали $\mathbf{n}$ к элементу поверхности. Эти векторы характеризуют поля внутренних напряжений в сплошной среде и зависят от ориентации площадки

$$\mathbf{p}_n dS = f_p\left(\mathbf{n}dS\right), \quad \mathbf{m}_n dS = f_m\left(\mathbf{n}dS\right). \qquad (2.2)$$

Рассмотрим равновесие элементарного тетраэдра. Площади ориентированных площадок OCB, OAC, OBA, ABC, ограничивающих тетраэдр

с вершиной O и ребрами $\lambda\mathbf{e}_1, \lambda\mathbf{e}_2, \lambda\mathbf{e}_3$ (λ – масштабный множитель), равны соответственно

$$\mathbf{e}_1 dS_1 = \left(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3\right)\lambda^2/2,$$

$$\mathbf{e}_2 dS_2 = \left(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1\right)\lambda^2/2, \qquad \left(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1\right)\times\left(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\right)\lambda^2/2 = \mathbf{n}dS.$$

$$\mathbf{e}_3 dS_3 = \left(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2\right)\lambda^2/2,$$

В силу тождества $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \left(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1\right)\times\left(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\right) = \mathbf{n}$

имеем $\mathbf{e}_1 dS_1 + \mathbf{e}_2 dS_2 + \mathbf{e}_3 dS_3 = \mathbf{n}dS,$ где Рис. 2.2.

$$dS_k = \left(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{n}\right)dS = \left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_k\right)dS = \cos\left(\mathbf{n}, \mathbf{e}_k\right)dS \quad \left(k = 1, 2, 3\right). \qquad (2.3)$$

В равновесии главный вектор приложенных к тетраэдру поверхностных напряжений и массовых сил равен нулю

$$\mathbf{p}_{-1}dS_1 + \mathbf{p}_{-2}dS_2 + \mathbf{p}_{-3}dS_3 + \mathbf{p}_n dS + \rho\mathbf{F}dV = 0.$$

В этом равенстве последнее слагаемое, пропорциональное элементарному объёму $dV = \left[\mathbf{e}_1 \cdot \left(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3\right)\right]\lambda^3/6$, при $\lambda \to 0$ есть величина более высокого порядка малости, нежели остальные слагаемые, и оно должно быть отброшено. Итак, в силу (2.1)

$$\mathbf{p}_n dS = \mathbf{p}_1 dS_1 + \mathbf{p}_2 dS_2 + \mathbf{p}_3 dS_3 = \left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_k\right)\mathbf{p}_k dS = \mathbf{p}_k\left(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{n}\right)dS.$$

$$\mathbf{p}_n = \cos\left(\mathbf{n}, \mathbf{e}_x\right)\mathbf{p}_x + \cos\left(\mathbf{n}, \mathbf{e}_y\right)\mathbf{p}_y + \cos\left(\mathbf{n}, \mathbf{e}_z\right)\mathbf{p}_z = \qquad (2.4)$$

$$= \mathbf{p}_x \cos\left(\mathbf{e}_x, \mathbf{n}\right) + \mathbf{p}_y \cos\left(\mathbf{e}_y, \mathbf{n}\right) + \mathbf{p}_z \cos\mathbf{e}_z\left(,\mathbf{n}\right).$$

Соотношение (2.4) позволяет (2.2) представить в виде

$$f_p(\mathbf{n}dS) = f_p(\mathbf{e}_1 dS_1) + f_p(\mathbf{e}_2 dS_2) + f_p(\mathbf{e}_3 dS_3),$$
$$f_m(\mathbf{n}dS) = f_m(\mathbf{e}_1 dS_1) + f_m(\mathbf{e}_2 dS_2) + f_m(\mathbf{e}_3 dS_3),$$

что доказывает линейность зависимостей $f_p(\mathbf{n}dS)$, $f_m(\mathbf{n}dS)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_n &= (\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_k)\mathbf{p}_k = \mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{p}_k = \mathbf{n}\cdot\overline{\overline{P}},\\
\mathbf{p}_n &= \mathbf{p}_k(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{n}) = \mathbf{p}_k\otimes\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{n} = \overline{\overline{P^T}}\cdot\mathbf{n},\\
\mathbf{m}_n &= (\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_k)\mathbf{m}_k = \mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{m}_k = \mathbf{n}\cdot\overline{\overline{M}},\\
\mathbf{m}_n &= \mathbf{m}_k(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{n}) = \mathbf{m}_k\otimes\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{n} = \overline{\overline{M^T}}\cdot\mathbf{n}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Можно лишь условно набор величин p_{k1}, p_{k2}, p_{k3}, m_{k1}, m_{k2}, m_{k3} в выбранной системе координат называть проекциями векторов $\mathbf{p}_k$ и $\mathbf{m}_k$ (при повороте системы координат они преобразуются как компоненты тензора). Совокупность векторов $\mathbf{p}_k$ $k = 1,2,3$ в виде суммы диад $\mathbf{e}_k\mathbf{p}_k$, $\mathbf{p}_k\mathbf{e}_k$ образует тензор, который имеет вид

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{P}} = \mathbf{P} &= \mathbf{e}_1\mathbf{p}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{p}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{p}_3 = &\quad \overline{\overline{P^T}} = \mathbf{P}^T &= \mathbf{p}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{p}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{p}_3\mathbf{e}_3 =\\
&= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 p_{11} + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 p_{12} + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 p_{13} + & &= p_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + p_{21}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + p_{31}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 +\\
&+ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 p_{21} + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 p_{22} + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 p_{23} + & &+ p_{12}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + p_{22}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + p_{32}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 +\\
&+ \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 p_{31} + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 p_{32} + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 p_{33}, & &+ p_{23}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + p_{13}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + p_{33}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

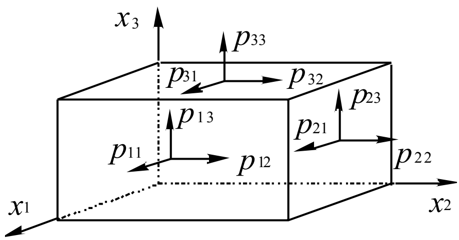


Рис. 2.3.

На рисунке показаны напряжения $p_{sk} > 0$ на гранях с внешними нормалями $\mathbf{e}_s$. Поскольку $\mathbf{p}_{-n} = -\mathbf{p}_n$, то на гранях с нормалью $-\mathbf{e}_s$ положительные p_{sk} ориентированы по направлениям $-\mathbf{e}_k$.

Отсюда следует, что положительные нормальные напряжения – растягивающие, а отрицательные – сжимающие; моменты положительных касательных напряжений p_{sk} на гранях $\mathbf{e}_s$ и $-\mathbf{e}_s$ относительно оси $\mathbf{e}_r$ имеют знак символа Леви-Чивита: $\ni_{skr} = \mathbf{e}_s \cdot \left(\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_r\right)$.

2.3. Правило частного – теорема деления

Скалярное умножение тензоров, при котором перемножаются стоящие рядом элементы базисов с верхним и нижним индексами, называют свёрткой тензоров:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}^s\mathbf{e}^m u^{ijk} v_{sm} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \delta_k^s \mathbf{e}^m u^{ijk} v_{sm} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}^m w^{ij\cdot}_{\cdot\cdot m} \quad \to$$

$$\to \quad w^{ij\cdot}_{\cdot\cdot m} = u^{ijk} v_{km},$$

$$\mathbf{u}\cdot\cdot\mathbf{v} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k \cdot\cdot \mathbf{e}^s\mathbf{e}^m u^{ijk} v_{sm} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^m u^{ijk} v_{km} = \mathbf{e}_i w^{i\cdot\cdot}_{\cdots} \quad \to$$

$$\to \quad w^{i\cdot\cdot}_{\cdots} = u^{ijk} v_{kj},$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{e}^s\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k v_{sm} u^{ijk} = \mathbf{e}^s \delta_i^m \mathbf{e}_j\mathbf{e}_k v_{sm} u^{ijk} = \mathbf{e}^s\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k w^{\cdot jk}_{s\cdot\cdot} \quad \to$$

$$\to \quad w^{\cdot jk}_{s\cdot\cdot} = v_{sm} u^{mjk},$$

$$\mathbf{v}\cdot\cdot\,\mathbf{u} = \mathbf{e}^s\mathbf{e}^m \cdot\cdot\, \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k v_{sm} u^{ijk} = \mathbf{e}^s \cdot \mathbf{e}_j\mathbf{e}_k v_{sm} u^{mjk} = \mathbf{e}_k w^{\cdot\cdot k}_{\cdots} \to$$

$$\to \quad w^{\cdot\cdot k}_{\cdots} = v_{jm} u^{mjk}.$$

Если в любой системе координат какой-либо массив элементов с индексами в свёртке с компонентами любого тензора снова даёт компоненты тензора, то этот массив есть компоненты тензора.

Пусть в равенстве $p^{\xi^i\xi^j} g_{\xi^j} = f^{\xi^i}$ g_{ξ^j} и f^{ξ^i} – компоненты произвольных тензоров первого ранга в системе координат ξ.

Построим закон преобразования элементов $p^{\xi^i\xi^j}$ к системе координат η. Поскольку $g_{\xi^j} = \dfrac{\partial\eta^k}{\partial\xi^j} g_{\eta^k}$, $f^{\xi^i} = \dfrac{\partial\xi^i}{\partial\eta^s} f^{\eta^s}$ имеем $p^{\xi^i\xi^j} \dfrac{\partial\eta^k}{\partial\xi^j} g_{\eta^k} = \dfrac{\partial\xi^i}{\partial\eta^s} f^{\eta^s}$. Умножим обе части равенства на $\dfrac{\partial\eta^\alpha}{\partial\xi^i}$ и просуммируем по индексу i:

$$p^{\xi^i\xi^j} \frac{\partial\eta^\alpha}{\partial\xi^i} \frac{\partial\eta^k}{\partial\xi^j} g_{\eta^k} = \frac{\partial\eta^\alpha}{\partial\xi^i} \frac{\partial\xi^i}{\partial\eta^s} f^{\eta^s} = \delta_s^\alpha f^{\eta^s} = f^{\eta^\alpha}.$$

Исходное равенство имеет место в любой системе координат, поэтому $f^{\eta^\alpha} = p^{\eta^\alpha\eta^k} g_{\eta^k}$. В силу произвольности g_{η^k} заключаем

$p^{\eta^\alpha \eta^k} = p^{\xi^i \xi^j} \dfrac{\partial \eta^\alpha}{\partial \xi^i} \dfrac{\partial \eta^k}{\partial \xi^j}$. Итак, элементы массива $p^{\xi^i \xi^j}$ преобразуются, как контравариантные компоненты тензора второго ранга.

Все упомянутые выше соотношения, в которых фигурировал тензор второго ранга, удовлетворяют правилу частного:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}, \quad 2T = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}, \quad \mathbf{p}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{m}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}.$$

Заметим, что при описании явления в ортогональных криволинейных координатах часто используют нормированный базис. Компоненты тензора в таком ортонормированном базисе называют физическими, например, $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_j = \overset{\circ}{\mathbf{e}}{}^j, \quad r^j = \sqrt{g_{jj}} R^j = \sqrt{g^{jj}} R_j = r_j$,

$$\mathbf{R} = \mathbf{e}_j R^j = \overset{\circ}{\mathbf{e}}_j \sqrt{g_{jj}} R^j = \overset{\circ}{\mathbf{e}}_j r^j, \quad \mathbf{R} = \mathbf{e}^j R_j = \overset{\circ}{\mathbf{e}}{}^j \sqrt{g^{jj}} R_j = \overset{\circ}{\mathbf{e}}{}^j r_j.$$

2.4. Дифференцирование тензора по координатам

Выражения для производных элементов базиса по координатам (1.18) и (1.21) позволяют продифференцировать любой смешанный тензор

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \ldots \mathbf{e}^p \mathbf{e}^r A^{ij\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot pr}: \qquad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^\alpha} =$$

$$= \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \ldots \mathbf{e}^p \mathbf{e}^r \frac{\partial A^{ij\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot pr}}{\partial q^\alpha} + \mathbf{e}_s \Gamma^s{}_{i\alpha} \mathbf{e}_j \ldots \mathbf{e}^p \mathbf{e}^r A^{ij\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot pr} + \mathbf{e}_i \mathbf{e}_s \Gamma^s{}_{j\alpha} \ldots \mathbf{e}^p \mathbf{e}^r A^{ij\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot pr} - \ldots$$

$$\ldots - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \ldots \mathbf{e}^s \Gamma^p{}_{s\alpha} \mathbf{e}^r A^{ij\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot pr} - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \ldots \mathbf{e}^p \mathbf{e}^s \Gamma^r{}_{s\alpha} A^{ij\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot pr}.$$

Наведём порядок с индексами так, чтобы все полиады имели одинаковые индексы

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^\alpha} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \ldots \mathbf{e}^p \mathbf{e}^r \frac{\partial A^{ij\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot pr}}{\partial q^\alpha} + \mathbf{e}_i \Gamma^i{}_{\beta\alpha} \mathbf{e}_j \ldots \mathbf{e}^p \mathbf{e}^r A^{\beta j\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot pr} +$$

$$+ \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \Gamma^j{}_{\beta\alpha} \ldots \mathbf{e}^p \mathbf{e}^r A^{i\beta\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot pr} - \ldots$$

$$\ldots - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \ldots \mathbf{e}^p \Gamma^\beta{}_{p\alpha} \mathbf{e}^r A^{ij\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot \beta r} - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \ldots \mathbf{e}^p \mathbf{e}^r \Gamma^\beta{}_{r\alpha} A^{ij\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot p\beta} =$$

$$= \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \ldots \mathbf{e}^p \mathbf{e}^r \left(\frac{\partial A^{ij\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot pr}}{\partial q^\alpha} + \Gamma^i{}_{\beta\alpha} A^{\beta j\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot pr} + \Gamma^j{}_{\beta\alpha} A^{i\beta\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot pr} \ldots \right.$$

$$\left. \ldots - \Gamma^\beta{}_{p\alpha} A^{ij\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot \beta r} - \Gamma^\beta{}_{r\alpha} A^{ij\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot p\beta} \right)$$

Обычно эту производную записывают в виде

$$\frac{DA^{ij\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot pr}}{Dq^\alpha} = \frac{\partial A^{ij\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot pr}}{\partial q^\alpha} + \Gamma^i{}_{\beta\alpha} A^{\beta j\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot pr} + \Gamma^j{}_{\beta\alpha} A^{i\beta\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot pr} \ldots - \Gamma^\beta{}_{p\alpha} A^{ij\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot \beta r} - \Gamma^\beta{}_{r\alpha} A^{ij\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot p\beta},$$

опуская компоненты базиса $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j..\mathbf{e}^p\mathbf{e}^r$, но это никак не означает, что мы работаем с одной компонентой тензора, то есть

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^\alpha} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j...\mathbf{e}^p\mathbf{e}^r \, \frac{DA^{ij..}{}_{..pr}}{Dq^\alpha}.$$

В качестве упражнения рассмотрим производные метрического тензора $\mathbf{g} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j g^{ij} = \mathbf{e}^i\mathbf{e}_j\delta_i^j = \mathbf{e}^i\mathbf{e}^j g_{ij}$ по координате q^α

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial q^\alpha} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \frac{\partial g^{ij}}{\partial q^\alpha} + \mathbf{e}_s\Gamma^s{}_{i\alpha}\mathbf{e}_j g^{ij} + \mathbf{e}_i\mathbf{e}_s\Gamma^s{}_{j\alpha} g^{ij} =$$

$$= \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\left(\frac{\partial\left(\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}^j\right)}{\partial q^\alpha} + \Gamma^i{}_{s\alpha}g^{sj} + \Gamma^j{}_{s\alpha}g^{is}\right) =$$

$$= \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\left(-\mathbf{e}^s\Gamma^i{}_{s\alpha}\cdot\mathbf{e}^j - \mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}^s\Gamma^j{}_{s\alpha} + \Gamma^i{}_{s\alpha}g^{sj} + \Gamma^j{}_{s\alpha}g^{is}\right) \equiv 0;$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial q^\alpha} = -\mathbf{e}^s\Gamma^i{}_{s\alpha}\mathbf{e}_j\delta_i^j + \mathbf{e}^i\mathbf{e}_s\Gamma^s{}_{j\alpha}\delta_i^j = -\mathbf{e}^s\mathbf{e}_i\Gamma^i{}_{s\alpha} + \mathbf{e}^i\mathbf{e}_s\Gamma^s{}_{i\alpha} \equiv 0;$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial q^\alpha} = \mathbf{e}^i\mathbf{e}^j \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^\alpha} - \mathbf{e}^s\mathbf{e}^j\Gamma^i{}_{s\alpha}g_{ij} - \mathbf{e}^i\mathbf{e}^s\Gamma^j{}_{s\alpha}g_{ij} =$$

$$= \mathbf{e}^i\mathbf{e}^j\left(\frac{\partial\left(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j\right)}{\partial q^\alpha} - \Gamma^\beta{}_{i\alpha}g_{\beta j} - \Gamma^\beta{}_{j\alpha}g_{i\beta}\right) =$$

$$= \mathbf{e}^i\mathbf{e}^j\left(\mathbf{e}^s\Gamma_{i\alpha,s}\cdot\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}^s\Gamma_{j\alpha,s} - \Gamma_{i\alpha,j} - \Gamma_{j\alpha,i}\right) \equiv 0.$$

Этот результат есть содержание теоремы Риччи: ***производная метрического тензора по любой координате равна нулю***.

Выше было отмечено, что скалярная величина есть тензор нулевого ранга. В связи с этим отмечаем, что производные $\partial f/\partial\xi^\alpha$, $\alpha = 1,2,3$ при переходе к новым координатам $\xi^j = \xi^j\left(\eta^1,\eta^2,\eta^3\right)$ $j = 1,2,3$: меняются по правилу $\dfrac{\partial f}{\partial\eta^j} = \dfrac{\partial f}{\partial\xi^\alpha}\dfrac{\partial\xi^\alpha}{\partial\eta^j}$. Это закон преобразования компонент ковариантного вектора

$$grad_\xi\, f = \mathbf{e}^{\xi^\alpha}\frac{\partial f}{\partial\xi^\alpha}. \tag{2.1}$$

Имеем то же самое, рассматривая дифференциал скалярной функции $df = \dfrac{\partial f}{\partial\xi^\alpha}d\xi^\alpha = \dfrac{\partial f}{\partial\xi^\alpha}(\mathbf{e}^{\xi^\alpha}\cdot\mathbf{e}_{\xi^\beta})d\xi^\beta = grad_\xi\, f\cdot d\mathbf{r}$, где $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_{\xi^\beta}d\xi^\beta$ –

контравариантный вектор и по “теореме деления“

$grad_\xi f = \mathbf{e}^{\xi^\alpha} \dfrac{\partial f}{\partial \xi^\alpha}$ – ковариантный вектор. При переходе к новым координатам его структура не

меняется
$$grad_\xi f = \mathbf{e}^{\xi^k} \frac{\partial f}{\partial \xi^k} = \mathbf{e}^{\eta^j} \frac{\partial \xi^k}{\partial \eta^j} \frac{\partial f}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial \xi^k} =$$
$$= \mathbf{e}^{\eta^j} \delta_j^\alpha \frac{\partial f}{\partial \eta^\alpha} = \mathbf{e}^{\eta^j} \frac{\partial f}{\partial \eta^j} = grad_\eta f \, .$$

В действительности это свойство присуще вектору-оператору набла
$$\nabla_\xi = \mathbf{e}^{\xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{e}^{\eta^k} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^k} \frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial \eta^j} = \mathbf{e}^{\eta^k} \delta_k^j \frac{\partial}{\partial \eta^j} = \nabla_\eta \, ,$$
который отличается от дифференцирования по координате наличием соответствующего элемента базиса, то есть является ковариантным тензором первого ранга. Поэтому ***при изменении системы координат структура результата применения вектора-оператора набла к тензору любого ранга остаётся неизменной.***

Перечислим стандартные действия вектора-оператора набла:
$$\nabla_\xi \otimes f = \left(\mathbf{e}^{\xi^k} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \right) f = \left(\mathbf{e}^{\eta^j} \frac{\partial \xi^k}{\partial \eta^j} \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial \xi^k} \frac{\partial}{\partial \eta^\alpha} \right) f = \left(\mathbf{e}^{\eta^j} \frac{\partial}{\partial \eta^j} \right) f = \nabla_\eta \otimes f,$$
$$\nabla_\xi \cdot \mathbf{f} = \left(\mathbf{e}^{\xi^k} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \right) \cdot \mathbf{f} = \left(\mathbf{e}^{\eta^j} \frac{\partial \xi^k}{\partial \eta^j} \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial \xi^k} \frac{\partial}{\partial \eta^\alpha} \right) \cdot \mathbf{f} = \left(\mathbf{e}^{\eta^j} \frac{\partial}{\partial \eta^j} \right) \cdot \mathbf{f} = \nabla_\eta \cdot \mathbf{f},$$
$$\nabla_\xi \times \mathbf{f} = \left(\mathbf{e}^{\xi^k} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \right) \times \mathbf{f} = \left(\mathbf{e}^{\eta^j} \frac{\partial \xi^k}{\partial \eta^j} \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial \xi^k} \frac{\partial}{\partial \eta^\alpha} \right) \times \mathbf{f} = \left(\mathbf{e}^{\eta^j} \frac{\partial}{\partial \eta^j} \right) \times \mathbf{f} = \nabla_\eta \times \mathbf{f},$$
$$\nabla_\xi \otimes \mathbf{f} = \left(\mathbf{e}^{\xi^k} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \right) \mathbf{f} = \left(\mathbf{e}^{\eta^j} \frac{\partial \xi^k}{\partial \eta^j} \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial \xi^k} \frac{\partial}{\partial \eta^\alpha} \right) \mathbf{f} = \left(\mathbf{e}^{\eta^j} \frac{\partial}{\partial \eta^j} \right) \mathbf{f} = \nabla_\eta \otimes \mathbf{f} \, .$$

Обычно принимаются обозначения
$$\nabla \cdot \mathbf{f} \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{div}\mathbf{f}, \quad \nabla \times \mathbf{f} \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{f}, \quad \nabla \mathbf{f} \equiv \nabla \otimes \mathbf{f} \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{grad}\mathbf{f}, \qquad (2.2)$$
которые требуют пояснений, если система координат не декартова. Отметим ещё раз, что операторы $(\nabla \cdot)$, $(\nabla \times)$ могут действовать и на тензоры
более высокого ранга, нежели векторы, а оператор $\nabla \otimes$ – на тензор любого ранга.

Рассмотрим поле вектора $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, заданное в декартовой системе координат. Радиусу-вектору $\mathbf{r}$ дадим бесконечно малое приращение и рассмотрим соответствующее приращение $d\mathbf{f} = \left(\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{r}\right)\cdot d\mathbf{r}$ вектора $\mathbf{f}$. На основании правила частного объект $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{r}$ является тензором второго ранга, который естественно называть ***производной вектора*** $\mathbf{f}$ ***по вектору*** $\mathbf{r}$.

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{r}} = \nabla\otimes\mathbf{f} = \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \quad\leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} \partial f^1/\partial x^1 & \partial f^2/\partial x^1 & \partial f^3/\partial x^1 \\ \partial f^1/\partial x^2 & \partial f^2/\partial x^2 & \partial f^3/\partial x^2 \\ \partial f^1/\partial x^3 & \partial f^2/\partial x^3 & \partial f^3/\partial x^3 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{r}}^T = \left(\nabla\otimes\mathbf{f}\right)^T = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \quad\leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} \partial f^1/\partial x^1 & \partial f^1/\partial x^2 & \partial f^1/\partial x^3 \\ \partial f^2/\partial x^1 & \partial f^2/\partial x^2 & \partial f^2/\partial x^3 \\ \partial f^3/\partial x^1 & \partial f^3/\partial x^2 & \partial f^3/\partial x^3 \end{pmatrix}$$

тогда $$d\mathbf{f} = \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\cdot\mathbf{e}_k dx^k = \mathbf{e}_j\frac{\partial f^k}{\partial x^j}dx^k,$$

$$d\mathbf{f} = d\mathbf{r}\cdot\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{r}}^T = \mathbf{e}_k dx^k\cdot\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\frac{\partial f^i}{\partial x^j} = \mathbf{e}_j\frac{\partial f^k}{\partial x^j}dx^k.$$

Этот тензор имеет большое значение в механике сплошной среды. Отметим, что элемент $\mathbf{e}_j$ оператора $\nabla = \mathbf{e}_j\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ будем приписывать к полиадам дифференцируемого тензора всегда слева, (некоторые авторы приписывают справа. Разложим этот тензор на симметричную и антисимметричную части: $\dfrac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{r}} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_A$, где

$$\mathbf{F}_S = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{r}}^T + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{r}}\right) \quad\leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f^1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial f^2}{\partial x^1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f^1}{\partial x^3}+\dfrac{\partial f^3}{\partial x^1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f^2}{\partial x^1}+\dfrac{\partial f^1}{\partial x^2}\right) & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f^2}{\partial x^3}+\dfrac{\partial f^3}{\partial x^2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f^3}{\partial x^1}+\dfrac{\partial f^1}{\partial x^3}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f^3}{\partial x^2}+\dfrac{\partial f^2}{\partial x^3}\right) & \dfrac{\partial f^3}{\partial x^3} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_A = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{r}}^T - \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{r}}\right) = \mathbf{I}\times\boldsymbol{\omega} \quad\leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^2}-\frac{\partial f^2}{\partial x^1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^3}-\frac{\partial f^3}{\partial x^1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^2}{\partial x^1}-\frac{\partial f^1}{\partial x^2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^2}{\partial x^3}-\frac{\partial f^3}{\partial x^2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^3}{\partial x^1}-\frac{\partial f^1}{\partial x^3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^3}{\partial x^2}-\frac{\partial f^2}{\partial x^3}\right) & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{I}=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$ и

$$2\boldsymbol{\omega}=\mathbf{e}_1\left(\frac{\partial f^3}{\partial x^2}-\frac{\partial f^2}{\partial x^3}\right)+\mathbf{e}_2\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^3}-\frac{\partial f^3}{\partial x^1}\right)+\mathbf{e}_3\left(\frac{\partial f^2}{\partial x^1}-\frac{\partial f^1}{\partial x^2}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial/\partial x^1 & \partial/\partial x^2 & \partial/\partial x^3 \\ f^1 & f^2 & f^3 \end{vmatrix}=\nabla\times\mathbf{f}=\operatorname{rot}\mathbf{f}.$$

Отличные от нуля компоненты тензора $\mathbf{F}_A$ есть компоненты бивектора $\boldsymbol{\omega}$. Такое допустимо, если они преобразуются при повороте системы координат как компоненты вектора. Проверим этот факт:

$$\omega_\xi{}^1=F_\xi^{32}=S_{\alpha 3}S_{\beta 2}F_\eta^{\alpha\beta}=\left(S_{22}S_{33}-S_{23}S_{32}\right)F_\eta^{32}+$$
$$+\left(S_{13}S_{32}-S_{12}S_{33}\right)F_\eta^{13}+\left(S_{12}S_{23}-S_{13}S_{22}\right)F_\eta^{21}=$$
$$=S_{11}F_\eta^{32}+S_{21}F_\eta^{13}+S_{31}F_\eta^{21}=S_{11}\omega_\eta{}^1+S_{21}\omega_\eta{}^2+S_{31}\omega_\eta{}^3,$$
$$\omega_\xi{}^2=F_\xi^{13}=S_{\alpha 1}S_{\beta 3}F_\eta^{\alpha\beta}=\left(S_{23}S_{31}-S_{21}S_{33}\right)F_\eta^{32}+$$
$$+\left(S_{11}S_{33}-S_{13}S_{31}\right)F_\eta^{13}+\left(S_{13}S_{21}-S_{11}S_{23}\right)F_\eta^{21}=$$
$$=S_{12}F_\eta^{32}+S_{22}F_\eta^{13}+S_{32}F_\eta^{21}=S_{12}\omega_\eta{}^1+S_{22}\omega_\eta{}^2+S_{32}\omega_\eta{}^3,$$
$$\omega_\xi{}^3=F_\xi^{21}=S_{\alpha 2}S_{\beta 1}F_\eta^{\alpha\beta}=\left(S_{21}S_{32}-S_{22}S_{31}\right)F_\eta^{32}+$$
$$+\left(S_{12}S_{31}-S_{11}S_{32}\right)F_\eta^{13}++\left(S_{11}S_{22}-S_{12}S_{21}\right)F_\eta^{21}=$$
$$=S_{13}F_\eta^{32}+S_{23}F_\eta^{13}+S_{33}F_\eta^{21}=S_{13}\omega_\eta{}^1+S_{23}\omega_\eta{}^2+S_{33}\omega_\eta{}^3.$$

Поскольку бивектор $\boldsymbol{\omega}$ представим как векторное произведение двух векторов: $2\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\mathbf{f}=\operatorname{rot}\mathbf{f}$, он является аксиальным вектором, то есть его направление меняется на противоположное при переходе от правой системы координат к левой.

Первый инвариант тензора $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{r}$, равный его следу, есть расхождение поля $\mathbf{f}$: $I_1=\partial f^j/\partial x^j=\nabla\cdot\mathbf{f}=\operatorname{div}\mathbf{f}$.

Тензор $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}}$ симметричен, если $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \operatorname{grad} U = \mathbf{e}_i \left.\dfrac{\partial U_{ij}}{\partial x^i}\right|_{x^j = dx^j}$.

Симметричному тензору $\mathbf{F}_S$ можно сопоставить квадратичную форму

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}_S\cdot\mathbf{r} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f^1}{\partial x^1}x^1x^1 + \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^2} + \frac{\partial f^2}{\partial x^1}\right)x^1x^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f^2}{\partial x^2}x^2x^2 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial x^3} + \frac{\partial f^3}{\partial x^2}\right)x^2x^3 + \frac{\partial f^3}{\partial x^3}x^3x^3 + \left(\frac{\partial f^3}{\partial x^1} + \frac{\partial f^1}{\partial x^3}\right)x^3x^1\right].$$

Если $\mathbf{f} \equiv \mathbf{v}$ – поле скоростей, то $\partial\mathbf{v}/\partial\mathbf{r}$ – называют тензором скоростей деформаций и

$$\mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_S\cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F}_A\cdot d\mathbf{r}\ , \qquad (2.3)$$

где
$$\mathbf{F}_A\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{I}\times\boldsymbol{\omega}\cdot d\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}\times d\mathbf{r}\ ,$$

$$\mathbf{F}_S\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1\left[\frac{\partial v^1}{\partial x^1}dx^1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^1}{\partial x^2} + \frac{\partial v^2}{\partial x^1}\right)dx^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^1}{\partial x^3} + \frac{\partial v^3}{\partial x^1}\right)dx^3\right] +$$

$$+ \mathbf{e}_2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^2}{\partial x^1} + \frac{\partial v^1}{\partial x^2}\right)dx^1 + \frac{\partial v^2}{\partial x^2}dx^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^2}{\partial x^3} + \frac{\partial v^3}{\partial x^2}\right)dx^3\right] +$$

$$+ \mathbf{e}_3\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^3}{\partial x^1} + \frac{\partial v^1}{\partial x^3}\right)dx^1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^3}{\partial x^2} + \frac{\partial v^2}{\partial x^3}\right)dx^2 + \frac{\partial v^3}{\partial x^3}dx^3\right] = gradU\big|_{\mathbf{r}=d\mathbf{r}}\ .$$

Выражение (2.3) называют формулой Коши-Гельмгольца для распределения скоростей в малой окрестности любой точки сплошной среды. ***Скорость точки сплошной среды, принадлежащей бесконечно малому объёму, складывается из трёх слагаемых: скорости полюса, скорости точки во вращательном движении затвердевшей жидкой частицы вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс, с угловой скоростью*** $2\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{v}$ ***и скорости деформации*** $\operatorname{grad} U$.

Отмечаем, что деформациям (относительным перемещениям) сопоставляется квадратичная форма U : $\mathbf{F}_S\cdot d\mathbf{r} = \operatorname{grad} U\big|_{\mathbf{r}=d\mathbf{r}}$.

Как отмечалось выше, в связи с действием вектора-оператора набла $\nabla = \mathbf{e}_i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ на тензор, высокого ранга $\mathbf{A} = \mathbf{e}_j\mathbf{e}_k ... \mathbf{e}^p\mathbf{e}^r A^{jk..}{}_{..pr}$, имеется возможность написания элемента $\mathbf{e}_i$ внутри соответствующих полиад:

$$\nabla\mathbf{A}=\left(\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)A^{jk..}{}_{..pr}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k...\mathbf{e}^p\mathbf{e}^r=\left(\mathbf{e}_i\frac{\partial A^{jk..}{}_{..pr}}{\partial x^i}\right)\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k...\mathbf{e}^p\mathbf{e}^r+$$

$$+A^{jk..}{}_{..pr}\left(\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x^i}\mathbf{e}_j\right)\mathbf{e}_k...\mathbf{e}^p\mathbf{e}^r+A^{jk..}{}_{..pr}\mathbf{e}_j\left(\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x^i}\mathbf{e}_k\right)...\mathbf{e}^p\mathbf{e}^r+$$

$$+A^{jk..}{}_{..pr}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k...\left(\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x^i}\mathbf{e}^p\right)\mathbf{e}^r+A^{jk..}{}_{..pr}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k...\mathbf{e}^p\left(\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x^i}\mathbf{e}^r\right)$$

либо

$$\nabla\mathbf{A}=\left(\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k...\mathbf{e}^p\mathbf{e}^rA^{jk..}{}_{..pr}=\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k...\mathbf{e}^p\mathbf{e}^r\left(\mathbf{e}_i\frac{\partial A^{jk..}{}_{..pr}}{\partial x^i}\right)+$$

$$+\left(\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x^i}\mathbf{e}_j\right)\mathbf{e}_k...\mathbf{e}^p\mathbf{e}^rA^{jk..}{}_{..pr}+\mathbf{e}_j\left(\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x^i}\mathbf{e}_k\right)...\mathbf{e}^p\mathbf{e}^rA^{jk..}{}_{..pr}+$$

$$+\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k...\left(\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x^i}\mathbf{e}^p\right)\mathbf{e}^rA^{jk..}{}_{..pr}+\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k...\mathbf{e}^p\left(\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x^i}\mathbf{e}^r\right)A^{jk..}{}_{..pr}.$$

2.5. Некоторые теоремы анализа

Операцией обратной дифференцированию по координатам естественно считать интегрирование по контуру, по поверхности, по объёму: $\int_C L(\mathbf{f})\cdot d\mathbf{r},\quad \int_S L(\mathbf{f})\cdot d\mathbf{S},\quad \int_V L(\mathbf{f})dV$, где $L-$ линейный оператор.

В анализе проблема замены интегрирования по поверхности, по объёму на интегрирование меньшей кратности решается рядом теорем: $\oint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}=\oint_S f_n dS=\int_V\nabla\cdot\mathbf{f}dV=\int_V \mathrm{div}\mathbf{f}dV$

поток вектора через замкнутую поверхность равен объёмному интегралу от расхождения вектора − теорема Гаусса − Остроградского;

1. $$\oint_S\left[P\cos\left(\mathbf{e}_x,\mathbf{n}\right)+Q\cos\left(\mathbf{e}_y,\mathbf{n}\right)+R\cos\left(\mathbf{e}_z,\mathbf{n}\right)\right]dS=$$

$$=\int_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

(α)

пусть $S-$***замкнутая поверхность, ограничивающая объём*** V , $\cos\left(\mathbf{e}_x,\mathbf{n}\right),\ \cos\left(\mathbf{e}_y,\mathbf{n}\right),\ \cos\left(\mathbf{e}_z,\mathbf{n}\right)-$ ***направляющие косинусы внешней***

нормали к поверхности S***, и*** $P,Q,R-$***однородные и непрерывные функции, имеющие частные производные первого порядка в*** V ***, тогда имеет место равенство*** (α) – теорема Грина;

2. $\oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\operatorname{rot}\mathbf{f})_n dS = \int_S \operatorname{rot}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$ ***циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку вихря этого вектора через поверхность, ограниченную данным контуром*** – теорема Стокса;

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \qquad (\beta)$$

для непрерывных и обладающих непрерывными частными производными двух функций $P(x,y), Q(x,y)$ ***имеет место равенство*** (β) (формула Грина).

Теоремы Гаусса-Остроградского и Стокса позволяет дать неформальные определения понятиям grad, div, rot. Устремляя к нулю объём V в теореме Гаусса-Остроградского или поверхность S в теореме Стокса, получаем

$$\oint_S \mathbf{n}\, f\, dS = \int_V (\nabla f)\, dV = \int_V \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}\right) dV = \int_V \operatorname{grad} f\, dV \to$$

$$\to \quad \operatorname{grad} f = \lim_{V\to 0} \frac{\oint_S \mathbf{n}\, f\, dS}{V};$$

$$\oint_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}\, dS = \int_V (\nabla\cdot\mathbf{f})\, dV = \int_V \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right) dV = \int_V \operatorname{div}\mathbf{f}\, dV \quad \to$$

$$\to \quad \operatorname{div}\mathbf{f} = \lim_{V\to 0} \frac{\oint_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}\, dS}{V};$$

$$\oint_S \mathbf{n}\times\mathbf{f} dS = \int_V (\nabla\times\mathbf{f})\, dV =$$

$$= \int_V \left[\mathbf{e}_x \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\right] dV =$$

$$= \int_V \operatorname{rot}\mathbf{f} dV \qquad \to \qquad \operatorname{rot}\mathbf{f} = \lim_{V\to 0} \frac{\oint_S \mathbf{n}\times\mathbf{f} dS}{V};$$

$$\oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} =$$
$$= \int_S \Big[(\operatorname{rot}\mathbf{f})_x \cos(\mathbf{e}_x,\mathbf{n}) + (\operatorname{rot}\mathbf{f})_y \cos(\mathbf{e}_y,\mathbf{n}) + (\operatorname{rot}\mathbf{f})_z \cos(\mathbf{e}_z,\mathbf{n}) \Big] dS =$$
$$= \int_S (\nabla\times\mathbf{f})\cdot\mathbf{n}dS \quad \to \quad \mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{f} = \lim_{S\to 0}\frac{\oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}}{S}.$$

2.6. Оператор ∇ в криволинейной системе координат

По теореме Гаусса – Остроградского $\oint_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \operatorname{div}\mathbf{f}dV$, где

$$dV = J_{x\to q}dq^1dq^2dq^3 = \sqrt{g_{..}}\,dq^1dq^2dq^3,$$
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_u\times\mathbf{e}_v}{|\mathbf{e}_u\times\mathbf{e}_v|}, \quad dS = |\mathbf{e}_u\times\mathbf{e}_v|dudv,$$
$$\mathbf{e}_u = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial u} = \mathbf{e}_j\frac{\partial q^j}{\partial u}, \quad \mathbf{e}_v = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^s}\frac{\partial q^s}{\partial v} = \mathbf{e}_s\frac{\partial q^s}{\partial v}.$$

Объём представляет собой область координатного пространства q^1, q^2, q^3, а замкнутая поверхность, ограничивающая его, состоит из кусков, на каждом из которых введена система координат u, v. Вектор $\mathbf{n}dS$, направленный по внешней нормали, равен:

$$\mathbf{n}dS = \mathbf{e}_u\times\mathbf{e}_v dudv = \mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_s\frac{\partial q^j}{\partial u}\frac{\partial q^s}{\partial v}dudv =$$
$$= \left[\begin{array}{l} \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3\left(\frac{\partial q^2}{\partial u}\frac{\partial q^3}{\partial v} - \frac{\partial q^3}{\partial u}\frac{\partial q^2}{\partial v}\right) + \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1\left(\frac{\partial q^3}{\partial u}\frac{\partial q^1}{\partial v} - \right. \\ \left. -\frac{\partial q^1}{\partial u}\frac{\partial q^3}{\partial v}\right) + \mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2\left(\frac{\partial q^1}{\partial u}\frac{\partial q^2}{\partial v} - \frac{\partial q^2}{\partial u}\frac{\partial q^1}{\partial v}\right) \end{array} \right] dudv,$$

где $\left(\frac{\partial q^2}{\partial u}\frac{\partial q^3}{\partial v} - \frac{\partial q^2}{\partial u}\frac{\partial q^2}{\partial v}\right)dudv = J_{q^2,q^3\to u,v}dudv = dq^2dq^3,$

$$\left(\frac{\partial q^3}{\partial u}\frac{\partial q^1}{\partial v} - \frac{\partial q^1}{\partial u}\frac{\partial q^3}{\partial v}\right)dudv = J_{q^3,q^1\to u,v}dudv = dq^3dq^1,$$
$$\left(\frac{\partial q^1}{\partial u}\frac{\partial q^2}{\partial v} - \frac{\partial q^2}{\partial u}\frac{\partial q^1}{\partial v}\right)dudv = J_{q^1,q^2\to u,v}dudv = dq^1dq^2$$

Поскольку $\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=\sqrt{g_{..}}\,\mathbf{e}^1,\quad \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1=\sqrt{g_{..}}\,\mathbf{e}^2,\quad \mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\sqrt{g_{..}}\,\mathbf{e}^3$

имеем $\mathbf{n}dS=\mathbf{e}^1\sqrt{g_{..}}dq^2dq^3+\mathbf{e}^2\sqrt{g_{..}}dq^3dq^1+\mathbf{e}^3\sqrt{g_{..}}dq^1dq^2$

и далее получаем

$$\oint_S\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}dS=\oint_S\left[\mathbf{e}^1\cdot\mathbf{f}\sqrt{g_{..}}dq^2dq^3+\mathbf{e}^2\cdot\mathbf{f}\sqrt{g_{..}}dq^3dq^1+\mathbf{e}^3\cdot\mathbf{f}\sqrt{g_{..}}dq^1dq^2\right]=$$

$$=\int_V\left[\frac{\partial\left(f^1\sqrt{g_{..}}\right)}{\partial q^1}+\frac{\partial\left(f^2\sqrt{g_{..}}\right)}{\partial q^2}+\frac{\partial\left(f^3\sqrt{g_{..}}\right)}{\partial q^3}\right]dq^1dq^2dq^3=\int_V\operatorname{div}\mathbf{f}dV\to$$

$$\to\operatorname{div}\mathbf{f}=\frac{\partial\left(\mathbf{e}^1\cdot\mathbf{f}\sqrt{g_{..}}\right)}{\sqrt{g_{..}}\partial q^1}+\frac{\partial\left(\mathbf{e}^2\cdot\mathbf{f}\sqrt{g_{..}}\right)}{\sqrt{g_{..}}\partial q^2}+\frac{\partial\left(\mathbf{e}^3\cdot\mathbf{f}\sqrt{g_{..}}\right)}{\sqrt{g_{..}}\partial q^3}=\frac{\partial\left(f^j\sqrt{g_{..}}\right)}{\sqrt{g_{..}}\partial q^j}. \qquad (2.4)$$

При выводе этой формулы принято допущение, что упомянутые куски поверхности, ограничивающие объём, локально допускают евклидову метрику. Выражение (2.4) может быть получено формально, если учесть соотношение $\Gamma^s_{js}=\partial\ln\sqrt{g_{..}}\big/\partial q^j$:

$$\operatorname{div}\mathbf{f}=\nabla\cdot\mathbf{f}=\mathbf{e}^j\frac{\partial}{\partial q^j}\cdot\mathbf{e}_k f^k=\frac{\partial f^j}{\partial q^j}+\mathbf{e}^j\cdot\mathbf{e}_s\Gamma^s_{kj}f^k=$$

$$=\frac{\partial f^j}{\partial q^j}+\Gamma^s_{js}f^j=\frac{\partial f^j}{\partial q^j}+\frac{f^j}{\sqrt{g_{..}}}\frac{\partial\sqrt{g_{..}}}{\partial q^j}=\frac{\partial\left(f^j\sqrt{g_{..}}\right)}{\sqrt{g_{..}}\partial q^j}.$$

Убедимся в справедливости отмеченного соотношения:

$$\frac{\partial\sqrt{g_{..}}}{\partial q^j}=\frac{\partial}{\partial q^j}\left[\mathbf{e}_1\cdot\left(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial q^j}\cdot\left(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3\right)+\mathbf{e}_1\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{e}_2}{\partial q^j}\times\mathbf{e}_3\right)+\mathbf{e}_1\cdot\left(\mathbf{e}_2\times\frac{\partial\mathbf{e}_3}{\partial q^j}\right)=$$

$$=\frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial q^j}\cdot\left(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3\right)+\frac{\partial\mathbf{e}_2}{\partial q^j}\cdot\left(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1\right)+\frac{\partial\mathbf{e}_3}{\partial q^j}\cdot\left(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2\right)=$$

$$=\frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial q^j}\cdot\mathbf{e}^1\sqrt{g_{..}}+\frac{\partial\mathbf{e}_2}{\partial q^j}\cdot\mathbf{e}^2\sqrt{g_{..}}+\frac{\partial\mathbf{e}_3}{\partial q^j}\cdot\mathbf{e}^3\sqrt{g_{..}}=\mathbf{e}_s\mathit{\Gamma}^s_{kj}\cdot\mathbf{e}^k\sqrt{g_{..}}=\mathit{\Gamma}^s_{sj}\sqrt{g_{..}}$$

Теперь рассмотрим оператор $\operatorname{rot}\mathbf{f}$ в криволинейной системе координат. По определению

$$\operatorname{rot}\mathbf{f} = \mathbf{e}^j \frac{\partial}{\partial q^j} \times \mathbf{e}^k f_k = \mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k \frac{\partial f_k}{\partial q^j} - \mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^s \Gamma^k_{sj} f_k =$$

$$= \mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k \left(\frac{\partial f_k}{\partial q^j} - \Gamma^s_{kj} f_s \right) = э^{jk\alpha}\, \mathbf{e}_\alpha \sqrt{g^{\cdot\cdot}} \left(\frac{\partial f_k}{\partial q^j} - \Gamma^s_{kj} f_s \right).$$

Поскольку $э^{231} = э^{312} = э^{123} = 1$, $э^{321} = э^{132} = э^{213}\, -1$ и $\Gamma^s_{kj} f_s = \Gamma^s_{jk} f_s$ получаем

$$\operatorname{rot}\mathbf{f} = \sqrt{g^{\cdot\cdot}} \left[\mathbf{e}_1 \left(\frac{\partial f_3}{\partial q^2} - \frac{\partial f_2}{\partial q^3} \right) + \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial q^3} - \frac{\partial f_3}{\partial q^1} \right) + \mathbf{e}_3 \left(\frac{\partial f_2}{\partial q^1} - \frac{\partial f_1}{\partial q^2} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g_{\cdot\cdot}}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial/\partial q^1 & \partial/\partial q^2 & \partial/\partial q^3 \\ \mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_3 \end{vmatrix} \qquad (2.5)$$

В качестве упражнения получим эту формулу с помощью теоремы Гаусса −Остроградского $\oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{f} dS = \int_V \operatorname{rot}\mathbf{f} dV$. Как показано выше,

$$\mathbf{n} dS = \mathbf{e}^1 \sqrt{g_{\cdot\cdot}}\, dq^2 dq^3 + \mathbf{e}^2 \sqrt{g_{\cdot\cdot}}\, dq^3 dq^1 + \mathbf{e}^3 \sqrt{g_{\cdot\cdot}}\, dq^1 dq^2$$ и

$$\oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{f} dS = \oint_S \left(\mathbf{e}^1 \times \mathbf{f} \sqrt{g_{\cdot\cdot}}\, dq^2 dq^3 + \mathbf{e}^2 \times \mathbf{f} \sqrt{g_{\cdot\cdot}}\, dq^3 dq^1 + \mathbf{e}^3 \times \mathbf{f} \sqrt{g_{\cdot\cdot}}\, dq^1 dq^2 \right) =$$

$$= \int_V \left[\frac{\partial}{\partial q^j} \left(\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k f_k \sqrt{g_{\cdot\cdot}} \right) \right] \frac{dV}{\sqrt{g_{\cdot\cdot}}} = \int_V э^{jk\alpha} \frac{\partial}{\partial q^j} (\mathbf{e}_\alpha f_k) \frac{dV}{\sqrt{g_{\cdot\cdot}}} = \int_V \operatorname{rot}\mathbf{f} dV.$$

В выражении $э^{jk\alpha} \dfrac{\partial}{\partial q^j} (\mathbf{e}_\alpha f_k)$, все индексы $jk\alpha$ различные, и при каждом фиксированном k производные $\partial \mathbf{e}_\alpha / \partial q^j$, $\partial \mathbf{e}_j / \partial q^\alpha$ равны, а коэффициенты отличаются знаком $э^{jk\alpha} = -э^{\alpha k j}$, поэтому имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{g_{\cdot\cdot}}} э^{jk\alpha}\, \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial f_k}{\partial q^j} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g_{\cdot\cdot}}} \left[\mathbf{e}_1 \left(\frac{\partial f_3}{\partial q^2} - \frac{\partial f_2}{\partial q^3} \right) + \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial q^3} - \frac{\partial f_3}{\partial q^1} \right) + \mathbf{e}_3 \left(\frac{\partial f_2}{\partial q^1} - \frac{\partial f_1}{\partial q^2} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g_{\cdot\cdot}}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial/\partial q^1 & \partial/\partial q^2 & \partial/\partial q^3 \\ \mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.5)$$

Не сложно получить это же выражение по теореме Стокса $\oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}dS$. Поверхность, ограниченную замкнутым контуром, можно считать составленной из множества декартовых плоскостей Ouv, тогда $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_u du + \mathbf{e}_v dv$ $\mathbf{n}dS = (\mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v)dudv$. Применяя к контурному интегралу формулу Грина, получаем

$$\oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{f}\cdot(\mathbf{e}_u du + \mathbf{e}_v dv) = \int_S \left[\frac{\partial(\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_v)}{\partial u} - \frac{\partial(\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_u)}{\partial v}\right] dudv$$

Произвольность контура позволяет переписать это равенство в трёх видах:

$$\frac{\partial(\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_3)}{\partial q^2} - \frac{\partial(\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_2)}{\partial q^3} = \operatorname{rot}\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}^1\sqrt{g_{..}} = \operatorname{rot}\mathbf{f}\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3),$$

$$\frac{\partial(\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_1)}{\partial q^3} - \frac{\partial(\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_3)}{\partial q^1} = \operatorname{rot}\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}^2\sqrt{g_{..}} = \operatorname{rot}\mathbf{f}\cdot(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1),$$

$$\frac{\partial(\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_2)}{\partial q^1} - \frac{\partial(\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_1)}{\partial q^2} = \operatorname{rot}\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}^3\sqrt{g_{..}} = \operatorname{rot}\mathbf{f}\cdot(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2),$$

или $$\frac{\partial(\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_v)}{\partial u} - \frac{\partial(\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_u)}{\partial v} = \operatorname{rot}\mathbf{f}\cdot(\mathbf{e}_u\times\mathbf{e}_v),$$ что совпадает с (2.5).

Итак, $\oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot}\mathbf{f}\cdot(\mathbf{e}_u\times\mathbf{e}_v)dudv = \int_S \operatorname{rot}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}dS$

Проделанные преобразования нигде не препятствуют величинам f^j или f_j быть компонентами тензора, то есть $\mathbf{f}$ может быть тензором более высокого ранга, нежели один:

$$\mathbf{f} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\ldots f^{ijk\ldots} = \mathbf{e}_i\mathbf{f}^i = \mathbf{e}^i\mathbf{e}^j\mathbf{e}^k\ldots f_{ijk} = \mathbf{e}^i\mathbf{f}_i,$$ где

$$\mathbf{f}^i = \mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\ldots f^{i\,jk\ldots}, \quad \mathbf{f}_i = \mathbf{e}^j\mathbf{e}^k\ldots f_{i\,jk\ldots}.$$

Это замечание относится также к теремам Гаусса-Остроградского и Стокса. Кроме того, тензоры $\mathbf{f}^i$ вообще могут быть разных рангов.

По определению объект $\nabla\otimes\mathbf{f}$ имеет вид

$$\nabla\otimes\mathbf{f} = \mathbf{e}^j\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial q^j} = \mathbf{e}^j\mathbf{e}^k\mathbf{e}^s\ldots\frac{Df_{ks\ldots}}{Dq^j} = \mathbf{e}^j\mathbf{e}_p\mathbf{e}_q\ldots\frac{Df^{pq\ldots}}{Dq^j}.$$

При представлении этого тензора в виде суммы симметричного и кососимметрического тензоров возникнут понятия $\operatorname{div}\mathbf{f}$, $\operatorname{rot}\mathbf{f}$, $\operatorname{grad}U$.

2.7. Функции тензорного аргумента

Выше рассматривались поля – функции радиуса-вектора $\mathbf{r}$. Существуют функции, аргументами которых являются тензоры. Условие дифференцируемости таких функций аналогичны условию дифференцируемости поля:

$$f\left(\mathbf{A}+d\mathbf{A}\right)-f\left(\mathbf{A}\right)=d\mathbf{A}\cdot\cdot\frac{df\left(\mathbf{A}\right)}{d\mathbf{A}}+o\left(\det\mathbf{A}\right).$$

Скалярная функция тензорного аргумента ранга два дифференцируема, если она имеет главную линейную по своему аргументу часть приращения. Производная $df\left(\mathbf{A}\right)/d\mathbf{A}$ есть тензор, ранг которого на две единицы выше ранга аргумента.

Справедлива формула $$\frac{df\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}t\right)}{dt}=\mathbf{B}\cdot\cdot\frac{df\left(\mathbf{A}\right)}{d\mathbf{A}}.$$

2.8. Задачи

2.8.1. Вычислить суммы δ_{jj}, $\delta_{jk}\delta_{kj}$, $\delta_{jk}\delta_{ks}\delta_{sj}$ $\left(j,k,s=\overline{1,n}\right)$.

Решение. По определению $\delta_{jj}=\sum_{j=1}^{3}\delta_{jj}=3$;

$$\delta_{jk}\delta_{kj}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\delta_{jk}\delta_{kj}=\sum_{j=1}^{3}\left(\delta_{j1}\delta_{1j}+\delta_{j2}\delta_{2j}+\delta_{j3}\delta_{3j}\right)=3;$$

$$\delta_{jk}\delta_{ks}\delta_{sj}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\delta_{jk}\delta_{ks}\delta_{sj}=$$

$$=\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\delta_{jk}\delta_{k1}\delta_{1j}+\delta_{jk}\delta_{k2}\delta_{2j}+\delta_{jk}\delta_{k3}\delta_{3j}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{3}\left(\delta_{j1}\delta_{1j}+\delta_{j2}\delta_{2j}+\delta_{j3}\delta_{3j}\right)=3;$$

2.8.2. Показать, что суперпозиция двух тензоров $\alpha U_{jk}+\beta V_{jk}=W_{jk}$ также является тензором.

2.8.3. Для произвольного вектора $\mathbf{u}\left(u^1,u^2,u^3\right)$ имеют место равенства $v^j=a_{jk}u^k$ $\left(j,k=1,2,3\right)$, где v^j – компоненты вектора. Показать, что a_{jk} – компоненты тензора второго ранга.

2.8.4. Для произвольного вектора $\mathbf{u}\left(u^1,u^2,u^3\right)$ имеют место равенства $a_{jk}u^ku^j=0$ $\left(j,k=1,2,3\right)$. Показать, что a_{jk} – компоненты антисимметричного тензора второго ранга.

2.8.5. Являются ли главные компоненты симметричного тензора второго ранга его инвариантами?

Решение. Да являются. Они инвариантны, поскольку могут быть определены как корни уравнения третьей степени с инвариантными коэффициентами.

2.8.6. Показать инвариантность следующих функций, зависящих от компонент a_{jk} симметричного тензора второго ранга:

$$J_1 = a_{jj}, \qquad J_2 = a_{jk}a_{jk}, \qquad J_3 = a_{jk}a_{ks}a_{sj},$$

$$I_1 = a_{jj}, \quad I_2 = \frac{1}{2}\left(a_{jj}a_{kk} - a_{jk}a_{jk}\right), \quad I_3 = \det\left(a_{jk}\right).$$

2.8.7. Выразить инварианты $J_1, J_2, J_3, I_1, I_2, I_3$ (см. задачу 2.8.6) через главные значения симметричного тензора второго ранга $\boldsymbol{a}$.

2.8.8. В криволинейных координатах x^1, x^2, x^3 и y^1, y^2, y^3, для которых $\det\left(\dfrac{\partial x^j}{\partial y^k}\right) \neq 0$, тензоры второго ранга $\boldsymbol{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют соответственно компоненты ${}_x a_{ij}$, ${}_y a_{ij}$ и ${}_x b_{ij}$, ${}_y b^{ij}$. Убедитесь в том, что суммы ${}_x a_{ij} +{}_x b^{ij}$ и ${}_y a_{ij} +{}_y b^{ij}$ не связаны тензорным законом преобразования.

2.8.9. Убедитесь в справедливости равенств $a_{ij\cdot k}^{\cdot\cdot i\cdot} = a_{\cdot jik}^{i\cdot\cdot\cdot}$ для компонент тензора $\boldsymbol{a} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s a^{ijks}$.

2.8.10. Для систем координат 1.6.1 постройте выражения $\nabla \otimes \mathbf{f}$, $\operatorname{div}\mathbf{f}$, $\operatorname{rot}\mathbf{f}$, $\operatorname{grad} U$.

2.8.11. Покажите, что в любой системе координат $\nabla_j v^j = \sqrt{g^{\cdot\cdot}}\,\dfrac{\partial}{\partial q^j}\left(\sqrt{g_{\cdot\cdot}}\,v^j\right)$.

2.8.12. Для антисимметричного тензора второго ранга $\boldsymbol{\omega}$:

a) убедитесь в справедливости равенства $\nabla_j \omega^{jk} = \sqrt{g^{\cdot\cdot}}\,\dfrac{\partial}{\partial q^j}\left(\sqrt{g_{\cdot\cdot}}\,\omega^{jk}\right)$;

b) убедитесь в отсутствии символов Кристоффеля в выражении $э^{jks} = \nabla_j \omega_{ks}$.

2.8.13. Покажите, что для симметричного тензора второго ранга справедливо выражение $\nabla_j b_k^j = \sqrt{g^{\cdot\cdot}}\,\dfrac{\partial}{\partial q^j}\left(\sqrt{g_{\cdot\cdot}}\,b_k^j\right) - \dfrac{1}{2} b^{ki}\dfrac{\partial g_{ki}}{\partial q^j}$.

2.8.14. В механике декартовы координаты точки обычно считаются безразмерными: $\left[x^j\right] = 1$; а элементам исходного базиса приписывается размерность длины: $\left[\mathbf{e}_j\right] = L$. Для систем координат задачи 1.3.1. найдите размерности исходного и взаимного базисов, метрических тензоров.

2.8.15. Покажите, что общее решение уравнения $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$ имеет вид $v^i = \ni^{ijk}\sqrt{g^{\cdot\cdot}}\,\dfrac{\partial a}{\partial q^j}\dfrac{\partial b}{\partial q^k}$, a и b скалярные поля в окрестности точки где $v^i \neq 0$.

Решение. Поскольку $\mathbf{v} = \mathbf{rot}\,\mathbf{f} \neq 0$ и $\mathbf{f} \neq \mathrm{grad}\,f$ имеем два скалярных поля $\mathbf{f}_a = \mathrm{grad}\,a,\ \ \mathbf{f}_b = \mathrm{grad}\,b.$ Из двух векторов формируется только вектор $\mathbf{v} = \mathbf{f}_a \times \mathbf{f}_b = \mathbf{e}^j\dfrac{\partial a}{\partial q^j} \times \mathbf{e}^k\dfrac{\partial b}{\partial q^k} = \ni^{ijk}\,\mathbf{e}_i\sqrt{g^{\cdot\cdot}}\,\dfrac{\partial a}{\partial q^j}\dfrac{\partial b}{\partial q^k}$, расхождение которого равно нулю $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v} = \nabla\cdot\left(\mathbf{f}_a \times \mathbf{f}_b\right) = \mathbf{f}_b\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{f}_a - \mathbf{f}_a\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{f}_b = 0$.

3. ДЕФОРМАЦИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

3.0. Первоначальные понятия и определения

Для обозначения малого элемента сплошной среды будем использовать термин ***частица*** или ***материальная точка***, а термин ***точка*** будем применять только для обозначения места в системе координат. Деформирование сплошной среды – это изменение расстояний между её частицами. Принимается, что положению каждой материальной точки, частицы сплошной среды в реальном пространстве, которое рассматривается как линейное, векторное пространство, можно сопоставить систему параметров q^j $\left(j = 1,2,3\right)$. Будем считать, что параметры q^j могут быть, как декартовыми, так и криволинейными координатами, то есть $\mathbf{r}\left[x\left(q\right)\right]$.

Параметры q^j $\left(j = 1,2,3\right)$ ***называют пространственными или эйлеровыми координатами.*** Задать ***закон движения сплошной среды*** означает задать функции

$$q^{tj} = q^j\left(t, q^{01}, q^{02}, q^{03}\right), \qquad q^{0j} = q^j\left(-t, q^{t1}, q^{t2}, q^{t3}\right),$$
$$J\left(\frac{\partial q^t}{\partial q^0}\right) = \det\left(\frac{\partial q^{ts}}{\partial q^{0k}}\right) \neq 0, \quad J\left(\frac{\partial q^0}{\partial q^t}\right) = \det\left(\frac{\partial q^{0s}}{\partial x^{tk}}\right) \neq 0., \qquad (3.1)$$

описывающие положение всех её частиц. Равенства (3.1) определяют значения координат $q^{tj}\ \left(j=1,2,3\right)$ частицы в конечном, деформированном состоянии среды по значениям её координат $q^{0j}\ \left(j=1,2,3\right)$ в исходном, недеформированном состоянии и наоборот.

В качестве параметров, отличающих закон движения одной частицы от закона движения другой частицы, выступают значения их координат в начальный момент: $q^j\left(0, q^{01}, q^{02}, q^{03}\right) = q^{0j}$.

Вместо значений координат материальной точки в исходном состоянии $q^{0j}\quad \left(j=1,2,3\right)$ могут выступать какие-либо другие параметры $\xi^j\quad \left(j=1,2,3\right)$, отличающие одну частицу от другой. Важно, чтобы индивидуальная принадлежность параметров частице в процессе движения не изменялась. Итак, задать ***закон движения сплошной среды*** означает задать функции $q^{tj} = q^j\left(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3\right), \quad q^{0j} = q^j\left(-t, \xi^1, \xi^2, \xi^3\right)$.
(3.1*)

Параметры $\xi^j\quad \left(j=1,2,3\right)$***, выделяющие индивидуальные частицы среды, называют материальными или лагранжевыми координатами; для индивидуальной частицы они не меняются в процессе движения.***

Достигается это условие введением ***подвижной, деформирующейся в процессе движения системы координат*** $\xi^j\quad \left(j=1,2,3\right)$, ***"вмороженной" в среду и называемой сопутствующей***, координатные линии которой всегда проходят через одни и те же частицы сплошной среды. В начальном состоянии система координат ξ^j совпадает с системой отсчёта q^j, то есть $q^j\left(0, q^{01}, q^{02}, q^{03}\right) = \xi^j \quad \left(j=1,2,3\right)$.

Радиусы-векторы $\mathbf{r}\left(q^{01}+\xi^1, q^{02}, q^{03}\right)$, $\mathbf{r}\left(q^{01}, q^{02}+\xi^2, q^{03}\right)$, $\mathbf{r}\left(q^{01}, q^{02}, q^{03}+\xi^3\right)$ фиксируют материальные точки недеформированной среды, расположенные на координатных линиях сопутствующей системы координат, совпадающей с системой отсчёта. Те же координатные линии сопутствующей системы в деформированном состоянии среды определяют радиусы-векторы

$$\mathbf{r}\left[q^1\left(t,q^{01}+\xi^1,q^{02},q^{03}\right),q^2\left(t,q^{01}+\xi^1,q^{02},q^{03}\right),q^3\left(t,q^{01}+\xi^1,q^{02},q^{03}\right)\right],$$
$$\mathbf{r}\left[q^1\left(t,q^{01},q^{02}+\xi^2,q^{03}\right),q^2\left(t,q^{01},q^{02}+\xi^2,q^{03}\right),q^3\left(t,q^{01},q^{02}+\xi^2,q^{03}\right)\right],$$
$$\mathbf{r}\left[q^1\left(t,q^{01},q^{02},q^{03}+\xi^3\right),q^2\left(t,q^{01},q^{02},q^{03}+\xi^3\right),q^3\left(t,q^{01},q^{02},q^{03}+\xi^3\right)\right].$$

Содержательными являются также выражения

$$\mathbf{r}\left[q^1\left(-t,q^{t1}+\xi^1,q^{t2},q^{t3}\right),q^2\left(-t,q^{t1}+\xi^1,q^{t2},q^{t3}\right),q^3\left(-t,q^{t1}+\xi^1,q^{t2},q^{t3}\right)\right],$$
$$\mathbf{r}\left[q^1\left(-t,q^{t1},q^{t2}+\xi^2,q^{t3}\right),q^2\left(-t,q^{t1},q^{t2}+\xi^2,q^{t3}\right),q^3\left(-t,q^{t1},q^{t2}+\xi^2,q^{t3}\right)\right],$$
$$\mathbf{r}\left[q^1\left(-t,q^{t1},q^{t2},q^{t3}+\xi^3\right),q^2\left(-t,q^{t1},q^{t2},q^{t3}+\xi^3\right),q^3\left(-t,q^{t1},q^{t2},q^{t3}+\xi^3\right)\right],$$

которые означают, что сопутствующая система координат совпадает с системой отсчёта в деформированном состоянии среды, а параметры ξ^j фиксируют её материальные точки на координатных линиях.

Точка зрения Лагранжа на изучение сплошной среды состоит в описании состояния каждой частицы в отдельности. ***При лагранжевом описании все характеристики среды*** (***скорость*** $\mathbf{v}(t,\xi)$, ***температура*** $T^\circ(t,\xi)$, ***давление*** $p(t,\xi)$ ***и прочее***) ***рассматриваются как функции времени и лагранжевых координат.***

При эйлеровом описании все характеристики среды рассматриваются в каждой точке пространства: $\mathbf{v}(t,q)$, $T^\circ(t,q)$, $p(t,q)$.

Эти два описания состояния среды по своей сути различные. Однако при определённых условиях допустим переход от одного описания к другому. Если известен закон движения (3.1*), то переход от лагранжевого описания к эйлеровому требует решения системы уравнений $q^j=q^j(t,\xi)\ \rightarrow\ \xi^j=\xi^j(t,q)\ \ (j=1,2,3)$ и далее $\mathbf{v}(t,\xi)\ \rightarrow\ \mathbf{v}(t,q)$, $T^\circ(t,\xi)\ \rightarrow\ T^\circ(t,q)$, $p(t,\xi)\ \rightarrow\ p(t,q)$.

Необходимым и достаточным условием выполнимости этих действий, то есть существования функций

$$\xi^j=\xi^j\left(t,q^1,q^2,q^3\right)\quad (j=1,2,3), \tag{3.2}$$

является отличие от нуля Якобиана $J=\det\left(\partial q^i/\partial\xi^j\right)\neq 0$. При выполнении этого условия расстояние между близкими материальными точками в исходном и конечном состояниях среды не обращается в нуль. Конечные объёмы в результате деформации переходят в объёмы; замкнутые поверхности – в замкнутые поверхности; замкнутые линии – в замкнутые линии.

Для перехода от эйлерова описания к лагранжевому в соответствующие характеристики нужно просто подставить закон движения (3.1*): $\mathbf{v}(t,q) \;\to\; \mathbf{v}(t,\xi)$, $T^{\circ}(t,q) \;\to\; T^{\circ}(t,\xi)$, $p(t,q) \;\to\; p(t,\xi)$.

Однако в эйлеровом описании его принципиально нет, а вместо закона движения имеем поле скоростей и нужно проинтегрировать систему уравнений: $\dfrac{dq^j}{dt} = v^j(t,q) \;\to\; q^j = q^j\left(t, q^{01}, q^{02}, q^{03}\right) \quad (j = 1,2,3)$,

то есть записать закон движения явно. В этом вся проблема.

Отметим, что оба описания введены Эйлером, однако постулат возможности введения независимых параметров ξ принадлежит Лагранжу.

Механика И.Ньютона (Newton I. 1642–1727) и механика Л.Эйлера (Euler L. 1707–1783) позволяют описывать динамику конечного числа недеформируемых частиц. Чтобы описать динамику деформируемой среды, континуума частиц следует выделить относительные их перемещения, деформации, зависящие в основном от внутренних сил.

3.1. Тензоры деформаций Коши-Грина и Альманси-Гамеля в лагранжевой системе координат

В разных областях среды деформации различны, тем не менее, считают, что положения частиц определяются непрерывными и взаимно однозначными дифференцируемыми функциями.

Говоря о количественных оценках ***деформаций***, рассматривают какую-либо малую область среды и ***сравнивают*** в деформированном и исходном состояниях ***длины материальных элементов*** этой области.

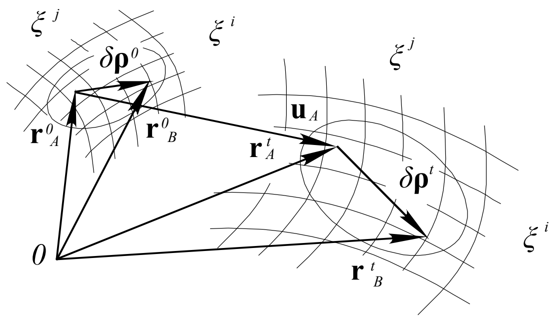


Рис. 3.1.

Материальным элементом, ***соответствующим вектору*** $\delta\boldsymbol{\rho}^0 = \mathbf{e}_{0i}\delta\xi^i$, ***называют совокупность частиц***, ***заполняющих***

бесконечно малый отрезок от точки $\mathbf{r}^0{}_A(\xi)$ ***до точки*** $\mathbf{r}^0{}_B(\xi+\delta\xi)$. В деформированном состоянии частицы этого материального элемента, соответствующего вектору $\delta\boldsymbol{\rho}^t = \mathbf{e}_{tj}\delta q^j$, заполняют отрезок от точки $\mathbf{r}^t{}_A(q)$ до точки $\mathbf{r}^t{}_B(q+\delta q)$. Итак, имеем

$$\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{\rho}^0 &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^{0k}}\frac{\partial q^k(0,\xi)}{\partial\xi^j}\delta\xi^j = {}_q\mathbf{e}_{0k}\delta^k_j\delta\xi^j = {}_\xi\mathbf{e}_{0j}\delta\xi^j, \\
\delta\boldsymbol{\rho}^t &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^{tk}}\frac{\partial q^k(t,\xi)}{\partial\xi^j}\delta\xi^j = {}_q\mathbf{e}_{tk}\frac{\partial q^k(t,\xi)}{\partial\xi^j}\delta\xi^j = {}_\xi\mathbf{e}_{tj}\delta\xi^j.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

В (3.3) принято, что в исходном состоянии сопутствующая система координат совпадает с пространственной, то есть ${}_q\mathbf{e}_{0k} = {}_\xi\mathbf{e}_{0k}$, $q^j(0,\xi) = \xi^j$.

Если совпадение имеет место в конечном состоянии, то

$$\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{\rho}^0 &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^{0k}}\frac{\partial q^k(-t,\xi)}{\partial\xi^j}\delta\xi^j = {}_q\mathbf{e}_{0k}\frac{\partial q^k(-t,\xi)}{\partial\xi^j}\delta\xi^j = {}_\xi\mathbf{e}_{0j}\delta\xi^j, \\
\delta\boldsymbol{\rho}^t &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^{tk}}\frac{\partial q^k(0,\xi)}{\partial\xi^j}\delta\xi^j = {}_q\mathbf{e}_{tk}\delta^k_j\delta\xi^j = {}_\xi\mathbf{e}_{tj}\delta\xi^j,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

где ${}_q\mathbf{e}_{tk} = {}_\xi\mathbf{e}_{tk}$, $q^j(0,\xi) = \xi^j$. Базисы пространства ${}_q\mathbf{e}_{0k}$ и ${}_q\mathbf{e}_{tk}$ разные, поскольку до деформации и после деформации частица находится в разных точках пространства q^j. Базисы сопутствующей системы координат ${}_\xi\mathbf{e}_{0j}$ и ${}_\xi\mathbf{e}_{tj}$, хотя и описывают одну точку многообразия ξ^j, также разные, поскольку описывают разные состояния частицы.

Разность квадратов длин этих материальных отрезков определяет меру деформации рассматриваемой области. Согласно (3.3) имеем

$$\begin{aligned}
\delta s_t^2 - \delta s_0^2 &= \left[\left({}_\xi\mathbf{e}_{ti}\cdot{}_\xi\mathbf{e}_{tj}\right) - \left({}_\xi\mathbf{e}_{0i}\cdot{}_\xi\mathbf{e}_{0j}\right)\right]\delta\xi^i\delta\xi^j = \\
&= \left({}_\xi g_{tij} - {}_\xi g_{0ij}\right)\delta\xi^i\delta\xi^j = \\
&= {}_\xi\mathbf{e}_{0s}\delta\xi^s\cdot{}_\xi\mathbf{e}^{0i}\left({}_\xi g_{tij} - {}_\xi g_{0ij}\right){}_\xi\mathbf{e}^{0j}\cdot{}_\xi\mathbf{e}_{0k}\delta\xi^k = \\
&= {}_\xi\mathbf{e}_{0s}\delta\xi^s\cdot 2\mathbf{G}\cdot{}_\xi\mathbf{e}_{0k}\delta\xi^k,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

где $$2\mathbf{G} = {}_\xi\mathbf{e}^{0i}\,{}_\xi\mathbf{e}^{0j}\left({}_\xi g_{tij} - \underline{{}_\xi g_{0ij}}\right) =$$

$$= {}_{q}\mathbf{e}^{0i}\,{}_{q}\mathbf{e}^{0j}\left[{}_{q}g_{tks}\,\frac{\partial q^{k}\left(t,\xi\right)}{\partial\xi^{i}}\frac{\partial q^{s}\left(t,\xi\right)}{\partial\xi^{j}}-\underline{{}_{q}g_{0ij}}\right]={}_{\xi}\mathbf{e}^{0i}\,{}_{\xi}\mathbf{e}^{0j}\,{}_{\xi}\overset{0}{\varepsilon}_{ij} \qquad (3.6)$$

─ тензор конечной деформации Коши-Грина (Cauchy O. 1789–1857, Green G. 1793–1841) (лагранжев тензор деформации).

Разность (3.5) может быть записана в виде

$$\delta s_{t}^{\,2}-\delta s_{0}^{\,2}=\left[\left({}_{\xi}\mathbf{e}_{ti}\cdot{}_{\xi}\mathbf{e}_{tj}\right)-\left({}_{\xi}\mathbf{e}_{0i}\cdot{}_{\xi}\mathbf{e}_{0j}\right)\right]\delta\xi^{i}\delta\xi^{j}=$$

$$=\left({}_{\xi}g_{tij}-{}_{\xi}g_{0ij}\right)\delta\xi^{i}\delta\xi^{j}=$$

$$={}_{\xi}\mathbf{e}_{ts}\delta\xi^{s}\cdot{}_{\xi}\mathbf{e}^{ti}\left({}_{\xi}g_{tij}-{}_{\xi}g_{0ij}\right){}_{\xi}\mathbf{e}^{tj}\cdot{}_{\xi}\mathbf{e}_{tk}\delta\xi^{k}= \qquad (3.7)$$

$$={}_{\xi}\mathbf{e}_{ts}\delta\xi^{s}\cdot2\mathbf{A}\cdot{}_{\xi}\mathbf{e}_{tk}\delta\xi^{k},$$

где

$$2\mathbf{A}={}_{\xi}\mathbf{e}^{ti}\,{}_{\xi}\mathbf{e}^{tj}\left(\underline{{}_{\xi}g_{tij}}-{}_{\xi}g_{0ij}\right)=$$

$$={}_{q}\mathbf{e}^{ti}\,{}_{q}\mathbf{e}^{tj}\left[\underline{{}_{q}g_{tij}}-{}_{q}g_{0ks}\,\frac{\partial q^{k}\left(-t,\xi\right)}{\partial\xi^{i}}\frac{\partial q^{s}\left(-t,\xi\right)}{\partial\xi^{j}}\right]={}_{\xi}\mathbf{e}^{ti}\,{}_{\xi}\mathbf{e}^{tj}\,{}_{\xi}\overset{t}{\varepsilon}_{ij} \qquad (3.8)$$

─ тензор конечной деформации Альманси-Гамеля (Almansi E. 1869–1948) (эйлеров тензор деформации).

В выражениях (3.5) и (3.7) величины $\delta\xi^{j}$ $\left(j=1,2,3\right)$ одни и те же по определению лагранжевых координат, однако тензоры (3.6) и (3.8) разные, поскольку отнесены к разным базисам. Кроме того в (3.6) ${}_{\xi}\mathbf{e}^{0i}={}_{q}\mathbf{e}^{0i}$ (параметры ξ совпадают с системой отсчёта в исходном состоянии q^{0}), а в (3.8) ${}_{\xi}\mathbf{e}^{ti}={}_{q}\mathbf{e}^{ti}$ (параметры ξ совпадают с системой отсчёта в конечном, деформированном состоянии). Следствием этого факта является совпадение подчёркнутых членов в (3.6) и аналогично в (3.8).

Заметим, что совмещение сопутствующей системы координат в исходном или конечном состоянии среды с системой отсчёта аналогично совпадению в рассматриваемый момент времени переносной системы координат с системой отсчёта в кинематике сложного движения точки.

3.2. Тензоры деформаций Коши-Грина и Альманси-Гамеля в эйлеровой системе координат

Длины материальных отрезков какой-либо малой области среды в исходном и деформированном состояниях могут быть описаны и в пространственной системе координат. Область среды, в окрестности которой рассматриваются материальные отрезки, до и после деформации находится в разных точках пространства. Координаты этих точек связаны соотношениями $$q^{tj} = q^j\left(t, q^0\right), \quad q^{0j} = q^j\left(-t, q^t\right). \qquad (3.9)$$

Поскольку q^j пространственные координаты, упомянутым отрезкам можно сопоставить радиусы векторы

$$\delta\boldsymbol{\rho}^0 = \frac{\partial\mathbf{r}\left(q^0\right)}{\partial q^{0k}}\delta q^{0k} = {}_q\mathbf{e}_{0k}\delta q^{0k}, \quad \delta\boldsymbol{\rho}^t = \frac{\partial\mathbf{r}\left(q^t\right)}{\partial q^{tk}}\delta q^{tk} = {}_q\mathbf{e}_{tk}\delta q^{tk}. \qquad (3.10)$$

Разность квадратов длин этих радиусов-векторов определяет меру деформации рассматриваемой области. Согласно (3.10) имеем

$$\delta s_t^{\,2} - \delta s_0^{\,2} = \left({}_q\mathbf{e}_{ti}\cdot{}_q\mathbf{e}_{tj}\right)\delta q^{ti}\delta q^{tj} - \left({}_q\mathbf{e}_{0i}\cdot{}_q\mathbf{e}_{0j}\right)\delta q^{0i}\delta q^{0j} =$$

$$= \left({}_q g_{tsk}\frac{\partial q^s}{\partial q^{0i}}\frac{\partial q^k}{\partial q^{0j}} - {}_q g_{0ij}\right)\delta q^{0i}\delta q^{0j} =$$

$$= {}_q\mathbf{e}_{0s}\delta q^{0s}\cdot{}_q\mathbf{e}^{0i}\left({}_q g_{tsk}\frac{\partial q^s}{\partial q^{0i}}\frac{\partial q^k}{\partial q^{0j}} - {}_q g_{0ij}\right){}_q\mathbf{e}^{0j}\cdot{}_q\mathbf{e}_{0k}\delta q^{0k} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \delta s_t^{\,2} - \delta s_0^{\,2} = {}_q\mathbf{e}_{0s}\delta q^{0s}\cdot 2\mathbf{G}\cdot{}_q\mathbf{e}_{0k}\delta q^{0k} \qquad (3.11)$$

$$\delta s_t^{\,2} - \delta s_0^{\,2} = \left({}_q\mathbf{e}_{ti}\cdot{}_q\mathbf{e}_{tj}\right)\delta q^{ti}\delta q^{tj} - \left({}_q\mathbf{e}_{0i}\cdot{}_q\mathbf{e}_{0j}\right)\delta q^{0i}\delta q^{0j} =$$

$$= \left({}_q g_{tij} - {}_q g_{0sk}\frac{\partial q^s}{\partial q^{ti}}\frac{\partial q^k}{\partial q^{tj}}\right)\delta q^{ti}\delta q^{tj} =$$

$$= {}_q\mathbf{e}_{ts}\delta q^{ts}\cdot{}_q\mathbf{e}^{ti}\left({}_q g_{tij} - {}_q g_{0sk}\frac{\partial q^s}{\partial q^{ti}}\frac{\partial q^k}{\partial q^{tj}}\right){}_q\mathbf{e}^{tj}\cdot{}_q\mathbf{e}_{tk}\delta q^{tk} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \delta s_t^{\,2} - \delta s_0^{\,2} = {}_q\mathbf{e}_{ts}\delta q^{ts}\cdot 2\mathbf{A}\cdot{}_q\mathbf{e}_{tk}\delta q^{tk} \qquad (3.12)$$

Меры (3.11) и (3.12) определяют

$$2\mathbf{G} = {}_q\mathbf{e}^{0i}\,{}_q\mathbf{e}^{0j}\left[{}_q g_{tsk}\frac{\partial q^s\left(t, q^0\right)}{\partial q^{0i}}\frac{\partial q^k\left(t, q^0\right)}{\partial q^{0j}} - {}_q g_{0ij}\right] = {}_q\mathbf{e}^{0i}\,{}_q\mathbf{e}^{0j}\,{}_q\overset{0}{\varepsilon}_{ij} \qquad (3.13)$$

– тензор конечных деформаций Коши-Грина и

$$2\mathbf{A} = {}_q\mathbf{e}^{ti}\,{}_q\mathbf{e}^{tj}\left[{}_q g_{tij} - {}_q g_{0sk}\frac{\partial q^s\left(-t, q^t\right)}{\partial q^{ti}}\frac{\partial q^k\left(-t, q^t\right)}{\partial q^{tj}}\right] = {}_q\mathbf{e}^{ti}\,{}_q\mathbf{e}^{tj}\,{}_q\overset{t}{\varepsilon}_{ij} \qquad (3.14)$$

– тензор конечных деформаций Альманси-Гамеля в пространственной системе координат.

Отмечаем совпадение (3.13) и (3.6) при совпадении лагранженых и эйлеровых координат в начальном состоянии, а также совпадение (3.14) и (3.8) при совпадении лагранжевых и эйлеровых координат в конечном состоянии.

Пример. *Движение среды происходит по закону*

$$x_t = x_0\left[1+\frac{t-t_0}{\tau}\right], \quad y_t = y_0\left[1+\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)^2\right]^{-1}, \quad z_t = z_0 \qquad \begin{pmatrix}\tau = \text{const} > 0, \\ t \ge t_0\end{pmatrix};$$

$$x_0 = x_t\left[1+\frac{t-t_0}{\tau}\right]^{-1}, \quad y_0 = y_t\left[1+\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)^2\right], \quad z_0 = z_t.$$

Построить тензоры Коши-Грина и Альманси-Гамеля.

Решение. Имеем $\delta\boldsymbol{\rho}^0 = \mathbf{i}\delta\xi_1 + \mathbf{j}\delta\xi_2 + \mathbf{k}\delta\xi_3$,

$$\delta\boldsymbol{\rho}^t = \mathbf{i}\left[1+\frac{t-t_0}{\tau}\right]\delta\xi_1 + \mathbf{j}\left[1+\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)^2\right]^{-1}\delta\xi_2 + \mathbf{k}\delta\xi_3,$$

$$2\varepsilon_{11}{}^0 = \left[1+\frac{t-t_0}{\tau}\right]^2 - 1, \quad 2\varepsilon_{22}{}^0 = \left[1+\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)^2\right]^{-2} - 1.$$

Аналогичным образом $\delta\boldsymbol{\rho}^t = \mathbf{i}\delta\xi_1 + \mathbf{j}\delta\xi_2 + \mathbf{k}\delta\xi_3$?

$$\delta\boldsymbol{\rho}^0 = \mathbf{i}\left[1+\frac{t-t_0}{\tau}\right]^{-1} d\xi_1 + \mathbf{j}\left[1+\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)^2\right] d\xi_2 + \mathbf{k}d\xi_3,$$

$$2\varepsilon_{11}{}^t = 1-\left[1+\frac{t-t_0}{\tau}\right]^{-2}, \quad 2\varepsilon_{22}{}^t = 1-\left[1+\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)^2\right]^2.$$

Остальные компоненты тензоров Коши-Грина и Альманси-Гамеля равны нулю.

Проведённые построения подразумевают наличие базисов и соответствующих метрических тензоров в недеформированном и деформированном состояниях по отдельности:

$$\begin{matrix}\mathbf{e}_{0k} = \partial\mathbf{r}_0 / \partial q^{0k} & \rightarrow & \mathbf{e}_{0s}\cdot\mathbf{e}_{0k} = g_{0sk}, \\ \mathbf{e}^{0s} = grad_0\, q^{0s} & \rightarrow & \mathbf{e}^{0s}\cdot\mathbf{e}^{0k} = g^{0sk},\end{matrix} \quad \mathbf{e}^{0s}\cdot\mathbf{e}_{0k} = g^{0s}{}_{0k} = \delta^s{}_k,$$

$$\begin{matrix}\mathbf{e}_{tk} = \partial\mathbf{r}^t / \partial q^{tk} & \rightarrow & \mathbf{e}_{ts}\cdot\mathbf{e}_{tk} = g_{tsk}, \\ \mathbf{e}^{ts} = grad_t\, q^{ts} & \rightarrow & \mathbf{e}^{ts}\cdot\mathbf{e}^{tk} = g^{tsk},\end{matrix} \quad \mathbf{e}^{ts}\cdot\mathbf{e}_{tk} = g^{ts}{}_{tk} = \delta^s{}_k,$$

$$\mathbf{e}_{0s}\cdot\mathbf{e}_{tk} = g_{0s,tk}, \qquad \mathbf{e}_{0s}\cdot\mathbf{e}^{tk} = g_{0s}{}^{tk},$$

$$\mathbf{e}^{0s}\cdot\mathbf{e}_{tk} = g^{0s}{}_{tk}, \qquad \mathbf{e}^{0s}\cdot\mathbf{e}^{tk} = g^{0s,tk}.$$

Набла-операторы $\overset{0}{\nabla} = \mathbf{e}^{0s}\, \partial / \partial q^{0s}$, $\overset{t}{\nabla} = \mathbf{e}^{ts}\, \partial / \partial q^{ts}$ рассматриваются в разных токах системы отсчёта и приводят в операциях ковариантного и контравариантного дифференцирования к различным значениям символов Кристоффеля.

Отмечаем диадные представления тензоров-градиентов:

$$\overset{0}{\nabla} \otimes \mathbf{r}^0 = \mathbf{e}^{0k} \frac{\partial \mathbf{r}^0}{\partial q^{0k}} = \mathbf{e}^{0k} \mathbf{e}_{0k}, \quad \overset{0}{\nabla} \otimes \mathbf{r}^t = \mathbf{e}^{0k} \frac{\partial \mathbf{r}^t}{\partial q^{0k}},$$

$$\overset{t}{\nabla} \otimes \mathbf{r}^t = \mathbf{e}^{ts} \frac{\partial \mathbf{r}^t}{\partial q^{ts}} = \mathbf{e}^{ts} \mathbf{e}_{ts}\,,, \quad \overset{t}{\nabla} \otimes \mathbf{r}^0 = \mathbf{e}^{ts} \frac{\partial \mathbf{r}^0}{\partial q^{ts}}$$

из которых следует

$$\delta \boldsymbol{\rho}^0 = \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{r}^0}{\partial q^{tk}} \delta q^{tk} = \dfrac{\partial \mathbf{r}^0}{\partial q^{tk}} \left(\mathbf{e}^{tk} \cdot \mathbf{e}_{tj} \delta q^{tj} \right) = \left(\overset{t}{\nabla} \otimes \mathbf{r}^0 \right)^T \cdot \delta \mathbf{r}^t, \\ \dfrac{\partial \mathbf{r}^0}{\partial q^{tk}} \delta q^{tk} = \left(\mathbf{e}_{tj} \delta q^{tj} \cdot \mathbf{e}^{tk} \right) \dfrac{\partial \mathbf{r}^0}{\partial q^{tk}} = \delta \mathbf{r}^t \cdot \overset{t}{\nabla} \otimes \mathbf{r}^0, \end{cases} \tag{3.15}$$

$$\delta \boldsymbol{\rho}^t = \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{r}^t}{\partial q^{0s}} \delta q^{0s} = \dfrac{\partial \mathbf{r}^t}{\partial q^{0s}} \left(\mathbf{e}^{0s} \cdot \mathbf{e}_{0j} \delta q^{0j} \right) = \left(\overset{0}{\nabla} \otimes \mathbf{r}^t \right)^T \cdot \delta \mathbf{r}^0, \\ \dfrac{\partial \mathbf{r}^t}{\partial q^{0s}} \delta q^{0s} = \left(\mathbf{e}_{0j} \delta q^{0j} \cdot \mathbf{e}^{0s} \right) \dfrac{\partial \mathbf{r}^t}{\partial q^{0s}} = \delta \mathbf{r}^0 \cdot \overset{0}{\nabla} \otimes \mathbf{r}^t. \end{cases} \tag{3.16}$$

3.3. Тензор деформаций и вектор перемещения

Разности квадратов длин отрезков среды какой-либо её малой области до и после деформации определяют метрику этой области. Однако в эксперименте мы имеем дело с перемещениями частиц среды. В связи с этим стоит задача по перемещениям определить метрику. ***Вектором перемещения называют разность радиусов-векторов*** $\mathbf{u} = \mathbf{r}^t - \mathbf{r}^0$ какой-либо материальной точки среды после и до деформации.

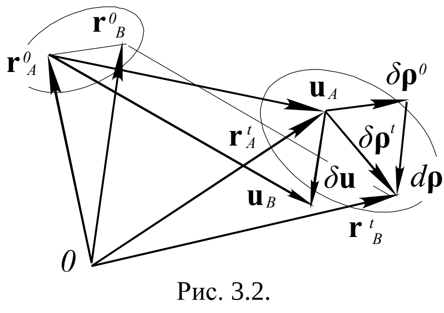


Рис. 3.2.

Пусть взаимные положения двух соседних частиц среды до и после деформации характеризуется векторами $\delta\boldsymbol{\rho}^0 = \mathbf{r}^0{}_B - \mathbf{r}^0{}_A$ и $\delta\boldsymbol{\rho}^t = \mathbf{r}^t{}_B - \mathbf{r}^t{}_A$. Положение этих частиц после деформации можем определить радиусами-векторами $\mathbf{r}^t{}_A = \mathbf{r}^0{}_A + \mathbf{u}_A$, $\mathbf{r}^t{}_B = \mathbf{r}^0{}_B + \mathbf{u}_B$, где $\mathbf{u}_A$ и $\mathbf{u}_B$ их перемещения. Считая деформации бесконечно малыми, полагаем $\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_A + \delta\mathbf{u}$ и $\delta\boldsymbol{\rho}^t = \delta\boldsymbol{\rho}^0 + d\boldsymbol{\rho}$, тогда имеем

$$\mathbf{r}^t{}_B - \mathbf{r}^t{}_A = \left(\mathbf{r}^0{}_B + \mathbf{u}_B\right) - \left(\mathbf{r}^0{}_A + \mathbf{u}_A\right) = \delta\boldsymbol{\rho}^0 + \delta\mathbf{u} = \delta\boldsymbol{\rho}^t = \delta\boldsymbol{\rho}^0 + d\boldsymbol{\rho}$$

или

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A = \delta\boldsymbol{\rho}^t - \delta\boldsymbol{\rho}^0 = d\boldsymbol{\rho}. \qquad (3.17)$$

Это равенство утверждает, что при бесконечно малых деформациях допустимо рассмотрение разности перемещений двух близких частиц $\delta\mathbf{u}$, вместо рассмотрения изменения материального отрезка $d\boldsymbol{\rho}$, то есть $\delta\mathbf{u} = \delta d\mathbf{r} = d\delta\mathbf{r} = d\boldsymbol{\rho}$.

Таким образом, нужен математический аппарат, позволяющий по вектору перемещения $\mathbf{u}$ точек среды определять её деформацию, то есть изменение расстояний между точками среды и изменение углов между выбранными направлениями в рассматриваемой точке. Иначе, с помощью вектора перемещения $\mathbf{u}$ нужно вектору $\delta\mathbf{r}^0$ и ориентированной площадке $\delta\mathbf{S}^0 = \mathbf{n}^0\delta S^0$ начального состояния среды сопоставить вектор $\delta\mathbf{r}^t$ и ориентированную площадку $\delta\mathbf{S}^t = \mathbf{n}^t\delta S^t$ её конечного состояния.

Для перемещений близких частиц имеем

$$\mathbf{u}\left(\mathbf{r} + d\mathbf{r}\right) = \mathbf{u}\left(\mathbf{r}\right) + \nabla\mathbf{u}\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{u}\left(\mathbf{r}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{r} + \operatorname{grad}U\big|_{\mathbf{r}=d\mathbf{r}},$$

где $\nabla\mathbf{u}$ – тензор деформаций и

$$4U = \mathbf{r}\cdot\left[\left(\nabla\mathbf{u}\right)^T + \left(\nabla\mathbf{u}\right)\right]\cdot\mathbf{r} - \text{ квадратичная форма.}$$

Представляя векторы перемещения и их производные в ковариантных базисах ${}_\xi\mathbf{e}^{0k}$, ${}_\xi\mathbf{e}^{ts}$: $\mathbf{u} = {}_\xi\mathbf{e}^{0k}u_{0k} = {}_\xi\mathbf{e}^{ts}u_{ts}$,

$$\delta\mathbf{u} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\xi^i}\delta\xi^i = {}_\xi\mathbf{e}^{0k}\frac{Du_{0k}}{D\xi^i}\delta\xi^i = {}_\xi\mathbf{e}^{ts}\frac{Du_{ts}}{D\xi^i}\delta\xi^i,$$

запишем меры (3.5), (3.7) в виде $\delta s_t{}^2 - \delta s_0{}^2 =$

$$= \left(\delta\boldsymbol{\rho}^t - \delta\boldsymbol{\rho}^0\right)\left(\delta\boldsymbol{\rho}^t + \delta\boldsymbol{\rho}^0\right) = \delta\mathbf{u}\cdot\left({}_\xi\mathbf{e}_{tj} + {}_\xi\mathbf{e}_{0j}\right)\delta\xi^j =$$

$$= \left[\frac{Du_{ts}}{D\xi^i}\left({}_\xi\mathbf{e}^{ts}\cdot{}_\xi\mathbf{e}_{tj}\right) + \frac{Du_{0k}}{D\xi^i}\left({}_\xi\mathbf{e}^{0k}\cdot{}_\xi\mathbf{e}_{0j}\right)\right]\delta\xi^i\delta\xi^j = \left(\frac{Du_{tj}}{D\xi^i} + \frac{Du_{0j}}{D\xi^i}\right)\delta\xi^i\delta\xi^j.$$

Выражения (3.6) и (3.8) для тензоров конечной деформации Коши-Грина и Альманси-Гамеля в лагранжевых переменных примут вид

$$\mathbf{G} = {}_{\xi}\mathbf{e}^{0i}\,{}_{\xi}\mathbf{e}^{0j}\,\frac{1}{2}\left(\frac{Du_{tj}}{D\xi^{i}} + \frac{Du_{0j}}{D\xi^{i}}\right) = {}_{\xi}\mathbf{e}^{0i}\,{}_{\xi}\mathbf{e}^{0j}\,{}_{\xi}\overset{0}{\varepsilon}_{ij}\,,$$
$$\mathbf{A} = {}_{\xi}\mathbf{e}^{ti}\,{}_{\xi}\mathbf{e}^{tj}\,\frac{1}{2}\left(\frac{Du_{tj}}{D\xi^{i}} + \frac{Du_{0j}}{D\xi^{i}}\right) = {}_{\xi}\mathbf{e}^{ti}\,{}_{\xi}\mathbf{e}^{tj}\,{}_{\xi}\overset{t}{\varepsilon}_{ij}\,. \tag{3.18}$$

Ковариантные компоненты этих тензоров представляют собой средние значения ковариантных производных по лагранжевым переменным компонент вектора перемещения в начальной и конечной точках.

В пространственных, эйлеровых переменных имеем

$$\delta\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{r}^{t}}{\partial q^{i}}\delta q^{i} - \frac{\partial \mathbf{r}^{0}}{\partial q^{i}}\delta q^{i} = {}_{q}\mathbf{e}_{ti}\delta q^{i} - {}_{q}\mathbf{e}_{0i}\delta q^{i}\,,$$

Вектор $\delta\mathbf{u}$ может быть представлен в базисах системы отсчёта $\mathbf{e}_{0i}$ и $\mathbf{e}_{ti}$ в точках A и B соответственно

$$\delta\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial q^{0i}}\delta q^{0i} = \mathbf{e}^{0k}\frac{Du_{0k}}{Dq^{0i}}\delta q^{0i} = \mathbf{e}^{0k}\frac{Du_{0k}}{Dq^{0i}}\frac{\partial q^{i}\left(-t, q^{t}\right)}{\partial q^{ts}}\delta q^{ts},$$
$$\delta\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial q^{t\alpha}}\delta q^{t\alpha} = \mathbf{e}^{ts}\frac{Du_{ts}}{Dq^{ti}}\delta q^{ti} = \mathbf{e}^{ts}\frac{Du_{ts}}{Dq^{t\alpha}}\frac{\partial q^{\alpha}\left(t, q^{0}\right)}{\partial q^{0i}}\delta q^{0i} \tag{3.19}$$

Тогда мера (3.11) может быть преобразована к виду

$$\delta s_{t}^{\,2} - \delta s_{0}^{\,2} = \left(\mathbf{e}_{ti}\delta q^{ti} - \mathbf{e}_{0i}\delta q^{0i}\right)\cdot\left(\mathbf{e}_{tk}\delta q^{tk} + \mathbf{e}_{0j}\delta q^{0j}\right) =$$
$$= \delta\mathbf{u}\cdot\left[\mathbf{e}_{tk}\frac{\partial q^{k}\left(t, q^{0}\right)}{\partial q^{0j}} + \mathbf{e}_{0j}\right]\delta q^{0j} =$$
$$= \left[\left(\mathbf{e}^{ts}\cdot\mathbf{e}_{tk}\right)\frac{Du_{ts}}{Dq^{t\alpha}}\frac{\partial q^{\alpha}\left(t, q^{0}\right)}{\partial q^{0i}}\frac{\partial q^{k}\left(t, q^{0}\right)}{\partial q^{0j}} + \left(\mathbf{e}^{0k}\cdot\mathbf{e}_{0j}\right)\frac{Du_{0k}}{Dq^{0i}}\right]\delta q^{0i}\delta q^{0j} =$$
$$= \left[\frac{Du_{tk}}{Dq^{t\alpha}}\frac{\partial q^{\alpha}\left(t, q^{0}\right)}{\partial q^{0i}}\frac{\partial q^{k}\left(t, q^{0}\right)}{\partial q^{0j}} + \frac{Du_{0j}}{Dq^{0i}}\right]\delta q^{0i}\delta q^{0j},$$

а мера (3.12) $-$ к виду

$$\delta s_{t}^{\,2} - \delta s_{0}^{\,2} = \left(\mathbf{e}_{ti}\delta q^{ti} - \mathbf{e}_{0i}\delta q^{0i}\right)\cdot\left(\mathbf{e}_{tj}\delta q^{tj} + \mathbf{e}_{0k}\delta q^{0k}\right) =$$
$$= \delta\mathbf{u}\cdot\left[\mathbf{e}_{tj} + \mathbf{e}_{0k}\frac{\partial q^{k}\left(-t, q^{t}\right)}{\partial q^{tj}}\right]\delta q^{tj} =$$

$$=\left[\left(\mathbf{e}^{ts}\cdot\mathbf{e}_{tj}\right)\frac{Du_{ts}}{Dq^{ti}}+\left(\mathbf{e}^{0s}\cdot\mathbf{e}_{0k}\right)\frac{Du_{0s}}{Dq^{0\alpha}}\frac{\partial q^{\alpha}\left(-t,q^{t}\right)}{\partial q^{ti}}\frac{\partial q^{k}\left(-t,q^{t}\right)}{\partial q^{tj}}\right]\delta q^{ti}\delta q^{tj}=$$

$$=\left[\frac{Du_{tj}}{Dq^{ti}}+\frac{Du_{0k}}{Dq^{0\alpha}}\frac{\partial q^{\alpha}\left(-t,q^{t}\right)}{\partial q^{ti}}\frac{\partial q^{k}\left(-t,q^{t}\right)}{\partial q^{tj}}\right]\delta q^{ti}\delta q^{tj}.$$

Итак, для тензоров конечной деформации Коши-Грина и Альманси-Гамеля в эйлеровых переменных можем записать выражения

$$\mathbf{G}={}_{q}\mathbf{e}^{0i}\,\frac{1}{2}\left[\frac{Du_{tk}}{Dq^{t\alpha}}\frac{\partial q^{\alpha}\left(t,q^{0}\right)}{\partial q^{0i}}\frac{\partial q^{k}\left(t,q^{0}\right)}{\partial q^{0j}}+\frac{Du_{0j}}{Dq^{0i}}\right]{}_{q}\mathbf{e}^{0j}=$$
$$={}_{q}\mathbf{e}^{0i}\,{}_{q}\mathbf{e}^{0j}\,\frac{1}{2}\left(\frac{Du_{tj}}{Dq^{0i}}+\frac{Du_{0j}}{Dq^{0i}}\right)={}_{q}\mathbf{e}^{0i}\,{}_{q}\mathbf{e}^{0j}\,{}_{q}\overset{0}{\varepsilon}_{ij}, \tag{3.20}$$

$$\mathbf{A}={}_{q}\mathbf{e}^{ti}\,{}_{q}\mathbf{e}^{tj}\,\frac{1}{2}\left[\frac{Du_{tj}}{Dq^{ti}}+\frac{Du_{0k}}{Dq^{0\alpha}}\frac{\partial q^{\alpha}\left(-t,q^{t}\right)}{\partial q^{ti}}\frac{\partial q^{k}\left(-t,q^{t}\right)}{\partial q^{tj}}\right]=$$
$$={}_{q}\mathbf{e}^{ti}\,{}_{q}\mathbf{e}^{tj}\,\frac{1}{2}\left(\frac{Du_{tj}}{Dq^{ti}}+\frac{Du_{0j}}{Dq^{ti}}\right)={}_{q}\mathbf{e}^{ti}\,{}_{q}\mathbf{e}^{tj}\,{}_{q}\overset{t}{\varepsilon}_{ij}\,. \tag{3.21}$$

Важным моментом является то, что в начальном и конечном состояниях анализируются расстояния между частицами малой области среды, и совершенно неважно какая для этого анализа используется система координат.

По построению (Рис. 3.2) имеем

$$\delta\boldsymbol{\rho}_{t}=\delta\boldsymbol{\rho}_{0}+d\boldsymbol{\rho}=\delta\boldsymbol{\rho}_{0}+\delta\mathbf{u}=\delta\boldsymbol{\rho}_{0}+\nabla\mathbf{u}\cdot\delta\mathbf{r}\,,$$
$$\mathbf{u}\left(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}\right)=\mathbf{u}\left(\mathbf{r}\right)+\delta\mathbf{u}=\mathbf{u}\left(\mathbf{r}\right)+\nabla\mathbf{u}\cdot\delta\mathbf{r}\,,$$

Если поле перемещений имеет вид $\delta\mathbf{u}=\mathbf{A}\cdot\delta\mathbf{r},\quad \mathbf{A}=\mathrm{const}$, то деформация называется однородной. ***Все материальные точки однородно деформированного тела находятся в одном и том же деформированном состоянии***: $\nabla\mathbf{u}=\mathbf{A}=\mathrm{const}$.

Естественно, что не любое поле перемещений приводит к деформации. Например, при перемещениях $\delta\mathbf{u}=\delta\boldsymbol{\rho}_{t}-\delta\boldsymbol{\rho}_{0}=\mathbf{L}\cdot\delta\boldsymbol{\rho}_{0}-\delta\boldsymbol{\rho}_{0}$, где $\mathbf{L}=\mathbf{ee}+\left(\mathbf{I}-\mathbf{ee}\right)\cos\varphi+\mathbf{e}\times\mathbf{I}\sin\varphi$ $-$ тензор поворота, расстояние между точками среды неизменно:

$$\delta\boldsymbol{\rho}_{t}^{\;2}=\left(\mathbf{L}\cdot\delta\boldsymbol{\rho}_{0}\right)^{T}\cdot\left(\mathbf{L}\cdot\delta\boldsymbol{\rho}_{0}\right)=\delta\boldsymbol{\rho}_{0}^{\;T}\cdot\left(\mathbf{L}^{T}\cdot\mathbf{L}\right)\cdot\delta\boldsymbol{\rho}_{0}=\delta\boldsymbol{\rho}_{0}^{\;T}\cdot\mathbf{I}\cdot\delta\boldsymbol{\rho}_{0}=\delta\boldsymbol{\rho}_{0}^{\;2}\,.$$

Вектор $\mathbf{u}$ характеризует изменение положений частиц окрестности некоторой материальной точки M . ***Все преобразования*** $\delta\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial \xi^i}\delta\xi^i$ ***окрестности материальной точки*** M ***за исключением переноса вместе с*** M ***называют дисторсией***, а матрицу $\partial q^j / \partial \xi^i$ ***–матрицей дисторсии*** (distorsio-искривление). Она определяется только положением материальной точки M и не зависит от $\delta\xi^i$ $(i = 1,2,3)$, поэтому преобразования $\delta\mathbf{u}$ являются линейными функциями $\delta\xi^i$ $(i = 1,2,3)$, то есть аффинными преобразованиями. При любом аффинном преобразовании существует тройка взаимно перпендикулярных осей, которые остаются взаимно перпендикулярными и после преобразования. Эти оси называются ***главными осями деформации***. Аффинное преобразование состоит из

– поступательного перемещения,
– поворота главных осей деформации,
– растяжения или сжатия вдоль главных осей деформации.

Пример. *Двойным сдвигом называют деформацию сплошной среды, соответствующую закону движения*

$$x_1 = \xi_1 + a(t)\xi_2, \quad x_2 = \xi_2 + a(t)\xi_3, \quad x_3 = \xi_3, \quad a(0) = 0,$$
$$\xi_1 = x_1 - a(t)x_2 + a^2(t)x_3, \quad \xi_2 = x_2 - a(t)x_3, \quad \xi_3 = x_3,$$

где x_k, ξ_k *– декартовы координаты в текущий и начальный моменты соответственно. По вектору перемещения построить тензоры Коши-Грина и Альманси-Гамеля.*

Решение. Поскольку $\delta\mathbf{u} = d\boldsymbol{\rho} = \delta\boldsymbol{\rho}^t - \delta\boldsymbol{\rho}^0$ имеем

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{e}_1\left[\delta\xi_1 + a(t)\delta\xi_2 - \delta\xi_1\right] + \mathbf{e}_2\left[\delta\xi_2 + a(t)\delta\xi_3 - \delta\xi_2\right] + \mathbf{e}_3\left(\delta\xi_3 - \delta\xi_3\right) =$$
$$= \mathbf{e}_1 a(t)\delta\xi_2 + \mathbf{e}_2 a(t)\delta\xi_3,$$
$$\delta\boldsymbol{\rho}^t + \delta\boldsymbol{\rho}^0 = \mathbf{e}_1\left[2\delta\xi_1 + a(t)\delta\xi_2\right] + \mathbf{e}_2\left[2\delta\xi_2 + a(t)\delta\xi_3\right] + \mathbf{e}_3 2\delta\xi_3$$

и далее $$\delta s_t^{\ 2} - \delta s_0^{\ 2} = 2G_{ij}\delta\xi_i\delta\xi_j =$$
$$= \left(\delta\boldsymbol{\rho}^t - \delta\boldsymbol{\rho}^0\right)\cdot\left(\delta\boldsymbol{\rho}^t + \delta\boldsymbol{\rho}^0\right) = \delta\mathbf{u}\cdot\left(\delta\boldsymbol{\rho}^t + \delta\boldsymbol{\rho}^0\right) =$$
$$= 2a(t)\delta\xi_1\delta\xi_2 + a^2(t)\delta\xi_2\delta\xi_2 + 2a(t)\delta\xi_2\delta\xi_3 + a^2(t)\delta\xi_3\delta\xi_3.$$

Те же построения в базисе конечного состояния дают

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{e}_1\left[a(t)\delta x_2 - a^2(t)\delta x_3\right] + \mathbf{e}_2 a(t)\delta x_3,$$
$$\delta\boldsymbol{\rho}^t + \delta\boldsymbol{\rho}^0 = \mathbf{e}_1\left[2\delta x_1 - a(t)\delta x_2 + a^2(t)\delta x_3\right] + \mathbf{e}_2\left[2\delta x_2 - a(t)\delta x_3\right] + \mathbf{e}_3 2\delta x_3,$$

$$
\begin{aligned}
&\delta s_t^{\,2}-\delta s_0^{\,2}=2A_{ij}\delta x_i\delta x_j=\delta\mathbf{u}\cdot\left(\delta\boldsymbol{\rho}^t+\delta\boldsymbol{\rho}^0\right)=\\
&=2a(t)\delta x_1\delta x_2-2a^2(t)\delta x_1\delta x_3-a^2(t)\delta x_2\delta x_2+\\
&+2\left[a^3(t)+a(t)\right]\delta x_2\delta x_3-\left[a^4(t)+a^2(t)\right]\delta x_3\delta x_3
\end{aligned}
$$

3.4. Геометрический смысл тензора деформаций

Введём обозначение относительного удлинения линейного элемента среды вдоль базиса $\mathbf{e}_{0k}$ – $\delta l_k=\left(\sqrt{g_{t\,kk}}-\sqrt{g_{0kk}}\right)\Big/\sqrt{g_{0kk}}=\left(l_t-l_0\right)/l_0$. Полагая исходный ***базис декартовым*** $\left(g_{0ij}=\delta_{ij}\right)$, получаем $\sqrt{g_{t\,kk}}=\left(1+\delta l_k\right)\sqrt{g_{0kk}}=1+\delta l_k$. Диагональные компоненты тензоров деформации примут вид $\varepsilon_{kk}=\dfrac{1}{2}\left[\left(1+\delta l_k\right)^2-1\right]=\delta l_k+\dfrac{1}{2}\delta l_k^{\,2}$. Положим, что углы между элементами базиса $\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j$ в деформированном состоянии приняли значения $(\pi/2)-\psi_{ij}$, тогда $\varepsilon_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(1+\delta l_i\right)\left(1+\delta l_j\right)\sin\psi_{ij},\quad i\neq j$. При малых деформациях имеем

$$
\mathbf{E}=\frac{1}{2}\left[\left(\nabla\mathbf{u}\right)+\left(\nabla\mathbf{u}\right)^T\right]=\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^k}{\partial\xi^j}+\frac{\partial u^j}{\partial\xi^k}\right)\to
$$

$$
\to\begin{pmatrix}
\dfrac{\partial u_1}{\partial\xi^1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial\xi^1}+\dfrac{\partial u_1}{\partial\xi^2}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial\xi^1}+\dfrac{\partial u_1}{\partial\xi^3}\right)\\
\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial\xi^1}\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial\xi^2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial\xi^3}\right)\\
\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial\xi^3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial\xi^1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial\xi^3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial\xi^2}\right) & \dfrac{\partial u_3}{\partial\xi^3}
\end{pmatrix}=
\begin{pmatrix}
\delta l_1 & \dfrac{\psi_{12}}{2} & \dfrac{\psi_{13}}{2}\\
\dfrac{\psi_{21}}{2} & \delta l_2 & \dfrac{\psi_{23}}{2}\\
\dfrac{\psi_{31}}{2} & \dfrac{\psi_{32}}{2} & \delta l_3
\end{pmatrix}.
\tag{3.22}
$$

Параллелепипед с рёбрами $\delta\xi^1,\delta\xi^2,\delta\xi^3$ после деформации с точностью до бесконечно малых второго порядка также можно считать параллелепипедом с рёбрами $\delta\xi^1\left(1+\delta l_1\right)$, $\delta\xi^2\left(1+\delta l_2\right)$, $\delta\xi^3\left(1+\delta l_3\right)$. Поэтому его объём станет равным $V_t=d\xi^1d\xi^2d\xi^3\left(1+\delta l_1\right)\left(1+\delta l_2\right)\left(1+\delta l_3\right)$. Сравнивая этот объём с первоначальным $V_0=\delta\xi^1\delta\xi^2\delta\xi^3$, для относительного объёмного расширения получаем оценку

$$
\frac{V_t-V_0}{V_0}\approx\delta l_1+\delta l_2+\delta l_3=\operatorname{div}\mathbf{u}\,.
$$

Следует отметить, что согласно определению тензора деформации знаки его компонент зависят от знаков $\delta u_j, \delta\xi^k$: $\delta u_j > 0,\quad \delta\xi^k > 0,\quad \partial u_j / \partial\xi^k > 0;\quad \delta u_j < 0,\quad \delta\xi^k > 0,\quad \partial u_j / \partial\xi^k < 0.$

3.5. Уравнения совместности. Сложение малых деформаций

Тензор деформаций симметричен, шесть его различных компонент $\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{kj}$ выражаются через три компоненты вектора перемещений. Это означает, что они не произвольны, то есть имеют место три независимых равенства, называемых ***уравнениями совместности***, которым удовлетворяют величины ε_{ij} $(i, j = 1,2,3)$. Будем считать, что существует непрерывно дифференцируемое поле перемещений $\mathbf{u}$. Тогда

$$2\nabla\times\mathbf{E} = \nabla\times\left[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T\right] = \nabla\times(\nabla\mathbf{u})^T,$$

$$2(\nabla\times\mathbf{E})^T = \nabla(\nabla\times\mathbf{u}) \quad \to \quad \nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})^T = 0$$

В явном виде имеем $\qquad (\nabla\times\mathbf{E})^T =$

$$= \left[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_k\left(\frac{\partial\varepsilon_{3k}}{\partial\xi^2} - \frac{\partial\varepsilon_{2k}}{\partial\xi^3}\right) + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_k\left(\frac{\partial\varepsilon_{1k}}{\partial\xi^3} - \frac{\partial\varepsilon_{3k}}{\partial\xi^1}\right) + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_k\left(\frac{\partial\varepsilon_{2k}}{\partial\xi^1} - \frac{\partial\varepsilon_{1k}}{\partial\xi^2}\right)\right]^T =$$

$$= \mathbf{e}_k\left[\mathbf{e}_1\left(\frac{\partial\varepsilon_{3k}}{\partial\xi^2} - \frac{\partial\varepsilon_{2k}}{\partial\xi^3}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial\varepsilon_{1k}}{\partial\xi^3} - \frac{\partial\varepsilon_{3k}}{\partial\xi^1}\right) + \mathbf{e}_3\left(\frac{\partial\varepsilon_{2k}}{\partial\xi^1} - \frac{\partial\varepsilon_{1k}}{\partial\xi^2}\right)\right]$$

и далее $\qquad \nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})^T =$

$$= \mathbf{e}_1\left(\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\xi^2}\left[\mathbf{e}_1\left(\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi^2} - \frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\xi^3}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi^3} - \frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi^1}\right) + \mathbf{e}_3\left(\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\xi^1} - \frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi^2}\right)\right] - \\ &- \frac{\partial}{\partial\xi^3}\left[\mathbf{e}_1\left(\frac{\partial\varepsilon_{32}}{\partial\xi^2} - \frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi^3}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi^3} - \frac{\partial\varepsilon_{32}}{\partial\xi^1}\right) + \mathbf{e}_3\left(\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi^1} - \frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi^2}\right)\right]\end{aligned}\right) +$$

$$+ \mathbf{e}_2\left(\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\xi^3}\left[\mathbf{e}_1\left(\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial\xi^2} - \frac{\partial\varepsilon_{21}}{\partial\xi^3}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi^3} - \frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial\xi^1}\right) + \mathbf{e}_3\left(\frac{\partial\varepsilon_{21}}{\partial\xi^1} - \frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi^2}\right)\right] - \\ &- \frac{\partial}{\partial\xi^1}\left[\mathbf{e}_1\left(\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi^2} - \frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\xi^3}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi^3} - \frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi^1}\right) + \mathbf{e}_3\left(\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\xi^1} - \frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi^2}\right)\right]\end{aligned}\right) +$$

$$
+\mathbf{e}_3\left(\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial\xi^1}\left[\mathbf{e}_1\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{32}}{\partial\xi^2}-\dfrac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi^3}\right)+\mathbf{e}_2\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi^3}-\dfrac{\partial\varepsilon_{32}}{\partial\xi^1}\right)+\mathbf{e}_3\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi^1}-\dfrac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi^2}\right)\right]-\\ -\dfrac{\partial}{\partial\xi^2}\left[\mathbf{e}_1\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial\xi^2}-\dfrac{\partial\varepsilon_{21}}{\partial\xi^3}\right)+\mathbf{e}_2\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi^3}-\dfrac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial\xi^1}\right)+\mathbf{e}_3\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{21}}{\partial\xi^1}-\dfrac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi^2}\right)\right]\end{array}\right)=
$$

$$
=\mathbf{e}_1\left[\begin{array}{c}\mathbf{e}_1\left(\dfrac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial\xi^2\partial\xi^2}-2\dfrac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial\xi^2\partial\xi^3}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial\xi^3\partial\xi^3}\right)+\mathbf{e}_2\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi^2\partial\xi^3}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_{32}}{\partial\xi^3\partial\xi^1}-\dfrac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi^2\partial\xi^1}-\dfrac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial\xi^3\partial\xi^3}\right)+\\ +\mathbf{e}_3\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\xi^2\partial\xi^1}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial\xi^3\partial\xi^2}-\dfrac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi^2\partial\xi^2}-\dfrac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial\xi^3\partial\xi^1}\right)\end{array}\right]+
$$

$$
+\mathbf{e}_2\left[\begin{array}{c}\mathbf{e}_1\left(\dfrac{\partial^2\varepsilon_{31}}{\partial\xi^3\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial\xi^1\partial\xi^3}-\dfrac{\partial^2\varepsilon_{21}}{\partial\xi^3\partial\xi^3}-\dfrac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial\xi^1\partial\xi^2}\right)+\mathbf{e}_2\left(\dfrac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial\xi^3\partial\xi^3}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial\xi^1\partial\xi^1}-2\dfrac{\partial^2\varepsilon_{31}}{\partial\xi^3\partial\xi^1}\right)+\\ +\mathbf{e}_3\left(\dfrac{\partial^2\varepsilon_{21}}{\partial\xi^3\partial\xi^1}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_{13}}{\partial\xi^1\partial\xi^2}-\dfrac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial\xi^3\partial\xi^2}-\dfrac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial\xi^1\partial\xi^1}\right)\end{array}\right]+
$$

$$
+\mathbf{e}_3\left[\begin{array}{c}\mathbf{e}_1\left(\dfrac{\partial^2\varepsilon_{32}}{\partial\xi^1\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_{21}}{\partial\xi^2\partial\xi^3}-\dfrac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial\xi^1\partial\xi^3}-\dfrac{\partial^2\varepsilon_{31}}{\partial\xi^2\partial\xi^2}\right)+\\ +\mathbf{e}_2\left(\dfrac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial\xi^1\partial\xi^3}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_{31}}{\partial\xi^2\partial\xi^1}-\dfrac{\partial^2\varepsilon_{32}}{\partial\xi^1\partial\xi^1}-\dfrac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial\xi^2\partial\xi^3}\right)+\mathbf{e}_3\left(\dfrac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial\xi^1\partial\xi^1}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial\xi^2\partial\xi^2}-2\dfrac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial\xi^1\partial\xi^2}\right)\end{array}\right]=0
$$

(3.23)

Эти равенства называются ***уравнениями Сен-Венана*** (Saint-Venant B. 1797–1886).

Пример. *Показать сохранение главных направлений тензоров Коши-Грина и Альманси-Гамеля. Показать также, что их главные значения удовлетворяют условию* $\left(1+2\overset{0}{\lambda}\right)\left(1-2\overset{t}{\lambda}\right)=1$.

Решение. По определению $\overset{0}{\varepsilon}_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial q^i}{\partial\xi^k}\dfrac{\partial q^j}{\partial\xi^k}-\delta_{ij}\right)$, $\quad\overset{t}{\varepsilon}_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\delta_{ij}-\dfrac{\partial\xi^k}{\partial q^i}\dfrac{\partial\xi^k}{\partial q^j}\right)$.

Для главных направлений и значений этих тензоров имеем

$$
\overset{0}{\varepsilon}_{ij}U_j=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial q^i}{\partial\xi^k}\frac{\partial q^j}{\partial\xi^k}-\delta_{ij}\right)U_j=\overset{0}{\lambda}U_i,\quad \overset{t}{\varepsilon}_{ij}V_j=\frac{1}{2}\left(\delta_{ij}-\frac{\partial\xi^k}{\partial q^i}\frac{\partial\xi^k}{\partial q^j}\right)V_j=\overset{t}{\lambda}V_i
$$

либо $$\frac{\partial q^i}{\partial\xi^k}\frac{\partial q^j}{\partial\xi^k}U_j=\left(1+2\overset{0}{\lambda}\right)U_i,\qquad \frac{\partial\xi^k}{\partial q^i}\frac{\partial\xi^k}{\partial q^j}V_j=\left(1-2\overset{t}{\lambda}\right)V_i\,.$$

Отсюда заключаем $\left(1+2\overset{0}{\lambda}\right)\left(1-2\overset{t}{\lambda}\right)U_i V_i = \delta_i^j U_j \delta_j^i V_j$.

Уравнения совместности выведены из условия существования вектора перемещения, то есть условия, что конечное и начальное состояния получаются друг из друга непрерывными перемещениями в евклидовом пространстве. Верно и обратное, если выполнены уравнения совместности, то существует вектор перемещения.

Часто предпочтительно пользоваться цилиндрическими или сферическими координатами и соответственно

$$2\varepsilon_{ij} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 2\dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\dfrac{u_\varphi}{r}+\dfrac{\partial u_r}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial u_r}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\dfrac{u_\varphi}{r}+\dfrac{\partial u_r}{\partial \varphi} & 2\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\dfrac{u_r}{r}\right) & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \varphi}+\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \varphi}+\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial z} & 2\dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2\dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}-\dfrac{u_\theta}{r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} & \dfrac{\partial u_r}{r\sin\theta\,\partial \varphi}+\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\dfrac{u_\varphi}{r} \\ \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}-\dfrac{u_\theta}{r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} & 2\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\dfrac{u_r}{r}\right) & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}-\dfrac{u_\varphi}{r}\operatorname{ctg}\theta \\ \dfrac{\partial u_r}{r\sin\theta\,\partial \varphi}+\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\dfrac{u_\varphi}{r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}-\dfrac{u_\varphi}{r}\operatorname{ctg}\theta & 2\left(\dfrac{\partial u_\varphi}{r\sin\theta\,\partial \varphi}+\dfrac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta+\dfrac{u_r}{r}\right) \end{pmatrix}.$$

Подвергая среду двум последовательным деформациям, имеем два последовательных её состояния

$$\delta\boldsymbol{\rho}_{t_1} = \delta\boldsymbol{\rho}_{t_0} + \delta\mathbf{u}_1 \quad \text{и} \qquad \delta\boldsymbol{\rho}_{t_2} = \delta\boldsymbol{\rho}_{t_1} + \delta\mathbf{u}_2$$

Поскольку $\delta\mathbf{u}_1 = \nabla\mathbf{u}_1 \cdot \delta\boldsymbol{\rho}_{t_0}$, $\delta\mathbf{u}_2 = \nabla\mathbf{u}_2 \cdot \delta\boldsymbol{\rho}_{t_1}$ получаем

$$\delta\boldsymbol{\rho}_{t_2} = \delta\boldsymbol{\rho}_{t_1} + \nabla\mathbf{u}_2 \cdot \delta\boldsymbol{\rho}_{t_1} = \left(\mathbf{I}+\nabla\mathbf{u}_2\right)\cdot\left(\delta\boldsymbol{\rho}_{t_0} + d\mathbf{u}_1\right) = \left(\mathbf{I}+\nabla\mathbf{u}_2\right)\cdot\left(\mathbf{I}+\nabla\mathbf{u}_1\right)\cdot\delta\boldsymbol{\rho}_{t_0}$$

и в силу малости $\nabla\mathbf{u}_1$ и $\nabla\mathbf{u}_2$ имеем $\delta\boldsymbol{\rho}_{t_2} = \left(\mathbf{I}+\nabla\mathbf{u}_2+\nabla\mathbf{u}_1\right)\cdot\delta\boldsymbol{\rho}_{t_0}$

3.6. Задачи

3.6.1. До и после перемещения частицы имели координаты $x_{j0} = \xi_j$, и $x_{1t} = \left(1+a\right)\xi_1,\quad x_{2t} = \xi_2,\quad x_{3t} = \xi_3,\qquad a = \text{const}$. Построить поле перемещений в лагранжевом и эйлеровом описаниях, вычислить компоненты тензоров деформаций Грина и Альманси.

Решение. Поле перемещений $\mathbf{u}=\mathbf{r}_t-\mathbf{r}_0$ имеет вид

$\mathbf{u}=a\xi_1\mathbf{e}_1$ в лагранжевом описании;

$\mathbf{u}=\dfrac{a}{1+a}x_1\mathbf{e}_1$ в эйлеровом описании.

Согласно (3.10) и (3.11)

$$2\mathbf{G}={}_q\mathbf{e}^{0i}\,{}_q\mathbf{e}^{0j}\left({}_qg_{sk}\frac{\partial q^s}{\partial\xi^i}\frac{\partial q^k}{\partial\xi^j}-{}_qg_{0ij}\right)=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\left[(1+a)^2-1\right],$$

$$2\mathbf{A}={}_q\mathbf{e}^{i}\,{}_q\mathbf{e}^{j}\left({}_qg_{ij}-{}_qg_{0sk}\frac{\partial\xi^s}{\partial q^i}\frac{\partial\xi^k}{\partial q^j}\right)=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\left[1-\frac{1}{(1+a)^2}\right].$$

При значениях $a\ll1$ эти тензоры совпадают:

$$2\mathbf{G}\approx\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\left[(1+2a)-1\right],\quad 2\mathbf{A}\approx\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\left[1-\frac{1}{(1+2a)}\right].$$

3.6.2. Для одноосного растяжения задачи 3.5.1 a) найти относительные удлинения материальных элементов, которые до деформации образовывали коническую поверхность с осью Ox и углом 2α при вершине, b) найти угол при вершине конуса после деформации, c) найти относительное изменение объёма

Решение. a) Длина образующей конуса до деформации равна

$$\sqrt{(x_{20}-x_{10})^2+(y_{20}-y_{10})^2+(z_{20}-z_{10})^2}=l_0,$$

а после деформации

$$\sqrt{(1+a)^2(x_{20}-x_{10})^2+(y_{20}-y_{10})^2+(z_{20}-z_{10})^2}=l\,.$$

Для относительного удлинения имеем выражение

$$\frac{l-l_0}{l_0}=\sqrt{\frac{(1+a)^2(x_{20}-x_{10})^2+(y_{20}-y_{10})^2+(z_{20}-z_{10})^2}{(x_{20}-x_{10})^2+(y_{20}-y_{10})^2+(z_{20}-z_{10})^2}}-1=$$

$$=\sqrt{(1+a)^2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}-1=\sqrt{1+\left(2a+a^2\right)\cos^2\alpha}-1.$$

b) $$\mathrm{tg}\varphi=\frac{\sqrt{(y_{20}-y_{10})^2+(z_{20}-z_{10})^2}}{\sqrt{(1+a)^2(x_{20}-x_{10})^2}}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{(1+a)^2\cos^2\alpha}}=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{1+a}.$$

c) Относительное изменение объёма определяется выражением

$$\frac{V-V_0}{V_0}=\frac{dx_1dx_2dx_3}{dx_{10}dx_{20}dx_{30}}-1=a\ .$$

3.6.3. До перемещения частицы имели координаты $x_{j0}=\xi_j$, а после перемещения – $x_{1t}=\left(1+a_1\right)\xi_1,\quad x_{2t}=\left(1+a_2\right)\xi_2,\quad x_{3t}=\xi_3,\quad a_1,a_2=\mathrm{const}$. Построить поле перемещений в лагранжевом и эйлеровом описаниях, вычислить компоненты тензоров деформаций Грина и Альманси.

3.6.4. До и после перемещения частицы имели координаты $x_{j0}=\xi_j$, и $x_{1t}=\left(1+a_1\right)\xi_1,\quad x_{2t}=\left(1+a_2\right)\xi_2,\quad x_{3t}=\left(1+a_3\right)\xi_3,\qquad a_1,a_2,a_3=\mathrm{const}$. Построить поле перемещений в лагранжевом и эйлеровом описаниях, вычислить компоненты тензоров деформаций Грина и Альманси.

3.6.5. До и после перемещения частицы имели координаты $x_{j0}=\xi_j$, и $x_{1t}=\xi_2,\quad x_{2t}=-\left(1+a\right)\xi_1,\quad x_{3t}=\xi_3,\qquad a=\mathrm{const}$. Построить поле перемещений в лагранжевом и эйлеровом описаниях, вычислить компоненты тензоров деформаций Грина и Альманси.

Решение. Поле перемещений $\mathbf{u}=\mathbf{r}_t-\mathbf{r}_0$ имеет вид

$\mathbf{u}=\left(\xi_2-\xi_1\right)\mathbf{e}_1-\left[\left(1+a\right)\xi_1+\xi_2\right]\mathbf{e}_2$ в лагранжевом описании;

$\mathbf{u}=\left(x_1+\dfrac{x_2}{1+a}\right)\mathbf{e}_1+\left(x_2-x_1\right)\mathbf{e}_2$ в эйлеровом описании.

Согласно (3.10) и (3.11)

$$2\mathbf{G}={}_q\mathbf{e}^{0i}\,{}_q\mathbf{e}^{0j}\left({}_q g_{sk}\frac{\partial q^s}{\partial\xi^i}\frac{\partial q^k}{\partial\xi^j}-{}_q g_{0ij}\right)=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\left[\left(1+a\right)^2-1\right],$$

$$2\mathbf{A}={}_q\mathbf{e}^{i}\,{}_q\mathbf{e}^{j}\left({}_q g_{ij}-{}_q g_{0sk}\frac{\partial\xi^s}{\partial q^i}\frac{\partial\xi^k}{\partial q^j}\right)=\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\left[1-\frac{1}{\left(1+a\right)^2}\right].$$

При значениях $a\ll1$ эти тензоры не совпадают:

$$2\mathbf{G}\approx\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\left[\left(1+2a\right)-1\right],\quad 2\mathbf{A}\approx\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\left[1-\frac{1}{\left(1+2a\right)}\right].$$

3.6.6. До и после перемещения частицы имели координаты $x_{j0}=\xi_j$, и $x_{1t}=\xi_1+a\sin\left(k\xi_1\right),\quad x_{2t}=\xi_2,\quad x_{3t}=\xi_3,\qquad a,k=\mathrm{const},\qquad \left|a\right|<1$. Найти относительное удлинение отрезка параллельного оси Ox_1, указать положения частиц, в окрестности которых деформация указанных отрезков отсутствует. Вычислить компоненты тензоров деформаций Грина.

Решение. $\dfrac{dx_{1t}-dx_{10}}{dx_{10}}=\dfrac{d\xi_1+ak\cos\left(k\xi_1\right)d\xi_1-d\xi_1}{d\xi_1}=ak\cos\left(k\xi_1\right)$, в окрестности точек $\xi_1=\left(\dfrac{1}{2}\pm m\right)\dfrac{\pi}{k},\quad m=0,1,2,...$ отрезки параллельные оси Ox_1 не деформируются.

$$2\mathbf{G}={}_q\mathbf{e}^{0i}\,{}_q\mathbf{e}^{0j}\left({}_qg_{sk}\frac{\partial q^s}{\partial\xi^i}\frac{\partial q^k}{\partial\xi^j}-{}_qg_{0ij}\right)=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\left\{\left[1+ak\cos\left(k\xi_1\right)\right]^2-1\right\}.$$

3.6.7. Всесторонним сжатием, растяжением называют деформацию, при которой вектор перемещения имеет вид $\mathbf{u}=\mathbf{r}_t-\mathbf{r}_0=\mathbf{e}_j a\xi_j$. Показать, что относительное удлинение любого отрезка одинаково.

Решение. Из выражения вектора перемещения имеем $\mathbf{r}_t=\mathbf{e}_j x_j=\mathbf{e}_j\left(a\xi_j+\xi_j\right)$ и далее $\dfrac{dx_{jt}-dx_{j0}}{dx_{j0}}=a$. Тензоры Грина и Альманси имеют шаровую структуру:

$$2\mathbf{G}={}_q\mathbf{e}^{0i}\,{}_q\mathbf{e}^{0j}\left({}_qg_{sk}\frac{\partial q^s}{\partial\xi^i}\frac{\partial q^k}{\partial\xi^j}-{}_qg_{0ij}\right)=\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\delta_{jk}\left[\left(1+a\right)^2-1\right],$$

$$2\mathbf{A}={}_q\mathbf{e}^{i}\,{}_q\mathbf{e}^{j}\left({}_qg_{ij}-{}_qg_{0sk}\frac{\partial\xi^s}{\partial q^i}\frac{\partial\xi^k}{\partial q^j}\right)=\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\delta_{jk}\left[1-\frac{1}{\left(1+a\right)^2}\right].$$

3.6.8. Простым сдвигом называют деформацию среды с законом движения $x_1=\xi_1+b\left(t\right)\xi_2,\quad x_2=\xi_2,\quad x_3=\xi_3$, где x_j – пространственные декартовы координаты, ξ_j – лагранжевы координаты, $b\left(t\right)$ – функция времени, причём $b\left(0\right)=0$. Построить поле перемещений в лагранжевом и эйлеровом описаниях. Найти главные компоненты и главные оси тензоров Грина и Альманси.
Найти также относительные удлинения материальных элементов, которые до деформации были параллельны осям $Ox^j,\quad j=1,2,3$.

Решение. Поле перемещений $\mathbf{u}=\mathbf{r}_t-\mathbf{r}_0$ имеет вид

$\mathbf{u}=b\xi_2\mathbf{e}_1$ в лагранжевом описании;

$\mathbf{u}=bx_2\mathbf{e}_1$ в эйлеровом описании.

Согласно (3.10)

$$2\mathbf{G} = {}_q\mathbf{e}^{0i}\,{}_q\mathbf{e}^{0j}\left({}_q g_{sk}\frac{\partial q^s}{\partial \xi^i}\frac{\partial q^k}{\partial \xi^j} - {}_q g_{0ij}\right) = b\left(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\right) + b^2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 .$$

Главные значения определяются уравнением

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & b/2 & 0 \\ b/2 & b^2/2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda\left(\frac{b^2}{4} - \lambda^2 - \frac{b^2}{2}\lambda\right) = 0 \quad \to$$

$$\to \quad \lambda_{1,2} = \frac{b^2}{4} \pm \sqrt{\frac{b^4}{16} + \frac{b^2}{4}}, \quad \lambda_3 = 0.$$

Соответствующие главные оси

$$- \quad \mathbf{e}_1 + \frac{2}{a}\lambda_{1,2}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + \left(\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + 1}\right)\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3 .$$

Согласно (3.11)

$$2\mathbf{A} = {}_q\mathbf{e}^{i}\,{}_q\mathbf{e}^{j}\left({}_q g_{ij} - {}_q g_{0sk}\frac{\partial \xi^s}{\partial q^i}\frac{\partial \xi^k}{\partial q^j}\right) = b\left(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\right) - b^2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 .$$

Далее главные значения –

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & b/2 & 0 \\ b/2 & -b^2/2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda\left(\frac{b^2}{4} - \lambda^2 + \frac{b^2}{2}\lambda\right) = 0 \quad \to$$

$$\to \quad \lambda_{1,2} = -\frac{b^2}{4} \pm \sqrt{\frac{b^4}{16} + \frac{b^2}{4}}, \quad \lambda_3 = 0$$

и главные оси – $\mathbf{e}_1 + \frac{2}{a}\lambda_{1,2}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 - \left(\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{b^2}{4} + 1}\right)\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3 .$

Поскольку $ds^2 - ds_0{}^2 = 2G_{jk}d\xi_j d\xi_k$ имеем

$$\frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{\sqrt{2G_{jk}d\xi_j d\xi_k + ds_0{}^2}}{ds_0} - 1 = \sqrt{1 + 2G_{jk}d_j d_k} - 1,$$

где d_j – компоненты единичного вектора в направлении оси $O\xi_j$. Относительные удлинения элементов вдоль осей $O\xi_1$ и $O\xi_2$ равны нулю, а вдоль оси $O\xi_2$ – $\sqrt{1+b^2} - 1$.

3.5.9. В некоторой точке среды декартовым компонентам тензора малых деформаций соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} 0,01 & 0,03 & 0 \\ 0,03 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 \end{pmatrix}.$$

Найти наибольшее и наименьшее относительные удлинения материальных элементов в этой точке. Найти направление этих элементов.

Решение. Относительные удлинения находятся по формуле

$$\frac{ds-ds_0}{ds_0}=\frac{\sqrt{2G_{jk}d\xi_j d\xi_k+ds_0{}^2}}{ds_0}-1=\sqrt{1+2G_{jk}d_jd_k}-1\,.$$

Стационарные значения этого выражения определяют искомые удлинения и их направления. Можем также воспользоваться свойством главных осей и главных значений: наибольшее и наименьшее значение квадратичной формы $2G_{jk}d_jd_k$ на векторах $\mathbf{d}$ единичной длины достигаются, когда вектор $\mathbf{d}$ направлен по главной оси и равно соответствующему главному значению:

$$\det\begin{pmatrix} 0,01-\lambda & 0,03 & 0 \\ 0,03 & 0,01-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0,01-\lambda \end{pmatrix}=\left(0,01-\lambda\right)\left[\left(0,01-\lambda\right)^2-0,03^2\right]=0\,,$$

$$\lambda_2=0.01,\quad \lambda_{1,3}=0.01\pm0.03,\quad\to\quad l_{\max}=0.04,\quad l_{\min}=-0.02\,.$$

Главные направления определяются уравнениями

$$\begin{aligned} &\left(0,01-\lambda_{\max}\right)d_1+0,03d_2=0, &&-0,03d_1+0,03d_2=0,\\ &0,03d_1+\left(0,01-\lambda_{\max}\right)d_2=0,\quad\to &&d_3=0,\\ &\left(0,01-\lambda_{\max}\right)d_3=0, &&d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2=1, \end{aligned}$$

$$\mathbf{d}_{\max}=\left(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\right)\big/\sqrt{2}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} &\left(0,01-\lambda_{\min}\right)d_1+0,03d_2=0, &&0,03d_1+0,03d_2=0,\\ &0,03d_1+\left(0,01-\lambda_{\min}\right)d_2=0,\quad\to &&d_3=0,\\ &\left(0,01-\lambda_{\min}\right)d_3=0, &&d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2=1, \end{aligned}$$

$$\mathbf{d}_{\min}=\left(-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\right)\big/\sqrt{2}\,.$$

Относительное изменение объёма $G_{jj}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,03$.

3.6.10. Двойным сдвигом называют деформацию среды, соответствующую закону движения $x_1=\xi_1+b(t)\xi_2$, $x_2=\xi_2+b(t)\xi_3$, $x_3=\xi_3$, где x_j – пространственные декартовы координаты, ξ_j –

лагранжевы координаты, $b(t)$ – функция времени, причём $b(0)=0$. Найти тензоры деформаций Грина и Альманси.

Решение. Поле перемещений $\mathbf{u}=\mathbf{r}_t-\mathbf{r}_0$ имеет вид

$\mathbf{u}=b\xi_2\mathbf{e}_1+b\xi_3\mathbf{e}_2$ в лагранжевом описании;

$\mathbf{u}=\left(bx_2-b^2x_3\right)\mathbf{e}_1+bx_3\mathbf{e}_2$ в эйлеровом описании.

Согласно (3.10) и (3.11) $2\mathbf{G}={}_q\mathbf{e}^{0i}\,{}_q\mathbf{e}^{0j}\left({}_q g_{sk}\dfrac{\partial q^s}{\partial\xi^i}\dfrac{\partial q^k}{\partial\xi^j}-{}_q g_{0ij}\right)=$

$$=b\left(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\right)+b^2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2+b\left(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\right)+b^2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3,$$

$$2\mathbf{A}={}_q\mathbf{e}^{i}\,{}_q\mathbf{e}^{j}\left({}_q g_{ij}-{}_q g_{0sk}\frac{\partial\xi^s}{\partial q^i}\frac{\partial\xi^k}{\partial q^j}\right)=b\left(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\right)-b^2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2-$$

$$-b^2\left(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\right)-\left(b^4+b^2\right)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3+\left(b+b^3\right)\left(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\right).$$

При $b\ll 1$ эти тензоры совпадают:

$$2\mathbf{G}\approx b\left(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\right)\approx 2\mathbf{A}.$$

3.6.11. Доказать, что материальный элемент, направленный до деформации по главной оси тензора Грина, в деформированном состоянии направлен по главной оси тензора Альманси и, наоборот, материальный элемент, направленный в деформированном состоянии по главной оси тензора Альманси, в недеформированном состоянии был направлен по главной оси тензора Грина. Показать также, что главные значения λ_G (компоненты в главных осях) тензора Грина и главные значения λ_A тензора Альманси удовлетворяют условию

$\left(1+2\lambda_G\right)\left(1-2\lambda_A\right)=1.$

Решение. В пространственной декартовой системе координат для компонент тензора Грина и Альманси имеем выражения

$$2G_{\alpha\beta}=\left(F_{k\alpha}F_{k\beta}-\delta_{\alpha\beta}\right),\quad 2A_{ij}=\left(\delta_{ij}-H_{\gamma i}H_{\gamma j}\right),$$

где $F_{k\alpha}=\partial x_k/\partial\xi_\alpha$, $H_{\gamma j}=\partial\xi_\gamma/\partial x_j$ – компоненты прямой и обратной матриц дисторсии. Для главных значений λ_G, λ_A и соответствующих им векторов $\mathbf{d}_G$, $\mathbf{d}_A$ имеем равенства

$$\left(F_{k\alpha}F_{k\beta}-\delta_{\alpha\beta}\right)d_{G\beta}=2\lambda_G d_{G\beta},\quad \left(\delta_{ij}-H_{\gamma i}H_{\gamma j}\right)d_{Aj}=2\lambda_A d_{Aj}$$

или $$F_{k\alpha}F_{k\beta}d_{G\beta}=\left(1+2\lambda_G\right)d_{G\alpha},\quad H_{\gamma i}H_{\gamma j}d_{Aj}=\left(1-2\lambda_A\right)d_{Ai}.\qquad (*)$$

Пусть λ_G и d_{Gk}, $k=1,2,3$ удовлетворяют первому равенству (*). Поскольку матрица дисторсии определяет компоненты любого вектора после деформации среды, то следует убедиться в том, что λ_A и $F_{j\alpha}d_{G\alpha}$, $j=1,2,3$ удовлетворяют второму равенству (*):

$$H_{\gamma i}H_{\gamma j}F_{j\alpha}d_{G\alpha}=\left(1-2\lambda_A\right)F_{i\alpha}d_{G\alpha}\,.$$

Поскольку матрицы $F_{k\alpha}$ и $H_{\gamma j}$ взаимно обратные имеем

$$H_{\gamma i}\delta_{\gamma\alpha}d_{G\alpha}=H_{\gamma i}d_{G\gamma}=\left(1-2\lambda_A\right)F_{i\alpha}d_{G\alpha}\quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad H_{\gamma i}F_{i\beta}d_{G\gamma}=d_{G\beta}=\left(1-2\lambda_A\right)F_{i\beta}F_{i\alpha}d_{G\alpha}.$$

и далее $\quad d_{G\beta}=\left(1-2\lambda_A\right)\left(1+2\lambda_G\right)d_{G\beta}\quad\rightarrow\quad\left(1-2\lambda_A\right)\left(1+2\lambda_G\right)=1,$

$$\left(1+2\lambda_G\right)d_{G\beta}=\frac{d_{G\beta}}{\left(1-2\lambda_A\right)}=F_{i\beta}F_{i\alpha}d_{G\alpha}\,,$$

а это равенство выполнено по условию.
Обратное утверждение доказывается аналогично.

3.6.12. Имеет место теорема о полярном разложении невырожденной матрицы $F=RU=VR$: где $R-$ортогональная матрица $\left(R\cdot R^T=I\right)$, а $U,V-$симметрические положительно определённые матрицы $\left(U=U^T,\quad V=V^T\right)$. Из условия ортогональности матрицы R имеем

$$F^T\cdot F=UR^T\cdot RU\quad\rightarrow\quad U=\sqrt{F^T\cdot F}\quad\text{или}$$

$$F\cdot F^T=VR\cdot R^TV\quad\rightarrow\quad V=\sqrt{F\cdot F^T}\,.$$

Ортогональность матрицы R есть следствие соотношений $R=F\cdot U^{-1}$, либо $R=V^{-1}\cdot F$:

$$R^T\cdot R=U^{-1}\cdot F^T\cdot F\cdot U^{-1}=\left(F^T\cdot F\right)^{-1/2}F^T\cdot F\left(F^T\cdot F\right)^{-1/2}=I\,,$$

$$R\cdot R^T=V^{-1}\cdot F\cdot F^T\cdot V^{-1}=\left(F\cdot F^T\right)^{-1/2}F\cdot F^T\left(F\cdot F^T\right)^{-1/2}=I\,.$$

Показать, что матрица дисторсии представима в виде $F=RU$, главные оси матрицы U совпадают с главными осями тензора деформаций Грина, а соответствующие главные её значения λ_U выражаются через главные значения λ_G тензора Грина: $\lambda_U=\sqrt{1+2\lambda_G}$. Линейное преобразование, определяемое матрицей R, переводит главные оси тензора Грина в главные оси тензора Альманси.

Решение. Пусть матрица U определена своими главными осями и главными значениями. Пусть её главные оси совпадают с главными осями тензора Грина, соответствующего дисторсии F: $2G_{\alpha\beta} = F_{j\alpha}F_{j\beta} - \delta_{\alpha\beta}$, а её главные значения равны $\lambda_U = \sqrt{1+2\lambda_G}$. Матрица U невырожденная и равенство $F = RU$ однозначно определяет матрицу $R = FU^{-1}$. Для доказательства ортогональности матрицы R достаточно указать тройку взаимно ортогональных единичных векторов остающихся взаимно ортогональными и единичными при преобразовании матрицей R. В предыдущей задаче было показано, дисторсия F оставляет ортогональными главные оси тензора Грина, а преобразование с матрицей $U -$ в силу его определения. Преобразование матрицей R сохраняет длину каждого вектора по главным осям.

Матрица компонент тензора Грина в главных осях имеет только диагональные компоненты длины λ_G. Материальный элемент, направленный, например, до деформации по главной оси $\mathbf{e}_1$ при рассматриваемой дисторсии получит относительное удлинение l_1, определяемое соответствующей компонентой тензора Грина: $G_{11} = \frac{1}{2}\left[\left(1-l_1\right)-1\right]$, то есть он удлиняется в $1+l_1 = \sqrt{1+2G_{11}} = \sqrt{1+2\lambda_1}$. В такое же число раз он растягивается при преобразовании матрицей U.

3.6.13. Для однородного растяжения $x_{j0} = \xi_j$ $\left(j=1,2,3\right)$, $x_{1t} = \left(1+a\right)\xi_1$, $x_{2t} = \xi_2$, $x_{3t} = \xi_3$, a>0 найти в начальном состоянии три взаимно перпендикулярных направления материальных отрезков, углы между которыми в результате деформации не изменились. Какие направления имеют эти элементы после деформации? Указать направления материальных элементов, для которых относительное удлинение максимально.

3.6.14. Представьте преобразование малой окрестности частицы при простом сдвиге $x_1 = \xi_1 + a\xi_2$, $x_2 = \xi_2$, $x_3 = \xi_3$ в виде растяжения вдоль трёх ортогональных направлений, поворота и переноса.

4. МОДЕЛЬ УПРУГОЙ СРЕДЫ

4.1. Внешние и внутренние силы. Условия равновесия сплошной среды. Вектор и тензор напряжений.

Силы, действующие на сплошную среду, подразделяются на внешние и внутренние. К внешним массовым и поверхностным силам относят воздействие на материальные точки среды полевых сил и тел, не включенных в рассматриваемый объём. Полевые силы зависят как от координат частицы, так и от её движения.

Примерами массовых сил могут быть силы тяжести $\rho\mathbf{G}dV$ и силы инерции $-\rho\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})dV, \quad \boldsymbol{\omega}=\mathrm{const}$. Эти силы $-$ потенциальные $\mathit{\Pi}_G=-\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}, \quad \mathit{\Pi}_S=(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2/2$.

Электрическая напряженность формирует силу, пропорциональную заряду, а магнитная напряжённость $-$ силу, пропорциональную скорости заряда. Обе эти силы зависят от положения частицы, несущей заряд.

Главный вектор и главный момент объёмных сил равны $\int_V\rho\mathbf{F}dV, \quad \int_V\mathbf{r}\times\rho\mathbf{F}dV$.

Внешние поверхностные силы распределены по поверхности рассматриваемого объёма. Примером поверхностных сил могут служить силы вязкого трения, силы гидростатическое давление $-p\mathbf{n}dS$ жидкости, в которое погружено тело $(\mathbf{n}-$ нормаль к поверхности S, ограничивающий объём $V)$. Нормальная и касательная компоненты поверхностной силы $\mathbf{F}$ равны $\mathbf{n}\cdot\mathbf{F}, \quad \mathbf{F}-\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{F})=(\mathbf{n}\times\mathbf{F})\times\mathbf{n}$. Главный вектор и главный момент поверхностных сил вычисляются аналогичным образом: $\oint_S\mathbf{F}dS, \quad \oint_S\mathbf{r}\times\mathbf{F}dS$. Потенциальными являются поверхностные силы, сохраняющие неизменными величину и направление при деформировании среды.

В теле выделим мысленно объём V, ограниченный поверхностью S. На каждый элемент dS поверхности действует сила $\mathbf{p}_n dS$ и момент $\mathbf{m}_n dS$ со стороны элементов тела, расположенных вне выделенного объёма. Сила и момент пропорциональны величине площади dS, зависят от направления нормали $\mathbf{n}$ к поверхности, но направлены не по нормали.

Пусть

M $-$ масса, заключённая в выделенном объёме среды;

$\mathbf{f}$ $-$ внешняя сила, действующие на единицу массы среды;

$\mathbf{m}$ $-$ внешний момент, действующие на единицу массы среды;

$\mathbf{Q}$ – вектор количества её движения массы M ;

$\mathbf{K}$ – вектор внутреннего момента количества движения массы M ;

$\rho = \lim\limits_{V\to 0}(M/V)$ – плотность среды,

$\mathbf{v} = \lim\limits_{V\to \mathbf{0}}(\mathbf{Q}/M)$ – скорость единицы массы,

$\mathbf{k} = \lim\limits_{V\to 0}(\mathbf{K}/M)$ – внутренний момент количества движения единицы массы.

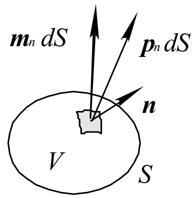


Рис. 4.1.

По началу Даламбера для любого объёма

$$\int\limits_V \rho\left(\mathbf{f} - \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)dV + \oint\limits_S \mathbf{p}_n dS = 0, \tag{4.1}$$

$$\int\limits_V \rho\left(\mathbf{m} - \frac{d\mathbf{k}}{dt}\right)dV + \oint\limits_S \mathbf{m}_n dS = 0\,. \tag{4.2}$$

Отмечаем, что (4.1) и (4.2) в виде равенства $\int_V \mathbf{A}dV + \oint_S \mathbf{B}_n dS = 0$ отражают баланс некой сущности, а конкретный физический смысл подынтегральных выражений не существенен.

Векторы напряжений имеют место на любой площадке в каждой точке внутри среды и образуют систему внутренних сил. Главный вектор этих сил равен нулю, но при наличии перемещений точек среды работа внутренних сил отлична от нуля.

Одной из наиболее важных моделей, используемых для описания состояния деформируемого тела, является модель упругой среды.

Тело считают упругим, если его деформации, вызванные только действием сил, исчезают при их снятии. Тело при разгрузке возвращается к первоначальной форме и размерам.

Среда называется ***упругой***, если ***компоненты тензора напряжений являются функциями тензора деформаций и температуры***: $p_{ij} = f_{ij}\left(\boldsymbol{\varepsilon}, T^\circ\right)$, где

p_{ij} – компоненты тензора напряжений,

T° – температура,

$\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций.

В технической литературе по теории упругости, сопротивлению материалов общеприняты обозначения нормальных и касательных напряжений буквами σ и τ так, что матрица, изоморфная тензору напряжений, представляется в виде

$$\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_x = \sigma_1 & \tau_{xy} = \tau_{12} & \tau_{xz} = \tau_{13} \\ \tau_{yx} = \tau_{21} & \sigma_y = \sigma_2 & \tau_{yz} = \tau_{23} \\ \tau_{zx} = \tau_{31} & \tau_{zy} = \tau_{32} & \sigma_z = \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

На площадке с нормалью $\mathbf{n}$ по (2.5) имеет место усилие

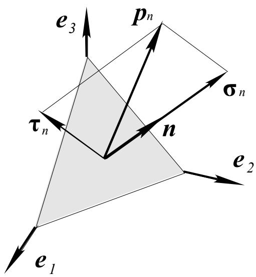


Рис. 4.2.

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{P}} = n_s p_{sk} \mathbf{e}_k,$$

$$p_n{}^2 = n_s p_{sj} p_{kj} n_k = \sigma_n{}^2 + \tau_n{}^2,$$

$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{P}} \cdot \mathbf{n} = n_s p_{sk} n_k,$$

$$\tau_n{}^2 = p_n{}^2 - \sigma_n{}^2 =$$

$$= n_s \left(p_{sj} p_{kj} - p_{sr} n_r n_m p_{mk} \right) n_k$$

Имеются две группы необходимых условий равновесия сил и напряжений ─ уравнения равновесия в объёме V и уравнения равновесия на его поверхности S:

$$\int_V \rho \mathbf{F} dV + \oint_S \mathbf{p}_n dS = \int_V \rho \mathbf{F} dV + \oint_S \overline{\overline{P}} \cdot \mathbf{n} dS = 0,$$

$$\int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{F} dV + \oint_S \mathbf{r} \times \mathbf{p}_n dS + \oint_S \mathbf{m}_n dS =$$

$$= \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{F} dV + \oint_S \mathbf{r} \times \left(\mathbf{n} \cdot \overline{\overline{P}} \right) dS + \oint_S \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{M}} dS = 0.$$

Преобразуем поверхностные интегралы в объёмные, используя теорему Гаусса ─ Остроградского:

$$\oint_s \mathbf{f} d\mathbf{S} = \oint_s f_k dS_k = \int_V \frac{\partial f_k}{\partial x_k} dV = \int_V \mathrm{div} \mathbf{f} dV,$$

$$\oint_S \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{P}} dS = \int_V \mathrm{div} \overline{\overline{P}} dV, \quad \oint_S \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{M}} dS = \int_V \mathrm{div} \overline{\overline{M}} dV,$$

$$\oint_S \mathbf{r} \times \left(\mathbf{n} \cdot \overline{\overline{P}} \right) dS = -\oint_S \left(\mathbf{n} \cdot \overline{\overline{P}} \right) \times \mathbf{r} dS =$$

$$= -\int_V \mathrm{div} \overline{\overline{P}} \times \mathbf{r} dV - \int_V \left(\mathbf{i}_k \cdot \overline{\overline{P}} \right) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^k} dV = \int_V \left(\mathbf{r} \times \mathrm{div} \overline{\overline{P}} - 2\boldsymbol{\omega} \right) dV,$$

где $\left(\mathbf{i}_k \cdot \overline{\overline{P}} \right) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^k} = \left(\mathbf{i}_k \cdot \overline{\overline{P}} \right) \times \mathbf{i}_k = 2\boldsymbol{\omega} -$ бивектор, сопутствующий кососимметричной части тензора $\overline{\overline{P}}$. Итак, приходим к равенствам

$$\int_V \left(\rho \mathbf{F} + \mathrm{div} \overline{\overline{P}} \right) dV = 0, \quad \int_V \left[\mathbf{r} \times \left(\rho \mathbf{F} + \mathrm{div} \overline{\overline{P}} \right) - 2\boldsymbol{\omega} + \mathrm{div} \overline{\overline{M}} \right] dV = 0,$$

из которых следует

$$\mathrm{div}\overline{\overline{P}} + \rho\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{p}_k}{\partial x_\mathrm{k}} + \rho\mathbf{F} = 0, \quad \mathrm{div}\overline{\overline{M}} - 2\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial x_\mathrm{k}} - 2\boldsymbol{\omega} = 0\,. \tag{4.4}$$

Обычно поле $\overline{\overline{M}}$ полагают равным нулю, тогда $2\boldsymbol{\omega} = \left(\mathbf{i}_k \cdot \overline{\overline{P}}\right) \times \mathbf{i}_k = 0$ и тензор напряжений $\overline{\overline{P}}$ симметричен: $\mathbf{n}_1 \cdot \overline{\overline{P}} \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_2 \cdot \overline{\overline{P}} \cdot \mathbf{n}_1$. В покомпонентной записи имеем

$$\begin{gathered}
p_{23} = p_{32}, \quad p_{31} = p_{13}, \quad p_{12} = p_{21}, \\
\frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_3} + \rho F_1 = 0, \\
\frac{\partial p_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_3} + \rho F_2 = 0, \\
\frac{\partial p_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} + \rho F_3 = 0.
\end{gathered} \tag{4.5}$$

Эти уравнения легко получить из условия равенства нулю главного вектора и главного момента поверхностных и объёмных напряжений, действующих на выделенный из среды элементарный параллелепипед. Поверхностные напряжения на гранях, перпендикулярных оси $\mathbf{e}_1$, равны

$$\mathbf{p}_1\left(x_1 + \frac{1}{2}dx_1, x_2, x_3\right)dx_2 dx_3 = \left(\mathbf{p}_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2 dx_3,$$

$$\mathbf{p}_{-1}\left(x_1 - \frac{1}{2}dx_1, x_2, x_3\right)dx_2 dx_3 = \left(\mathbf{p}_{-1} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{p}_{-1}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2 dx_3,$$

где $\mathbf{p}_1(x_1, x_2, x_3) = -\mathbf{p}_{-1}(x_1, x_2, x_3)$ – значение напряжения в центре параллелепипеда. Начало системы координат возьмем в центре параллелепипеда, радиусы-векторы точек приложения этих напряжений можно считать равными $\pm \mathbf{e}_1 dx_1/2$. Подобным же образом составляются выражения напряжений и радиусов-векторов точек их приложения для граней, перпендикулярных $\mathbf{e}_2$:

$$\left(\mathbf{p}_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial x_2}dx_2\right)dx_3 dx_1, \quad \left(\mathbf{p}_{-2} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{p}_{-2}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_3 dx_1, \quad \pm\frac{1}{2}\mathbf{e}_2 dx_2\,,$$

и для граней перпендикулярных $\mathbf{e}_3$:

$$\left(\mathbf{p}_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1 dx_2, \quad \left(\mathbf{p}_{-3} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{p}_{-3}}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1 dx_2, \quad \pm\frac{1}{2}\mathbf{e}_3 dx_3\,.$$

Объёмная сила $\rho\mathbf{F}dx_1dx_2dx_3$ считается приложенной в центре параллелепипеда. Приравнивая нулю главный вектор и главный момент всех сил и напряжений, после сокращения на $dx_1dx_2dx_3$ получаем

$$\frac{\partial\mathbf{p}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\mathbf{p}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\mathbf{p}_3}{\partial x_3}+\rho\mathbf{F}=0,\qquad \mathbf{e}_1\times\mathbf{p}_1+\mathbf{e}_2\times\mathbf{p}_2+\mathbf{e}_3\times\mathbf{p}_3=0\,. \tag{4.6}$$

Это другая форма уравнений (3.5). Задача о равновесии сплошной среды статически неопределима поскольку для определения шести компонент тензора напряжений имеем только три уравнения. Получение достаточных условий равновесия требует рассмотрения физической модели среды (упругое тело, вязкая жидкость).

Важным моментом является то, что внутренние напряжения по своей сути есть силы взаимодействия молекул тела друг с другом. В теории упругости, как в макроскопической теории, «радиус действия» молекулярных сил считается равным нулю, а ***внутренние напряжения передаются от каждой точки среды только к ближайшим с нею***.

Это положение перестаёт быть справедливым, когда деформирование тела сопровождается появлением в нём макроскопических электрических полей (пироэлектрические и пьезоэлектрические тела).

Рассмотрим главный вектор и главный момент сил и напряжений, действующих на какой-либо объём V тела. По определению имеем $\int_V\mathbf{F}dV,\ \ \int_V\mathbf{r}\times\mathbf{F}dV$. Поскольку напряжения, с которыми различные части рассматриваемого объёма действуют друг на друга, образуют систему внутренних сил, заключаем, что эти интегралы следует рассматривать как сумму только тех напряжений, которые действуют на рассматриваемый объём со стороны окружающих его частей тела. Как отмечено выше, эти напряжения действуют на рассматриваемый объём только через его поверхность и потому результирующее напряжение и результирующий момент напряжений представимы интегралами по поверхности.

Из векторного анализа известно, что преобразование объёмного интеграла в поверхностный возможно только в том случае, если $\mathbf{F}=\operatorname{div}\mathbf{P}$, где $\mathbf{F}-$тензор первого ранга, а $\mathbf{P}-$тензор второго ранга. Итак,

$\int_V\mathbf{F}dV=\int_V\operatorname{div}\mathbf{P}dV=\int_V\frac{\partial\mathbf{p}_k}{\partial x_k}dV=\oint_S\mathbf{p}_kn_kdS$, то есть интеграл по объёму для главного вектора преобразуется в интеграл по поверхности.

В равновесии в каждом элементарном объёме тела внутренние напряжения должны взаимно компенсироваться, то есть $\mathbf{F}=\operatorname{div}\mathbf{P}=0$.

Если тело находится в каком-либо внешнем силовом поле $\mathbf{G}$, то уравнение равновесия принимает вид $\quad \operatorname{div}\mathbf{P}+\mathbf{G}=0$.

Внешние силы, приложенные непосредственно к поверхности тела и являющиеся обычно источником деформации, входят в граничные условия к уравнениям равновесия.

Главному моменту, как известно, соответствует кососимметрический тензор

$$\mathbf{M}=\int_V\left(\mathbf{F}\mathbf{r}-\mathbf{r}\mathbf{F}\right)dV=\int_V\left(\operatorname{div}\mathbf{P}\,\mathbf{r}-\mathbf{r}\,\operatorname{div}\mathbf{P}\right)dV=$$
$$=\int_V\operatorname{div}\left(\mathbf{P}\,\mathbf{r}-\mathbf{r}\,\mathbf{P}\right)dV-\int_V\left(\mathbf{P}-\mathbf{P}^T\right)dV.$$

Таким образом, главный момент может быть выражен как интеграл по поверхности, если тензор $\mathbf{P}$ симметрический: $\mathbf{M}=\oint_S\left(\mathbf{P}\,\mathbf{r}-\mathbf{r}\,\mathbf{P}\right)\cdot\mathbf{n}\,dS$.

Отметим также простое выражение для среднего значения тензора напряжений в деформированном теле:

$$\int_V\left(\mathbf{F}\,\mathbf{r}+\mathbf{r}\,\mathbf{F}\right)dV=\int_V\left(\operatorname{div}\mathbf{P}\,\mathbf{r}+\mathbf{r}\,\operatorname{div}\mathbf{P}\right)dV=$$
$$=\int_V\operatorname{div}\left(\mathbf{P}\,\mathbf{r}+\mathbf{r}\,\mathbf{P}\right)dV-\int_V\left(\mathbf{P}+\mathbf{P}^T\right)dV=0.$$

Отсюда заключаем, что среднее значение тензора напряжений в некотором объёме может быть определено по внешним силам на границе объёма:

$$\left\langle\mathbf{P}\right\rangle=\frac{1}{2V}\int_V\operatorname{div}\left(\mathbf{P}\,\mathbf{r}+\mathbf{r}\,\mathbf{P}\right)dV=\frac{1}{2V}\oint_S\left(\mathbf{P}\,\mathbf{r}+\mathbf{r}\,\mathbf{P}\right)\cdot\mathbf{n}\,dS \qquad (4.7)$$

4.2. Свойства тензора напряжений

Главные значения тензора напряжений, называемые главными напряжениями, равны корням P_1,P_2,P_3 его характеристического уравнения:

$$\det\left(p_{sk}-\delta_{sk}P\right)=\det\begin{pmatrix}p_{11}-P & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22}-P & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-P\end{pmatrix}=0\,.$$

Главные направления – главные оси напряжений – образуют ортогональный триэдр единичных векторов $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$; косинусы их углов с осями координат $u_{sk}=\mathbf{u}_s\cdot\mathbf{e}_k$ определяются системой уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\left(p_{11}-P_S\right)u_{S1}+p_{12}u_{S2}+p_{13}u_{S3}=0,\\
&p_{21}u_{S1}+\left(p_{22}-P_S\right)u_{S2}+p_{23}u_{S3}=0,\\
&p_{31}u_{S1}+p_{32}u_{S2}+\left(p_{33}-P_S\right)u_{S3}=0,\\
&{u_{S1}}^2+{u_{S2}}^2+{u_{S3}}^2=1.
\end{aligned}
$$

В главных осях на площадках с нормалями $\mathbf{u}_S$ касательные напряжения отсутствуют, а тензор напряжений записывается в виде

$$\overline{\overline{P}}=\mathbf{u}_1P_1\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2P_2\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3P_3\mathbf{u}_3.$$

Выражения компонент тензора в системе осей $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ через главные напряжения записываются в виде

$$p_{sk}=\mathbf{e}_s\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{e}_k=u_{s1}P_1u_{1k}+u_{s2}P_2u_{2k}+u_{s3}P_3u_{3k}.$$

Изотропный тензор $\left(\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s\right)\left(p_{11}+p_{22}+p_{33}\right)/3$ ***называется шаровой частью тензора*** $\overline{\overline{P}}$. Выделяя из тензора $\overline{\overline{P}}$ его шаровую часть, получаем ***тензор*** $\mathrm{Dev}\overline{\overline{P}}=\overline{\overline{P}}-\left(\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s\right)\left(p_{11}+p_{22}+p_{33}\right)/3$, ***называемый девиатором тензора*** $\overline{\overline{P}}$. Главные направления девиатора совпадают с главными направлениями исходного тензора, а главные его значения равны $D_s=P_s-\left(P_1+P_2+P_3\right)/3$:

$$\mathrm{Dev}\overline{\overline{P}}=\mathbf{u}_1\frac{2P_1-P_2-P_3}{3}\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2\frac{2P_2-P_3-P_1}{3}\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3\frac{2P_3-P_1-P_2}{3}\mathbf{u}_3.$$

Девиатор характеризует отклонение напряжённого состояния от ***гидростатического***.

В главных осях запись соотношений Коши (2.5) упрощается:

$$\mathbf{p}_n=\mathbf{n}\cdot\overline{\overline{P}}=\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{u}_1P_1\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2P_2\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3P_3\mathbf{u}_3\right)=n_1P\mathbf{u}_{11}+n_2P_2\mathbf{u}_2+n_3P_3\mathbf{u}_3,$$

$${p_n}^2={n_1}^2P_1^2+{n_2}^2P_2^2+{n_3}^2P_3^2={n_s}^2P_s^2.$$

На площадке с нормалью $\mathbf{n}$ имеем

$$\sigma_n=\mathbf{n}\cdot\overline{\overline{P}}\cdot\mathbf{n}=P_1{n_1}^2+P_2{n_2}^2+P_3{n_3}^2, \tag{4.8}$$

$${\tau_n}^2={p_n}^2-{\sigma_n}^2={n_s}^2P_s^2-\left({n_s}^2P_s\right)\left(P_k{n_k}^2\right)={n_s}^2\left(P_s^2-P_sP_k{n_k}^2\right). \tag{4.9}$$

Эти соотношения совместно с условием ${n_1}^2+{n_2}^2+{n_3}^2=1$ позволят решить задачу об отыскании площадок, на которых нормальное и касательное напряжения имеют заданные из возможных значения. Будем полагать, что

$$P_1>P_2>P_3. \qquad (*)$$

Записав искомое решение виде $$n_1^{\,2}=\frac{f_1(\sigma_n,\tau_n)}{(P_1-P_2)(P_1-P_3)},$$

$$n_2^{\,2}=\frac{f_2(\sigma_n,\tau_n)}{(P_2-P_3)(P_2-P_1)},\quad n_3^{\,2}=\frac{f_3(\sigma_n,\tau_n)}{(P_3-P_1)(P_3-P_2)},$$

Получаем в силу условия (*)

$$f_1(\sigma_n,\tau_n)=\tau_n^{\,2}+\left(\sigma_n-\frac{P_2+P_3}{2}\right)^2-\left(\frac{P_2-P_3}{2}\right)^2=\tau_n^{\,2}+(\sigma_n-P_2)(\sigma_n-P_3)\geq 0\,,$$

$$f_2(\sigma_n,\tau_n)=\tau_n^{\,2}+\left(\sigma_n-\frac{P_3+P_1}{2}\right)^2-\left(\frac{P_3-P_1}{2}\right)^2=\tau_n^{\,2}+(\sigma_n-P_3)(\sigma_n-P_1)\leq 0\,,$$

$$f_2(\sigma_n,\tau_n)=\tau_n^{\,2}+\left(\sigma_n-\frac{P_1+P_2}{2}\right)^2-\left(\frac{P_1-P_2}{2}\right)^2=\tau_n^{\,2}+(\sigma_n-P_1)(\sigma_n-P)\geq 0.$$

Эти три неравенства на плоскости σ_n,τ_n выделяют область допустимых значений касательных и нормальных напряжений. Границей области являются окружности $f_k=0,\quad k=1,2,3$, круги Мора (1882):

$$\tau_n^{\,2}+\left(\sigma_n-\frac{P_2+P_3}{2}\right)^2\geq\left(\frac{P_2-P_3}{2}\right)^2,\quad \tau_n^{\,2}+\left(\sigma_n-\frac{P_3+P_1}{2}\right)^2\leq\left(\frac{P_3-P_1}{2}\right)^2,$$

$$\tau_n^{\,2}+\left(\sigma_n-\frac{P_1+P_2}{2}\right)^2\geq\left(\frac{P_1-P_2}{2}\right)^2.$$

Точке S_2 соответствует нормальное напряжение $\sigma_2=(P_1+P_3)/2$ и максимальное касательно напряжению $\tau_2=(P_1-P_3)/2$, которые реализуются на площадке с нормалью $n_{21}^{\,2}=1/2,\quad n_{22}^{\,2}=0,\quad n_{23}^{\,2}=1/2$.

Точкам S_1 и S_3 соответствуют напряжения

$$\sigma_1=(P_2+P_3)/2,\quad \tau_1=(P_2-P_3)/2\quad \text{и}\quad \sigma_3=(P_1+P_2)/2,\quad \tau_3=(P_1-P_2)/2.$$

на площадках с нормалями

$$n_{11}^{\,2}=0,\quad n_{12}^{\,2}=1/2,\quad n_{13}^{\,2}=1/2\,,$$

$$n_{31}^{\,2}=1/2,\quad n_{32}^{\,2}=1/2,\quad n_{33}^{\,2}=0\,.$$

Эти выделенные касательные напряжения действуют в главных плоскостях тензора напряжения и направлены под углом 45° к его главным направлениям.

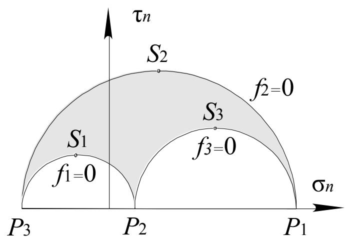


Рис. 4.3.

Итак,

$$\sigma_1=\frac{P_2+P_3}{2},\quad \tau_1=\frac{P_2-P_3}{2},\quad n_{11}{}^2=0,\quad n_{12}{}^2=\frac{1}{2},\quad n_{13}{}^2=\frac{1}{2};$$
$$\sigma_2=\frac{P_1+P_3}{2},\quad \tau_2=\frac{P_1-P_3}{2},\quad n_{21}{}^2=\frac{1}{2},\quad n_{22}{}^2=0,\quad n_{23}{}^2=\frac{1}{2}; \qquad (4.10)$$
$$\sigma_3=\frac{P_1+P_2}{2},\quad \tau_3=\frac{P_1-P_2}{2},\quad n_{31}{}^2=\frac{1}{2},\quad n_{32}{}^2=\frac{1}{2},\quad n_{33}{}^2=0.$$

Касательное напряжение (4.7) можно выразить через характерные напряжения τ_1, τ_2, τ_3:

$$\tau_n{}^2=n_1{}^2\left(P_1^2-P_1P_kn_k{}^2\right)+n_2{}^2\left(P_2^2-P_2P_kn_k{}^2\right)+n_3{}^2\left(P_3^2-P_3P_kn_k{}^2\right)=$$
$$=n_1{}^2\left(P_1^2n_2{}^2+P_1^2n_3{}^2-P_1P_2n_2{}^2-P_1P_3n_3{}^2\right)+$$
$$+n_2{}^2\left(P_2{}^2n_3{}^2+P_2{}^2n_1{}^2-P_2P_3n_3{}^2-P_2P_1n_1{}^2\right)+$$
$$+n_3{}^2\left(P_3{}^2n_1{}^2+P_3{}^2n_2{}^2-P_3P_1n_1{}^2-P_3P_2n_2{}^2\right)=$$
$$=\left(P_2-P_3\right)^2n_2{}^2n_3{}^2+\left(P_3-P_1\right)^2n_3{}^2n_1{}^2+\left(P_1-P_2\right)^2n_1{}^2n_2{}^2=$$
$$=4\left(\tau_1{}^2n_2{}^2n_3{}^2+\tau_2{}^2n_3{}^2n_1{}^2+\tau_3{}^2n_1{}^2n_2{}^2\right).$$

На площадке, одинаково наклонённой к главным осям, когда

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{u}_1}{\sqrt{3}}+\frac{\mathbf{u}_2}{\sqrt{3}}+\frac{\mathbf{u}_3}{\sqrt{3}},\quad \text{имеем}\quad \sigma_n=\mathbf{n}\cdot\overset{=}{P}\cdot\mathbf{n}=\left(P_1+P_2+P_3\right)/3,$$
$$p_n{}^2=\sigma_n{}^2+\tau_n{}^2=\mathbf{n}\cdot\overset{=}{P}\cdot\overset{=}{P}\cdot\mathbf{n}=\left(P_1^2+P_2{}^2+P_3^2\right)/3,$$
$$\tau_n{}^2=p_n{}^2-\sigma_n{}^2=\frac{1}{3}\left(P_1^2+P_2{}^2+P_3^2\right)-\frac{1}{9}\left(P_1+P_2+P_3\right)^2=$$
$$=\frac{2}{9}\left(P_1^2+P_2{}^2+P_3{}^2-P_1P_2-P_2P_3-P_3P_1\right)=$$
$$=\frac{1}{9}\left[\left(P_2-P_3\right)^2+\left(P_1-P_3\right)^2+\left(P_1-P_2\right)^2\right]=\frac{4}{9}\left(\tau_1{}^2+\tau_2{}^2+\tau_3{}^2\right).$$

??? Величина $\tau=\frac{2}{3}\sqrt{\tau_1{}^2+\tau_2{}^2+\tau_3{}^2}$ ***называется интенсивностью касательных напряжений***. ???

4.2.1. Напряжённое состояние определяется шаровым тензором $\overset{=}{P}=-p\,\mathbf{i}_s\mathbf{i}_s$. На любой поверхности выполняется условие $\overset{=}{P}\cdot\mathbf{n}=-p\mathbf{n}$.

4.2.2. Тензор напряжений задаётся равенством $\overline{\overline{P}} = \left(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1\right) p_{12}$, и его характеристическое уравнение

$$\det\begin{pmatrix} -p & p_{12} & 0 \\ p_{21} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p\left(p^2 - p_{12}{}^2\right) = 0.$$

определяет главные напряжения

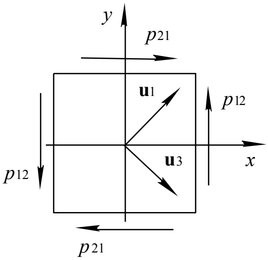


Рис. 4.4.

$P_1 = p_{12}, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = -p_{12}$.

Система уравнений $\quad u_{11}{}^2 + u_{12}{}^2 + u_{13}{}^2 = 1$,

$$-P_1 u_{11} + p_{12} u_{12} = 0, \quad p_{12} u_{11} - P_1 u_{12} = 0, \quad P_1 u_{13} = 0$$

имеет решение $u_{11} = u_{12} = \pm 1\big/\sqrt{2}, \quad u_{13} = 0$.

Аналогично для двух других главных напряжений:

$$u_{21} = u_{22} = 0, \quad u_{23} = \pm 1 \ \text{ и } \ u_{31} = -u_{32} = \pm 1\big/\sqrt{2}, \quad u_{33} = 0.$$

В главных осях $\quad \overline{\overline{P}} = \left(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2\right) p_{12}$,

$$\tau_1 = \tau_3 = \frac{p_{12}}{2}, \quad \tau_2 = p_{12}, \quad \tau = \sqrt{\frac{2}{3}\left(\tau_1{}^2 + \tau_2{}^2 + \tau_3{}^2\right)} = p_{12}.$$

4.2.3. Напряженное состояние описывается тензором $\overline{\overline{P}} = \left(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_1\right) p_{13} + \left(\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_2\right) p_{23}$. Характеристическое уравнение

$$\det\begin{pmatrix} -p & 0 & p_{13} \\ 0 & -p & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & -p \end{pmatrix} = -p^3 + p\left(p_{13}{}^2 + p_{23}{}^2\right) = 0$$

даёт главные напряжения $P_1 = \sqrt{p_{13}{}^2 + p_{23}{}^2}, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = -\sqrt{p_{13}{}^2 + p_{23}{}^2}$ и

$$\tau_1 = -\sqrt{p_{13}{}^2 + p_{23}{}^2}\Big/2, \quad \tau_2 = \sqrt{p_{13}{}^2 + p_{23}{}^2}, \quad \tau_3 = \sqrt{p_{13}{}^2 + p_{23}{}^2}\Big/2, \quad \tau = \sqrt{p_{13}{}^2 + p_{23}{}^2}.$$

Главные направления определяются системой уравнений

$$-P_i u_{i1} + p_{13} u_{i3} = 0, \quad -P_i u_{i2} + p_{23} u_{i3} = 0,$$
$$p_{13} u_{i1} + p_{23} u_{i2} - P_i u_{i3} = 0, \quad u_{i1}{}^2 + u_{i2}{}^2 + u_{i3}{}^2 = 1,$$

из которой получаем $\quad \mathbf{u}_1 = \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}\mathbf{i}_1 + \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}\mathbf{i}_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}_3,$

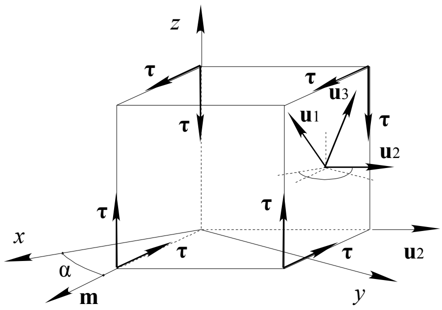


Рис. 4.5.

$$\mathbf{u}_2 = -\sin\alpha\,\mathbf{i}_1 + \cos\alpha\,\mathbf{i}_2\,,$$

$$\mathbf{u}_3 = -\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}\mathbf{i}_1 + \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}\mathbf{i}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}_3\,,$$

где $\cos\alpha = \dfrac{p_{31}}{P_1}, \quad \sin\alpha = \dfrac{p_{23}}{P_1}$.

В осях $\mathbf{m}, \mathbf{u}_2, \mathbf{i}_3$ тензор напряжений принимает вид $\overline{\overline{P}} = \left(\mathbf{m}\mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3\mathbf{m}\right)\sqrt{p_{13}^{\ 2} + p_{23}^{\ 2}}$.

4.2.4. Тензор одинаковых касательных напряжений задаётся равенствами $p_{ij} = p_o \quad (i \neq j), \quad p_{ii} = 0$. Его инварианты равны $I_1\left(\overline{\overline{P}}\right) = 0, \quad I_2\left(\overline{\overline{P}}\right) = -3p_o^{\ 2}, \quad I_3\left(\overline{\overline{P}}\right) = 2p_o^{\ 3}$, и главные направления, определяемые корнями кубического уравнения $-p^3 + 3p_o^{\ 2}p + 2p_o^{\ 3} = 0$, оказываются равными $P_1 = 2p_o, \quad P_2 = P_3 = -p_o$. Касательные напряжения равны $\tau_1 = 0, \quad \tau_2 = \tau_3 = 3p_o$. Первое главное направление, определяемое уравнениями

$$-2p_o u_{11} + p_o u_{12} + p_o u_{13} = 0, \quad p_o u_{11} - 2p_o u_{12} + p_o u_{13} = 0,$$

$$p_o u_{11} + p_o u_{12} - 2p_o u_{13} = 0, \qquad u_{11}^{\ 2} + u_{12}^{\ 2} + u_{13}^{\ 2} = 1,$$

есть $\mathbf{u}_1 = \pm\left(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3\right)/\sqrt{3}$. Два других главных направления в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{u}_1$, произвольны. В главных осях

$$\overline{\overline{P}} = \left(2\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3\mathbf{u}_3\right)p_o\,.$$

4.2.5. Электростатическая система напряжений задаётся тензором $\overline{\overline{P}} = \dfrac{\varepsilon q}{4\pi}\left[\mathbf{E}\mathbf{E} - \dfrac{1}{2}\mathbf{i}_k\mathbf{i}_k\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\right)\right], \quad \mathbf{E} = \mathrm{grad}A_o$, где $\varepsilon -$ диэлектрическая проницаемость, $q -$ плотность зарядов, $\mathbf{E} -$ вектор напряжённости электрического поля. Поле объёмных сил, действующих на диэлектрик, определяется тензором напряжений

$$\rho\mathbf{F} = -\frac{\varepsilon q}{4\pi}\mathrm{div}\left[\mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{i}_k\mathbf{i}_k\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\right)\right] = -\frac{\varepsilon q}{4\pi}\mathbf{E}\mathrm{div}\mathbf{E}\,.$$

По определению главных осей $\dfrac{\varepsilon q}{4\pi}\left[\mathbf{E}\mathbf{E} - \dfrac{1}{2}\mathbf{i}_k\mathbf{i}_k\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\right)\right]\cdot\mathbf{u} = p\mathbf{u}$ и

$$P_1 = \frac{\varepsilon q}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{E}}{E}; \quad P_2 = P_3 = -\frac{\varepsilon q}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{E} = \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{E} = 0.$$

В направлении поля действует растягивающее напряжение, а в поперечных направлениях — равные им по величине сжимающие напряжения.

4.3. Обобщённый закон Гука

Возможность замены тензоров конечной деформации линейным тензором деформации обусловлена малостью компонент тензора $\nabla \mathbf{u}$ и вектора поворота $\boldsymbol{\omega}$. При этих условиях отпадает необходимость различать производные по координатам недеформированного и деформированного состояний:

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial X} \approx \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Здесь X_1, X_2, X_3 – декартовы координаты в ненапряжённом, натуральном состоянии, а x_1, x_2, x_3 – координаты в напряжённом состоянии.

Фактически реализуемые состояния равновесия сплошной среды определяются её свойствами. Для многих сред эти свойства формализуются заданием связи между тензорами напряжения и мерой деформации. В линейной теории упругости это – обобщённый закон Гука (линейное соотношение между тензором напряжения и тензором деформации). В выражение закона состояния входит также температура среды. Задание закона состояния приводит к замкнутой системе дифференциальных уравнений, по которой определяется реализуемое напряжённое состояние и далее векторы перемещения точек среды. Таким образом, в линейной постановке задача перемещения точек среды отодвигается на второй план, то есть напряжённое состояние определяется для недеформированного тела. Этот приём представляет собой первый шаг последовательных приближений нелинейной теории упругости, в которой напряжённое состояние приходится анализировать в деформированном теле с неизвестной границей.

Для линейно-упругих сред связь между упругими деформациями и напряжениями среды устанавливается на основании обобщения элементарного закона Гука (Hooke R. 1635–1703). Закон в элементарной форме гласит:

при растяжении стержня продольными силами, величина которых, рассчитанная на единицу площади поперечного сечения, равна P ***, происходит относительное удлинение стержня*** $\delta l = \Delta l / l = P/E$ ***и относительное уменьшение поперечных размеров*** $\delta d = \Delta d / d = P/(mE)$.

Постоянные E – модуль Юнга (Young T. 1773–1829) и m – коэффициент Пуассона (Poisson S. 1781–1840) для различных материалов имеют разные значения.

Для однородной и изотропной среды закон Гука обобщается предположением, что главные значения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ тензора деформации и главные значения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ тензора упругих напряжений связаны элементарным законом Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\sigma_2}{mE} - \frac{\sigma_3}{mE}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\sigma_3}{mE} - \frac{\sigma_1}{mE}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\sigma_1}{mE} - \frac{\sigma_2}{mE}.$$

Введём первые инварианты:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \operatorname{div}\mathbf{p}, \qquad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \operatorname{div}\mathbf{u} \tag{4.11}$$

и запишем элементарный закон Гука в виде

$$\varepsilon_k = \frac{\sigma_k}{E}\frac{m+1}{m} - \frac{\sigma}{mE}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{4.12}$$

Обобщённый закон Гука устанавливает связь между тензорами деформации и напряжений. В главных осях $\overline{\overline{I}} = \mathbf{I} = \mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z$,

$$\overline{\overline{\mathrm{E}}} = \mathbf{E} = \mathbf{e}_x\mathbf{e}_x\varepsilon_x + \mathbf{e}_y\mathbf{e}_y\varepsilon_y + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\varepsilon_z, \quad \overline{\overline{P}} = \mathbf{P} = \mathbf{e}_x\mathbf{e}_x\sigma_x + \mathbf{e}_y\mathbf{e}_y\sigma_y + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\sigma_z,$$

$$\overline{\overline{\mathrm{E}}} = \frac{(m+1)}{mE}\overline{\overline{P}} - \frac{\sigma}{mE}\overline{\overline{I}}. \quad \leftrightarrow \tag{4.13}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial \xi^1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial \xi^1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial \xi^2}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial \xi^1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial \xi^3}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial \xi^1}\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial \xi^2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial \xi^3}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial \xi^3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial \xi^1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial \xi^3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial \xi^2}\right) & \dfrac{\partial u_3}{\partial \xi^3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_{xx}m - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}}{mE} & \dfrac{\sigma_{xy}(m+1)}{mE} & \dfrac{\sigma_{xy}(m+1)}{mE} \\ \dfrac{\sigma_{yx}(m+1)}{mE} & \dfrac{\sigma_{yy}m - \sigma_{zz} - \sigma_{xx}}{mE} & \dfrac{\sigma_{yz}(m+1)}{mE} \\ \dfrac{\sigma_{zx}(m+1)}{mE} & \dfrac{\sigma_{zy}(m+1)}{mE} & \dfrac{\sigma_{zz}m - \sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{mE} \end{pmatrix}.$$

Соотношения между первыми инвариантами тензоров напряжения и деформации

$$\varepsilon = \sigma\frac{m-2}{mE} \quad \to \quad \sigma = \varepsilon\frac{mE}{m-2} \tag{4.14}$$

позволяют решить (4.13) относительно $\overline{\overline{P}}$:

$$\overline{\overline{P}} = \frac{mE}{m+1}\overline{\overline{\mathrm{E}}} + \frac{\sigma}{m+1}\overline{\overline{I}} = \frac{mE}{m+1}\overline{\overline{\mathrm{E}}} + \frac{mE\,\varepsilon}{(m+1)(m-2)}\overline{\overline{I}}. \qquad (4.15)$$

Вместо модуля Юнга и коэффициента Пуассона Ламе (Lame G. 1795–1870) ввёл коэффициенты

$$\frac{mE}{m+1} = 2\mu, \quad \frac{mE}{(m+1)(m-2)} = \lambda, \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\mu+\lambda}, \quad m = \frac{2(\mu+\lambda)}{\lambda} \qquad (4.16)$$

и представил (4.15) в виде $\mathbf{P} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda\left(tr\mathbf{U}\right)\mathbf{I} \quad \leftrightarrow$ (4.17)

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right), & \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), & \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right), & 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right), & \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right), & \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right), & 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \end{pmatrix}$$

Используется также обозначение $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{mE}{3(m-2)}$ – модуль всестороннего сжатия: $\sigma = -3p = \varepsilon\frac{mE}{m-2} \quad \to \quad p = -K\varepsilon$.

Деформация называется однородной, если все компоненты тензора деформации постоянны по всему рассматриваемому объёму.

4.3.1. Простое растяжение (сжатие). Сила $\mathbf{F} = \mathbf{e}_3 F$, приложенная к свободному концу стержня, направлена по его продольной оси. На боковой поверхности $n_3 = 0$ и сил нет:

$$\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 = 0, \quad \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 = 0, \quad \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 = 0;$$

а на торцах $n_1 = n_2 = 0, \quad n_3 = 1$ и сила равномерно распределена по поверхности: $\sigma_{13}n_3 = 0, \quad \sigma_{23}n_3 = 0, \quad \sigma_{33}n_3 = F/S$.

При произвольных n_1 и n_2 получаем $\sigma_{11}=0, \quad \sigma_{22}=0, \quad \sigma_{12}=\sigma_{21}=0,$ $\sigma_{13}=\sigma_{31}=0, \quad \sigma_{23}=\sigma_{32}=0$. Единственная отличная от нуля компонента тензора напряжений – $\sigma_{33}=F/S$. По закону Гука (4.10)

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=-\frac{\sigma_{33}}{mE}, \quad \varepsilon_{33}=\frac{\sigma_{33}}{E}, \quad \left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}\right)=\frac{m-2}{mE}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right).$$

4.3.2. Состояние простого сдвига. В декартовой системе координат все компоненты тензора напряжений кроме $\sigma_{21}=\sigma_{12}\neq p$ равны нулю. Из закона Гука (4.10) получаем $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=\dfrac{\psi_{12}}{2}=\dfrac{m+1}{mE}p=\dfrac{p}{2\mu}$, где ψ_{12} – изменение угла между волокнами, лежавшими до деформации вдоль осей Ox_1, Ox_2. В связи с этим равенством иногда μ называют ***модулем сдвига***.

4.3.3. Всестороннее сжатие: $\sigma^{ij}=-pg^{ij} \quad \to \quad \sigma=-3p$. Согласно (4.14) $\varepsilon=\sigma\dfrac{m-2}{mE}=-3\dfrac{(m-2)}{mE}p=\dfrac{\Delta V}{V}$ или $p=-\dfrac{mE}{3(m-2)}\dfrac{\Delta V}{V}$. Величину

$K=\dfrac{mE}{3(m-2)}$ называют модулем объёмного сжатия. К несжимаемой среде $K=\infty, \quad \varepsilon=0$ можно прикладывать любое всестороннее давление, не вызывая деформаций. Всестороннее давление $p=K\varepsilon$ определяется только внешними условиями.

Для анизотропной среды при постоянной температуре обобщённый закон Гука записывается в виде

$$p^{ij}=A^{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{4.18}$$

где A^{ijkl} – коэффициенты упругости. Для изотропной среды коэффициенты A^{ijkl} выражаются через два коэффициента λ и μ, а обобщённый закон Гука при постоянной температуре записывается в виде

$$p^{ij}=\lambda I_1\left(\varepsilon^{ij}\right)g^{ij}+2\mu\varepsilon^{ij}, \tag{4.19}$$

где $I_1\left(\varepsilon^{ij}\right)=\varepsilon^{ij}g_{ij}$ – первый инвариант тензора напряжений.

Поскольку $I_1\left(p^{ij}\right)=p^{ij}g_{ij}=3\lambda I_1\left(\varepsilon^{ij}\right)+2\mu I_1\left(\varepsilon^{ij}\right)$ (4.13) можем записать в виде

$$\varepsilon^{ij}=\frac{p^{ij}}{2\mu}-\frac{\lambda g^{ij}}{2\mu(3\lambda+2\mu)}I_1\left(p^{ij}\right)=\frac{m+1}{mE}p^{ij}-\frac{g^{ij}}{mE}I_1\left(p^{ij}\right) \tag{4.20}$$

Изложенное выше справедливо при постоянной температуре среды. Однако сам процесс деформирования среды вообще сопровождается изменением её температуры. Кроме того, подвод или отвод тепла при помощи внешних источников приводит к деформированию среды и как следствие в некоторых ситуациях к появлению напряжений.

При нагревании изотропного тела произвольной формы в отсутствии сил все отрезки удлиняются одинаково и углы между ними не изменяются, а ***температурные деформации*** описываются равенствами $\varepsilon_{ij} = \alpha\left(T - T_0\right) g_{ij}$ – соотношения Дюамеля-Неймана. Обобщённый закон Гука, учитывающий изменение температуры изотропной среды, имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ij} &= \frac{p^{ij}}{2\mu} - \frac{\lambda g^{ij}}{2\mu\left(3\lambda + 2\mu\right)} I_1\left(p^{ij}\right) + \alpha\left(T - T_0\right) g_{ij} = \\ &= \frac{m+1}{mE} p^{ij} - \frac{g^{ij}}{mE} I_1\left(p^{ij}\right) + \alpha\left(T - T_0\right) g_{ij}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

При изменении температуры среды, заключенной в жесткую оболочку $\varepsilon^{ij} = 0$, возникают ***температурные напряжения***:

$$\begin{aligned} p^{ij} &= \frac{\lambda g^{ij}}{\left(3\lambda + 2\mu\right)} I_1\left(p^{ij}\right) - 2\mu\alpha\left(T - T_0\right) g_{ij} = \\ &= \frac{g^{ij}}{m+1} I_1\left(p^{ij}\right) - \frac{mE}{m+1} \alpha\left(T - T_0\right) g_{ij}. \end{aligned}$$

Температурные напряжения обычно велики, и, если не предусмотрена возможность свободной температурной деформации, конструкция может разрушиться.

4.4. Термодинамика деформирования

При деформировании среды силы внутренних напряжений совершают работу. Для любого выделенного объёма это будут поверхностные силы, которые по теореме Гаусса-Остроградского могут быть представлены как объёмные:

$$\oint_S \left(\mathbf{n} \cdot \overline{\overline{P}}\right) d\mathbf{S} = \oint_S n^k \sigma_{ki} \mathbf{e}^i dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} \mathbf{e}^i dV = \int_V \mathbf{F} dV \quad \rightarrow$$

$\rightarrow \quad F_i = \dfrac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k}, \quad \mathbf{F} = \operatorname{div} \mathbf{P}$ **.** По определению элементарной работы сил внутренних напряжений на изменениях малых перемещений $\delta \mathbf{u}$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_V \delta A dV &= \int_V \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} dV = \int_V \operatorname{div} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dV = \\ &= \int_V \operatorname{div}\left(\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u}\right) dV - \int_V \mathbf{p}_k \nabla_{\text{k}} \cdot \delta \mathbf{u} dV = \oint_S \left(\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u}\right) \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \mathbf{p}_k \nabla_{\text{k}} \cdot \delta \mathbf{u} dV. \end{aligned}$$

Полагая среду недеформированной на бесконечности $\mathbf{P}(r \to \infty) = 0$, имеем $\int_V \delta A dV = -\frac{1}{2}\int_V \left(\mathbf{P}\cdot\cdot\delta\nabla\mathbf{u} + \delta\nabla\mathbf{u}\cdot\cdot\mathbf{P}^T\right) dV$.

В силу симметрии тензора напряжений получаем

$$\delta A = -\mathbf{P}\cdot\cdot\delta\mathbf{E} = -\sigma_{ik}\delta\varepsilon_{ik}. \tag{4.22}$$

Деформации будем считать упругими, то есть по прекращению действия внешних сил тело возвращается в исходное недеформированное состояние. Будем также полагать, что процесс деформирования настолько медленным, что в теле успевает установиться состояние термодинамического равновесия, соответствующее внешним условиям.

Состояние системы считается равновесным, если с течением времени в ней не происходит никаких видимых изменений. Предполагается, что состояние системы можно описать несколькими макроскопическими – термодинамическими переменными. (например, давление, температура, внутренняя энергия).

В этом случае согласно первому началу термодинамики ***приращение внутренней энергии единицы объёма тела*** $dE_{внутр.}$ ***равно разности полученного извне тепла*** dQ_v ***и производимой силами внутренних напряжений работы*** dA_v:

$$dE_{внутр.} = dQ_v - dA_v = dQ_v + \mathbf{P}\cdot\cdot\delta\mathbf{E}. \tag{4.23}$$

Это равенство является основным термодинамическим тождеством для деформируемых тел. При обратимом процессе $dQ_v = T^\circ dS_v$, где T° – температура, а dS_v – энтропия единицы объёма недеформированного тела и, следовательно

$$dE_{внутр.} = T^\circ dS_v + \mathbf{P}\cdot\cdot\delta\mathbf{E}. \tag{4.24}$$

Если тензор напряжений равен $\mathbf{P} = -\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k p\delta^{jk}$, то (4.22) принимает вид

$$dE_{внутр.} = T^\circ dS_v - pdV.$$

Будем относить все термодинамические величины:

S_v – энтропию,

$E_{внутр.}$ – внутреннюю энергию,

$E_{свободн.} = E_{внутр.} - T^\circ S_v$ – свободную энергию,

$\Phi = E_{свободн.} - \mathbf{P}\cdot\cdot\mathbf{E}$ – термодинамический потенциал

к единице объёма. Далее получаем соотношения

$$dE_{свободн.} = -SdT^\circ + \mathbf{P}\cdot\cdot d\mathbf{E}, \quad d\Phi = -S_v dT^\circ - \mathbf{E}\cdot\cdot d\mathbf{P}. \tag{4.25}$$

Из (4.24) и (4.25) имеем

$$p_{jk} = \left(\frac{\partial E_{внутр.}}{\partial u_{jk}}\right)_{S=\mathrm{const}} = \left(\frac{\partial E_{свободн.}}{\partial u_{jk}}\right)_{T^\circ=\mathrm{const}}, \quad u_{jk} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_{jk}}\right)_{T^\circ=\mathrm{const}}.$$

Выше отмечалось, что компоненты тензора напряжений являются функциями не только компонент тензора деформаций, но и температуры: $\sigma^{ij} = f^{ij}\left(\varepsilon_{ij}, T^\circ\right)$. Этот факт связан с тем, что при изменении температуры помимо деформаций, вызванных напряжениями, возникают ***температурные деформации***, и для компонент тензора деформаций имеем равенства

$$u_{jk}\left(\varepsilon_{jk}\right) = \frac{m+1}{mE}\sigma_{jk} - \frac{\sigma}{mE}g_{jk} + \alpha\left(T^\circ - T^\circ{}_0\right)g_{jk}. \qquad (4.26)$$

Эти равенства называют ***обобщённым законом Гука при переменной температуре***, или ***соотношениями Дюамеля – Неймана***.

Если тело заключено в жёсткую оболочку, то есть $\varepsilon_{jk} = 0$, то при изменении температуры $\left(T^\circ - T^\circ{}_0\right) \neq 0$ возникают ***температурные напряжения***. В связи с этим все железные конструкции делают с зазорами, как чтобы при изменении температуры в них не возникали температурные напряжения, которые весьма велики.

В жидкости и газе $\quad \sigma_{ik} = -p\delta_{ik}, \quad \sigma_{ik}d\varepsilon_{ik} = -pd\varepsilon_{ii} = -p\dfrac{\Delta V}{V}$

и для единицы объёма $\qquad dE_{внутр.} = TdS_v - pdV$.

4.5. Задачи и методы линейной теории упругости

Можем подвести некоторый итог:

– имеем уравнение равновесия $\qquad \mathrm{div}\mathbf{P} = -\rho\mathbf{F}$;

– имеем закон Гука $\mathbf{E} = \dfrac{(m+1)}{mE}\mathbf{P} - \dfrac{1}{mE}(\mathrm{tr}\mathbf{P})\,\mathbf{I}, \quad \mathbf{P} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda\left(\mathrm{tr}\mathbf{E}\right)\mathbf{I},$

где $\quad \dfrac{mE}{m+1} = 2\mu, \quad \dfrac{mE}{(m+1)(m-2)} = \lambda, \quad E = \dfrac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\mu+\lambda}, \quad m = \dfrac{2(\mu+\lambda)}{\lambda};$

– если тело нагрето неравномерно, то в тензоре напряжений и тензоре деформаций появляются дополнительные члены

$$\mathbf{E} = \frac{(m+1)}{mE}\mathbf{P} - \frac{1}{mE}(\mathrm{tr}\mathbf{P})\,\mathbf{g} + \alpha\left(T^\circ - T^\circ{}_0\right)\mathbf{g},$$

$$\mathbf{P} = 2\mu\left[\mathbf{E} - \alpha\left(T^\circ - T^\circ{}_0\right)\mathbf{g}\right] + \lambda\left(\mathrm{tr}\mathbf{E}\right)\mathbf{I};$$

– имеем связь тензора деформации $\mathbf{E}$ с вектором перемещения $\mathbf{u}$ или соответствующее условие совместности Сен-Венана:

$$2\mathbf{E} = (\nabla\mathbf{u}) + (\nabla\mathbf{u})^T \quad \to \quad \nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})^T = 0 .$$

Отмечаем универсальность уравнений равновесия и условия Сен-Венана. Закон Гука отражает свойства материала и дополняет систему уравнений до замкнутой.

Поскольку по пространственным координатам имеем дифференциальные уравнения, то на поверхности тела должны быть заданы перемещения и усилия как функции координат.

Отмечаем три типа граничных условий:

– на поверхности задан вектор $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ (граничное условие первого рода), решению подлежит уравнение равновесия

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\mu+\lambda)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \rho\mathbf{g} = 0 ,$$

которое в силу тождества $\Delta\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ иногда удобно записывать в другом виде

$$(2\mu+\lambda)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} + \rho\mathbf{g} = 0 ,$$

условия совместности Сен-Венана выполнены тождественно;

– на поверхности задано распределение сил $\mathbf{n}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{p}_n(\mathbf{r})$ (граничное условие второго рода), условия совместности Сен-Венана с помощью закона Гука формулируются в напряжениях

$$\nabla\times\left\{\nabla\times\left[\frac{(m+1)}{mE}\mathbf{P} - \frac{1}{mE}(\mathrm{tr}\mathbf{P})\,\mathbf{I}\right]\right\}^T = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{P} = -\rho\mathbf{F} ;$$

– на одной части поверхности задан вектор $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, а на другой вектор $\mathbf{p}_n(\mathbf{r})$ (наиболее часто встречающиеся граничное условие третьего рода).

Перечисленные типы граничных условий, конечно, не исчерпывают всё многообразие условий на поверхности тела в реальных задачах.

Поскольку задачи теории упругости весьма сложны для аналитического решения используют различные упрощения. Например, принцип Сен-Венана: *при замене сил, действующих на участке поверхности тела, другими силами, имеющими такой же главный вектор и главный момент, при сохранении неизменными условий на остальной части поверхности тела, напряжения и перемещения в областях тела, достаточно удалённых от упомянутого участка, останутся практически неизменными.*

4.6. Уравнения линейной теории упругости в перемещениях. Уравнения Навье-Ламе

Уравнение баланса количества движения любой среды имеет вид

$$\rho \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \rho\mathbf{F} + \mathrm{div}\mathbf{P}\,. \qquad (4.27)$$

В этом уравнении

– значение плотности принимается неизменным: $\rho \approx \rho_0$;

– производная $\dfrac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$ упрощается:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{u} \approx \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}, \qquad \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \approx \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2};$$

– в силу закона Гука $\quad \mathrm{div}\,\mathbf{P} = 2\mu\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} + \lambda\,\mathrm{div}(\varepsilon\,\mathbf{I})$,

где $\quad 2\mathrm{div}\mathbf{E} = \mathrm{div}\left(\mathbf{e}_i \mathrm{grad}u_i + \mathbf{e}_i \dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i}\right) = \mathrm{grad}\varepsilon + \Delta\mathbf{u}$

и $\quad \mathrm{div}(\varepsilon\mathbf{I}) = \mathrm{grad}\varepsilon$, то есть $\quad \mathrm{div}\mathbf{P} = \mu\Delta\mathbf{u} + (\mu+\lambda)\mathrm{grad}\varepsilon$

и уравнение динамики (4.27) записанное в виде

$$\rho_0 \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho_0\mathbf{F} + \mu\Delta\mathbf{u} + (\mu+\lambda)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} \qquad (4.28)$$

называют уравнением Навье – Ламе.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \qquad \rho\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \rho\mathbf{F} + \mu\Delta\mathbf{u} + (\mu+\lambda)\mathrm{graddiv}\,\mathbf{u}\,.$$

Тождество $\quad \Delta\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u} - \mathrm{rotrot}\,\mathbf{u} \quad$ позволяет записать это уравнение в виде $\quad \rho\dfrac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \rho\mathbf{F} + (2\mu+\lambda)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u} - \mu\mathrm{rotrot}\,\mathbf{u}$:

Полагая $\dfrac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = 0$, получаем уравнение равновесия в виде

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\mu+\lambda)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = -\rho\mathbf{F} \qquad \text{или}$$

$$(2\mu+\lambda)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \mu\mathrm{rotrot}\,\mathbf{u} = -\rho\mathbf{F}$$

Наиболее часто рассматриваются деформации, вызванные не объёмными силами вследствие их малости, а силами, приложенными к поверхности тела, то есть внешние силы входят в решение только через граничные условия. Имеем уравнение

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\mu+\lambda)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0\,. \qquad \text{или}$$

$$\left(2\mu+\lambda\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}-\mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}=0$$

Если тело нагрето неравномерно, то в тензоре напряжений и тензоре деформаций появляются дополнительные члены и имеем уравнение равновесия в виде $\left(2\mu+\lambda\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}-\mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}=\mu\alpha\operatorname{grad}T^{\circ}$.

4.7. Задачи

4.7.1. Найти главные напряжения и ориентацию главных осей для напряженного состояния, описываемого тензором напряжений с компонентами $p_{11}, p_{12}=p_{21}, p_{22}$ отличными от нуля. Остальные компоненты равны нулю. Построить круги Мора. Найти максимальное касательное напряжение на площадке с нормалью $\mathbf{e}^3$.

4.7.2. Найти главные напряжения и ориентацию главных осей для напряженного состояния чистого сдвига, описываемого тензором напряжений с компонентами $p_{12}=p_{21}\neq 0$. Остальные компоненты равны нулю.

4.7.3. Для состояния чистого сдвига и состояния гидростатического сжатия построить круги Мора.

4.7.4. В главных осях тензора напряжений найти максимальные касательные напряжения на площадках с нормалями
$\mathbf{n}\left(0,n_2,n_3\right),\quad \mathbf{n}\left(n_1,0,n_3\right),\quad \mathbf{n}\left(n_1,n_2,0\right)$

5. КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

5.1. Производная по направлению

Производной функции $f\left(\mathbf{r}\right)$ по направлению вектора $\mathbf{e}=\mathbf{e}_j\alpha^j$ в точке $\mathbf{r}=\mathbf{e}_j q^j$ называют предел отношения

$$\frac{\partial f\left(\mathbf{r}\right)}{\partial\mathbf{e}}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{f\left(\mathbf{r}+\mathbf{e}ds\right)-f\left(\mathbf{r}\right)}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta s}.$$

Для вычисления этой производной разность Δf представим в виде

$$\Delta f=f\left[\mathbf{e}_j\left(q^j+\alpha^j ds\right)\right]-f\left(\mathbf{e}_j q^j\right)\approx\frac{\partial f}{\partial q^j}dq^j.$$

Поскольку $dq^j=\alpha^j ds=ds\,\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^j$ получаем

$$\Delta f=ds\,\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^j\,\partial f/\partial q^j=ds\left(\mathbf{e}\cdot grad\right)f.$$

Итак, производная функции $f(\mathbf{r})$ по направлению вектора $\mathbf{e}$ в точке $\mathbf{r}$ равна проекции вектора $\mathrm{grad}\, f = \nabla f = \mathbf{e}^j\, \partial f / \partial q^j$ на направление вектора $\mathbf{e}$: $\dfrac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}} = (\mathbf{e} \cdot grad)\, f = (\mathbf{e} \cdot \nabla)\, f$. (5.1)

5.2. Скорость изменения характеристики f

В механике под скоростью изменения какой-либо характеристики f понимают её производную по времени df/dt. Сами характеристики в зависимости от описания имеют разное смысловое содержание. Лагранжево описание даёт характеристику конкретной частицы, а эйлерово – характеристику частицы в заданной точке пространства. В связи с этим независимо от описания различают два типа производных по времени.

Индивидуальная производная, ***субстанциональная***, ***полная производная*** (производная характеристики конкретной частицы).

При лагранжевом описании имеем $\dfrac{df(t,\xi)}{dt} = \dfrac{\partial f(t,\xi)}{\partial t}$; каждая частица снабжена прибором, измеряющим значение f, таймером и вычислителем, определяющим значение предела

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t, \xi) - f(t,\xi)}{\Delta t}.$$

При эйлеровом описании $f(t,q)$ в разные моменты времени в точке с координатами q^j, $j = 1,2,3$ находятся разные частицы. Чтобы вычислить скорость изменения характеристики конкретной частицы следует учесть то, что в момент времени $t + \Delta t$ она будет находиться в точке пространства с координатами $q^j + v^j \Delta t$:

$$\frac{df(t,q)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f\left(t+\Delta t, q^1 + v^1 \Delta t, q^2 + v^2 \Delta t, q^3 + v^3 \Delta t\right) - f\left(t, q^1, q^2, q^3\right)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + v^j \frac{\partial f}{\partial q^j} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathrm{grad})\, f = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\, f \qquad (5.2)$$

В этом выражении величина $v^i\, \partial f / \partial q^i = (\mathbf{v} \cdot grad)\, f$ называется *конвективной производной*.

Местная производная (производная характеристики в точке пространства).

В пространстве фиксируется некоторая точка. Через эту точку проходят разные частицы. Производная по времени характеристики f частицы, находящейся в фиксированной точке пространства называется ***местной*** (***локальной***) ***производной***. При эйлеровом описании $f(t,q)$ координаты фиксированы и

$$\frac{df\left(t,q\right)}{dt}=\frac{\partial f\left(t,q\right)}{\partial t}.$$

При лагранжевом описании имеем $f\left(t,\xi\right)$. В фиксированной точке пространства в разные моменты времени оказываются разные частицы, с разными значениями параметров $\xi^k,\ k=1,2,3$, которые в рассматриваемой ситуации следует рассматривать как функции времени:

$$\frac{df\left(t,\xi\right)}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial \xi^k}\frac{d\xi^k}{dt}.$$

Это выражение станет значимым, если укажем значения производных $d\xi^k/dt,\quad j=1,2,3$.

При лагранжевом описании имеем закон движения частиц $q^j=q^j\left(t,\xi\right),\quad j=1,2,3$. Учитывая, что координаты q^j зафиксированы, продифференцируем по времени эти равенства:

$$\frac{\partial q^j}{\partial t}+\frac{\partial q^j}{\partial \xi^k}\frac{d\xi^k}{dt}=0,\quad j=1,2,3.$$

Имеем неоднородную систему, якобиан которой отличен от нуля.

Её решение $$\frac{d\xi^k}{dt}=-\frac{\det\left(\partial q^i/\partial\xi^j\right)_{\xi^k=t}}{\det\left(\partial q^i/\partial\xi^j\right)},\quad k=1,2,3$$

позволяет записать искомую локальную производную в виде

$$\frac{df\left(t,\xi\right)}{dt}=\left[\frac{\partial f}{\partial t}\det\left(\frac{\partial q^i}{\partial\xi^j}\right)-\frac{\partial f}{\partial\xi^k}\det\left(\frac{\partial q^i}{\partial\xi^j}\right)_{\xi^k=t}\right]\Bigg/\det\left(\frac{\partial q^i}{\partial\xi^j}\right). \qquad (5.3)$$

Течение называется ***установившимся*** или ***стационарным***, если в каждой фиксированной точке пространства все характеристики не зависят от времени. В противном случае движение называется ***неустановившимся***.

В переменных Эйлера $\dfrac{df}{dt}=\dfrac{\partial f}{\partial t}=0\quad\rightarrow\quad f=f\left(q\right)$.

В переменных Лагранжа для местной производной имеем (5.3) и признаком установившегося движения является равенство

$$\frac{\partial f}{\partial t}\det\left(\frac{\partial q^i}{\partial \xi^j}\right)-\frac{\partial f}{\partial \xi^k}\det\left(\frac{\partial q^i}{\partial \xi^j}\right)_{\xi^k=t}=0\ .$$

Скорость частицы есть индивидуальная производная по времени радиуса-вектора: $\mathbf{v}(t,\xi)=\dfrac{\partial \mathbf{r}(t,\xi)}{\partial t}$,

а ускорение – индивидуальная производная по времени скорости:

$$\mathbf{w}(t,\xi)=\frac{\partial \mathbf{v}(t,\xi)}{\partial t}=\frac{\partial^2 \mathbf{r}(t,\xi)}{\partial t^2},$$

либо в переменных Эйлера $\mathbf{v}\left[q(t)\right]$,

$$\mathbf{w}(t,q)=\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot grad)\,\mathbf{v}=\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}.$$

5.3. Распределение скоростей в малом объёме сплошной среды. Примеры поля скоростей

Рассматривая производную вектора $\mathbf{f}$ по вектору $\mathbf{r}$, отметили, если $\mathbf{f}\equiv\mathbf{v}$ – поле скоростей, то $\partial\mathbf{v}/\partial\mathbf{r}$ – тензор скоростей деформаций и

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}\cdot d\mathbf{r}=\mathbf{F}_S\cdot d\mathbf{r}+\mathbf{F}_A\cdot d\mathbf{r}=gradU\big|_{\mathbf{r}=d\mathbf{r}}+(\mathbf{I}\times\boldsymbol{\omega})\cdot d\mathbf{r}\,,$$

где $\mathbf{F}_S\cdot d\mathbf{r}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \mathbf{r}}+\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}\right)\cdot d\mathbf{r}=gradU\big|_{\mathbf{r}=d\mathbf{r}}=\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}=$

$$=\mathbf{e}_1\left[\frac{\partial v^1}{\partial x^1}dx^1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^1}{\partial x^2}+\frac{\partial v^2}{\partial x^1}\right)dx^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^1}{\partial x^3}+\frac{\partial v^3}{\partial x^1}\right)dx^3\right]+$$
$$+\mathbf{e}_2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^2}{\partial x^1}+\frac{\partial v^1}{\partial x^2}\right)dx^1+\frac{\partial v^2}{\partial x^2}dx^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^2}{\partial x^3}+\frac{\partial v^3}{\partial x^2}\right)dx^3\right]+$$
$$+\mathbf{e}_3\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^3}{\partial x^1}+\frac{\partial v^1}{\partial x^3}\right)dx^1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^3}{\partial x^2}+\frac{\partial v^2}{\partial x^3}\right)dx^2+\frac{\partial v^3}{\partial x^3}dx^3\right],$$

и отличные от нуля компоненты тензора $\mathbf{F}_A$ обозначены как компоненты бивектора вихря $2\boldsymbol{\omega}=\operatorname{rot}\mathbf{v}$:

$$\mathbf{F}_A=\boldsymbol{\Omega}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \mathbf{r}}-\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}\right)=\mathbf{I}\times\boldsymbol{\omega}\quad\leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$
=\begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^1}{\partial x^2}-\frac{\partial v^2}{\partial x^1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^1}{\partial x^3}-\frac{\partial v^3}{\partial x^1}\right) \\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^2}{\partial x^1}-\frac{\partial v^1}{\partial x^2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^2}{\partial x^3}-\frac{\partial v^3}{\partial x^2}\right) \\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^3}{\partial x^1}-\frac{\partial v^1}{\partial x^3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^3}{\partial x^2}-\frac{\partial v^2}{\partial x^3}\right) & 0
\end{pmatrix},
$$

$$
\mathbf{I}=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 \qquad \text{и}
$$

$$
2\boldsymbol{\omega}=\mathbf{e}_1\left(\frac{\partial v^3}{\partial x^2}-\frac{\partial v^2}{\partial x^3}\right)+\mathbf{e}_2\left(\frac{\partial v^1}{\partial x^3}-\frac{\partial v^3}{\partial x^1}\right)+\mathbf{e}_3\left(\frac{\partial v^2}{\partial x^1}-\frac{\partial v^1}{\partial x^2}\right)=
$$

$$
=\begin{vmatrix}
\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\
\partial/\partial x^1 & \partial/\partial x^2 & \partial/\partial x^3 \\
v^1 & v^2 & v^3
\end{vmatrix}=\nabla\times\mathbf{v}=\operatorname{rot}\mathbf{v}.
$$

Если частицы движутся как твёрдое тело, то есть $gradU\big|_{\mathbf{r}=d\mathbf{r}}=0$, то углы между материальными отрезками вдоль главных осей остаются прямыми, а сами оси вращаются как твёрдое тело с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Имеет место замечательная формула

$$
\nabla_m\Omega_{ij}=\nabla_i e_{mj}-\nabla_j e_{mi}, \qquad \text{где}
$$

$$
\Omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j-\nabla_j v_i\right), \qquad e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j+\nabla_j v_i\right).
$$

Поскольку допустимо изменение порядка дифференцирования при вычислении вторых производных по координатам, непосредственные вычисления дают

$$
\mathbf{2}\nabla_m\Omega_{ij}=\nabla_m\nabla_i v_j-\nabla_m\nabla_j v_i=
$$

$$
=\nabla_i\nabla_m v_j+\underline{\nabla_i\nabla_j v_m}-\nabla_j\nabla_m v_i-\underline{\nabla_j\nabla_i v_m}=
$$

$$
=\mathbf{2}\left(\nabla_i e_{mj}-\nabla_j e_{mi}\right).
$$

Таким образом, если во всей области $e_{ij}=0$, то $\nabla_m\Omega_{ij}=0$, то есть вектор вихря не зависит от координат. Рассматриваемая область движется как абсолютно твёрдое тело. Имеем вихревое движение, если $\mathbf{\Omega}\neq 0$. Движение называют безвихревым, если $\mathbf{\Omega}=0$.

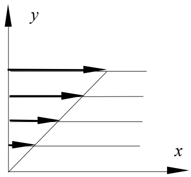
Движение называют потенциальным, если существует потенциал скорости и $\mathbf{v}=\operatorname{grad}\Phi$. В этом случае $2\boldsymbol{\omega}=\operatorname{rot}\mathbf{v}=\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi=0$. Верно и обратное: если $\mathbf{\Omega}=0$, то есть

$$\Omega_x = 0 \quad \to \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \Omega_y = 0 \quad \to \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y},$$

$$\Omega_z = 0 \quad \to \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

тогда форма $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = v_x dx + v_y dy + v_z dz = d\Phi$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции Φ. Таким образом, ***всякое без вихревое движение является потенциальным, а всякое потенциальное – безвихревым***.

1. В теоретической механике с понятием угловой скорости связано вращение среды как твёрдого тела. Однако в механике сплошной среды в силу определения вектора вихря, движение может быть вихревым и в том случае, если все частицы движутся по параллельным прямым траекториям. В качестве примера рассмотрим течение, в котором



$v_x = ay, \quad v_y = v_z = 0, \quad a = \text{const}$.

Все частицы движутся по прямым, параллельным оси Ox. Компоненты бивектора вихря имеют значения

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\frac{a}{2}.$$

Построим тензор скоростей деформаций $\quad e_{xx} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} = 0,$

$$e_{yy} = e_{zz} = e_{xz} = e_{yz} = 0, \quad e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) = \frac{a}{2}.$$

Главные значения и оси определяются системой уравнений

$$\begin{matrix} -2\lambda u_x + a u_y = 0, \\ a u_x - 2\lambda u_y = 0, \end{matrix} \quad \to \quad \lambda_1 = \frac{a}{2}, \quad \begin{matrix} u_{1x} = 1, \\ u_{1y} = 1, \end{matrix} \quad \lambda_2 = -\frac{a}{2}, \quad \begin{matrix} u_{2x} = -1, \\ u_{2y} = 1. \end{matrix}$$

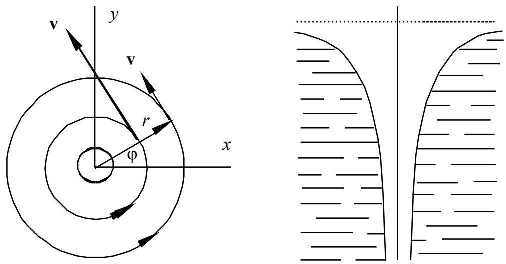
Отрезки параллельные оси Ox вообще не поворачиваются, а отрезки, направленные по главным осям тензора скоростей деформаций, то есть под углом $\pm 45^\circ$ к оси Ox поворачиваются с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_z \omega_z$.

2. Течение, называемое ***точечный вихрь***, представляет собой без вихревое движение с круговыми траекториями:

$\Phi = k \operatorname{arctg}(y/x)$, $k = \text{const}$, $\quad \mathbf{v} = \operatorname{grad}\Phi$. Вычислим компоненты скорости: $\quad v_x = -\dfrac{ky}{x^2+y^2}, \quad v_y = \dfrac{kx}{x^2+y^2}, \quad v_z = 0, \quad v = \dfrac{k}{r}$.

Для точек на траекториях $d\mathbf{r} \,//\, \mathbf{v}$ имеем

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad \to \quad \frac{dx}{-ky} = \frac{dy}{kx} \quad \to \quad x^2 + y^2 = \mathrm{const}\,.$$



Отличие от движения твёрдого тела состоит в том, что скорость бесконечно возрастает при стремлении радиуса траекторий к нулю. Именно такое распределение скоростей наблюдается в смерчах. Давление в области оси смерча существенно меньше чем на периферии. Этим объясняется его всасывающее действие.

Формально вычисление циркуляции по окружности с центром в начале координат даёт $\oint_C v_s ds = \int_0^{2\pi} \dfrac{k}{r} r d\varphi = 2\pi k \neq 0$. Этот результат противоречит условию безвихревого движения. Дело в том, что для данного течения формула Стокса не применима. Не существует поверхности, которую можно было бы натянуть на контур так, чтобы скорость и её производные везде на этой поверхности были определены.

Говорят, что течение, описываемое потенциалом $\Phi = k\,\mathrm{arctg}\left(y/x\right), \quad k = \mathrm{const},$ всюду потенциально, кроме точек оси Oz, где имеется вихрь бесконечно большой величины. Реально такой поток возможен только вне некоторого ядра конечного диаметра. Ядро может быть образовано твёрдым телом или вращающейся жидкостью, движение которой не потенциально, наконец, оно может быть образовано менее плотной жидкостью, которая не принимает участие во вращении. Примером последнего является полый водяной вихрь, в котором вода совершает движение вокруг ядра из воздуха.

Пример. *Движение среды происходит по закону*

$$x=\xi_1\left(1+\frac{t}{\tau}\right),\quad y=\xi_2\left(1-\frac{t^2}{\tau^2}\right)^{-1},\quad z=\xi_3\quad(\tau=\mathrm{const}>0).$$

Найти поле скоростей. В поле скоростей выделить деформацию и вращение.

Решение. Имеем поле скоростей в лагранжевом и эйлеровом описаниях

$$v_k(\xi,t)=\frac{dx_k(\xi,t)}{dt},\qquad v_k(x,t)=v_k\left[\xi(x,t),t\right]:$$

$$v_x(\xi,t)=\frac{\xi_1}{\tau},\qquad v_y(\xi,t)=\xi_2\left(1-\frac{t^2}{\tau^2}\right)^{-2}\frac{2t}{\tau^2},\quad v_z(\xi,t)=0;$$

$$v_x(x,t)=\frac{x}{\tau}\left(1+\frac{t}{\tau}\right)^{-1},\quad v_y(x,t)=y\left(1-\frac{t^2}{\tau^2}\right)^{-1}\frac{2t}{\tau^2},\quad v_z(x,t)=0.$$

По определению $$\nabla\mathbf{v}=\mathbf{i}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}=\mathbf{F}_A+\mathbf{F}_S=$$

$$=\mathbf{ii}\frac{1}{\tau}\left(1+\frac{t}{\tau}\right)^{-1}+\mathbf{jj}\left(1-\frac{t^2}{\tau^2}\right)^{-1}\frac{2t}{\tau^2}.$$

Тензор симметричен $2\mathbf{F}_S=(\nabla\mathbf{v})^T-\nabla\mathbf{v}=0$, вращение отсутствует.

Диагональные компоненты тензора $2\mathbf{F}_A=(\nabla\mathbf{v})^T+\nabla\mathbf{v}$ есть слагаемые, из которых формируется

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{t}{\tau}\right)^{-1}.$$

Итак, исследование движений сплошной среды предполагает индивидуализацию её точек (введение лагранжевых координат), то есть всегда наряду с системой координат, относительно которой рассматривается движение, вводится ещё и сопутствующая система координат.

Помимо локальных характеристик поля, описывающих состояние среды, часто используются его интегральные характеристики. К ним относятся поверхности уровня скалярного поля, векторные линии и трубки, потоки и др. Будем исходить из следующего определения.

Линией векторного поля* $\mathbf{A}$ (*интегральной кривой*) *называется линия* $\mathbf{r}(\lambda)$, *касательный вектор к которой в каждой точке

совпадает с вектором поля в этой точке: $\frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} = \mathbf{A}\left[\mathbf{r}(\lambda)\right]$ (λ – ***параметр***).

Теорема существования и единственности решений этого векторного уравнения позволяет утверждать, что через каждую точку пространства, в которой $\mathbf{A} \neq 0$, проходит одна и только одна линия поля. Точки, в которых $\mathbf{A} = 0$, являются ***критическими***. В критических точках нарушается единственность решения задачи Коши и линии поля могут пересекаться, разветвляться.

Линии поля $\mathbf{A}$, ***проходящие через замкнутый контур*** C, ***образуют полевую трубку***.

Полевая трубка называется элементарной, если вектор $\mathbf{A}$ ***одинаков во всех точках ортогонального сечения трубки***.

Одинаковый во всех точках ориентированной элементарной поверхности $d\boldsymbol{\sigma}$ ***вектор*** $\mathbf{A}$ ***образует элементарный поток векторного поля*** $d\Phi_A = \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$.

Поток, который нельзя считать элементарным, определяется интегралом $\Phi_A = \int_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$.

В случае поля скоростей линии поля называют ***линиями тока***, а полевую трубку – ***трубкой тока.***

Как правило, линии тока не совпадают с траекториями частиц. Очевидным исключением являются стационарные течения, для которых $\partial\mathbf{v}/\partial t = 0$. Для стационарных течений частицы, образующие трубку тока в начальный момент, остаются внутри этой трубки и далее.

Для несжимаемой среды, например жидкости, поток вектора скорости через замкнутую поверхность, ограничивающую произвольный эйлеров объём, равен нулю: $\int_S \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_V (\operatorname{div}\mathbf{v}) dV = 0$.

В силу произвольности объёма это условие эквивалентно соленоидальности поля скоростей: $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, и, следовательно, представимости его в виде ротора некоторой вектор-функции.

Далее будем иметь дело с ***бивектором вихря*** $2\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{v}$. Поскольку $\operatorname{div}\boldsymbol{\omega} \equiv 0$ заключаем, что поток вихря через любую замкнутую поверхность равен нулю. Выбирая в качестве объёма часть трубки вихря между двумя произвольными её сечениями, получаем утверждение, которое известно, как первая теорема Гельмгольца: ***поток вихря через сечение вихревой трубки*** (***интенсивность вихревой трубки***) ***в данный момент времени постоянен вдоль трубки*** $\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \text{const}$.

Теорема Стокса $\int_S \operatorname{rot}\mathbf{v}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\oint_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$ позволяет это утверждение сформулировать иначе: ***циркуляция вектора скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему вихревую трубку в заданный момент времени, постоянна вдоль трубки***.

Важным является понятие вмороженного векторного поля. ***Вмороженным называется векторное поле, линии (интегральные кривые) которого в любой момент времени проходят через одни и те же частицы среды***: $\delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(\lambda+\delta\lambda)-\mathbf{r}(\lambda)=\mathbf{A}(\lambda)\delta\lambda$.
(*)

Теорема Фридмана: ***необходимым и достаточным условием вмороженности векторного поля*** $\mathbf{A}$ ***и сохранения потока через произвольный замкнутый жидкий контур является выполнение равенства*** $\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{A}}{\rho}\right)-\left(\frac{\mathbf{A}}{\rho}\nabla\right)\mathbf{v}=0,$ ***где*** $\rho-$ ***плотность и*** $\mathbf{v}-$ ***скорость частиц среды***.

Необходимость. Пусть $\mathbf{r}(\lambda)-$ линия поля $\mathbf{A}$. Вмороженность поля означает $\delta\mathbf{r}=\mathbf{A}(\lambda)\delta\lambda$ и сохранение потока $\mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\text{const}$. Сохраняется также масса, содержащаяся в бесконечно малом элементе элементарной трубки между сечениями линии тока в точках $\mathbf{r}(\lambda+\delta\lambda)$ и $\mathbf{r}(\lambda)$:

$$\delta m=\rho(\lambda)\left[\mathbf{r}(\lambda+\delta\lambda)-\mathbf{r}(\lambda)\right]\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\delta\lambda\,\rho(\lambda)\mathbf{A}(\lambda)\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\text{const}.$$

Из этих фактов следует, что $\delta\lambda\,\rho(\lambda)=\text{const}\ \rightarrow\ \delta\lambda=\dfrac{\text{const}}{\rho(\lambda)}$.

Дифференцируя по времени равенство (*), получаем

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{A}(\lambda)\delta\lambda\right]=\mathbf{v}(\lambda+\delta\lambda)-\mathbf{v}(\lambda)=\delta\lambda(\mathbf{A}\nabla)\mathbf{v}(\lambda)$$

или $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{A}}{\rho}\right)-\left(\frac{\mathbf{A}}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}=0.$$

Достаточность. Пусть $\mathbf{r}(\lambda,t)-$ интегральная кривая в момент времени t, то есть $\delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(\lambda+\delta\lambda)-\mathbf{r}(\lambda)=\mathbf{A}(\lambda)\delta\lambda$ и векторное поле $\mathbf{A}$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mathbf{A}}{\rho}\right)-\left(\dfrac{\mathbf{A}}{\rho}\nabla\right)\mathbf{v}=0$.

Надо доказать, что частицы среды, которые в момент t находились на линии поля, образуют интегральную кривую и в момент $t+dt$.

Величины, рассматриваемые в момент $t+dt$ будем отмечать штрихом. Поскольку за время dt точки линии $\mathbf{r}(\lambda,t)$ переместятся на $\mathbf{v}(\lambda)dt$ заключаем, что $\dfrac{d\delta\mathbf{r}}{dt}=\delta\lambda(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{v}$,

$$\delta\mathbf{r}'=\mathbf{r}'(\lambda+\delta\lambda)-\mathbf{r}'(\lambda)=\delta\mathbf{r}+\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt}dt=\mathbf{A}\delta\lambda+\delta\lambda(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{v}dt$$

и далее $\dfrac{\delta\mathbf{r}'}{\delta\lambda}=\rho\left[\dfrac{\mathbf{A}}{\rho}+\left(\dfrac{\mathbf{A}}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}dt\right]$.

В силу равенства Фридмана $\left(\dfrac{\mathbf{A}}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}dt=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mathbf{A}}{\rho}\right)dt$ имеем

$$\frac{\delta\mathbf{r}'}{\delta\lambda}=\rho\left[\frac{\mathbf{A}}{\rho}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{A}}{\rho}\right)dt\right]=\rho\left(\frac{\mathbf{A}'}{\rho'}\right).$$

Параметризацию всегда можно изменить так, чтобы выполнялось равенство $\rho d\lambda=\rho' d\lambda'$. (**)

Итак, получили $\delta\mathbf{r}'=\mathbf{A}'\delta\lambda'$. Доказанная вмороженность означает также сохранение массы внутри отрезка элементарной векторной трубки между сечениями, обозначенными λ и $\lambda+\delta\lambda$:

$$\frac{d}{dt}(\rho\delta\lambda\mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{\sigma})=0.$$

Равенство (**) означает сохранение величины $\rho d\lambda$ и, следовательно, $\mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\mathrm{const}$. Теорема доказана.

5.4. Тензор скоростей деформаций и его инварианты

Тензор скоростей деформаций, как и тензор деформаций, вводится в каждой точке среды. ***Компоненты тензора скоростей деформаций в лагранжевых переменных определяются соотношениями*** ${}_{\xi}e_{ij}=\dfrac{d_{\xi}\varepsilon_{ij}}{dt}$ $(i,j=1,2,3)$. При этом рассматриваются деформации малой области среды, содержащей точку с координатами ξ^i, за время Δt. Для таких деформаций начальным состоянием является состояние в момент времени t, а конечным – состояние в момент $t+\Delta t$, поэтому при $\xi^i=\mathrm{const},\quad j=1,2,3$

$$\Delta_{\xi}\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left[g_{ij}(t+\Delta t,\xi)-g_{ij}(t,\xi)\right]\ \rightarrow\ {}_{\xi}e_{ij}=\frac{d_{\xi}\varepsilon_{ij}}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d_{\xi}g_{ij}}{dt}\quad(5.4)$$

В пространственной системе координат $g_{ij}(q)$. Связь между лагранжевыми и эйлеровыми переменными определена законом движения $q^j = q^j(t,\xi)$ и ${}_\xi\varepsilon_{ij} = {}_q\varepsilon_{sk}\dfrac{\partial q^s}{\partial \xi^i}\dfrac{\partial q^k}{\partial \xi^j}$. Продифференцируем по времени это выражение для ${}_\xi\varepsilon_{ij}$: $\quad {}_\xi e_{ij} = \dfrac{d\,{}_\xi\varepsilon_{ij}}{dt} =$

$$= \left(\frac{d\,{}_q\varepsilon_{sk}}{dt}\right)\frac{\partial q^s}{\partial \xi^i}\frac{\partial q^k}{\partial \xi^j} + {}_q\varepsilon_{sk}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial q^s}{\partial \xi^i}\right)\frac{\partial q^k}{\partial \xi^j} + {}_q\varepsilon_{sk}\frac{\partial q^s}{\partial \xi^i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial q^k}{\partial \xi^j}\right) =$$

$$= \left(\frac{d\,{}_q\varepsilon_{sk}}{dt}\right)\frac{\partial q^s}{\partial \xi^i}\frac{\partial q^k}{\partial \xi^j} + {}_q\varepsilon_{sk}\frac{\partial v^s}{\partial \xi^i}\frac{\partial q^k}{\partial \xi^j} + {}_q\varepsilon_{sk}\frac{\partial q^s}{\partial \xi^i}\frac{\partial v^k}{\partial \xi^j} =$$

$$= \left(\frac{d\,{}_q\varepsilon_{sk}}{dt}\right)\frac{\partial q^s}{\partial \xi^i}\frac{\partial q^k}{\partial \xi^j} + {}_q\varepsilon_{sk}\frac{\partial v^s}{\partial q^m}\frac{\partial q^m}{\partial \xi^i}\frac{\partial q^k}{\partial \xi^j} + {}_q\varepsilon_{sk}\frac{\partial q^s}{\partial \xi^i}\frac{\partial v^k}{\partial q^m}\frac{\partial q^m}{\partial \xi^j}.$$

При вычислении этой производной учтено, что

– дифференцирование по t при $\xi^i = \text{const}$, $\;i = 1,2,3$ перестановочно с производной по ξ^i, $\;i = 1,2,3$;

– $\left(\dfrac{dq^j}{dt}\right)_{\xi=\text{const}} = \left(\dfrac{\partial q^j}{\partial t}\right)_{\xi=\text{const}} = v^j$.

Переходя к эйлеровым переменным, получаем

$$ {}_q e_{\alpha\beta} = {}_\xi e_{ij}\frac{\partial \xi^i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial \xi^j}{\partial q^\beta} = \frac{d\,{}_q\varepsilon_{\alpha\beta}}{dt} + {}_q\varepsilon_{s\beta}\frac{\partial v^s}{\partial q^\alpha} + {}_q\varepsilon_{\alpha k}\frac{\partial v^k}{\partial q^\beta} \approx \frac{d\,{}_q\varepsilon_{\alpha\beta}}{dt}. \quad (5.5)$$

Выражения для компонент тензора скоростей деформаций через компоненты вектора скорости получим, обращаясь к (4.18) и (4.20), (4.21)

$$ {}_\xi\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{Du_{tj}}{D\xi^i} + \frac{Du_{0j}}{D\xi^i}\right) \quad \to \quad {}_\xi e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{Dv_{tj}}{D\xi^i} + \frac{Dv_{0j}}{D\xi^i}\right),$$

$$ {}_q\overset{0}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{Du_{tj}}{Dq^{0i}} + \frac{Du_{0j}}{Dq^{0i}}\right) \quad \to \quad {}_q\overset{0}{e}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{Dv_{tj}}{Dq^{0i}} + \frac{Dv_{0j}}{Dq^{0i}}\right),$$

$$ {}_q\overset{t}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{Du_{tj}}{Dq^{ti}} + \frac{Du_{0j}}{Dq^{ti}}\right) \quad \to \quad {}_q\overset{t}{e}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{Dv_{tj}}{Dq^{ti}} + \frac{Dv_{0j}}{Dq^{ti}}\right).$$

Поскольку начальным состоянием является состояние в момент времени t, а конечным – состояние в момент $t + \Delta t$, то эти формулы следует рассматривать как связь между компонентами тензора деформации и вектора перемещения в один и тот же момент времени. Но, если имеем дело с одним моментом времени, то нет различия между лагранжевой и эйлеровой системами координат. Лагранжеву систему можно выбрать так, чтобы в рассматриваемый момент времени она совпадала с эйлеровой:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{Du_j}{D\xi^i} = \frac{Du_j}{Dq^i}, \quad e_{ij} = \frac{Dv_j}{D\xi^i} = \frac{Dv_j}{Dq^i} .$$

??? Симметричную квадратичную форму e_{ij} можно привести к диагональному виду. Для выяснения физического смысла величин e_{ij} рассмотрим частные случаи.

Пусть $e_{xx} \neq 0$, а все остальные компоненты тензора скоростей деформаций равны нулю $e_{ij} = 0$. ???

5.5. Скорость относительного изменения объёма среды

Скоростью относительного изменения объёма при движении среды называют производную $\frac{d\theta}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$, где $\Delta\theta = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta V(t+\Delta t) - \Delta V(t)}{\Delta V(t)} = I_1(\Delta\varepsilon_{ij}) = g^{ij}\Delta\varepsilon_{ij}$ – коэффициент относительного изменения объёма, которое произошло за время Δt. Компоненты тензоров деформации и скоростей деформации связаны формулой $e_{ij} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varepsilon_{ij}}{\Delta t}$ поэтому имеем

$$\frac{d\theta}{dt} = g^{ij}e_{ij} = I_1(e_{ij}). \qquad (5.6)$$

Поскольку $e_{ij} = \frac{Dv_j}{D\xi^i} = \frac{Dv_j}{Dq^i}$ получаем

$$\frac{d\theta}{dt} = I_1\left(\frac{Dv_j}{Dq^j}\right) = \operatorname{div} \mathbf{v} . \qquad (5.7)$$

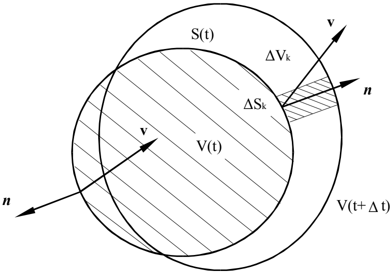
Дивергенция скорости при движении среды равна скорости относительного изменения объёма. В переводе термин дивергенция означает расхождение.

6. ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

6.1. Баланс массы индивидуального объёма в переменных Эйлера. Уравнение неразрывности

Индивидуальным объёмом называют часть среды, состоящую из одних и тех же частиц. В механике сплошных сред интерес представляет распределение плотности. Средняя плотность равна $\rho_{cp} = \Delta m / \Delta V$, а плотность ρ в точке среды определяется как предел этого отношения, когда ΔV стягивается в рассматриваемую точку: $\rho = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta V}$.

Тогда $\quad dm = \rho dV \quad \to \quad M = \int\limits_{V_{инд}(t)} \rho dV$.



Будем считать, что в пространстве имеются пространственно-распределённые источники массы плотности q . Тогда в объём dV за время dt из источников поступает масса $dm = qdVdt$. За конечный промежуток времени приращение массы будет равно

$$\Delta M = \int_t^{t+dt} \int\limits_{V_{инд}(t)} qdVdt$$

Рис.6.1.

и вся масса станет равной

$$M(t+\Delta t) = M(t) + \Delta M(\Delta t) \qquad \text{или}$$

$$\int\limits_{V_{инд}(t+\Delta t)} \rho(x, t+\Delta t) dV = \int\limits_{V_{инд}(t)} \rho(x,t) dV + \int_t^{t+dt} \int\limits_{V_{инд}(t)} qdVdt \qquad (6.1)$$

Равенство (6.1) представляет собой для конечного объёма и конечного промежутка времени закон баланса (сохранения, изменения) масс при наличии пространственно-распределённых источников. Для малого промежутка времени имеем

$$\int\limits_{V_{инд}(t+\Delta t)} \rho(x, t+\Delta t) dV = \int\limits_{V_{инд}(t)} \rho(x,t) dV + \Delta t \int\limits_{V_{инд}(t)} qdV .$$

Разделив это равенство на интервал времени Δt, в пределе при $\Delta t \to 0$ получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{инд}(t)}\rho dV=\int\limits_{V_{инд}(t)}qdV\ . \tag{6.2}$$

Для вычисления производной по времени в (6.2) весь объём $V_{инд}(t+\Delta t)-V_{инд}(t)$ разобьём на цилиндры $\Delta V_k=\Delta S_k(\mathbf{v}_k\cdot\mathbf{n}_k)\Delta t$, где $\mathbf{n}_k$ – нормаль к площадке ΔS_k поверхности, а интеграл представим как предел суммы произведений:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{инд}(t)}\rho dV=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\begin{array}{c}\int\limits_{V_{инд}(t+\Delta t)}\rho(x,t+\Delta t)dV-\int\limits_{V_{инд}(t+\Delta t)}\rho(x,t)dV+\\ +\int\limits_{V_{инд}(t+\Delta t)}\rho(x,t)dV-\int\limits_{V_{инд}(t)}\rho(x,t)dV\end{array}\right)\Bigg/\Delta t=$$

$$=\int\limits_{V_{инд}(t+\Delta t)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\rho(x,t+\Delta t)-\rho(x,t)}{\Delta t}dV+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{V_{инд}(t+\Delta t)-V_{инд}(t)}\rho(x,t)dV.$$

Первый интеграл равен $\int\limits_{V_{инд}(t)}\frac{\partial\rho(x,t+\Delta t)}{\partial t}dV$, а второй

$$\int\limits_{V_{инд}(t+\Delta t)-V_{инд}(t)}\rho(x,t)dV=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=\mathbf{1}}^{N}\rho(x_k,t)\Delta S_k(\mathbf{v}_k\cdot\mathbf{n}_k)\Delta t=\Delta t\int\limits_{S(t)}\rho(x,t)v_n dS\ .$$

Итак, формула дифференцирования по времени интеграла по подвижному объёму имеет вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{инд}(t)}\rho(x,t)dV=\int\limits_{V_{инд}(t)}\frac{\partial\rho(x,t+\Delta t)}{\partial t}dV+\int\limits_{S(t)}\rho(x,t)v_n dS \tag{6.3}$$

и является обобщением формулы дифференцирования интеграла с переменными пределами. Для вычисления производной (6.3) вообще требуется знание закона изменения индивидуального объёма.

Закон баланса масс конечного индивидуального объёма (6.2) принимает вид

$$\int\limits_V\frac{\partial\rho}{\partial t}dV+\int\limits_S\rho v_n dS=\int\limits_V qdV\ , \tag{6.4}$$

он справедлив для фиксированного момента времени.

Если имеем дело с фиксированным пространственным объёмом, то при $q=0$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V\rho dV=-\int\limits_S\rho v_n dS \tag{6.5}$$

скорость изменения массы в пространственном объёме равна притоку массы через границы объёма в единицу времени.

Поверхностный интеграл в (6.4) может быть преобразован в объёмный. По формуле Гаусса-Остроградского имеем

$$\int_S \rho v_n dS = \int_S \left[\rho v_x \cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_x) + \rho v_y \cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_y) + \rho v_z \cos(\mathbf{n},\mathbf{e}_z)\right] dS =$$

$$= \int_V \left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right) dV = \int_V \operatorname{div}(\rho\,\mathbf{v})\, dV.$$

Таким образом, для непрерывного движения закон (6.4) может быть записан в виде $$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\,\mathbf{v}) - q \right) dV = 0 .$$

В силу произвольности объёма и непрерывности подынтегрального выражения имеем ***уравнение неразрывности в эйлеровом описании***

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\,\mathbf{v}) = q \tag{6.6}$$

или $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot \operatorname{grad})\rho + \rho \operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\mathbf{v} = q \tag{6.7}$$

Запишем уравнение неразрывности для частных случаев при $q = 0$.

1. *Установившееся течение*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \qquad \operatorname{div}(\rho\,\mathbf{v}) = 0.$$

2. *Несжимаемая среда*:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0.$$

Несжимаемая среда – это идеализированная модель, широко используемая при описании движения жидкостей. Газ, обтекающий тело с небольшой скоростью также, можно считать несжимаемым: налетая на препятствие частицы газа, если это возможно, «предпочитают» разлететься в разные стороны, нежели сжаться.

3. *Плоскопараллельное* (*плоское*) *движение* описывается полем скоростей $v_x(x,y), v_y(x,y), v_z = 0$. Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} = 0$$

для установившегося движения и для несжимаемой жидкости соответственно принимают вид

$$\frac{\partial\rho v_x}{\partial x}+\frac{\partial\rho v_y}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0\,.$$

4. *Одномерное движение с плоской симметрией* определяется условием $v_x = v_y = 0,\quad \dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial y}=0$.

Уравнение неразрывности имеет вид $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial\rho v_z}{\partial z}=0$. Рассматривают также осевую, сферическую и др. симметрии.

6.2. Уравнение неразрывности в лагранжевых координатах

Будем исходить из интегральной записи (6.2) закона баланса масс. Переходя от переменных q^j $(j=1,2,3)$ к переменным ξ^k $(k=1,2,3)$, имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{инд}(t)}\rho(t,\xi)\frac{D(q)}{D(\xi)}d_\xi V=\int\limits_{V_{инд}(t)}q(\xi)\frac{D(q)}{D(\xi)}d_\xi V=0\,.$$

Индивидуальная производная в переменных Лагранжа вычисляется как частная производная:

$$\int\limits_{V_{инд}(t)}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(t,\xi)\frac{D(q)}{D(\xi)}\right]-q(\xi)\frac{D(q)}{D(\xi)}\right\}d_\xi V=0\,.$$

В силу произвольности объёма $\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\rho(t,\xi)\dfrac{D(q)}{D(\xi)}\right]-q(\xi)\dfrac{D(q)}{D(\xi)}=0\quad\to$

$$\to\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{D(q)}{D(\xi)}=q. \tag{6.8}$$

Если $\quad q=0$, то $\qquad \rho(t,\xi)\dfrac{D(q)}{D(\xi)}=\text{const}$. (6.9)

Для несжимаемой жидкости имеем $\dfrac{D(q)}{D(\xi)}=1$. Объём может деформироваться, но сохраняется по величине.

Умножая (6.9) на $d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$, получаем $\rho(t,\xi)dV=\text{const}$. Это равенство можно записать в виде производной по времени:

$$\frac{d}{dt}(\rho dV)=0\quad\to\quad\frac{d\rho}{dt}+\frac{\rho}{dV}\frac{d}{dt}dV=\frac{d\rho}{dt}+\rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0\,,$$

что совпадает с (6.7) при $q=0$.

Переход от эйлеровых (пространственных) координат к лагранжевым переменным можно реализовать непосредственно в (6.6). Имеем $\rho(t,\xi)$ и $\dfrac{d\rho}{dt}=\dfrac{\partial\rho(t,\xi)}{\partial t}$, а уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial\rho(t,\xi)}{\partial t}+\rho_0\,\mathrm{div}\mathbf{v}=0\,. \qquad (6.10)$$

Рассмотрим, что происходит с индивидуальной частицей при деформировании среды. Плотность и объём частицы в начальном состоянии суть $\rho_0,\ dV_0$, а в конечном (актуальном) состоянии $\rho,\ dV$.

Масса сохраняется $\qquad \rho_0 dV_0=\rho dV \quad\to\quad \dfrac{\rho_0}{\rho}=\dfrac{dV}{dV_0}=1+\theta$,

где

$$\theta=\frac{dV-dV_0}{dV_0}=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\mathrm{div}\mathbf{u}\ -$$

коэффициент относительного изменения объёма, $\mathbf{u}-$ вектор смещения. Если деформации малы $\quad \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3<1$, то

$$\rho=\frac{\rho_0}{1+\theta}=\rho_0\left(1-\theta\right)=\rho_0\left(1-\mathrm{div}\mathbf{u}\right)\quad\to\quad\rho-\rho_0=\frac{\partial\rho\left(t,\xi\right)}{\partial t}=-\rho_0\mathrm{div}\,\mathbf{v}$$

и уравнение (6.10) выполнено.

6.3. Баланс количества движения и момента количества движения

Для индивидуального объёма сплошной среды закон изменения количества движения аналогичен закону для системы материальных точек: ***скорость изменения количества движения индивидуального объёма сплошной среды равна сумме внешних сил, действующих на этот объём***

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{инд}}\mathbf{v}\rho\,dV=\int\limits_{V_{инд}}\mathbf{f}\rho\,dV+\int\limits_{S}\mathbf{p}_n dS\,.$$

(6.11)

Здесь $\mathbf{f},\mathbf{p}_n-$ плотности внешних массовых и поверхностных сил. По формуле (6.3) $\quad \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int\limits_{V_{инд}} f\rho\,dV=\int\limits_{V_{инд}}\frac{\partial\left(f\rho\right)}{\partial t}dV+\int\limits_{S} f\rho v_n dS$.

Преобразуя поверхностный интеграл в объёмный, получаем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{инд}} f\rho\, dV = \int\limits_{V}\left[\frac{\partial(f\rho)}{\partial t} + \mathrm{div}(f\rho\,\mathbf{v})\right]dV =$$

$$= \int\limits_{V}\left[\frac{\partial(f\rho)}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}) f\rho + f\rho\,\mathrm{div}\mathbf{v}\right]dV = \int\limits_{V}\left[\frac{d(f\rho)}{dt} + f\rho\,\mathrm{div}\mathbf{v}\right]dV.$$

Применим эту формулу к закону изменения количества движения индивидуального объёма (6.11):

$$\int_V\left[\frac{d(\mathbf{v}\rho)}{dt} + \mathbf{v}\rho\,\mathrm{div}\mathbf{v} - \rho\mathbf{f}\right]dV = \int_S \mathbf{p}_n dS\ .$$

Именно из этого выражения следует формула Коши (2.5) для тензора напряжений $\mathbf{p}_n = \mathbf{P}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{p}_k n_k$. Преобразуя поверхностный интеграл в объёмный, получаем

$$\int\limits_V\left(\frac{d(\mathbf{v}\rho)}{dt} + \mathbf{v}\rho\,\mathrm{div}\mathbf{v} - \rho\mathbf{f} - \nabla_k\mathbf{p}_k\right)dV = 0\,. \qquad (6.12)$$

Всюду, где выполняются условия непрерывности, имеем

$$\frac{d(\mathbf{v}\rho)}{dt} + \mathbf{v}\rho\,\mathrm{div}\mathbf{v} = \rho\mathbf{f} + \nabla_k\mathbf{p}_k \quad \to$$

$$\to \quad \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\rho + \rho\,\mathrm{div}\mathbf{v}\right) =$$

$$= \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\,\mathbf{v})\right) = \rho\mathbf{f} + \nabla_k\mathbf{p}_k$$

При наличии источников массы в силу (6.6) имеем закон движения

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}q = \rho\mathbf{f} + \nabla_k\mathbf{p}_k \qquad (6.13)$$

Для материальной точки закон изменения момента количества движения есть следствие закона изменения количества движения. Для индивидуального объёма сплошной среды это не так. Он рассматривается как ***независимый постулат***, обобщающий опытные факты: ***скорость изменения момента количества движения индивидуального объёма равна сумме моментов внешних сил и пар.***

Момент количества движения малой частицы среды по определению равен $\rho(\mathbf{r}\times\mathbf{v})dV + \rho\mathbf{k}dV$, где $\mathbf{k}$ – плотность орбитального и собственного момента количества движения.

Математическая формулировка баланса момента количества движения индивидуального объёма сплошной среды имеет вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{инд}} \rho\left[(\mathbf{r}\times\mathbf{v})+\mathbf{k}\right]dV=\int\limits_{V_{инд}} \rho\left[(\mathbf{r}\times\mathbf{f})+\mathbf{m}\right]dV+\int\limits_{S}\left[(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_n)+\mathbf{m}_n\right]dS. \qquad (6.14)$$

Здесь $\mathbf{f}, \mathbf{p}_n$ – плотности внешних массовых и поверхностных сил; $\mathbf{m}, \mathbf{m}_n$ – плотности внешних массовых и поверхностных пар. Для непрерывных движений из этого интегрального закона выводится формула Коши для тензора моментов $\mathbf{M}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{m}_n=\mathbf{m}_k n_k$ и дифференциальное уравнение баланса момента количества движения.

Левая часть равенства преобразуется к виду

$$\int\limits_V\left[\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\rho\mathbf{v}+\rho\mathbf{k})+(\mathbf{r}\times\rho\mathbf{v}+\rho\mathbf{k})\operatorname{div}\mathbf{v}\right]dV=$$

$$=\int\limits_V\left[\rho\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}+\mathbf{k})+(\mathbf{r}\times\mathbf{v}+\mathbf{k})\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}\mathbf{v}\right)\right]dV \cdot$$

Поверхностный интеграл в правой части закона преобразуем в объёмный. В результате, учитывая (6.6), получим

$$\int\limits_V\left[\rho\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}+\mathbf{k})+(\mathbf{r}\times\mathbf{v}+\mathbf{k})q-\rho(\mathbf{r}\times\mathbf{f}+\mathbf{m})-\nabla_k(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_k+\mathbf{m}_k)\right]dV=0,$$

и в силу произвольности объёма

$$\rho\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}+\mathbf{k})+(\mathbf{r}\times\mathbf{v}+\mathbf{k})q=\rho(\mathbf{r}\times\mathbf{f}+\mathbf{m})+\nabla_k(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_k+\mathbf{m}_k). \qquad (6.15)$$

Вычитая уравнение (6.13) записанное в виде

$$\rho\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v})+q(\mathbf{r}\times\mathbf{v})=\rho(\mathbf{r}\times\mathbf{f})+\mathbf{r}\times\nabla_k\mathbf{p}_k,$$

из (6.15), получаем уравнение баланса собственного момента количества движения

$$\rho\frac{d\mathbf{k}}{dt}+\mathbf{k}q=\rho\mathbf{m}+\mathbf{e}_k\times\mathbf{p}_k+\nabla_k\mathbf{m}_k. \qquad (6.16)$$

В (6.16) учтено, что $\nabla_k(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_k)-\mathbf{r}\times\nabla_k\mathbf{p}_k=\mathbf{e}_k\times\mathbf{p}_k$.

Во многих случаях $\mathbf{k}=0$, $\mathbf{m}=0$, $\mathbf{m}_k=0$ и уравнение баланса собственного момента количества движения (6.16) эквивалентно условию

$$\mathbf{e}_k\times\mathbf{p}_s=\mathbf{e}_k\times\mathbf{e}_s p^{sk}=0 \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad \mathbf{e}_1\left(p^{23}-p^{32}\right)+\mathbf{e}_2\left(p^{31}-p^{13}\right)+\mathbf{e}_3\left(p^{12}-p^{21}\right)=0.$$

Таким образом, выполнение баланса момента количества движения сводится к утверждению ***тензор напряжений симметричен***.

6.4. Теорема живых сил

Теоремой живых сил называют соотношение, описывающее изменение кинетической энергии системы. Лейбниц величину $mv^2/2$ называл живой силой. Для системы точечных масс имеем

$$d\sum_\sigma \frac{m_\sigma v_\sigma{}^2}{2} = \sum_\sigma \left(\mathbf{F}_\sigma{}^{(e)} \cdot \mathbf{v}_\sigma dt\right) + \sum_\sigma \left(\mathbf{F}_\sigma{}^{(i)} \cdot \mathbf{v}_\sigma dt\right) \quad \to$$

$$\to \quad dE_{кин.} = dA^{(e)} + dA^{(i)},$$

где $\mathbf{F}_\sigma{}^{(e)}$ – главный вектор внешних сил, действующих на массу m_σ, $\mathbf{F}_\sigma{}^{(i)}$ – внутренняя сила, главный вектор всех сил, действующих на массу m_σ со стороны других масс.

Из закона количества движения (6.13) при $q = 0$ получаем дифференциальную форму теоремы живых сил для сплошной среды

$$\left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla_k \mathbf{p}_k\right) \cdot \mathbf{v} dt \quad \to$$

$$\to \quad \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) dt = \rho\left(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\right) dt + \left(\mathbf{v} \cdot \nabla_k \mathbf{p}_k\right) dt \quad \to$$

$$\to \quad \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) dt = \rho\left(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dt\right) + \nabla_k \left(\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{v}\right) dt - \left(\mathbf{p}_k \cdot \nabla_k \mathbf{v}\right) dt.$$

В интегральной форме имеем

$$\int_V \rho d\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) dV = \int_V \rho\left(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\right) dV dt + \int_V \nabla_k \left(\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{v}\right) dt dV - \int_V \left(\mathbf{p}_k \cdot \nabla_k \mathbf{v}\right) dt dV .$$

Объём будем считать индивидуальным, тогда

$$d\int_{V_{инд.}} \rho\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) dV = \int_{V_{инд.}} \rho\left(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\right) dV dt + \int_S \left(\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v}\right) dt dS - \int_{V_{инд.}} \left(\mathbf{p}_k \cdot \nabla_k \mathbf{v}\right) dt dV .$$

В правой части этого равенства первые два интеграла есть работа внешних соответственно массовых и поверхностных сил, а третий интеграл – работа внутренних сил. Плотность работы внутренних сил, работа, отнесённая к единице массы равна $\dfrac{dA^{(i)}}{dm} = -\dfrac{1}{\rho}\left(\mathbf{p}_k \cdot \nabla_k \mathbf{v}\right) dt$

Итак, $$dE_{кин.} = dA^{(e)}_{масс.} + dA^{(e)}_{пов.} + dA^{(i)}, \qquad (6.17)$$

изменение кинетической энергии индивидуального объёма сплошной среды равно сумме работ внешних и внутренних сил (массовых и поверхностных).

6.5. Баланс энергии

Закон сохранения энергии является фундаментальным физическим законом. Для его формулировки необходимо установить, из каких видов складывается полная энергия среды, определить виды притоков энергии извне и учесть превращения энергии из одного вида в другой.

Любое состояние среды определяется набором параметров (давлением, температурой и пр.). Переход среды из одного состояния в другое связан с изменением внутренней энергии. Естественно, ввести отнесённую к единице массы внутреннюю удельную энергию $E_{внутр.} = \lim\limits_{V \to 0} \dfrac{\varepsilon}{M}$, тогда внутренняя энергия массы в индивидуальном объёме V равна $\varepsilon = \int_V \rho E_{внутр.} dV$.

Обычно общая физика даёт зависимость внутренней удельной энергии $E_{внутр.}$ от параметров среды. Если в состоянии термодинамического равновесия состояние газа описывается уравнением Клапейрона (*Clapeyron* 1799–1864) , а его внутренняя энергия зависит только от температуры и определяется выражением $E_{внутр.} = \int_{T_0}^{T} c_V dT$, где c_V – теплоёмкость при постоянном объёме, то в общей физике такой газ называют идеальным, а в механике сплошных сред совершенным (perfect gas) поскольку термин идеальный занят для обозначения отсутствия трения. Совершенный газ может быть как идеальным, так и вязким.

Когда нет процессов диссоциации или ионизации, внутренняя энергия состоит из энергии поступательного, вращательного и колебательного движений молекул. Для одноатомного газа $c_V = \text{const}$ и $E_{внутр.} = (3/2) RT$. Для двухатомного газа в определённом диапазоне температур $E_{внутр.} = (5/2) RT$ и т. д.

Кинетическая энергия массы, заключённой в индивидуальном объёме, есть кинетическая энергия упорядоченного поступательного движения частиц $E_{кин.} = \int_V \left(\rho v^2/2\right) dV$.

Закон баланса энергии – первый закон термодинамики – запишем в виде

$$U_{t_0} - U_{t_1} = E_{кин.} + \varepsilon = A_V + A_S + Q_V + Q_S . \qquad (6.18)$$

Для всякой системы можно ввести некоторую функцию её состояния U, называемую полной энергией. Изменение полной энергии в любом процессе может происходить только за счёт притоков энергии извне в различных формах (***в виде работы внешних сил, притока тепла и притока энергии в других формах***).

В (6.18) в соответствии с определением полной энергии

$$U_{t_1} - U_{t_0} = \int\limits_V \rho\left(\frac{v^2}{2} + E_{внутр.}\right)dV\Bigg|_{t_1} - \int\limits_V \rho\left(\frac{v^2}{2} + E_{внутр.}\right)dV\Bigg|_{t_0};$$

$A_V = \int_{t_0}^{t_1}\int_V \rho(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v})\,dV\,dt$ – работа объёмных сил;

$A_S = \int_{t_0}^{t_1}\int_S (\mathbf{p}_n\cdot\mathbf{v})\,dS\,dt$ – работа поверхностных сил;

$Q_V = \int_{t_0}^{t_1}\int_V \frac{dq_{объёмн.}}{dt}\,dV\,dt$ – объёмное поглощение (выделение) энергии;

$Q_S = \int_{t_0}^{t_1}\int_S (\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})\,dS\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_S q_{пов.}\,dS\,dt$ – приток (отток) тепла через поверхность.

Разделим обе части равенства на $\Delta t = t_1 - t_0$ и, устремив Δt к нулю, получим ещё одну запись баланса энергии:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho\left(\frac{v^2}{2} + E_{внутр.}\right)dV = \\ = \int_V \left[\rho(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}) + \frac{dq_{объёмн.}}{dt}\right]dV + \int_S \left[(\mathbf{p}_n\cdot\mathbf{v}) + (\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})\right]dS \tag{6.19}$$

Преобразуем левую часть равенства (6.19) полагая, что источников массы нет, то есть $\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\mathbf{v} = 0$: $\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\left(\frac{v^2}{2} + E_{внутр.}\right)dV =$

$$= \int\limits_V \left\{\frac{d}{dt}\left[\rho\left(\frac{v^2}{2} + E_{внутр.}\right)\right] + \rho\left(\frac{v^2}{2} + E_{внутр.}\right)\mathrm{div}\mathbf{v}\right\}dV =$$

$$= \int\limits_V \left[\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\mathbf{v}\right)\left(\frac{v^2}{2} + E_{внутр.}\right) + \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + E_{внутр.}\right)\right]dV =$$

$$= \int\limits_V \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + E_{внутр.}\right)dV.$$

Далее в (6.19) работу поверхностных сил представим объёмным интегралом $\int_S (\mathbf{p}_n\cdot\mathbf{v})dS = \int_V \nabla_k(\mathbf{p}_k\cdot\mathbf{v})dV$.

Теперь (6.19) можем записать в виде

$$\int_V \left[\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + E_{внутр.}\right) - \rho(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}) - \frac{dq_{объёмн.}}{dt} - \nabla_k(\mathbf{p}_k\cdot\mathbf{v})\right]dV = \int_S (\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})\,dS$$

Левую часть равенства можно упростить. Умножим скалярно обе части равенства (6.13) на скорость $\mathbf{v}$:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}=\rho\frac{d}{dt}\frac{v^2}{2}=\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}+\left(\nabla_k\mathbf{p}_k\right)\cdot\mathbf{v}$$

С учётом этого равенства закон баланса энергии можем представить в виде

$$\int_V\left[\rho\frac{dE_{внутр.}}{dt}-\frac{dq_{объёмн.}}{dt}+\left(\nabla_k\mathbf{p}_k\right)\cdot\mathbf{v}-\nabla_k\left(\mathbf{p}_k\cdot\mathbf{v}\right)\right]dV=$$

$$=\int_V\left[\rho\frac{dE_{внутр.}}{dt}-\frac{dq_{объёмн.}}{dt}-\left(\mathbf{p}_k\cdot\nabla_k\mathbf{v}\right)\right]dV=\int_S\left(\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\right)dS \qquad (6.20)$$

Применяя равенство (6.20) к бесконечно малому тетраэдру с высотой $h\to 0$ получаем

$$\frac{1}{3}Sh\left[\rho\frac{dE_{внутр.}}{dt}-\frac{dq_{объёмн.}}{dt}-\left(\mathbf{p}_k\cdot\nabla_k\mathbf{v}\right)\right]=$$

$$=Sq_n+S_xq_{-x}+S_yq_{-y}+S_zq_{-z}=0$$

В этой записи принято q_n – есть поток на площадке с нормалью n внутрь объёма, а q_{-n} – поток наружу. Таким образом, имеем представление вектора потока энергии $\mathbf{q}$:

$$q_n=\cos\left(\mathbf{n},\mathbf{e}_x\right)q_x+\cos\left(\mathbf{n},\mathbf{e}_y\right)q_y+\cos\left(\mathbf{n},\mathbf{e}_z\right)q_z\,.$$

Интеграл по поверхности в (6.20) можно преобразовать в объёмный: $\int_S\left(\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\right)dS=-\int_V \operatorname{div}\mathbf{q}\,dV$ и записать закон баланса энергии в дифференциальной форме

$$\rho\frac{dE_{внутр.}}{dt}=\frac{dq_{объёмн.}}{dt}+\left(\mathbf{p}_k\cdot\nabla_k\mathbf{v}\right)-\operatorname{div}\mathbf{q} \qquad (6.21)$$

Это есть закон изменения ***внутренней*** энергии. Он выведен из интегральной формы (6.19) баланса энергии для ***индивидуального объёма***.

Приведём формулировку баланса энергии для ограниченного поверхностью S ***пространственного объёма*** V, через который движется среда. Поскольку

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{инд.}}\rho\left(\frac{v^2}{2}+E_{внутр.}\right)dV=$$

$$=\frac{d}{dt}\int\limits_V\rho\left(\frac{v^2}{2}+E_{внутр.}\right)dV+\int\limits_S\rho\left(\frac{v^2}{2}+E_{внутр.}\right)v_n dS$$

из (6.16) имеем

$$\frac{dU}{dt}=\frac{d}{dt}\int\rho\left(\frac{v^2}{2}+E_{внутр.}\right)dV=-\int_S\rho\left(\frac{v^2}{2}+E_{внутр.}\right)v_n dS+$$
$$+\int_V\rho\left[\left(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\right)+\frac{dq_{объёмн.}}{dt}\right]dV+\int_S\left[\left(\mathbf{p}_n\cdot\mathbf{v}\right)+\left(\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\right)\right]dS. \qquad (6.22)$$

Скорость изменения полной энергии в неподвижном пространственном объёме равна сумме энергии среды, поступающей в него через границу, работе внешних сил, притоку тепла и энергии в других формах.

Преобразуя поверхностные интегралы в объёмные

$$\frac{d}{dt}\int_{V_{инд.}}\rho\left(\frac{v^2}{2}+E_{внутр.}\right)dV=\int_V\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}+E_{внутр.}\right)dV=$$
$$=\int_V\rho\left[\left(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\right)+\frac{dq_{объёмн.}}{dt}\right]dV+\int_V\left[div\left(\mathbf{P}\cdot\mathbf{v}\right)-div\,\mathbf{q}\right]dV,$$

получаем дифференциальную форму этого закона:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}+E_{внутр.}\right)=\rho\left(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\right)+\rho\frac{dq_{объёмн.}}{dt}+div\left(\mathbf{P}\cdot\mathbf{v}\right)-div\,\mathbf{q} \qquad (6.23)$$

Как показывает опыт, для многих сред выполняется закон теплопроводности Фурье: $\mathbf{q}=-\boldsymbol{\kappa}\cdot grad\,T$, где $\boldsymbol{\kappa}-$ тензор второго ранга, $T-$температура. Для изотропных сред $\mathbf{q}=-\kappa\,grad\,T$.

Для покоящихся сред при условии $dq_{объёмн.}/dt=0$ из (6.23) имеем $\mu\,dE_{внутр.}=div\,\mathbf{q}\,dt$. Обычно внутренняя энергия определяется кинетической энергией хаотического движения молекул и потенциальной энергией их взаимодействия. Для деформируемых тел $E_{внутр.}\left(T,\varepsilon^{ij}\right)$. Для покоящейся среды компоненты тензора деформаций постоянны $\varepsilon^{ij}=const$ и $dE_{внутр.}=\frac{\partial E_{внутр.}}{\partial T}dT=c_\varepsilon dT$.

С другой стороны, увеличение внутренней энергии равно притоку тепла: $\rho\,dE_{внутр.}=\rho\,c_\varepsilon dT=-div\,\mathbf{q}\,dt=\kappa\,div\,grad\,T\,dt$.

Итак, получили уравнение теплопроводности для изотропной покоящейся среды: $\frac{dT}{dt}=\frac{\kappa}{\rho\,c_\varepsilon}div\,grad\,T$.